

## الباب الثاني

### التفكير الابتكاري في الرياضيات

#### الفصل الأول

#### فوق مستوى الطموح

#### الفصل الثاني

#### الانطلاق في سماء الرياضيات

obbeikandi.com

## الفصل الأول

### فوق مستوى الطموح

#### (1) الابتكارات في الهندسة النظرية:

للأستاذ / السيد جمعة محمد سالم مفتش أول الرياضيات 1960م .

قد يكون الشكل الهندسي للنظرية أو التمرين مثيراً لأفكار كثيرة وتمارين متعددة ترتبط بهذا الشكل، وتبرز أثناء المحاولات التي يقوم بها المدرس أو الطالب أثناء شرح النظرية أو حل التمرين، والتي يجب الإلمام بحلولها أو الاستفادة منها، وبذلك يتفتح ذهن الطالب، وتربى فيه الملكة الرياضية والتفكير السليم. ولايضاح ذلك سأذكر المثال الآتي:

#### • تمرين :

المطلوب إيجاد قيمة نقطة  $n$  داخل المثلث  $abc$  بحيث يكون:  $\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$  اصغر ما يمكن.

وقد اعترض طريقي أثناء التفكير في حل هذا التمرين عدة تمارين يرتبط بعضها ببعض سأذكرها فيما يلي:

$\Delta abc$  رسمت على أضلاعه المثلثات متساوية الأضلاع  $cae$  ،  $bed$  ،  $abf$

والمطلوب إثبات أن:

$$ad = be = cf \quad (1)$$

(2) كل اثنين من المستقيمات الستة المتفرعة من  $n$  يحصران بينهما زاوية قياسها  $60^\circ$

(3) الدوائر  $cae$  ،  $bed$  ،  $abf$  تمر كلها بنقطة  $n$  .

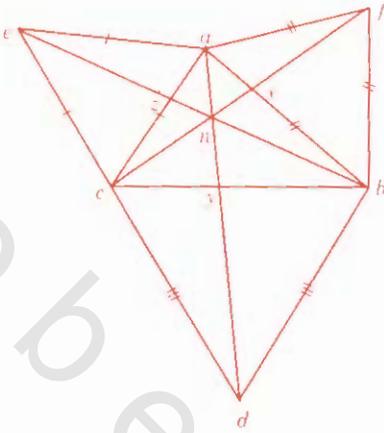
$$nd = nb + nc \quad , \quad nf = na + nb \quad , \quad ne = na + ac \quad (4)$$

(5) في الشكل الرباعي غير الدائري مساحة المستطيل المكون من القطرين أكبر

من مجموع مساحتي المستطيلين المكون كل منهما من ضلعين متقابلين.

$$\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc} \text{ نهاية صغرى.} \quad (6)$$

أولاً:



المعطيات:  $\Delta abc$  رسم خارجه المثلثات

متساوية الأضلاع  $abf, bcd, ace$

المطلوب: إثبات أن:  $\overline{ad} = \overline{be} = \overline{cf}$

البرهان:  $\Delta abd \equiv \Delta fbc$

(ضلعان وزاوية محصورة)

ومنه ينتج أن:  $\overline{ad} = \overline{cf}$

وبالمثل:  $\Delta acf \equiv \Delta aeb$

وهو المطلوب  $\therefore \overline{ad} = \overline{be} = \overline{cf}$

ثانياً:

المطلوب: إثبات أن:

$$(\angle anf) = (\angle fnb) = (\angle bnd) = (\angle dnc) = (\angle cne) = (\angle ena) = 60^\circ$$

البرهان: من تطابق  $\Delta abd, \Delta fbc$  ينتج أن:  $(\angle adb) = (\angle fcb)$

وهما مرسومتان على القاعدة المشتركة  $\overline{bn}$  وفي جهة واحدة منها.

$\therefore nbdc$  رباعي دائري

وبالمثل يمكن إثبات أن:  $anbf$  رباعي دائري،  $ance$

$$\therefore (\angle bnd) = (\angle bcd) = 60^\circ, \quad (\angle cnd) = (\angle cbd) = 60^\circ$$

$$(\angle anf) = (\angle abf) = 60^\circ, \quad (\angle bnf) = (\angle baf) = 60^\circ$$

$$(\angle ane) = (\angle ace) = 60^\circ, \quad (\angle cne) = (\angle cae) = 60^\circ$$

ثالثاً:

المطلوب: إثبات أن:  $abf, bcd, ace$  تتقاطع في نقطة  $n$

البرهان: يتضح مما تقدم أن الدوائر  $abf, bcd, ace$  كلها تمر بنقطة  $n$

رابعاً:

المطلوب: إثبات أن:  $nf = na + nb$  ،  $ne = nc + na$  ،  $nd = nb + nc$

في الشكل الرباعي الدائري  $bncd$

البرهان:  $nd \cdot bc = bn \cdot cd + bd \cdot cn$  (نظرية بطليموس)

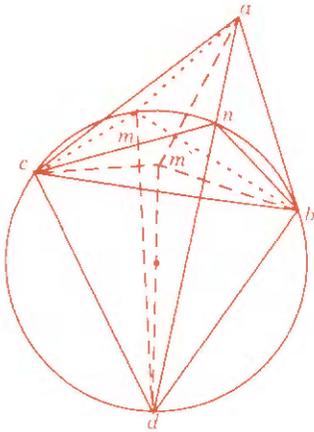
$$\therefore bc = cd = bd \quad \therefore nd = nb + nc$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$nf = na + nb , \quad \overline{ne} = \overline{na} + \overline{nc}$$

خامساً:

والآن نعود إلى التمرين الأصلي الذي تفرع أثناء التفكير في حله ، وليس هذا معناه أن التمارين السابق المذكورة ضرورية كلها لحل التمرين الأصلي ، إنما هي قد برزت أثناء التفكير. ويمكن أن يكون كل منها تمريناً قائماً بذاته وفيما يلي حل التمرين الأصلي.



المعطيات:  $\Delta abc$

المطلوب: إيجاد نقطة داخله مثل  $n$  بحيث يكون

$$\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$$

العمل: نرسم  $\Delta bcd$  متساوي الأضلاع

ثم نصل  $\overline{ad}$  فيقطع الدائرة

التي خارجة في  $n$  فتكون

هي النقطة المطلوبة.

