

## الفصل الثاني

### الرياضيون والماديون على مائدة المفاوضات

#### (1) الذي أفزعته مسألة بسيطة .

للأستاذين : شوقي شوقي موافي وسمير محمد عثمان  
مدرسا الرياضيات الثانوى بالمنصورة 1996م

#### • التمرين :

أوجد مجموعة حل المعادلتين الأنيبتين الآتيتين فى  $x$  :

$$x + \sqrt{y} = 5 \quad , \quad \sqrt{x} + y = 17$$

لقد عرض علي بعض الطلاب هذه المسألة وحينما قمت بحلها للطلاب المتميزين فى المرحلة الإعدادية حيث قد عرضت فى نفس الوقت على الأستاذ (شوقي شوقي موافي) والذي كان يعمل فى مدرسة أخرى . إذ نفاجاً بمعلم يدخل المدرسة صائحاً (وقد أخذ أجازة عارضة فى ذلك اليوم لذلك الموقف) قائلاً إن هذه المسألة ليس لها حل فى المرحلة الإعدادية ، وليس هناك ما يسمى بالطلاب المتفوقين ، بل كل الطلاب سواسية ، وهذه الأفكار قد تكون لكم أنتم ، ومثل هذه المسائل قد تخرج البعض منا أثناء إعطاء الدروس الخصوصية ، فدعونا (نأكل عيش) كما واجه الأستاذ (شوقي شوقي) نقداً لاذعاً أيضاً ..

إننا نترك للقارئ التعليق على ما سبق ونوجه لك عزيزي القارئ سؤالاً واحداً .  
أليس يعد سلوك مثل هذا المعلم صراعاً بين المادة والحياة وليس صراعاً بين المادة والعلم ؟ ..... والآن نقدم لحل هذه المسألة :

#### الحل الأول

للأستاذ/ شوقي شوقي موافي . وزميل آخر لم أعرف اسمه .

$$x + \sqrt{y} = 5 \quad \dots\dots (1) \quad , \quad y + \sqrt{x} = 17 \quad \dots\dots (2)$$

$$\sqrt{y} = 5 - x \quad \dots\dots (1) :$$

$$\therefore y = (5 - x)^2 = 25 + x^2 - 10x \quad \dots\dots (3)$$

بالتعويض من (3) في (2)

$$\therefore x^2 - 10x + 25 + \sqrt{x} - 17 = 0 \quad \therefore x^2 - 10x + 8 + \sqrt{x} = 0$$

$$\therefore (x^2 - 9x + 8) - (x - \sqrt{x}) = 0$$

$$\therefore (x - 1)(x - 8) - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\therefore (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x - 8) - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\therefore (\sqrt{x} - 1)[(\sqrt{x} + 1)(x - 8) - \sqrt{x}] = 0$$

$$\therefore \sqrt{x} - 1 = 0 \quad \therefore \sqrt{x} = 1 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore \sqrt{y} = 5 - x = 5 - 1 = 4 \quad \therefore y = 16$$

$\therefore$  الحل المشترك هو :  $x = 1$  ،  $y = 16$

$$\therefore \text{ح. م. ح} = \{(16, 1)\}$$

وإذا كان تحليل  $(x - 1)$  فرق بين مربعين هو الذي أفزعه !

فنقدم له الحلين الآتيين :

حل ثان:

للأستاذ / المتولي عبده فرحات موجه رياضيات ثانوى 1999م

$$\therefore x + \sqrt{y} = 5 \quad \dots\dots (1) \quad , \quad y + \sqrt{x} = 17 \quad \dots\dots (2)$$

$$x = a^2 \quad \Leftarrow \quad \sqrt{x} = a \quad \text{نفرض أن :}$$

$$y = b^2 \quad \Leftarrow \quad \sqrt{y} = b \quad \text{نفرض أن :}$$

$\therefore$  تكون المعادلتان على الصورة التالية :

$$a^2 + b = 5 \quad \dots\dots (3) \quad , \quad b^2 + a = 17 \quad \dots\dots (4)$$

$$\therefore b = 5 - a^2 \quad \dots\dots (5) \quad \text{من (3) :}$$

$$\therefore (5 - a^2)^2 + a = 17 \quad \therefore a^4 - 10a^2 + 25 + a - 17 = 0$$

(1) هو شقيق الأستاذ الفاضل / محمد عبده فرحات موجه الرياضيات بالدقهلية حالياً .

$$\therefore a^4 - 10a^2 + a + 8 = 0 \quad \therefore a^4 - 10a^2 + a + 8 + 1 - 1 = 0$$

$$\therefore (a^4 - 1) - (10a^2 - a - 9) = 0$$

$$\therefore (a^2 - 1)(a^2 + 1) - (a - 1)(10a + 9) = 0$$

$$\therefore (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) - (a - 1)(10a + 9) = 0$$

$$\therefore (a - 1)[(a + 1)(a^2 + 1) - (10a + 9)] = 0$$

$$\therefore a - 1 = 0 \quad \text{ومنها} \quad a = 1$$

$$\therefore \sqrt{x} = a \quad \therefore \sqrt{x} = 1 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore b = 5 - a^2 \quad \therefore b = 5 - 1 = 4,$$

$$\therefore \sqrt{y} = b \quad \therefore \sqrt{y} = 4 \quad \therefore y = 16$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{(1, 16)\}$$

