الاستلزام الدقيق ومضادات الواقع

Strict implication and Counterfactuals

1.4 الاستلزام الدقيق:

1.1.4 مفارقات الاستلزام المادي:

لقد درسنا في المنطق التقليدي الاستلزام المادي الذي رمزنا له بواسطة $\rightarrow$ لترجمة الرابط باللغة العربية (إذا كان... فإن...) إلى اللغة الرمزية لحساب القضايا. وهكذا عالجنا الصيغة $\alpha\rightarrow\beta$ باستخدام دوال الصدق، وحيث إنها صادقة عندما يكون مقدمها α كاذبا أو تاليها β صادقا. ولكن هذه المعالجة تؤدي إلى ما يسمى مفارقات الاستلزام المادي[٢٠]، مثل:

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
2. $\urcorner P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

المفارقة الأولى تنص: إذا كانت قضية صادقة، فإن أي قضية أخرى تستلزمها.

المفارقة الثانية تنص: إذا كانت القضية كاذبة، فإنها تستلزم أي قضية أخرى.

المثالان التاليان يناقشان المفارقتين الأولى والثانية.

مثال 1:

عاش أفلاطون حتى سن الرجولة.

إذاً، إذا كان أفلاطون مات طفلاً، فإنه عاش حتى سن الرجولة.

هذه الحجة صحيحة بالنسبة إلى الاستلزام المادي. ولكن مقدمة هذه الحجة صادقة والنتيجة كاذبة في العالم الواقعي.

مثال 2:

لم يمت أفلاطون وهو طفل.

إذاً، إذا كان أفلاطون مات وهو طفل، فإنه عاش حتى سن الرجولة.

20- paradoxes material.

ما قلناه على الحجة في المثال 1 ينطبق على الحجة في المثال 2 أيضاً.

لقد أدى هذا بالعالم الأمريكي ك. لويس، منذ بداية 1912 للتمييز بين الاستلزام الصادق مادياً والصادق ضرورياً أو بدقة[٢١]. لقد استخدم لويس رمزاً مشابهاً إلى الرمز ➤ للتعبير عن الاستلزام الدقيق. وهكذا، فإن Q ➤ P يعني عنده أنه من المستحيل أن تكون P صادقة من دون أن تكون Q صادقة أيضاً. وللتعبير عن أنه من المستحيل أن تكون P صادقة من دون أن تكون Q صادقة أيضاً، نقول:

من الضروري إذا كانت P صادقة فإن Q تكون صادقة أيضاً، ورمزياً نكتب:

.$L\,(P \to Q)$

يمكننا إعطاء التعريف التالي:

α ➤ $\beta \equiv$ تع $L(\alpha \to \beta)$

أو أن نعرف ➤ بواسطة M كالتالي:

α ➤ $\beta \equiv$ تع $\neg M \neg (\alpha \to \beta)$

أو أن

α ➤ $\beta \equiv$ تع $\neg M (\alpha \wedge \neg \beta)$

عندما تستلزم بدقة صيغتان كل منهما الأخرى، فإننا نقول، إن كلاً منهما تستلزم ثنائياً بدقة الأخرى. ونستطيع إعطاء التعريف التالي:

α ◄► $\beta \equiv$ تع (α ➤ β) Λ (β ➤ α)

باستخدام العوالم الممكنة، نستطيع كتابة تعريف صدق الاستلزام الدقيق في نموذج كريبكة كالتالي:

1. V (α ➤ β, w) = 1

إذا وفقط إذا كان من أجل جميع العوالم u حيث wRu، $V(\beta, u) = 1$ و$V(\alpha, u) = 1$.

2. V (α ➤ β, w) = 0

إذا وفقط إذا وجد عالم u حيث wRu، $V(\beta, u) = 0$ و$V(\alpha, u) = 1$.

وبالعودة إلى المفارقة الأولى $(Q \to P) \to P$، فإنه باستخدام ➤ عوضاً عن $\to$، نحصل على نتيجة معقولة، وهي أن كلاً من الحجتين أعلاه خاطئة. وقبل أن نبرهن أن الحجة الأولى:

P

إذاً Q ➤ P

خاطئة ولتسهيل مناقشة الحجة نضع P: عاش أفلاطون حتى سن الرجولة.

Q: مات أفلاطون طفل.