البرهان: مما تقدم ينتج أن:  $\overline{ad} = \overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$  ولكي نثبت أن:

$\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$  أصغر ما يمكن نفرض أن نقطة أخرى مثل  $m$  داخل  $\Delta abc$  ،

$m$  هذه إما أن تقع على الدائرة  $bcd$  أو لا تقع عليه فإن وقعت عليه كان

$$md = mb + mc$$

$$(na + nb + nc) < ad < ma + mb + mc = ma + md$$

أي أن:

$$\overline{na} + nb + \overline{nc} < \overline{ma} + mb + \overline{mc}$$

وإذا كانت  $\overline{m}$  غير واقعة على الدائرة فإن الشكل  $b\overline{m}cd$  رباعي غير دائري

$$\therefore \overline{bm} \times \overline{cd} + \overline{cm} \cdot \overline{bd} > \overline{dm} \cdot \overline{bc}$$

$$\therefore \overline{cd} = \overline{bd} = \overline{bc} \quad \therefore \overline{bm} + \overline{cm} > \overline{dm}$$

$$\therefore \overline{bm} + \overline{cm} + \overline{am} > \overline{dm} + \overline{am}$$

∴ من باب أولى يكون:

$$\overline{dm} + \overline{am} > \overline{ad} \quad \text{لأن} \quad \overline{bm} + \overline{cm} + \overline{am} > \overline{ad}$$

أي: أكبر من:  $\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$

أي أن:  $na + nb + nc < \overline{ma} + \overline{mb} + \overline{mc}$

وبالمثل يمكن إثبات أن:  $\overline{na} + \overline{nb} + \overline{nc}$  أصغر من مجموع أبعاد أي نقطة أخرى

داخل المثلث  $abc$  ∴  $n$  هي النقطة المطلوبة (وهو المطلوب)

وأرجو أن يفهم أنه يمكن استنتاج تمارين أخرى غير السابقة، لها علاقة بالشكل،

بل إن الحل السابق ليس هو الوحيد لهذا التمرين، فربما يكون هناك حلول أخرى

أسهل أو أصعب من الحل المذكور.

## (2) الكشف عما يجول بخاطر الممتحن:

للأستاذ/ السيد جمعة محمد سالم      مفتش أول الرياضيات 1960م.

هذا ملخص موجز للباب من مؤلف (سوبر) نرجو أن يستفيد منه واضعو الأسئلة عندما يهدتوا بلمحاته المثيرة. وسيرى القارئ أن المؤلف رياضي خصب الخيال، وكتابه الذي نقل منه يمس موضوعات رياضية طريفة يقدمها في أسلوب أدبي أخاذ. والمؤلف أستاذ بجامعة كنتري بنيوزيلندا، وقد اشتغل بين 1948 - 1950م في جمهورية غانا كرئيس لقسم الرياضيات بجامعة ها. وله عدا هذا الكتاب مؤلفات أخرى منها كتاب أكثر رواجاً وهو Math Delight وهو يتناول الرياضيات الابتدائية بطريقة سهلة ممتعة تقرأه وكأنك تقرأ رواية بوليسية مشوقة.

بعض الممتحنين يهتمون باختبار مقدرة الطالب في الشغل الروتيني في العمليات. هل يعرف مثلاً - جدول الضرب؟ هل يجيد - مثلاً - استخدام اللوغاريتمات ؟ - صحيح من الضروري اختبار مثل هذه القدرات الروتينية، ولكنني منذ صباي كنت أعتبر مثل هذه الاختبارات سخيفة. فهي محببة عند المدرس الضعيف وما على مدرس الفصل ليمرن تلاميذه فيها إلا أن يعطي تلاميذه التمارين جميعاً من 1 إلى 50

ولكن هناك قلة من الممتحنين يريدون تشجيع المدرس الراغب في تبصير تلاميذه لا بالحقائق بل بالإدراك والشعور بالموضوع الذي يدرسه. فالممتحن يريد أن يختبر الموضوع كله ومعه تخيل الطالب وقدرته على الإبداع فهو يتوخى في أسئلته قياس هذه النواحي. ويعترض بعض المدرسين قائلين لمثل هذا الممتحن أنه غير عادل معهم. فالتلاميذ لا يمكن إعدادهم لمثل هذه الامتحانات التي لا يمكن التنبؤ بها. وردى عليهم هو أن أسألهم بدوري أيمكن التنبؤ بالموقعة الحربية؟ وإذن فهل من المستحيل تدريب قادة حربيين؟

إن تدريب الضباط يتم - أو قل يجب أن يتم - على مبادئ عامة تشتمل وتنطبق على كل المواقع الحربية. ثم إنماء وتشجيع التصرف بوضع الطالب في مجموعة من المواقف غير المتوقعة ويطالب بمعالجتها. ومثل هذا يجب أن نفعله في تدريب الرياضي. فالامتحان والموقعة شيئان يشتركان في عوامل كثيرة ... خذ مثلاً:

$$127x + 341y = 274,$$

$$218x + 73y = 111$$

والمطلوب حل المعادلتين:

هذا سؤال روتيني بحث وواضعه لا يبغى أكثر من اختبار قدرة الطالب على إتقان عمليات حسابية. يقابل هذه المسألة التالية :

$$6751x + 3249y = 26751, \quad 3249x + 6751y = 23249$$

والمطلوب حل المعادلتين

إن هذا السؤال فيه تنظيم واضح فهو على نمط النموذج المماثل  $\begin{pmatrix} x & y \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$  فالمقداران في الطرف الأيمن يتبادلان بوضع  $x$  ،  $y$  كل مكان الآخر . وعرضهما على الطالب المفكر يوحى بالفكرة الواجب الاستعانة بها في الحل .

$$10000x + 10000y = 50000 \quad \dots\dots (1) \quad \text{فبالجمع نحصل على :}$$

$$2502x - 2502y = 2502 \quad \dots\dots (2) \quad \text{وبالطرح نحصل على :}$$

$$x - y = 1 \quad \text{من (2) :} \quad , \quad x + y = 5 \quad \text{من (1) :}$$

$$y = 2 \quad , \quad x = 3 \quad \therefore$$

..... هذه مسألة تسر الأطفال المبتدئين . أما للطلبة الأرقى فيجب أن نستوحى الطبيعة في مسألتنا .. إن الباحث في تركيب الذرة يتوقع أن يقوده المزيد من البحث إلى المزيد من البساطة والمزيد من الدقة في التنظيم .

..... إن السؤال في الامتحان الجيد لا يمكن أن يخلو من هدف . فيجب أن يحتوى على تركيب ظريف أو نتيجة رائعة ، وليس من السهل تكوين مسألة جيدة . ولكن الباحث الرياضى يمكنه أن يتناول نقطة في بحثه وجعلها نواة لمسألة طريفة .

منذ بضع سنوات جاء لى طالب بمسألة وجدها عويصة الحل وهى :

$$\frac{ad - bc}{a - b - c + d} = \frac{bd - c^2}{b - 2c + d} = \frac{ac - b^2}{a - 2b + c} \quad \text{إذا كان : فبرهن أن كلاً من النسبتين}$$

هذا سؤال محدد الشكل جداً . وواضح أن حل مثل هذا السؤال بالحسابات العويصة أمر عديم المغزى ، وإن كان من الممكن الوصول لمثل هذا الحل بهذه الطرق البسيطة . إلا إن ذلك لا يصل لللب السؤال وروحه . وقد شاقني سؤال آخر يرتبط به . وهو كيف وصل الممتحن لمثل هذا السؤال؟ قلت إن بالسؤال تنظيمًا شاملاً تتلخص مظاهره فيما يلي أن:  $ac - b^2 = 0$  هو شرط كون  $a, b, c$  في توال هندسي

وبسط النسبة الأولى يحتوي على  $(ac - b^2)$  أما مقام الأول ففيه  $(a - 2b + c)$  وهي مرتبط بالمتوالية العددية فإن  $a + c = 2b$  إذا كان  $a, b, c$  في توالٍ عددي .. وأخيراً كل من الكسور الثلاثة واضح التنظيم بالنسبة لما تدخله في حروف فلو أخذت الأول مثلاً لوجدت  $a, c$  عاملي الحد الأول في البسط ومجموعي الحدين الأول والثالث في المقام. وشبيه بذلك عن  $b^2$ . ويمكن أن تقارب هذا التنظيم وتكشف ما يماثله في الكسرين الآخرين.