### حل ثالث

للأستاذ / سمير محمد عثمان الحفناوي م.ث إدارة شرق المنصورة 1996م.

$$\therefore x + \sqrt{y} = 5 \quad \dots (1), \quad y + \sqrt{x} = 5$$

$$\sqrt{y} = 5 - x \quad \Rightarrow \quad y = (5 - x)^2 \quad \dots (3)$$

$$\sqrt{x} = 17 - y \quad \Rightarrow \quad x = (17 - y)^2 \quad \dots (5)$$

$$(5) \dots \quad y = (17 - z) \quad \Leftarrow \quad \blacklozenge \quad z = 17 - y \quad \text{نفرض أن:}$$

من (3) ، (4)

$$\therefore y = [5 - (17 - y)^2]^2 = (5 - z^2)^2 \quad \therefore y = z^4 - 10z^2 + 25$$

$$\therefore 17 - z = z^4 - 10z^2 + 25 \quad \therefore z^4 - 10z^2 + z + 8 = 0$$

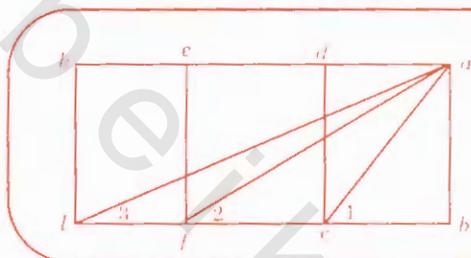
$$\therefore z^4 - 10z^2 + z + 8 + 1 - 1 = 0$$

ونكمل الحل كما سبق .. ونعوض بقيمة  $z = 1$  لإيجاد قيم  $x$  ،  $y$

## (2) غيرة واعتكاف تحقق الذات:

لقد عُرض على الأستاذ / رمضان إبراهيم عبد الرحمن الضباع .. مدرس رياضيات بمدرسة الشهيد حمزة السحيتي بدكرنس 1988م ، هذه المسألة والتي جاء بها من مدرس آخر بقرية المرازيق مركز البدرشين محافظة الجيزة وهي:

### • التمرين :



في الشكل المقابل:

$abcd$  ،  $dcfe$  ،  $eflk$  ثلاثة مربعات

أثبت أن :  $(\angle 1) = (\angle 2) + (\angle 3)$

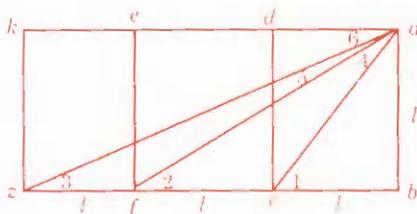
ولقد تناقشنا نحن مدرسي الرياضيات وقتئذ حتى أن الأستاذ / عبد العظيم شبكة مدرس رياضيات ثانوي بمدرسة حسين حماد الثانوية سنة 1988م قد أخذ إجازة من العمل لحل هذه المسألة بطريقة أو بأخرى ، والآن نقدم بعضاً من هذه الحلول والتي اعتكفنا حتى توصلنا لها ، نقدمها لكم في غياب الثقافة المتخصصة والغيرة العلمية عسى أن ننهض سوياً بهذا الفكر الجديد بمستوى معلم الرياضيات .

قام بحل هذا التمرين:

الأستاذ / سمير محمد عثمان الحفاوي

مدرس رياضيات بمدرسة الشهيد حمزة الإعدادية بدكرنس 1988م.

أولاً :



$\bar{ac}$  قطر في المربع  $abcd$

$$\therefore (\angle 1) = 45^\circ$$

$\therefore$  المطلوب إثبات أن:

$$(\angle 2) + (\angle 3) = (\angle 1) = 45^\circ$$

أي يمكن إثبات أن :  $\tan(\angle 2 + \angle 3) = \tan(45^\circ) = 1$

$$\tan(\angle 2 + \angle 3) = \frac{\tan \angle 2 + \tan \angle 3}{1 - \tan \angle 2 \tan \angle 3} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \times \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

وهو المطلوب.

**ثانياً:**

من هندسة الشكل نجد أن:  $ac = l\sqrt{2}$  ،  $af = l\sqrt{5}$  ،  $az = l\sqrt{10}$

المطلوب إثبات أن:  $\tan(\angle 2 + \angle 3) = \tan(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin \angle 2 = \frac{1}{\sqrt{5}} , \quad \cos \angle 2 = \frac{2}{\sqrt{5}} , \quad \sin \angle 3 = \frac{1}{\sqrt{10}} , \quad \cos \angle 3 = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin(\angle 2 + \angle 3) = \sin \angle 2 \cos \angle 3 + \cos \angle 2 \sin \angle 3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{50}} + \frac{2}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهو المطلوب.