21- strictly.

وأفلاطون، طبعاً عاش حتى سن الرجولة وكان من الممكن أن يموت طفلاً ولا ينمو حتى يصبح رجلاً.

ومن أجل إعطاء مثال مضاد، فمن الواضح أننا نحتاج إلى عالمين: الأول w_1 يمثل العالم الواقعي، الذي عاش فيه أفلاطون حتى سن الرجولة. الثاني w_2 العالم الممكن، الذي مات فيه أفلاطون طفلاً.

مبرهنة 1:

صورة الحجة:

المقدمات: P

النتيجة: $Q \blacktriangleright P$

خاطئة في نموذج الاستلزام الدقيق.

البرهان:

سنبرهن خطأ صورة الحجة، وذلك بإعطاء مثال مضاد.

لتكن مجموعة العوالم الممكنة:

$$W = \{w_1, w_2\}$$

وعلاقة الموصولية:

$$R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2)\}$$

أما دالة التقويم V فهي:

$$V(Q, w_1) = 0, V(P, w_1) = 1$$
$$V(Q, w_2) = 1, V(P, w_2) = 0$$

بما أن $w_1 R w_2$، $V(P, w_2) = 0$ و $V(Q, w_2) = 1$ أصبح لدينا:

$V(Q \blacktriangleright P, w_1) = 0$. وبما أن $V(P, w_1) = 1$ فإذاً، صورة الحجة خاطئة، لأن مقدمتها P في w_1 صادقة بينما $Q \blacktriangleright P$ كاذبة في w_1.

بالعودة إلى المفارقة الثانية التي صورة حجتها الصحيحة:

$\neg Q$

إذاً $Q \rightarrow P$

نستطيع الآن برهان أن صورة الحجة بالاستلزام الدقيق:

$\neg Q$

إذاً $Q \blacktriangleright P$

خاطئة، وذلك بأخذ المثال المضاد أعلاه نفسه، ففي العالم الواقعي لم يمت أفلاطون طفلاً، وهذا يجعل $\neg Q$ صادقة، لكن بما أنه من الممكن (بالنسبة للعالم الواقعي) أنه مات طفلاً ولم ينمُ أبداً حتى سن الرجولة فإن $Q \blacktriangleright P$ كاذبة.

2.1.4 أشجار صدق الاستلزام الدقيق:

يمكننا دراسة دلالة الاستلزام الدقيق بواسطة أشجار الصدق، وهذا ما سنفعله في هذه الفقرة.

نحن، هنا، لا نحتاج إلى قواعد اشتقاق جديدة، لأنه يمكننا الاستعاضة عن رابطي: الاستلزام الدقيق والاستلزام الثنائي الدقيق بواسطة تعريفيهما:

$\alpha \blacktriangleright \beta \equiv$ تع $L(\alpha \to \beta)$

$\alpha \blacktriangleleft\blacktriangleright \beta \equiv$ تع $L(\alpha \leftrightarrow \beta)$

وهكذا فإذا كانت الصيغة $\alpha \blacktriangleright \beta$ صادقة، فإننا نستنتج أن $\alpha \to \beta$ صادقة.

وهكذا، فإن قاعدة الاشتقاق $\blacktriangleright$ هي قاعدة الاشتقاق نفسها $\to$ التي مرت بنا.

1. قاعدة الاستلزام الدقيق $\blacktriangleright$

حيث t أي عالم.

هذه القاعدة تسمح لنا ببرهان أنه من الاستلزام الدقيق ينتج الاستلزام المادي.

مثال 1:

$$P \blacktriangleright Q \vdash P \to Q$$

1 $P \blacktriangleright Q, 0$

2 $0R1$

3 $\urcorner (P \to Q), 0$

4 $P, 0$

5 $\urcorner Q, 0$

6 $\urcorner P, 0$ $\quad$ $Q, 0$

7 x $\quad$ x

الخطان (الصيغتان) 4 و 5 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\urcorner\to$. الخط 6 اشتق من 1 بتطبيق القاعدة $\blacktriangleright$.

2. قاعدة نفي الاستلزام الدقيق $\urcorner\blacktriangleright$

$\urcorner(\alpha \blacktriangleright \beta), w$

wRt

α, t

$\alpha \blacktriangleright \beta \quad w$

wRt

$\urcorner\alpha \ t \quad \beta \ t$

$\neg\beta, t$

حيث t يجب أن يكون عالماً جديداً.