نخرج من ذلك بأن اختراع مسألة كهذه مستحيل تقريباً. فهي من النوع الذي لا يُخترع بل أن مكتشفها يقع عليها عندما يبحث عن شرط ما خلال بحث رياضي. كيف إذن صيغت المسألة. نجيب عن ذلك. افرض كلاً من النسبتين المتساويتين تساوي  $k$  والمطلوب مساواة النسبة الثالثة بها.

$$\text{في المعادلة: } \frac{ac - b^2}{a - 2b + c} = k \quad \dots (1) \text{ بالضرب التبادلي.}$$

$$\text{ينتج أن: } ac - k(a + c) = b^2 - 2bk$$

وواضح أن كلاً من الطرفين ينقصه  $k^2$  لنحصل على تنظيم أجمل أضف إذن  $k^2$  للطرفين ثم حل.

$$(a - k)(c - k) = (b - k)^2 \quad \therefore \text{وهي نتيجة من (1)}$$

نترجمها بأن:  $a - k, b - k, c - k$  ثلاثة مقادير في توالٍ هندسي، ها قد اتضح لنا الطريق. فلنعمل مثل ذلك مع الكسر الثاني:

$$(2) \dots \frac{bd - c^2}{b - 2c + d} = k$$

$$\text{فنستنتج أن: } (b - k)(d - k) = (c - k)^2$$

وترجمتها أن:  $b - k, c - k, d - k$  في توالٍ هندسي

$\therefore a - k, b - k, c - k, d - k$  تكون متوالية هندسية.

$$\therefore (a - k)(d - k) = (b - k)(c - k)$$

$$\text{ومنها نصل بعد الضرب وحذف } k^2 \text{ إلى: } \frac{ad - bc}{a - b - c + d} = k$$

لقد كون الممتحن مسألته من الوضع الآتي:

إذا أخذنا أعداداً أربعة  $a, b, c, d$  فما شرط ارتباطها بحيث لو طرح من كل منها

عدد معين نكون من البواقي الأربعة متوالية هندسية؟ تخرج من هذه المسألة لنقرر تقريراً هاماً هو أنه "حيث نجد تنظيمًا سنجد معنى". ومغزى ذلك أنه حيثما تقع على تنظيم في مقدار رياضي علينا أن نتحرى وراء أصله ومسبباته. وليس بكاف أن نكتشف نظرية ونتمكن من برهنتها بحسابات عديمة الشكل والمغزى. إنما يجب أن نفهم ما كشفناه.

إن كشف مغزى معادلة جبرية قد يستغرق وقتاً طويلاً. وقد علمتني التجربة أن مهاجمة أمثال هذه المسائل قد لا يثمر قبل مضي ربما يوم أو أسبوع أو شهر حتى تواتني فكرة. إلا إذا أوحينا أمامها بفكرة تقود للسير في الاتجاه السليم.

... لنأخذ كمثال آخر لبحثنا المسألة الآتية من جبر "هول" و "نايت" (العالي)

إذا كانت:  $a = tb + yc, b = xc + ta, c = ya + xb$

$$\frac{a^2}{1-x^2} = \frac{b^2}{1-y^2} = \frac{c^2}{1-t^2} \quad \text{برهن أن:}$$

هذا تمرين جبري سهل ولكننا هنا نبحث كيف أنشأه واضعه.

إن لم تكن هناك مصادفة عجيبة فإن السيدين هول ونايت كانا يبحثان حساب مثلثات لا جبر عند وضع هذا السؤال .. فثلاثة مجاهيل تتحدد بثلاث معادلات لا باثنتين فلنحاول بعض حساب المثلثات.

... فإذا علم من المثلث  $abc$  أضلاعه الثلاثة  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  فإن تحديد الزوايا  $a, b, c$  يستلزم ثلاث معادلات ولكن حساب المثلثات يعطينا علاقة  $\bar{a} = \bar{c} \cos b + \bar{b} \cos c$ ، ومثلها:

$$\cos a = \frac{\bar{b}^2 + \bar{c}^2 - \bar{a}^2}{2\bar{b}\bar{c}} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\bar{a}}{\sin a} = \frac{\bar{b}}{\sin b} = \frac{\bar{c}}{\sin c} \quad \dots (3)$$

فإذا رمزنا بالرمز:  $\cos a = x, \cos b = y, \cos c = t$  فإن:

$$\sin^2 a = 1 - x^2, \quad \sin^2 b = 1 - y^2, \quad \sin^2 c = 1 - t^2$$

وهنا سنجد تفسير سؤال السيدين هول ونايت إذا وضعنا  $a = \bar{a}, b = \bar{b}, c = \bar{c}$

فالفرض هي الثلاث معادلات في (1) والمطلب هما العلاقتان الموجودتان في (3)

بعد رفعهما للقوى الثانية.

### (3) الرياضة متعة وغذاء:

مفتش الرياضيات بالتعليم الثانوي

للأستاذ / محمد رشاد عبد المجيد

حينما نتجاذب أطراف الحديث عن طرق التفكير والإبداع في علم الرياضيات ولا سيما حينما نعالج موضوعاً أو مسألة بفكرة جديدة بعيدة عن معظم أذهان الآخرين فإننا نحس بنشوة الانتصار، كما لو كنا في معركة فاصلة بين حق وباطل، وتغمرنا السعادة ونحس بمتعة ذهنية وإشباع علمي وغذاء روحي ...

هكذا فقد قدمت بإحساس عن هذه المسألة التي بعثها الأستاذ محمد رشاد عبد المجيد إلى أحد المدرسين الأوائل، وإنني أتصور كما لو كنت جالساً معهم.. فإنني احترم الجلسات العلمية وأهل العلم والعلماء.

• التمرين :

$\Delta abc$  فيه:  $\cot a + \cot b + \cot c = \sqrt{3}$  أثبت أنه متساوي الأضلاع.