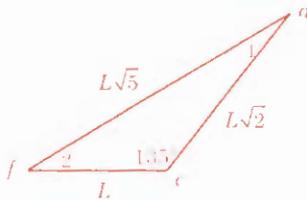
**ثالثاً:**

$$\cos(\angle 2 + \angle 3) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \angle 2 \cos \angle 3 - \sin \angle 2 \sin \angle 3 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{50}} - \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

**رابعاً:**



من هندسة الشكل يمكن إثبات أن:

$$(\angle 2) + (\angle 3) = (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6)$$

أي أن المطلوب إثبات أن:

$$(\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6) = 45^\circ$$

لإيجاد  $(\angle 4)$  في  $\Delta acf$  نحل المثلث  $acf$  كالآتي:

$$\frac{\bar{a}}{\sin a} = \frac{\bar{c}}{\sin c}$$

$$\therefore \frac{l}{\sin a} = \frac{l\sqrt{5}}{\sin 135^\circ}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin a} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin a} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

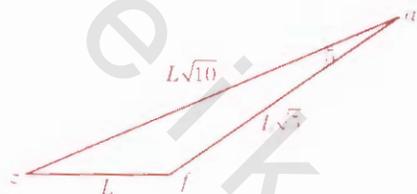
$$\therefore \frac{1}{\sin a} = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

$$\therefore \sin a = \frac{1}{\sqrt{10}} =$$

$$\therefore \sin \angle 4 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(\angle 4) = \dots^\circ$$

لإيجاد  $(\angle 5)$  نحل المثلث  $afz$  بمعلومية أطوال أضلاعه



$$\cos a = \frac{\bar{f}^2 + \bar{z}^2 - \bar{a}^2}{2\bar{f}\bar{z}}$$

$$= \frac{10l^2 + 5l^2 - l^2}{2 \times l\sqrt{10} \times l\sqrt{5}}$$

$$= \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore (\angle 5) = \dots^\circ$$

$$\cos \angle 6 = \cos \angle 3 = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ من الشكل:}$$

$$\therefore (\angle 4) = \dots^\circ, (\angle 5) = \dots^\circ, (\angle 6) = \dots^\circ$$

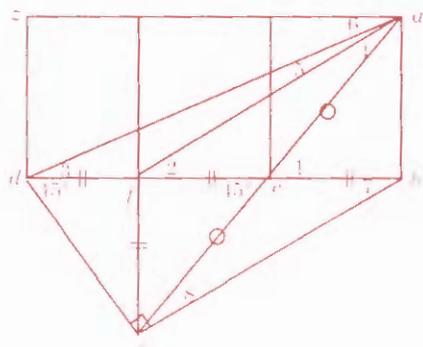
$$\therefore (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6) = \dots^\circ$$

وهو المطلوب

حل هندسي

للأستاذ/ عبد العظيم شبكة

مدرس رياضيات بمدرسة حسين حماد الثانوية بنات بدكرنس 1988م.



العمل:

نرسم  $\bar{ae}$  ،  $\bar{dc} \perp \bar{ae}$  يقطعه في  $c$

**البرهان:**

من هندسة الشكل نستنتج أن:  $ce = cd$

$$\therefore (\angle bac) = (\angle bdc)$$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة  $\overline{bc}$  وفي جهة واحدة

$\therefore$  الشكل  $abcd$  رباعي دائري

$$\therefore (\angle 8) = (\angle 3) \text{ (نظرية)}$$

$$\therefore (\angle 1) = (\angle ced) = 45^\circ \text{ بالتقابل بالرأس}$$

فيكون المطلوب  $(\angle 2) + (\angle 3)$

ولكن  $(\angle 3) = (\angle 6)$  بالتبادل لأن  $\overline{ad}$  قطر في المستطيل  $abcd$

$$(\angle 2) = (\angle 3) + (\angle 5), \quad (\angle 1) = (\angle 2) + (\angle 4)$$

$$\therefore \text{نثبت أن: } (\angle 1) = (\angle ced) = (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6)$$

$\therefore (\angle ced)$  خارجة عن  $\Delta ebc$

$$\therefore (\angle ced) = (\angle 7) + (\angle 8)$$

$$\therefore (\angle 8) = (\angle 3) = (\angle 6), \quad (\angle 7) = (\angle 4) + (\angle 5)$$

$$\therefore (\angle 8) + (\angle 7) = (\angle 4) + (\angle 5) + (\angle 6) = 45^\circ$$

وهو المطلوب

وقد قام الأستاذ / رمضان عبد الرحمن (مدرسة الشهيد حمزة السحيتي ع. بدكرنس) بحل مشابه بعد إضافة ثلاثة مربعات أسفل المربعات الثلاثة الأولى وتشارك في

الأضلاع  $\overline{bc}$  ،  $\overline{cf}$  ،  $\overline{fl}$

## (3) مسائل على هيئة أغاز:

للأستاذ / سمير محمد عثمان الحفناوي

مدرس رياضيات ثانوي بمدرسة الملك الكامل بالمنصورة 1996 م.