مثال 2:

$\alpha \blacktriangleright \beta \quad w$

wRt

$\neg\alpha \ t \qquad \beta \ t$

سنبرهن أن الصيغة $(P \wedge Q) \blacktriangleright Q$ صحيحة.

1	$\neg((P \wedge Q) \blacktriangleright Q)), 0$
2	$0R1$
3	$(P \wedge Q),1$
4	$\neg Q,1$
5	$P ,1$
6	$Q,1$
7	x

الخطان 3 و 4 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة$\blacktriangleright$ ⌉. الخطان 5 و 6 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\wedge$. الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

سنأتي الآن على قاعدة اشتقاق الاستلزام الثنائي. فإذا كان $\alpha \blacktriangleleft \beta$ صادقة فإن $\alpha \leftrightarrow \beta$ تكون صادقة أيضاً. وهكذا، فإن قاعدة الاستلزام الثنائي الدقيق تماثل قاعدة الاستلزام الثنائي.

3. قاعدة الاستلزام الثنائي الدقيق $\blacktriangleleft\!\blacktriangleright$

حيث t أي عالم.

باستخدام هذه القاعدة، يمكننا برهان أن الاشتقاق التالي صحيح:

مثال 3:

1	$P \blacktriangleleft\!\blacktriangleright Q, 0$			
2	$0R1$			
3	$\neg(P \leftrightarrow Q),0$			
4	$P,0$		$\neg P,0$	
5	$\neg Q,0$		$Q,0$	
6	$P,0$	$\neg P,0$	$P,0$	$\neg P,0$
7	$Q,0$	$\neg Q,0$	$Q,0$	$\neg Q,0$
8	x	x	x	x

الخطـان (الصيغتان) 4 و 5 اشتقا من 3 بتطبيق قاعدة $\neg\leftrightarrow$. الخطـان 6 و 7 اشتقا من 1 بتطبيق قاعدة $\blacktriangleleft\!\blacktriangleright$. فالشجرة مغلقة والاشتقاق صحيح.

إذا ظهرت صيغة الاستلزام الثنائي الدقيق منفية، فإننا نفترض أنها كاذبة. ونعلم أن $\alpha\blacktriangleleft\!\blacktriangleright\beta$ تكون كاذبة فقط، إذا كانت α وβ مختلفتين في قيم الصدق في عالم ممكن. إذاً يوجد عالم تكون فيه α صادقة وβ كاذبة، أو β صادقة وα كاذبة.

الآن نستطيع إعطاء القاعدة التالية:

4. قاعدة نفي الاستلزام الثنائي الدقيق $\neg\blacktriangleleft\!\blacktriangleright$

حيث t يجب أن يكون عالم جديد.

مثال 4:

الصيغة $(\neg P \to Q) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (P \vee Q)$ صحيحة.

1	$\neg((P\vee Q) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (\neg P \to Q)),0$			
2	$0R1$			
3	$(P\vee Q),1$		$\neg(P \vee Q),1$	
4	$\neg(\neg P \to Q),1$		$(\neg P \to Q),1$	
5	$\neg P,1$		$\neg P,1$	
6	$\neg Q,1$		$\neg Q,1$	
7	$P,1$	$Q,1$	$\neg\neg P,1$	$Q,1$
8	x	x	P	x
9			x	

الخطـان 3 و 4 اشتقا من 1 بتطبيـق القاعدة $\neg\blacktriangleleft\!\blacktriangleright$. بالنسبة للفرع الأيسر: الخطان 5 و6 اشتقا من 4 بتطبيق قاعدة $\neg\to$. الخط 7 اشتق من 3 بتطبيق القاعدة $\vee$. بالنسبة للفرع الأيمن: الخطان 5 و6 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\neg\vee$. الخط 7 اشتق من 4 بتطبيق القاعدة $\to$. الخط 8 اشتق من 7 بتطبيق القاعدة $\neg\neg$. الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

$\alpha \blacktriangleleft\!\blacktriangleright \beta$			w
wRt			
α t		$\neg\alpha$ t	
β t		$\neg\beta$ t	

3.1.4 نسق الاستلزام الدقيق:

إن مبرهنات نسق الاستلزام الدقيق هي استمرار لمبرهنات النسق K، التي مرت بنا ولذلك سنستمر بالترقيم نفسه.