الحل:

$$\therefore (\angle a) + (\angle b) + (\angle c) = 180^\circ \quad \therefore (\angle a) + (\angle b) = 180^\circ - (\angle c)$$

$$\therefore \tan(a + b) = -\tan c$$

$$\therefore \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = -\tan c \quad \text{بضرب الطرفين في الوسطين}$$

$$\therefore \tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

وبالضرب في  $\cot a \cot b \cot c$  يكون:

$$\cot b \cot c + \cot c \cot a + \cot a \cot b = 1 \quad \dots (1)$$

$$(\cot a + \cot b + \cot c)^2 = 3 \quad \text{من الفرض}$$

$$\therefore \cot^2 a + \cot^2 b + \cot^2 c + 2 \cot a \cot b + 2 \cot b \cot c + 2 \cot a \cot c = 3$$

..... (2)

وبضرب (1) في 6 وبضرب (2) في 2 والطرح

$$\therefore 2 \cot^2 a + 2 \cot^2 b + 2 \cot^2 c - 2 \cot a \cot b - 2 \cot b \cot c -$$

$$2 \cot a \cot c = 0$$

$$\therefore (\cot^2 a - 2 \cot a \cot b - \cot^2 b) + (\cot^2 b - 2 \cot b \cot c - \cot^2 c) +$$

$$(\cot^2 c - 2 \cot c \cot a + \cot^2 a) = 0$$

$$\therefore (\cot a - \cot b)^2 + (\cot b - \cot c)^2 + (\cot c - \cot a)^2 = 0$$

ولا يكون مجموع هذه المربعات مساوياً للصفر إلا إذا كان كل منها = صفرًا على حدة.

$$\therefore \cot a - \cot b = 0 , \cot b - \cot c = 0 , \cot c - \cot a = 0$$

$$\cot a = \cot b : ومنها$$

$$\therefore (\angle a) = (\angle b) , \cot b = \cot c \quad \therefore (\angle a) = (\angle b) = (\angle c)$$

$\therefore \Delta abc$  متساوي الأضلاع.

### (4) حل طريق:

للأستاذ/ راغب إسكندر رئيس قسم الرياضة بكلية المعلمين 1956 م.

#### • التمرين:

قطعة أرض  $abc$  محصورة بين ثلاثة مربعات مساحتها 5 أفدنة، 13 فدانا، 32 فدانا،  
32 فدانا على الترتيب. المطلوب: إيجاد مساحة  $\Delta abc$

#### تمهيد الحل:



$$\because (ab)^2 = 5, \quad \therefore ab = \sqrt{5}$$

$$\because (bc)^2 = 13, \quad \therefore bc = \sqrt{13}$$

$$\because (ac)^2 = 32, \quad \therefore ac = \sqrt{32}$$

$$\because 5 = 4 + 1$$

$$\therefore (\sqrt{5})^2 = (2)^2 + (1)^2$$

$$\because 13 = 9 + 4,$$

$$\therefore (\sqrt{13})^2 = (3)^2 + (2)^2$$

$$\because 32 = 16 + 16$$

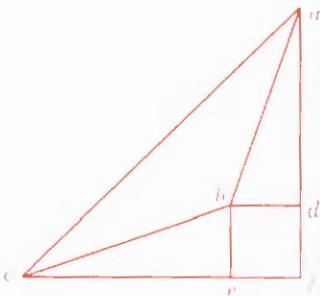
$$\therefore (\sqrt{32})^2 = (4)^2 + (4)^2$$

إذا اعتبرنا أن طول ضلع المربع الذي مساحته فدان واحد وحدة للطول فإن:

$$ab = \sqrt{5}, \quad bc = \sqrt{13}, \quad ac = \sqrt{32}$$

يمكن رسم الشكل الموضح هنا وفيه:

$$ad = 2, \quad bd = 1, \quad be = 2, \quad ce = 3$$



فيكون:  $af = 4$ ,  $cf = 4$  من الوحدات

$$\therefore ab = \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2} = \sqrt{5} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore bc = \sqrt{(be)^2 + (ce)^2} = \sqrt{13} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore ac = \sqrt{(af)^2 + (fc)^2} = \sqrt{32} \text{ وحدة طول}$$

أي أن:  $\Delta abc$  هو المثلث المفروض في المسألة

ومن الرسم يمكن إيجاد مساحة  $abc$  كما يلي:

$$= \text{مساحة } \Delta cba$$

مساحة  $\Delta cfa$  - [مساحة  $\Delta dba$  + مساحة  $\Delta ceb$  + مساحة المستطيل  $efdb$ ]

$$= \frac{4 \times 4}{2} - \left( \frac{2 \times 1}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + 1 \times 2 \right) = 8 - 6 = 2 \text{ فدان}$$

وليس من العسير الوصول لنفس الجواب عن طريق إحدى النظريتين الخاصتين بطول الضلع المقابل للزاوية الحادة أو المنفرجة ومنه نحصل على أحد ارتفاعات المثلث.

## (5) استغلال الميكانيكا في برهان نظرية فيثاغورث:

للأستاذ / محمد محمد مصطفى      المدرس بالمعهد العلمي 1959 م.

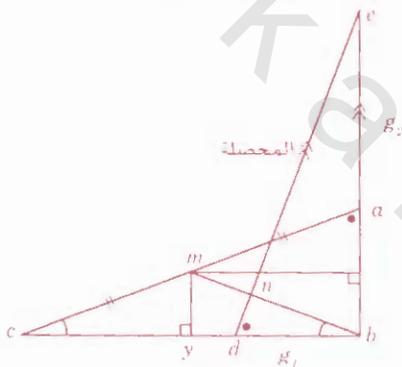
الحل:

**العمل:** نرسم  $\overline{ba}$  ، ونأخذ  $e \in \overline{ba}$  بحيث  $\overline{be} = \overline{bc}$  ثم نأخذ نقطة  $d \in \overline{bc}$  بحيث  $\overline{bd} = \overline{ba}$  ، وننصف  $\overline{ac}$  في  $m$  ثم نسقط الأعمدة  $\overline{mx}$  ،  $\overline{my}$  على  $\overline{ab}$  ،  $\overline{bc}$  على الترتيب، نصل  $\overline{mb}$  فيقطع  $\overline{de}$  في نقطة  $n$  .

**البرهان:**  $\therefore \overline{bm}$  متوسط في  $\Delta abc$  القائم الزاوية في  $a$

$$\therefore \overline{bm} = \frac{1}{2} \overline{ac} = \overline{am}$$

$$\therefore (\angle mab) = (\angle mba)$$



لكن  $(\angle mba)$  تتمم  $(\angle mbd)$

$\therefore (\angle mab)$  تتمم  $(\angle mbd)$

$\therefore \Delta bac \equiv \Delta bde$  وينتج أن:  $\overline{ac} = \overline{ed}$

،  $(\angle bac) = (\angle dbe)$  ،

،  $(\angle bde)$  تتمم  $(\angle mbd)$  ،

أيضاً  $(\angle bnd) = 90^\circ$

أي أن:  $\overline{bm} \perp \overline{de}$  في نقطة  $n$

$\therefore \overline{my} \parallel \overline{ab}$  ،  $\overline{my}$  ينصف  $\overline{ac}$  في  $m$

$$\therefore my = \frac{1}{2} ab$$

$$mx = \frac{1}{2} bc \quad \text{وبالمثل:}$$

نفرض أن:  $\overline{be}$  ،  $\overline{db}$  يمثلان القوتين  $\vartheta_2$  ،  $\vartheta_1$  تمثيلاً تاماً.