• تمرين (1):

$$\text{إذا كانت: } 9^x = 4 \text{ فأوجد قيمة: } \frac{27^x + 1}{3^x + 3}$$

الحل:

$$\therefore 9^x = 4 \quad \therefore 9^{2x} = 2^2 \quad \therefore (3^x)^2 = 2^2 \quad \therefore 3^x = 2$$

$$\therefore 27^x = (3^3)^x = (3^x)^3 = (2^3) = 8$$

$$\therefore \frac{27^x + 1}{3^x + 3} = \frac{8 + 1}{2 + 1} = \frac{9}{3} = 3$$

• تمرين (2):

$$\text{إذا كان: } x^y = y^x \text{ فأثبت أن: } \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x-1}{y}}$$

الحل:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{(y^x)^{\frac{1}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{(x^y)^{\frac{1}{y}}}$$

عوضنا عن  $y^x$  بالقيمة  $x^y$  من المعطيات.

$$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x} = x^{\frac{x}{y}-1}$$

وهو المطلوب

• تمرين (3):

$$\text{إذا كان: } \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x-1}{y}} \text{ فأثبت أن: } x^y = y^x$$

الحل:

$$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x-1}{y}} \quad \therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}} \times x^{-1} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} &= \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x} & \therefore \frac{1}{y^{\frac{x}{y}}} &= \frac{1}{x} & \therefore y^{\frac{x}{y}} &= x & \therefore \left(y^{\frac{x}{y}}\right)^y &= x^y \\ \therefore x^y &= y^x & \text{وهو المطلوب} & & & & & \end{aligned}$$

• تمرين (4):

إذا كان:  $x^{\frac{1}{m}} = 8$  ،  $x^{\frac{1}{m+1}} = 4$  أوجد قيمة  $x, m$

الحل:

$$x^{\frac{1}{m}} = 8 \quad \therefore x^{\frac{1}{m}} = 2^3 \quad \therefore \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m = (2^3)^m$$

$$\therefore x = 2^{3m} \quad \dots\dots (1) \quad , \quad \therefore x^{\frac{1}{1+m}} = 4 = 2^2$$

$$\therefore \left(x^{\frac{1}{1+m}}\right)^{1+m} = (2^2)^{1+m} \quad \therefore x = 2^{2m+2} \quad \dots\dots (2)$$

$$\therefore 3m = 2m + 2 \quad \therefore m = 2 \quad \text{من (1) ، (2)}$$

$$\therefore x = 2^{3m} = 2^6 = 64$$

• تمرين (5):

أثبت أن:  $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

الحل:

بتحليل الطرفين كفرق بين مكعبين ،  $\therefore 4 - 3 = 3 - 2$

$$\therefore (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$$

وعندما يكون:  $ab = cd$  وكان  $a > c$  يكون  $b < d$

$$\text{وحيث أن: } (\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}) > (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$$

$$\therefore \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$$

• تمرين (6):

إذا كان:  $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$  أوجد قيمة  $x$

الحل:

$$\therefore x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 &= 2 + x & \therefore x^2 - x - 2 &= 0 & \therefore (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ \therefore x &= 2, \quad x &= -1 & \text{مرفوضة} \end{aligned}$$

• تمرين (7):

$$\text{إذا كان: } 2^x = 3^y = 12^z \text{ فأثبت أن: } xy = z(x + 2y)$$

الحل:

$$\begin{aligned} \therefore 2^x &= 3^y & \therefore 2 &= 3^{\frac{y}{x}} \\ \therefore 3^y &= 12^z & \therefore 3^y &= (2^2 \times 3)^z = 2^{2z} \times 3^z \\ \therefore 3^y &= \left(3^{\frac{y}{x}}\right)^{2z} \times 3^z = 3^{\frac{2zy}{x} + z} \\ \therefore y &= \frac{2zy}{x} + z & \therefore xy &= 2zy + xz & \therefore xy &= z(2y + x) \end{aligned}$$

• تمرين (8):

$$\text{إذا كان: } b^3 = zc, \quad a^x = b^y = c^z \text{ أثبت أن: } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{y}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \therefore a^x &= b^y & \therefore a^{3x} &= b^{3y} \\ \therefore a^{3x} &= (b^3)^y = (ac)^y = a^y c^y & \therefore a^{3x-y} &= c^y \\ \therefore (a^{3x-y})^y &= (c^y)^y & \therefore (a^y)^{3x-y} &= c^{y^2} \quad \dots (1) \\ c^z &= b^y \text{ وأيضاً} & \therefore c^{3z} &= b^{3y} \\ \therefore c^{3z} &= (b^3)^y = a^y c^y & \therefore c^{3z-y} &= a^y \quad \dots (2) \end{aligned}$$

بالتعويض من (2) في (1) عن  $a^y$

$$\begin{aligned} \therefore (c^{3z-y})^{3x-y} &= c^{y^2} & \therefore (3z - y)(3x - y) &= y^2 \\ \therefore 9xz + y^2 - 3xy - 3zy &= y^2 \\ \therefore 3xz &= xy + yz \\ \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{y} \end{aligned}$$

بالقسمة على  $xyz$  للطرفين

حل آخر:

$$b^y = c^z \quad \therefore b^{3y} = c^{3z} \quad \therefore c^{3z-y} = a^y \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \therefore a^x &= c^z & \therefore (a^x)^y &= (c^z)^y \\ \therefore (a^x)^y &= c^{zy} & \dots\dots (2) \end{aligned}$$

بالتعويض من (1) ، (2) عن  $a^y$

$$\begin{aligned} \therefore (c^{3z-y})^x &= c^{zy} & \therefore x(3z-y) &= zy & \therefore 3xz - xy &= zy \\ \therefore 3xz &= xy + yz & \text{بالقسمة على } xyz & & \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{y} \end{aligned}$$