	$(\neg P \blacktriangleright P) \leftrightarrow LP$	مبرهنة K_{10}
		البرهان
1.	$(\neg P\ 0\rightarrow P) \leftrightarrow P$	حق
2.	$L(\neg P \rightarrow P) \leftrightarrow LP$	قع$_2$,1
3.	$(\neg P \blacktriangleright P) \leftrightarrow LP$	تعريف $\blacktriangleright$,2

	$(P \blacktriangleright \neg P) \leftrightarrow L\neg P$	مبرهنة K_{11}
1.	$(P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P$	حق
2.	$L(P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow L\neg P$	قع$_2$,1
3.	$(P \blacktriangleright \neg P) \leftrightarrow L\neg P$	تعريف $\blacktriangleright$,2

	$((Q \blacktriangleright P) \wedge (\neg Q \blacktriangleright P)) \leftrightarrow LP$	مبرهنة K_{12}
1.	$((Q \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow \neg P) \leftrightarrow P$	حق
2.	$L((Q \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow \neg p)) \rightarrow LP$	قع$_2$,1
3.	$(L(Q \rightarrow P) \wedge L(\neg Q \rightarrow P)) \leftrightarrow LP$	2, K_3مبرهنة, $(Q \rightarrow P/P)$ استبدال $(\neg Q \rightarrow P/Q)$
4.	$((Q \blacktriangleright P) \wedge (\neg Q \blacktriangleright P)) \leftrightarrow LP$	تعريف $\blacktriangleright$,3

$((P \blacktriangleright Q) \wedge (P \blacktriangleright \neg Q)) \leftrightarrow L\neg P$	مبرهنة K_{13}

البرهان يشابه برهان المبرهنة K_{10}.

المبرهنات K_{10} - K_{13} تعكس حقائق مهمة. فالمبرهنة K_{10} تنص على أن القضية الضرورية تكون مستلزمة بدقة من قبل نفيها. أما K_{11} تنص على أن القضية المستحيلة هي القضية التي تستلزم بدقة نفيها. المبرهنة K_{12} تنص على أن القضية الضرورية هي القضية التي تكون مستلزمة بدقة بواسطة قضية أخرى وبواسطة نفي تلك القضية الأخرى. المبرهنة K_{13} تنص على أن القضية المستحيلة هي القضية التي تستلزم بدقة قضية أخرى وتستلزم بدقة نفي القضية الأخرى.

2.4 مضادات الواقع:

لقد كان منطق القضايا الشرطية (الاستلزامات) حافزاً رئيساً لتطوير منطق الجهة. ولقد قمنا بدراسة الاستلزام المادي الذي يمثل دالة صدق والاستلزام الدقيق

الذي لا يمثل دالة صدق، وكلاهما يعجزان عن تفسير صنف معين من الاستلزامات، التي تسمى استلزامات مضادات الواقع، أو اختصاراً تسمى مضادات الواقع، وذلك لأن المقدم فيها كاذب، أي لا يتوافق مع الواقع. يمكن كتابة مضادات الواقع على الشكل (لو أن α لكانت β) أو على الشكل: إذا كانت α فإن β، وليحمل معنى الشكل الأول نفسه وسنتبنى الشكل الأخير. وبما أن، المقدم هنا يتضمن معنى التمني، فلذلك تسمى مضادات الواقع أيضاً، استلزامات التمني[٢٢].

أمثلة:

(1) لو أن الرسام فان كوخ عاش حتى سن 70 عاماً، لكان قد رسم ضعف ما أنتجه.

أو:

إذا كان الرسام فان كوخ عاش حتى سن 70 عاماً، فإنه قد رسم ضعف ما أنتجه.

(2) لو أن الغلاف الجوي خالياً من الأوكسجين، لكانت الحياة مستحيلة.

أو:

إذا كان الغلاف الجوي خالياً من الأوكسجين، فإن الحياة مستحيلة.

(3) لو كان لدي زورق لذهبت حول العالم. (ولكن ليس لدي زورق).

(4) لو كنت رئيساً للوزراء الآن لحسّنت بلدي. (ولكني لست رئيساً للوزراء).