$\therefore$  محصلتهما تؤثر في نقطة  $b$  ويمثلها  $\overline{de}$  مقداراً واتجاهاً.

بأخذ العزوم حول نقطة  $m$ :

عزم القوة  $\vartheta_1$  حول  $m$

$$\overline{db} \times \overline{my} = \overline{ab} \times \frac{1}{2} \overline{ab} = \frac{1}{2} (\overline{ab})^2$$

عزم القوة  $\mathcal{O}_2$  حول  $m$  =

$$\overline{db} \times \overline{mx} = \overline{bc} \times \frac{1}{2} \overline{bc} = \frac{1}{2} (\overline{bc})^2$$

$\overline{de} \perp \overline{bm}$   $\therefore$  المحصلة تعمل عند نقطة  $m$  ، وتوازي  $\overline{de}$

$\therefore \overline{bm} \perp$  خط عمل المحصلة المار بنقطة  $b$

$\therefore \overline{bm}$  هو ذراع عزم المحصلة حول نقطة  $m$

$\therefore$  عزم المحصلة حول  $m$  =

$$\overline{de} \times \overline{mb} = \overline{ac} \times \frac{1}{2} \overline{ac} = \frac{1}{2} (\overline{ac})^2$$

$\therefore$  المجموع الجبري لعزمي القوتين حول  $m$  = عزم محصلتهما حول نفس النقطة

$$\therefore \frac{1}{2} (\overline{ab})^2 + \frac{1}{2} (\overline{bc})^2 = \frac{1}{2} (\overline{ac})^2$$

$$\therefore (\overline{ab})^2 + (\overline{bc})^2 = (\overline{ac})^2 \quad \text{وهو المطلوب}$$

## (6) شبه المنحرف على المشرحة:

مدرس بمدرسة دكرنس الثانوية
للأستاذ / كامل فؤاد عبد الجواد

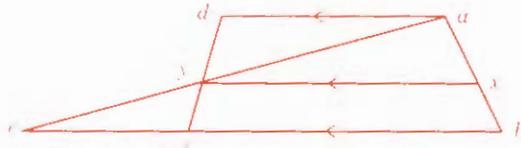
### الحل:

شكل من الأشكال .. له من الأضلاع أربعة يتوازي اثنان منها ويعرف باسم شبه المنحرف. وقيل إنه سمي كذلك لأن ضلعاً فيه ينحرف عن الطريق القويم فلا يتوازي زميله المقابل. ورأت كتب الهندسة أن تشير إليه في ذيل طائفة الأشكال الرباعية متوازية الأضلاع على زعم أنه متوازي أضلاع ناقص. ويجوز أيضاً القول بأنه مثلث ناقص بكيفية خاصة بدليل أن المسائل المتعلقة به لها ما يناظرها عند المثلث، ولكنه على كل حال لم يبلغ من المثلث أهميته، ولا شارك متوازي الأضلاع خواصه الأنيقة والأصح إنه عاله عليهما نُشَرِّحه إلى مثلثات ومتوازيات أضلاع. وبعد هذا التقديم لشبه المنحرف نعرض موضوعنا، وهو معالجة بنواح مختلفة عن الشكل أغلبها غير مطروق مراعين أنه في الأشكال الآتية  $ad \parallel bc$  وأن بعض الصيغ تستلزم أن يكون  $ad < bc$ .

(1) كل مستقيم يرسم موازياً قاعدتي شبه المنحرف يقسم ساقيه (وكذلك قطريه) إلى أجزاء متناسبة وبالعكس: إذا انقسم ساقاه (أو قطراه) إلى أجزاء متناسبة كان المستقيم الواصل بين نقطتي التقسيم موازياً قاعدتيه. (العمل كما في الشكل).

(2) في الشكل المرسوم يتعين طول  $xy$  بدلالة القاعدتين والنسبة التي ينقسم بها كل من الساقين ولتكن  $m : n$

البرهان:



$$\frac{de}{ad} = \frac{ce}{yd} = \frac{n}{m}$$

$$\therefore ce = \frac{n}{m} \times ad \quad \dots (1)$$

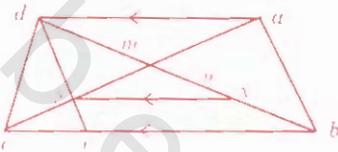
$$\frac{xy}{be} = \frac{ax}{ab} = \frac{m}{m+n}$$

$$\therefore xy = \frac{m}{m+n} \times be = \frac{m}{m+n} (bc + ce)$$

$$= \frac{m}{m+n} (\overline{bc} + \frac{n}{m} \times \overline{ad}) = \frac{m \cdot \overline{bc} + n \cdot \overline{ad}}{m+n} \quad \text{وهو المطلوب}$$

إذا كان  $\overline{xy}$  يقسم كلاً من  $\overline{ab}$ ،  $\overline{cd}$  من الخارج بنسبة  $m : n$  فإنه يمكن بطريقة مماثلة تماماً إثبات أن:

$$\overline{xy} = \frac{m \cdot \overline{bc} - n \cdot \overline{ad}}{m-n}$$



(3) أما إذا انقسم القطران  $\overline{ac}$ ،  $\overline{db}$  من

الداخل في  $x, y$  بنسبة  $m : n$  فإنه

يمكن بطريقة مماثلة تماماً إثبات أن:

$$xy = \frac{m \cdot bc - n \cdot ad}{m+n}$$

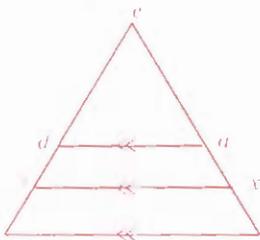
(4) نتيجتان هامتان لما سبق:

- المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين يوازي القاعدتين ويساوي نصف مجموعهما.
- المستقيم الواصل بين منتصفى القطرين يوازي القاعدتين ويساوي نصف الفرق بينهما.

(5) كيف تقسم شبه المنحرف إلى شكلين متشابهين بمستقيم يوازي قاعدته؟

نرسم  $\overline{cd}$ ،  $\overline{ba}$  حتى يتلاقيا في  $e$ ، نأخذ  $x \in \overline{be}$  بحيث يكون:  $ex$  وسطاً متناسباً بين  $\overline{ea}$ ،  $\overline{eb}$  ثم نرسم  $\overline{xy} \parallel \overline{bc}$  ويقطع  $\overline{ce}$  في  $y$  فيكون الشكلان  $axyd$ ،  $xbcy$  متشابهين.

البرهان:



$$\therefore \frac{ea}{ex} = \frac{ex}{eb} = \frac{ad}{xy} = \frac{xy}{bc}$$

$$\therefore \frac{ex - ea}{eb - ex} = \frac{ad}{xy} = \frac{xy}{bc}$$

$$\therefore \frac{ad}{xb} = \frac{ad}{xy} = \frac{xy}{bc} = \frac{dy}{yc}$$

وحيث إن الزوايا المتناظرة بالشكلين متساوية.  $\therefore$  فهما متشابهان.