حل ثالث:

$$\begin{aligned} \therefore a^x &= b^y & \therefore a &= b^{\frac{y}{x}} & \therefore c^z &= b^y & \therefore c &= b^{\frac{y}{z}} \\ \therefore b^3 &= ac & \therefore b^3 &= b^{\frac{y}{x}} \times b^{\frac{y}{z}} & \therefore 3 &= \frac{y}{x} + \frac{y}{z} \\ \therefore 3xz &= xy + yz & \text{بالقسمة على } xyz & & \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{y} \end{aligned}$$

حل رابع:

$$\begin{aligned} \therefore b^3 &= ac & \therefore (b^3)^{xz} &= (ac)^{xz} & \therefore b^{3xz} &= (a^x)^z \times (c^z)^x \\ \therefore b^{3xz} &= (b^y)^z \times (c^y)^x & \therefore b^{3xz} &= b^{yz+yx} \\ \therefore 3xz &= xy + yz & \text{بالقسمة على } xyz & & \therefore \frac{3}{y} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

حل خامس:

$$\begin{aligned} \therefore a^x &= b^y = c^z & \therefore x \log a = y \log b = z \log c = k, & \therefore b^3 &= ac \\ \therefore 3 \log b &= \log a + \log c & \dots\dots (1) \\ \therefore \log a &= \frac{k}{x}, \log b = \frac{k}{y}, \log c = \frac{k}{z} & \text{بالتعويض في (1)} \\ \therefore 3 \times \frac{k}{y} &= \frac{k}{x} + \frac{k}{z} & \therefore \frac{3}{y} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{z} & \text{(وهو المطلوب)} \end{aligned}$$

ملاحظة: يمكن حل المسألة السابقة بنفس الطريقة

مثلاً: نفرض أن:  $x \log 2 = y \log 3 = z \log 12 = m$

$$\begin{aligned} \therefore x \log 2 &= m \Rightarrow \log 2 = \frac{m}{x} \\ \therefore y \log 3 &= m \Rightarrow \log 3 = \frac{m}{y} & \therefore z \log 12 &= m \\ \therefore z \log(2^2 \times 3) &= z[2 \log 2 + \log 3] = z \left( 2 \times \frac{m}{x} + \frac{m}{y} \right) = m \\ \therefore z \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) &= 1 & \text{بالضرب في } xy & & \therefore z[2y + x] &= xy \end{aligned}$$

• تمرين (9):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة:  $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$

الحل:

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0, \quad 2x^3 + x + 2 - 5x^2 + 5 - 5 = 0$$

$$-5(x^2 - 1) + 2x^3 + x - 3 = 0, \quad 2x^3 + x - 3 - 5(x^2 - 1) = 0$$

$$(2x^3 - 2x) + 2x + x - 3 - 5(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$2x(x^2 - 1) + (3x - 3) - 5(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$2x(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1) - 5(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$(x - 1)[2x(x + 1) + 3 - 5(x + 1)] = 0$$

$$(x - 1)[2x^2 + 2x + 3 - 5x - 5] = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 - 3x - 2) = 0, \quad (x - 1)(2x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1, \quad x = 2, \quad x = -\frac{1}{2}$$

∴ مجموعة الحل:  $\left\{1, 2, -\frac{1}{2}\right\}$

حل آخر: عن طريق نظرية الباقي (المعاملات المنعزلة)

نكتب معاملات المعادلة السابقة حسب الترتيب ونختبر ما إذا كان (1) حلاً أم لا وهكذا ...

فإذا كان الباقي = صفر فهو يعتبر حلاً كالآتي:

	2	1	5-	2		1
	2-	3-	2			
أحد الحلول	2-	3-	2	2		2
	2	4				
حل ثان	1	2				

$$\therefore 2x + 1 = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

∴ مجموعة الحل:  $\left\{1, 2, -\frac{1}{2}\right\}$

• تمرين (10):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة:  $x^3 + x^2 = 36$  ،  $R \ni x$   
مجموعة الأعداد الحقيقية.  $R$

الحل:

$$x^3 + x^2 - 36 = 0 , \quad (x^3 - 27) + (x^2 - 9) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + (x - 3)(x + 3) = 0$$

$$\therefore (x - 3)[x^2 + 4x + 9 + 3] = 0$$

$$\therefore (x - 3)(x^2 + 4x + 12) = 0 \quad \therefore x = 3$$

طريقة ثانية:

$$\therefore x^3 + x^2 = 36 \quad \therefore x^2(x + 1) = 9 \times 4$$

$$\therefore x^2(x + 1) = 3^2(3 + 1) \quad \text{بالمقارنة} \quad \therefore x = 3$$

• تمرين (11):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة:  $x(x + 2)(x - 1)(x + 3) = 40$  حيث  $x \in R$   
مجموعة الأعداد الحقيقية.  $R$

الحل:

$$x(x + 2)(x - 1)(x + 3) = 40 , \quad \therefore (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 3) = 40$$

نفرض أن:  $m = x^2 + 2x$

$$\therefore m(m - 3) = 40 \quad \therefore m^2 - 3m - 40 = 0$$

$$\therefore (m - 8)(m + 5) = 0 \quad \therefore m = 8, \quad m = -5$$

$$\therefore x^2 + 2x = 8 \quad \dots (1), \quad x^2 + 2x = -5 \quad \dots (2)$$

بحل كل من (1) ، (2) نحصل على مجموعة حل المعادلة الأصلية

• تمرين (12):