(5) لو تكلم الأستاذ ببطء أكثر الآن لفهمنا. (ولكنه لا يتكلم ببطء).

لا يمثل الاستلزام المادي والاستلزام الدقيق، بناءً منطقياً للقضيتين أعلاه، فحسب جدول صدق الأول، فإن الاستلزام يكون صادقاً إذا كان المقدم كاذباً. وهكذا، وبما أن مقدم مضادات الواقع يكون كاذباً، فإنها تكون صادقة. ولكننا نستطيع رؤية أن مضادات الواقع لا تكون، آلياً، صادقة عندما تكون مقدماتها بالفعل مناقضة إلى الحقيقة، ولنأخذ المثال التالي:

(1′) إذا كان الرسام فان كوخ عاش حتى سن 70 عاماً، فإنه أصبح ملكة بريطانيا.

22- subjunctive.

بما أن المقدم كاذب، فإن القضية الشرطية ($1'$) تكون صادقة، عندما يكون الرابط (إذا كان... فإن...) في ($1'$) يعبر عن استلزم دالة صدق (أي استلزام مادي) وهكذا تكون القضية (1) صادقة، ولكن هذا خطأ واضح. إن القضية (1) معقولة أكثر من القضية ($1'$). وهكذا، فإن مضادات الواقع ليست نوعاً من استلزامات دالة الصدق، ويصبح من الخطأ التعبير عنها بواسطة $\alpha \rightarrow \beta$.

من جهة أخرى، نستطيع رؤية أن مضادات الواقع ليست استلزامات دقيقة، وسنوضح هذا أدناه:

نحن نعلم أن خاصية التعدي تصح بالنسبة إلى الاستلزام الدقيق، أي أن:

$$P \blacktriangleright Q,\ Q \blacktriangleright R \vdash P \blacktriangleright R$$

ولكن هذه الخاصية نفسها لا تصلح بالنسبة إلى مضادات الواقع.

لنأخذ الحجة التالية:

إذا كانت الأميرة ديانا ماتت وهي في بداية شبابها، فإنها لم تكن قد قتلت.

إذا لم تكن الأميرة ديانا قد قتلت، فإنها من المحتمل أن تكون حية الآن.

إذاً، إذا كانت الأميرة ديانا ماتت وهي في بداية شبابها، فإنها من المحتمل أن تكون حية الآن.

هذه الحجة خاطئة، وهذا يبين أن مضادات الواقع ليست هي الاستلزامات الدقيقة.

وبالتالي فلا يمكننا اعتبار مضادات الواقع على أنها استلزام مادي أو استلزام دقيق. وإن أهمية دراسة مضادات الواقع تنبع من أهميتها الخاصة المتعلقة بالممارسة العملية مثلاً، بالنسبة إلى المؤرخين الذين يستخدموها في تقويم الأحداث والدوافع والخطط السياسية، فيتحدثون عمًّا كان من شأنه أن يحدث، لو كان الأمر بخلاف ما تم في الواقع. وتنتشر قضايا مناقضة الواقع في الشعر والنثر على السواء. ولقد قام الفيلسوف الأمريكي د. لويس بتطوير نظرية مضادات الواقع في بداية سبعينيات القرن الماضي.

سنرمز لرابط استلزامات مضادات الواقع بواسطة $\Box\!\!\rightarrow$[٢٣]. وهكذا، سنحصل على صيغة جديدة هي $\alpha \Box\!\!\rightarrow \beta$، حيث α، β صيغتان من حساب القضايا. سندرس دلالة هذه الصيغة أدناه.

من المفيد، عند دراستنا لقيم صدق $\alpha \Box\!\!\rightarrow \beta$، أن نتذكر أن الاستلزام الدقيق $\alpha \blacktriangleright \beta$ يكون صادقاً في عالم w، إذا كانت β صادقة في كل عالم ممكن تكون فيه

٢٣- لقد استخدم د. لويس رمزا آخر مشابه.