(6) إذا كانت  $e$  منتصف  $\overline{ad}$  ،  $f$  منتصف  $\overline{bc}$  فإن  $\overline{ef}$  يمر بنقطة تلاقي القطرين

وامتداده يمر بنقطة تلاقي امتدادي الساقين

يوجد أكبر من برهان وأجملها كالآتي:

في  $\Delta tbc$ :

$$\frac{\overline{ta}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{td}}{\overline{dc}}, \quad \overline{bf} = \overline{fc}$$

$$\therefore \overline{ta} \times \overline{bf} \times \overline{cd} = \overline{ab} \times \overline{fc} \times \overline{dt}$$

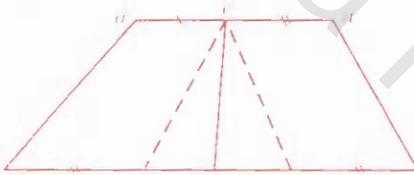
$\therefore \overline{ca}, \overline{bd}, \overline{tf}$  تتلاقى في نقطة واحدة (r) ..... (1)

وبالمثل في  $\Delta tad$  يمكن إثبات أن:

$$\overline{tb} \times \overline{ae} \times \overline{dc} = \overline{ba} \times \overline{ed} \times \overline{ct}$$

$\therefore \overline{db}, \overline{ac}, \overline{te}$  تتلاقى في نقطة واحدة (r) أيضاً ..... (2)

من (1) ، (2) يثبت المطلوب



(7) علاقة  $\overline{ef}$  بأضلاع شبه المنحرف:

$$\begin{aligned} & (\overline{ab})^2 + (\overline{dc})^2 \\ &= 2(\overline{bf} - \overline{ae})^2 + 2(\overline{ef})^2 \end{aligned}$$

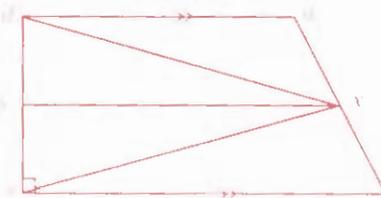
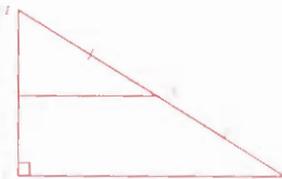
(نلاحظ صيغة أبولونيوس والعمل كما في الشكل) كما أنه سهل إثبات أن  $\overline{ef}$

يقسم الشكل إلى شكلين متكافئين فهو بحق المستقيم المتوسط لشبه المنحرف.

وأقدم هذا لكي أشير إلى أن معظم المسائل المتعلقة بشبه المنحرف يسهل

اكتشافها وبرهنتها بالبحث عن نظائرها عند المثلث (المثلث هو شبه المنحرف

صغرت إحدى قاعدتيه حتى انعدمت).



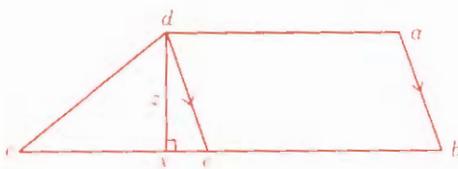
$abcd$  شبه منحرف قائم فيه:  $(\angle c) = 90^\circ$  ،  $\overline{ad} \parallel \overline{bc}$  ،  $x$  منتصف  $\overline{ab}$  والمطلوب

إثبات أن:  $\overline{xc} = \overline{xd}$  ويمكن إثبات ذلك بطرق مختلفة منها الطريقة التي نثبت بها  
 أن:  $\overline{xc} = \overline{xd}$  في  $\Delta abc$  إذا فرض أن:  $(\angle b) = 30^\circ$  فلاشك أن:  $\overline{dc} = \frac{1}{2} \overline{ab}$   
 على اعتبار أن  $\overline{ab}$  هو نظير الوتر.

(8) لو بحثنا عن عناصر شبه المنحرف فمن المناسب القول بأنها ثمانية: أربعة أضلاع،  
 قطران، زاويتان غير متكاملتين هذا مع العنصر المتضمن في التعريف، وهو توازي  
 ضلعين فيه بما يجعل عدد زوايا الشكل تختزل إلى اثنتين عند أخذها في الاعتبار.  
 وعلى العموم يتعين الشكل الرباعي بمعلومية خمسة عناصر منها ضلعان على  
 الأقل طبعاً، فإذا توازى فيه ضلعان فهذا أحد العناصر حيث يجعل تحديد زاوية  
 للشكل تحديداً ضمناً لأخرى.

∴ أربعة عناصر تكفي لتعيين شبه المنحرف ويبدو أن عدد الحالات الممكنة  
 $70 = 4 \cdot 8$  ولكن يلاحظ وجود حالات متماثلة مثل  $(\overline{ba}, \overline{ad}, \overline{bc}, \angle c, \overline{cd}, \overline{da})$   
 $(\overline{cb}, \angle b, \overline{ba}, \overline{cd})$  (مثل أكثر من حل) كما توجد حالات مبهمة (أكثر من حل)  
 ومثل هذه الحالات يجب إسقاطها ومع ذلك فلا يزال العدد كبيراً وبعض الحلول  
 صعبة والحديث عنها يطول، ولكني قد أعطيته فكرة وأكتفى بالإشارة بأنه من  
 السهل رسم شبه المنحرف بمعلومية أضلاعه الأربعة، وكذلك بمعلومية ضلعيه  
 المتوازيين وقطريه وأترك ذلك للقارئ.

(9) إيجاد مساحة شبه المنحرف بدلالة أضلاعه الأربعة:



لذلك نرسم:  $de \parallel ab$  فيكون  $de = ab$

$$\overline{ec} = \overline{bc} - \overline{ad}$$

$$\therefore z = \frac{2(\Delta dec)}{\overline{ec}}$$

حيث  $z$  ارتفاع شبه المنحرف،  $\Delta$  نصف محيط  $\Delta dec$

$$z = \frac{2}{ec} \sqrt{s(s-de)(s-ec)(s-cd)}$$

$$= \frac{2}{bc-ad} \sqrt{s(s-ab)(s-bc+ad)(s-cd)}$$

نرمز لنصف مجموع أطوال أضلاع شبه المنحرف بالرمز  $\mathcal{C}_1$

بالنظر في الشكل نجد أن محيط شبه المنحرف - محيط المثلث =

$$2ad = be + ad \quad \therefore \overline{ad} = \mathcal{C}_1 - \overline{ad} \quad \therefore \overline{ad} - \overline{ad} = \mathcal{C}_1$$

$$\therefore z = \frac{2}{\overline{bc} - \overline{ad}} \sqrt{(\mathcal{C}_1 - \overline{ad})(\mathcal{C}_1 - \overline{ad} + \overline{ab})(\mathcal{C}_1 - \overline{bc})(\mathcal{C}_1 - \overline{ad} - \overline{cd})}$$