إذا كان:  $17^y = 11$  ،  $11^x = 17$  فأوجد قيمة  $xy$

الحل:

$$\therefore 11^x = 17 \quad \Rightarrow \quad 11 = 17^{\frac{1}{x}} \quad \dots (1) , \quad \therefore 11 = 17^y \quad \dots (2)$$

من (1) ، (2)

$$\therefore 17^{\frac{1}{x}} = 17^y \quad , \quad \frac{1}{x} = y \quad \therefore xy = 1$$

حل آخر:

$$\therefore 11^x = 17 \quad \therefore x \log 11 = \log 17 \quad \therefore x = \frac{\log 17}{\log 11}$$

$$\therefore 17^y = 11 \quad \therefore y \log 17 = \log 11 \quad \therefore y = \frac{\log 11}{\log 17}$$

$$\therefore xy = \frac{\log 17}{\log 11} \times \frac{\log 11}{\log 17} = 1 \quad \text{وهو المطلوب}$$

• تمرين (13):

إذا كان:  $c^2 = (l^x \times m^y)^z$  ،  $m = c^x$  ،  $l = c^y$  فأثبت أن:  $xyz = 1$

الحل:

$$\therefore c^2 = (l^x \times m^y)^z \quad \therefore c^2 = (l)^{xz} \times (m)^{yz}$$

$$\therefore c^2 = (c^y)^{xz} \times (c^x)^{yz} \quad \therefore c^2 = c^{xyz+xyz}$$

$$\therefore 2xyz = 2 \quad \therefore xzy = 1$$

وهناك حلول أخرى أيضاً.

• تمرين (14):

$\Delta abc$  متساوي الأضلاع.  $\Delta cef$  ،  $\Delta bdf$  متساويا الأضلاع أيضاً.  $l$  ،  $m$  ،  $n$  هي نقاط تلاقي متوسطات المثلثات على الترتيب. أثبت أن  $\Delta lmn$  متساوي الأضلاع.

الحل:

نفرض أن طول ضلع  $\Delta cba = z$  وحدة طول

نفرض أن طول ضلع  $\Delta bdf = x$  وحدة طول

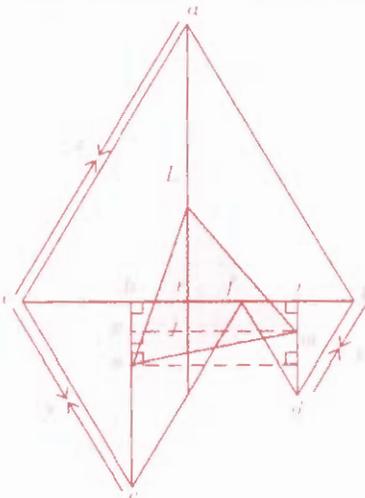
نفرض أن طول ضلع  $\Delta cef = y$  وحدة طول

العمل: كما بالشكل

$$y + x = z$$

$$\therefore \overline{mt} = \frac{1}{3} \overline{td} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$\therefore \overline{mt} = \frac{\sqrt{3}}{6} x$$



$$\overline{hn} = \frac{\sqrt{3}}{6}y \quad \text{بالمثل:}$$

$$\overline{lr} = \frac{\sqrt{3}}{6}z = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+y)$$

$$\therefore \overline{lj} = \overline{lr} + \overline{mt} = \frac{\sqrt{3}}{6}(2x+y),$$

$$\overline{mg} = \overline{th} = \frac{1}{2}(x+y)$$

$$\overline{gn} = \overline{hn} - \overline{mt} = \frac{\sqrt{3}}{6}(y-x)$$

$$\overline{tr} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y$$

$$\therefore \overline{mj} = \overline{tr} = \frac{1}{2}y$$

$$\overline{rh} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}y$$

$$\therefore \overline{fn} = \overline{rh} = \frac{1}{2}x$$

$$\overline{lf} = \overline{lr} + \overline{nh} = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+y) + \frac{\sqrt{3}}{6}(y)$$

$$\therefore \overline{lf} = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+2y)$$

$$(\overline{mn})^2 = (\overline{mg})^2 + (\overline{gn})^2$$

: فيه  $\Delta mgn$

$$(\overline{mn})^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{36}(y-x)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{6}xy$$

$$\therefore (\overline{mn})^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + xy) \quad \dots\dots (1)$$

$$(\overline{lm})^2 = (\overline{lj})^2 + (\overline{mj})^2 = \frac{3}{36}(2x+y)^2 + \frac{1}{4}y^2$$

: فيه  $\Delta ljm$

$$\therefore (\overline{lm})^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + xy) \quad \dots\dots (2)$$

$$(\overline{ln})^2 = (\overline{lf})^2 + (\overline{fn})^2 = \frac{3}{36}(x+2y)^2 + \frac{1}{4}x^2$$

: فيه  $\Delta lfn$

$$= \frac{1}{12}(x^2 + 4y^2 + 4xy) + \frac{1}{4}x^2$$

$$\therefore (\overline{ln})^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + xy) \quad \dots\dots (3)$$

من (1) ، (2) ، (3)

$$\therefore \overline{ml} = \overline{mn} = \overline{ln}$$

$\therefore \Delta mln$  متساوي الأضلاع .