α صادقة. عندما نفسر الرابط (إذا كان... فإن...) كاستلزام دقيق، فإن هذا يؤدي بنا إلى قراءة الاستلزامات الشرطية بالقول إنه إذا كان المقدم صادقاً في كل عالم ممكن، فإن التالي يكون صادقاً في كل عالم ممكن أيضاً، أي أنه، في كل الحالات الممكنة التي يكون فيها المقدم صادقاً، يجب أن يصدق التالي أيضاً. إن هذا التحليل لا يكون مناسباً في حالة استلزامات مضادات الواقع. وكنا قد رأينا في مثال سابق، كيف يؤدي هذا التحليل إلى تقبل حجة أنها صحيحة، في الوقت الذي تكون خاطئة بوضوح (نشير هنا إلى خاصية التعدي).

إن هذا التحليل يقودنا إلى اعتبار أن بعض القضايا الصادقة، على أنها كاذبة، فمثلاً القضية:

(3) إذا أنت قفزت من سطح عمارة عالية فإنك تصاب.

صادقة، ولكنها تكون كاذبة إذا اعتبرنا، هنا، أن الرابط (إذا كان... فإن...) يعبر عن استلزام دقيق وبالتأكيد، يوجد عالم ممكن أن تقفز من سطح عمارة عالية كعمل بهلواني مثير وتتعلق في شبكة بسلام. وربما، يوجد عالم، حيث ينقض ملاكك الحارس للإمساك بك قبل أن ترتطم بالأرض. إن مغزى هذا المثال هو أن الكثير من العوالم الممكنة تكون غير عادية وحتى غريبة. ونحن نتجاهل هذه العوالم عندما نقوم بتقويم استلزامات مضادات الواقع كصادقة أو كاذبة، ولكن الاستلزام الدقيق يعير اهتماماً لكل عالم.

إن هذا يؤدي إلى حصر أنفسنا عند التفكير حول مضادات الواقع بالعوالم العادية أو غير الغريبة أو نقول المشابهة[٢٤] للعالم الواقعي. وهكذا، فإن دلالة $\alpha \boxright \beta$ تعرف كما يلي:

$\alpha \boxright \beta$ تكون صادقة إذا كانت β صادقة في كل العوالم المشابهة للعالم الواقعي، والتي تكون فيها α صادقة.

باستخدام تعريف الدلالة هذا، تبقى حجة خاصية التعدي السابقة صحيحة.

لنفرض، أننا قمنا بترتيب عوالم ممكنة حول عالمنا، حسب مشابهتها له. بعض العوالم شديدة الشبه به فمثلاً، العالم الواقعي شديد الشبه بالعالم الذي تحك فيه أنفك وأنت تقرأ هذه القضية، ولكن عالمنا مختلف تماماً عن العالم الناتج لو أن

24- similar.

النازيين ربحوا الحرب العالمية الثانية. أي أن، بعض العوالم تكون بعيدة نسبياً عن عالمنا الواقعي، ونقول بعيدة بدرجات عن عالمنا الواقعي.

عند تقويم استلزامات مضادات الواقع، نحن نريد أن نركز انتباهنا على مجموعة خاصة من العوالم الممكنة، التي يصدق فيها مقدم الاستلزام، وتكون مشابهة لعالمنا الواقعي. نحن نريد النظر فقط إلى تلك العوالم المشابهة (الأقرب) للعالم الواقعي. وهذه العوالم مختلفة فيما بينها بدرجات كافية لجعل المقدم صادقاً، ولكن هذا الاختلاف ليس أكبر من المطلوب.

إن مفهوم التشابه هنا، يقودنا إلى العوالم الأكبر أو الأقل شبهاً من عالم معين. سنعتبر تلك العوالم بالأكبر موصولية أو الأقل موصولية من هذا العالم المعين. أي، أننا سنقوم بتغيير واحد في نموذج كريبكة هنا، وهو جعل علاقة الموصولية R في النموذج تمتلك درجات. وسنستخدم الأعداد الحقيقية من 0 إلى 1 للتعبير عن هذه الدرجات. فالصفر سيحتل الفقدان التام لعلاقة الموصولية بين عالمين، و1 سيمثل أقصى درجات علاقة الموصولية بين عالمين. من الواضح، أن كل عالم يكون موصولاً من نفسه بأقصى درجة، أما بقية العوالم فأقل موصولية منه. وهكذا، فسنقوم بربط الأزواج المرتبة من العوالم، التي تمثل علاقة الموصولية R في نموذج كريبكة بعدد حقيقي n ($0 \leq n \leq 1$)) يشير إلى درجة موصولية العنصر الثاني في الزوج المرتب من العنصر الأول.