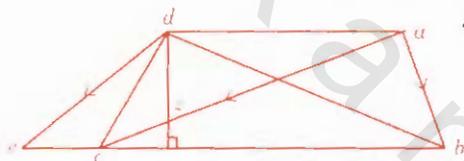
$$\frac{\overline{bc} + \overline{ad}}{2} \times z = \text{مساحة شبه المنحرف} \therefore$$

$$= \frac{\overline{bc} + \overline{ad}}{\overline{bc} - \overline{ad}} \sqrt{(\mathcal{C}_1 - \overline{ad})(\mathcal{C}_1 - \overline{ad} - \overline{ab})(\mathcal{C}_1 - \overline{bc})(\mathcal{C}_1 - \overline{ad} - \overline{cd})}$$

(10) إيجاد مساحة شبه المنحرف بدلالة قاعدتيه وقطره:

نرسم  $\overline{de} \parallel \overline{ac}$  فيكون:  $\overline{de} = \overline{ac}$ ,  $\overline{eb} = \overline{bc} + \overline{ad}$

$$\therefore z = \frac{2(\Delta deb)}{\overline{ec}}$$



$$\therefore \frac{1}{2} \text{ محيط } \Delta bed = \mathcal{C}_1$$

$$z = \frac{2}{\overline{eb}} \sqrt{\mathcal{C}_1(\mathcal{C}_1 - \overline{de})(\mathcal{C}_1 - \overline{eb})(\mathcal{C}_1 - \overline{bd})}$$

$$= \frac{2}{\overline{bc} + \overline{ad}} \sqrt{\mathcal{C}_1(\mathcal{C}_1 - \overline{ac})(\mathcal{C}_1 - \overline{bc} - \overline{ad})(\mathcal{C}_1 - \overline{bd})}$$

نضع  $\mathcal{C}_2 = \frac{1}{2}(\overline{ac} + \overline{bd} + \overline{ad} + \overline{bc})$  ..... (1) ولكن

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{2}(\overline{de} + \overline{eb} + \overline{bd}) = \frac{1}{2}(\overline{ac} + \overline{bc} + \overline{ad} + \overline{bd}) \quad \dots (2)$$

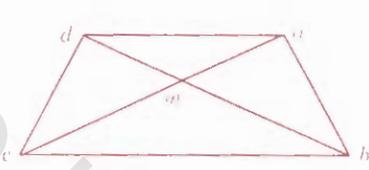
من (1)، (2)  $\therefore \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$

$$\therefore z = \frac{2}{\overline{bc} + \overline{ad}} \sqrt{\mathcal{C}_2(\mathcal{C}_2 - \overline{ac})(\mathcal{C}_2 - \overline{ad} - \overline{bc})(\mathcal{C}_2 - \overline{bd})}$$

ومنه مساحة شبه المنحرف تساوي:

$$= \sqrt{\mathcal{C}_2(\mathcal{C}_2 - \overline{ac})(\mathcal{C}_2 - \overline{bc} - \overline{ad})(\mathcal{C}_2 - \overline{bd})}$$

(11) إذا تقاطع قطرا شبه المنحرف فإن مساحة كل مثلث من المثلثات الأربعة الناشئة تتعين بدلالة قاعدتي شبه المنحرف وارتفاعه:



$$\frac{\text{مساحة } (\Delta mad)}{\text{مساحة } (\Delta mcb)} = \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{cb})^2}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة } (\Delta mad)}{(\overline{ad})^2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta mcb)}{(\overline{cb})^2}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة } (\Delta mad)}{\text{مساحة } (\Delta mab)} = \frac{\overline{md}}{\overline{mb}} = \frac{(\overline{ad})^2}{\overline{ad} \times \overline{cb}}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة } (\Delta mad)}{(\overline{ad})^2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta mab)}{\overline{ad} \times \overline{cb}}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة } (\Delta mad)}{(\overline{ad})^2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta mcb)}{(\overline{cb})^2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta mab)}{\overline{ad} \times \overline{cb}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta mdc)}{\overline{ad} \times \overline{cb}}$$

وهذه هي النسبة بين المثلثات بدلالة القاعدتين، ثم بجمع المقدمات والتوالي:

$$\frac{\text{مساحة شبه المنحرف}}{(\overline{ad})^2 + (\overline{cb})^2 + 2\overline{ad} \times \overline{cb}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta mad)}{(\overline{ad})^2}$$

$$\frac{\text{مساحة شبه المنحرف}}{(\overline{ad} + \overline{cb})^2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta mad)}{(\overline{ad})^2}$$

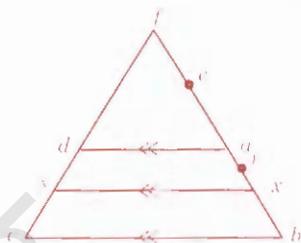
$$\therefore \text{مساحة } (\Delta mad) = \text{مساحة شبه المنحرف} \times \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{ad} + \overline{cb})^2}$$

$$= \frac{1}{2} z \times (\overline{ad} + \overline{cb}) \times \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{ad} + \overline{cb})^2} = \frac{1}{2} z \times \frac{(\overline{ad})^2}{(\overline{ad} + \overline{cb})}$$

$$\text{مساحة } (\Delta mcb) = \frac{1}{2} z \times \frac{(\overline{cb})^2}{(\overline{ad} + \overline{cb})} \quad \text{وبالمثل}$$

$$\text{مساحة } (\Delta mab) = \frac{1}{2} z \times \frac{\overline{ad} \cdot \overline{cb}}{\overline{ad} + \overline{cb}}$$

(12) كيف تقسم شبه المنحرف إلى جزئين متكافئين بمستقيم // قاعدتيه :



نمد  $\overline{ba}$  ،  $\overline{cd}$  ليتقاطعا في  $e$

نأخذ  $f \in \overline{be}$  بحيث يكون:  $(\overline{ea})^2 = \overline{ef} \times \overline{eb}$

(عملية إيجاد الثالث المتناسب)

ننصف  $\overline{fb}$  في  $r$  ، ونأخذ  $x \in \overline{eb}$  بحيث يكون:

$$(\overline{ex})^2 = \overline{er} \times \overline{eb}$$

عملية إيجاد الوسط المتناسب) ، نرسم  $\overline{xy} \parallel \overline{bc}$

$$\frac{\text{مساحة } (\Delta ead)}{(\overline{ea})^2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta exy)}{(\overline{ex})^2} = \frac{\text{مساحة } (\Delta ebc)}{(\overline{eb})^2}$$

البرهان:

$$\therefore \frac{\text{مساحة } (\Delta ead)}{\overline{ef} \times \overline{eb}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta exy)}{\overline{er} \times \overline{eb}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta ebc)}{(\overline{eb})^2}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة } (\Delta ead)}{\overline{ef}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta exy)}{\overline{er}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta ebc)}{\overline{eb}}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة } (\Delta exy) - \text{مساحة } (\Delta ead)}{\overline{er} - \overline{ef}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta ebc) - \text{مساحة } (\Delta exy)}{\overline{eb} - \overline{er}}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة الشكل } (axyd)}{\overline{fr}} = \frac{\text{مساحة الشكل } (xbcy)}{\overline{rb}}$$

$$\therefore \overline{fr} = \overline{rb} \quad \therefore \text{الشكل } axyd \text{ يكافئ الشكل } xbcy$$