• تمرين (15):

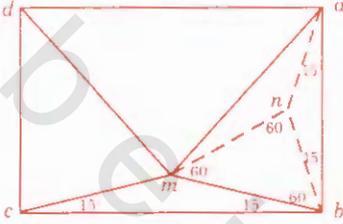
$(\angle mbc) = (\angle mcb) = 15^\circ$  ، مربع  $\Delta abcd$  ،  $m$  نقطة داخله بحيث:  
أثبت أن:  $\Delta amd$  متساوي الأضلاع.

**الحل:**

**العمل:**

نأخذ  $n$  داخل المربع بحيث

$\overline{mn}$  ونصل  $(\angle nab) = (\angle nba) = 15^\circ$



$$\left. \begin{array}{l} ab = bc \\ (\angle abn) = (\angle mcb) = 15^\circ \\ (\angle nab) = (\angle mbc) = 15^\circ \end{array} \right\} \therefore \Delta nab, mcb \text{ فيهما:}$$

$\therefore \Delta nab, \Delta mcb$  ينطبقان وينتج أن:  $bn = bm$

$$\therefore (\angle abn) = (\angle cbm) = 15^\circ$$

$$\therefore (\angle bnm) = (\angle bmn) = 60^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} (\angle anm) = 150^\circ \therefore \\ bn = nm \\ \overline{an} \text{ مشترك} \\ (\angle anb) = (\angle anm) = 150^\circ \end{array} \right\} \therefore \Delta bnm \text{ متساوي الأضلاع} \\ \therefore \Delta abn, amn \text{ فيهما:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \Delta \text{ متطابقان وينتج } ab = am \text{ ..... (1)} \\ bm = mc \\ ab = dc \end{array} \right\} \text{ وأيضاً } \Delta \Delta abm, dcm \text{ فيهما:} \\ (\angle abm) = (\angle dcm) = 75^\circ$$

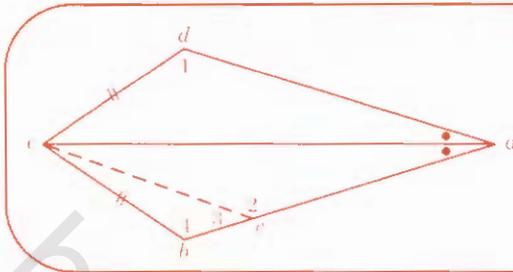
$\therefore \Delta \Delta \text{ متطابقان وينتج أن: } am = md \text{ ..... (2)}$

من (1) ، (2)

$$\therefore am = md = ad$$

$\therefore \Delta amd$  متساوي الأضلاع

• تمرين (16):



في الشكل المقابل:  $cd = bc$  ،  
 $ab < ad$  ،  $\overline{ac}$  ينصف  $(\angle bad)$   
 أثبت أن :  
 الشكل  $abcd$  رباعي دائري

الحل:

نأخذ  $e \in ab$  ، بحيث  $ad = ae$  ونصل  $\overline{ce}$   
 $ad = ae$   
 $\overline{ac}$  مشترك  
 $(\angle dac) = (\angle bac)$  }  $\therefore \Delta aec, ade$  فيهما :

$$\therefore \overline{cd} = \overline{ce} \quad \therefore \overline{ce} = \overline{cb} \quad \therefore (\angle 3) = (\angle 4) \quad \dots (1)$$

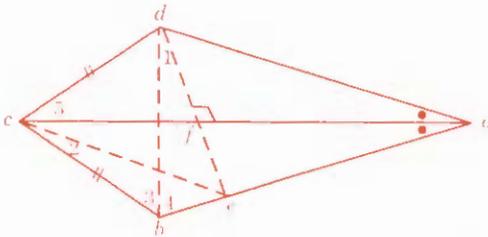
$$(\angle 2) = (\angle 1) \quad \dots (2) \quad \text{وأيضاً ينتج من التطابق:}$$

$$(\angle 3) + (\angle 2) = (\angle 1) + (\angle 4) \quad \text{بجمع (1) ، (2):}$$

$$(\angle 2) + (\angle 3) = 180^\circ \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore (\angle 1) + (\angle 4) = 180^\circ \quad \text{وهما زاويتان متقابلتان}$$

$\therefore$  الشكل  $abcd$  رباعي دائري



حل آخر:

نأخذ  $e \in ab$  ، بحيث  $ae = ad$   
 ونصل  $\overline{db}$  ،  $\overline{ce}$

$\Delta aed$  متساوي الساقين ،  $\overline{af}$  ينصف  $(\angle a)$

$$\therefore \overline{af} \perp \overline{ed} , \overline{ef} = \overline{fd}$$

$\therefore \Delta dce$  متساوي الساقين

$$\therefore dc = ec = bc$$

$\therefore$  مركز الدائرة المارة بالنقطة  $b$  ،  $e$  ،  $d$  .

$$\therefore (\angle 1) \times 2 = (\angle 2)$$

لأنها زاوية مركزية تشترك مع المحيطية في القوس  $eb$

$$\therefore (\angle dfc) = 90^\circ, \quad (\angle adb) = (\angle abd)$$

$$\therefore (\angle 1) + (\angle 3) + (\angle 5) = 90^\circ \quad \dots\dots (1)$$

$$\therefore ce = cb \quad \therefore (\angle b) = (\angle ceb)$$

$$\therefore 2(\angle 4) + 2(\angle 3) + (\angle 2) = 180^\circ$$

$$\text{لكن: } 2 \times (\angle 1) = (\angle 2)$$

$$\therefore 2(\angle 1) + 2(\angle 3) + 2(\angle 4) = 180^\circ$$

$$\therefore (\angle 1) + (\angle 3) + (\angle 4) = 90^\circ \quad \dots\dots (2)$$

من (1) ، (2)

$$\therefore (\angle 4) = (\angle 5) \quad \therefore (\angle abd) = (\angle acd)$$

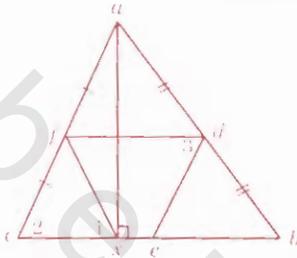
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها.