مثال:

$$R = \{((w_1, w_1), 1), ((w_1, w_2), 0{,}6), ((w_2, w_1), 0)\}$$

إن هذا يعني أن w_1 موصول (يشابه) من نفسه بدرجة 1 ,w_1 موصول من w_2 بدرجة 0.6 وw_1 غير موصول من w_2، لأن درجة موصوليته 0. وكل هذا سنكتبه هكذا:

درجة موصولية w_1 من نفسه تساوي 1	$d\,R\,(w_1, w_1) = 1$
درجة موصولية w_2 من w_1 تساوي 0.6	$d\,R\,(w_1, w_2) = 0{,}6$
درجة موصولية w_1 من w_2 تساوي صفر	$d\,R\,(w_2, w_1) = 0$

إن الحرف d يمثل كلمة (درجة)[٢٥].

إن تعريف صدق مضادات الواقع يصبح كالتالي:

$$V\,(\alpha \mapsto \beta, w) = T$$

إذا وفقط إذا وجد عالم u بحيث $V\,(\alpha, u) = T$ ولا يوجد أي عالم t بحيث إن $d\,R\,(w, t) \geq d\,R\,(w, u)$ ، $V\,(\alpha, t) = T$ و $V\,(\beta, t) = F$.

25- degree.

إن العالم u هو عالم عشوائي، وهو أحد العوالم الأكبر موصولية (الأكثر شبهاً) من العالم الواقعي، الذي يكون فيه المقدم صادقاً.

نستطيع أن نضع تعريف الصدق أعلاه بالشكل التالي:

$\alpha \mapsto \beta$ تكون صادقة في عالم w إذا وفقط إذا كانت:

(1) α صادقة في عالم w بحيث إن:

(2) β صادقة في عالم u وصادقة في كل العوالم الأكبر موصولية من w، مقارنة بالعالم u، والتي تكون فيها α صادقة.

من (1) و(2) نستطيع أن نقول إن $\alpha \mapsto \beta$ تكون صادقة في عالم w إذا كانت β صادقة في كل العوالم الأكثر شبها للعالم w، والتي تكون فيها α صادقة.

الآن نصل إلى كذب $\alpha \mapsto \beta$:

$$V(\alpha \mapsto \beta, w) = F$$

إذا وفقط إذا كان لكل عالم u بحيث إن $V(\alpha, u) = T$ فإنه يوجد عالم t بحيث إن $d\,R\,(w, t) \geq d\,R\,(w, u)$، $V(\alpha, t) = T$، $V(\beta, t) = F$.

مثال:

لنأخذ قضايا عكس النقيض التالية، وسنبين أنها خاطئة في مضادات الواقع:

إذا كانت القاهرة مدينة فإنها مدينة ملوثة بيئياً.

إذاً، إذا لم تكن القاهرة ملوثة بيئياً فإنها ليست مدينة.

حسب ما ذكرنا أعلاه، فإننا عند تقويم استلزام مضادات الواقع، نأخذ العوالم الأكثر شبهاً (أو الأكبر موصولية) للعالم الواقعي، والتي يكون فيها المقدم صادقاً. وهنا، يوجد عالم واحد من هذا النوع، بالنسبة إلى مقدمة الحجة وهو العالم الواقعي، تكون فيه القاهرة بالفعل مدينة. والآن، نتحقق فيما إذا كان التالي صادقاً بين كل عناصر هذا الصنف من العوالم ذي العنصر الواحد. والجواب، نعم فعلاً، لأن القاهرة ملوثة بيئياً. وهكذا، تكون المقدمة صادقة في العالم الواقعي.

أما بالنسبة إلى نتيجة الحجة، فإن مقدم النتيجة كاذب في العالم الواقعي، وهكذا فيجب أن يتحرك خيالنا نحو تلك العوالم الأقرب شبهاً للعالم الواقعي (أو الموصولة من العالم الواقعي) والتي تكون فيها القاهرة نظيفة. ويفترض وجود طرائق ممكنة عدة متساوية تقريباً، والتي يمكن أن يحدث هذا فيها. فيمكن ألا تكون الثورة الصناعية قد حدثت أبداً، ويمكن أن نكون قد طوَّرنا تقنية لتنظيف القاهرة. ليس في أي من هذه الإمكانات لا تكون القاهرة مدينة وبالتالي، فإن تالي نتيجة الحجة كاذب. وإذاً القضية الشرطية التي تمثل نتيجة الحجة كاذبة.