$\therefore$  الشكل  $abcd$  رباعي دائري.

• تمرين (17):

$\Delta abc$  فيه:  $d, e, f$  منتصفات أضلاعه  $ab, bc, ca$  على الترتيب  $\overline{ax} \perp bc$  قطعه في  $x$ . أثبت أن:  $edfx$  رباعي دائري

الحل:



$$\therefore \overline{df} \parallel \overline{bc}, = \frac{1}{2} \overline{bc}$$

$$\therefore \overline{de} \parallel \overline{ac}, = \frac{1}{2} \overline{ac}$$

$\Delta axc$  قائم الزاوية في  $x$

$$\therefore \overline{xf} = \frac{1}{2} \overline{ac} \quad \therefore \overline{de} = \overline{xf}$$

$\therefore edfx$  شبه منحرف متساوي الساقين  $\therefore$  الشكل  $edfx$  رباعي دائري

حل آخر:

$$\therefore \overline{de} \parallel \overline{fc}, \overline{df} \parallel \overline{ec}$$

$\therefore$  الشكل  $decf$  متوازي أضلاع

$$\therefore (\angle 2) = (\angle 3) \quad \text{ولكن} \quad \overline{fx} = \overline{fc}$$

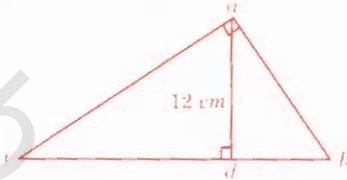
$$\therefore (\angle 2) = (\angle 1) \quad \therefore (\angle 1) = (\angle 3)$$

وهي خارجة عن الشكل الرباعي  $edfx$   $\therefore$  الشكل  $edfx$  رباعي دائري

• تمرين (18):

$\Delta abc = 60 \text{ cm}$  محيط .  $\overline{ad} = 12 \text{ cm}$  .  $\overline{ad} \perp \overline{bc}$  ،  $a$  قائم الزاوية في  $\Delta abc$   
أوجد أطوال أضلاعه.

الحل:



$$(\overline{ab})^2 + (\overline{ac})^2 = (\overline{bc})^2 \quad \dots\dots (1)$$

$$\overline{ad} = \frac{\overline{ab} \times \overline{ac}}{\overline{bc}}$$

$$\therefore \overline{ab} \times \overline{ac} = \overline{ad} \times \overline{bc} \quad \therefore \overline{ab} \times \overline{ac} = 12\overline{bc} \quad \dots\dots (2)$$

$$\therefore \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac} = 60 \quad \therefore \overline{ab} + \overline{ac} = 60 - \overline{bc} \quad (\text{بتربيع الطرفين})$$

$$\therefore (\overline{ab})^2 + (\overline{ac})^2 + 2(\overline{ab}) \cdot (\overline{ac}) = (60)^2 - 120\overline{bc} + (\overline{bc})^2 \quad \dots\dots (3)$$

بالتعويض من (2) ، (1) في (3)

$$\therefore (\overline{bc})^2 + 24\overline{bc} = (60)^2 - 120\overline{bc} + (\overline{bc})^2$$

$$\therefore 144\overline{bc} = 3600 \quad \therefore \overline{bc} = 25 \text{ cm}$$

$$\therefore (\overline{ad})^2 = \overline{bd} \times \overline{dc} \quad \therefore 144 = \overline{bd} \times (25 - \overline{bd}) = 25\overline{bd} - (\overline{bd})^2$$

$$\therefore (\overline{bd})^2 - 25\overline{bd} + 144 = 0 \quad \therefore (\overline{bd} - 9)(\overline{bd} - 16) = 0$$

$$\therefore \overline{bd} = 16 \text{ cm} \quad \text{أو} \quad \therefore \overline{bd} = 9 \text{ cm}$$

أولاً: عندما  $\overline{bd} = 9 \text{ cm}$

$$\therefore (\overline{ab})^2 = \overline{bd} \cdot \overline{bc} = 9 \times 25 \quad \therefore \overline{ab} = 15 \text{ cm}$$

$$\therefore (\overline{ac})^2 = \overline{dc} \cdot \overline{bc} = 16 \times 25$$

$$\therefore \overline{ac} = 20 \text{ cm}$$

ثانياً: عندما  $\overline{bd} = 16 \text{ cm}$  يكون

$$\overline{ab} = 20 \text{ cm}, \quad \overline{ac} = 15 \text{ cm}$$

$\therefore$  أطوال أضلاع المثلث  $abc$  هي  $25 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, 15 \text{ cm}$