نستنتج من هذا المثال، أن قاعدة عكس النقيض غير صحيحة في استلزامات مضادات الواقع، لكن قاعدة الوضع صحيحة فيها.
وسنبرهن صحتها في المبرهنة التالية:
مبرهنة 1:
الاشتقاق:
$\alpha \mapsto \beta$ ، $\alpha \vdash \beta$
صحيح في نماذج مضادات الواقع.
البرهان:
سنستخدم طريقة البرهان غير المباشر: فنفرض أن الاشتقاق خاطئ، أي نفرض وجود نموذج يحوي العالم w، بحيث إن $V(\alpha \mapsto \beta, w) = T$ و $V(\alpha, w) = T$، بينما $V(\beta, w) = F$. الآن، باستخدام تعريف نموذج مضادات الواقع فإنه: من أجل كل عالم u، $dR(w,w) \geq dR(w, u)$. وبالتالي، فمن أجل كل u، يوجد عالم z لنسميه w، بحيث $dR(w,z) \geq dR(w, u)$، $V(\alpha, z) = T$ و $V(\beta, z) = F$.
إذاً، على وجه الخصوص، فمن أجل كل عالم u، بحيث إن $V(\alpha, u) = T$، يوجد عالم z، بحيث إن $dR(w,z) \geq dR(w, u)$، $V(\alpha, z) = T$ و $V(\beta, z) = F$.
ولكن هذا يعني أن $V(\alpha \mapsto \beta, w) = F$، وهنا وصلنا إلى تناقض مع ما فرضناه أعلاه. إذاً، الاشتقاق صحيح في نماذج مضادات الواقع.
مبرهنة 2:
$\alpha \mapsto \beta$ أضعف من $\alpha ➤ \beta$
البرهان:
سنبرهن أنه من الصيغة $\alpha ➤ \beta$ تنتج (تشتق) الصيغة $\alpha \mapsto \beta$ ولكن من $\alpha \mapsto \beta$ لا تنتج $\alpha ➤ \beta$.
إذا كانت $\alpha ➤ \beta$ صادقة فإن β صادقة في جميع العوالم التي تكون فيها α صادقة، ومن هنا ينتج أن β صادقة في جميع العوالم المشابهة للعالم الواقعي التي تكون فيها α صادقة. إذاً من $\alpha ➤ \beta$ تنتج $\alpha \mapsto \beta$. ولكن العكس غير صحيح لأنه توجد عوالم تكون فيها α صادقة وβ كاذبة حتى ولو كانت $\alpha \mapsto \beta$ صادقة.
مبرهنة 3:
$\alpha \mapsto \beta$ أقوى من $\alpha \to \beta$
يترك البرهان كتمرين للقارئ.

3.4 تمارين:

(ا) برهن المبرهنتين التاليتين:
(1)- المبرهنة K_{14}: $LP \to (Q ➤ P)$
(2)- المبرهنة K_{15}: $L\urcorner P \to (P ➤ Q)$

(ب) حدد فيما إذا كانت كل من صور الحجج التالية صحيحة أم خاطئة.

1. المقدمات	P ➤ Q, P
النتيجة	Q

2. المقدمات	P ➤ Q, ⌉Q
النتيجة	⌉P

3. المقدمات	P ❮❯ Q, P
النتيجة	Q

4. المقدمات	LP ➤ L Q, L ⌉Q
النتيجة	M ⌉P

5. المقدمات	P ❮❯ ⌉P, ⌉P
النتيجة	⌉Q

(ج) حدد فيما إذا كانت الصيغة التالية صحيحة أم خاطئة.

(⌉P ➤ P) $\leftrightarrow$ LP

(د) حدد فيما إذا كان كل من الاشتقاقين التاليين صحيحاً أم خاطئاً.

1. P ➤ Q, Q ➤ R ├── P ➤ R
2. ⌉M P ├── P ➤ Q

(هـ) برهن المبرهنة: $\alpha \mapsto \beta$ أقوى من $\alpha \rightarrow \beta$.