## (7) تركيب مسألة:

للأستاذ / كامل فؤاد عبد الجواد م.ث. بمدرسة دكرنس الثانوية

## • التمرين:

في  $\Delta abc$  متساوي الأضلاع. رسمت دائرة قطرها  $\overline{bc}$ ،  $d \in \overline{bc}$  بحيث كان  $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$ ، رسم  $\overline{ad}$  فقطع الدائرة في  $t$ ،  $e$  والمطلوب إثبات أن:  
 $\overline{at} : \overline{td} : \overline{de} = 6 : 8 : 7$

## الحل:

البرهان: في  $\Delta abd$ :

$$\begin{aligned} (\overline{ad})^2 &= (\overline{ab})^2 + (\overline{bd})^2 - 2\overline{ab} \cdot \overline{bd} \cos 60^\circ \\ &= 4r^2 + \frac{4}{9}r^2 - 2 \times 2r \times \frac{2}{3}r \times \frac{1}{2} \\ &= 4r^2 + \frac{4}{9}r^2 - \frac{4}{3}r^2 = \frac{28}{9}r^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{ad} = \frac{2\sqrt{7}}{3}r$$

$$td \times de = bd \times dc = \frac{2}{3}r \times \frac{4}{3}r = \frac{8}{9}r^2$$

$$at \times ae = af \times ac = r \times 2r = 2r^2,$$

نفرض أن:  $at = x$ ,  $td = y$ ,  $de = z$

$$\therefore x + y = \frac{2\sqrt{7}}{3}r \quad \dots\dots (1) \quad , \quad y \times z = \frac{8}{9}r^2 \quad \dots\dots (2)$$

$$x(x + y + z) = 2r^2 \quad \dots\dots (3)$$

نحل المعادلات الثلاثة كالاتي:

$$\therefore \left( \frac{2\sqrt{7}}{3}r - y \right) \left( \frac{2\sqrt{7}}{3}r + \frac{8}{9}r^2 \right) = 2ry$$

$$\therefore \frac{28}{9}ry - \frac{2\sqrt{7}}{3}y^2 + \frac{16\sqrt{7}}{27}r^2 - \frac{8}{9}ry = 2ry$$

$$\therefore 84ry - 18\sqrt{7}y^2 + 16\sqrt{7}r^2 - 24ry = 54ry$$

$$\therefore -18\sqrt{7}y^2 + 6ry + 16\sqrt{7}r^2 = 0$$

$$\therefore 9\sqrt{7}y^2 - 3ry - 8\sqrt{7}r^2 = 0$$

$$\therefore (3\sqrt{7}y - 8r)(3y + \sqrt{7}r) = 0$$

ومنها  $y = \frac{8}{3\sqrt{7}}r$  ، وبالتعويض عن قيمة  $y$  في (2)

$$\therefore \frac{8}{3\sqrt{7}}r \times z = \frac{8}{9}r^2 \quad \therefore z = \frac{8}{9} \times \frac{3\sqrt{7}}{8}r = \frac{\sqrt{7}}{3}r$$

وبالتعويض عن  $y$  في (1)

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{7}}{3}r - \frac{8}{3\sqrt{7}}r = \frac{14-8}{3\sqrt{7}}r = \frac{2}{\sqrt{7}}r$$

$$\therefore x : y : z = \frac{2}{\sqrt{7}}r : \frac{8}{3\sqrt{7}}r : \frac{\sqrt{7}}{3}r = 6 : 8 : 7 \quad \text{وهو المطلوب}$$

$$\therefore z = \frac{1}{2}(x + y) \quad (2) \text{ من البرهان:}$$

$$\text{أي أن: } de = \frac{1}{2}ad$$

$$\text{من الفرض: } bd = \frac{1}{2}dc$$

$$(\angle bde) = (\angle cda) \quad \therefore \Delta bde \simeq \Delta cda \quad \therefore be = \frac{1}{2}ac = r$$

$$\therefore \overline{be} = \text{طول ضلع المسدس المنتظم المرسوم داخل الدائرة}$$

(3) الخطوة السابقة في الحل تبدو منطقية كما أنها عامة بمعنى أنه إذا تعينت

النسبة التي تنقسم بها  $bc$  في  $d$  فإن النسبة  $de : td : at$  يمكن إيجادها كالاتي:

(1) نحل  $\Delta abd$  (ضلعان وزاوية محصورة) للحصول على طول  $\overline{ad}$  بدلالة  $r$  لزوم

تشكيل إحدى المعادلات الثلاثة.

(2) نحصل على المعادلتين الأخيرتين من خواص الشكل الهندسية كما سبق،

وهذا ممكن دائماً.

(3) نحل المعادلات الثلاثة وهذا ممكن أيضاً. وإذا أريد إيجاد  $\overline{be}$  بدلالة  $r$

(i) نوجد  $\overline{ae}$  بدلالة  $r$  كما سبق ( $x + y + z =$ )

$$\frac{\sin a_1}{\sin (120^\circ - a_1)} = \frac{\overline{bd}}{\overline{ab}} \text{ (ب) نوجد } \cos a_1 \text{ من العلاقة}$$

قانون الجيب = قيمة عددية  $m$  مثلاً ونعوض عن الجيب بجيب التمام ونحل المعادلة وهي سهلة.

(ج) نطبق  $(\overline{be})^2 = (\overline{ab})^2 + (\overline{ae})^2 = 2\overline{ab} \cdot \overline{ae} \cos a_1$  هذا مع وجود طرق أخرى غير أن ما ذكرناه هو الأسهل لصعوبة التفاهم مع الجذور الصم.

(4) لاحظنا في البرهان السابق أن:  $\overline{at} : \overline{td} = 6 : 8 = 3 : 4$  ويمكن إذن استغلال الشكل في وضع عكسي ناجح ثم البحث عن حل أو حلول:

### • تمرين :

$\Delta abc$  متساوي الأضلاع. فرضت النقطة  $d$  على  $\overline{bc}$  بحيث كان  $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$ . وصل  $\overline{ad}$  أثبت أن النقطة التي تقسم  $\overline{ad}$  بنسبة  $3 : 4$  تقع على الدائرة التي قطرها  $\overline{bc}$

### الحل:

**العمل:** لتكن  $t$  هي النقطة التي تقسم  $\overline{ad}$  بنسبة  $3 : 4$  فنصل  $\overline{tb}$ ،  $\overline{tc}$  ثم نرسم  $\overline{ct}$  حتى يقطع  $\overline{ab}$  في  $x$ ، ونرسم  $\overline{dy} \parallel \overline{cx}$  ويقطع  $\overline{ab}$  في  $y$ ، ونصل  $\overline{xd}$

**البرهان:** في  $\Delta ayd$ :

$$\frac{ax}{xy} = \frac{at}{td} = \frac{3}{4}$$

في  $\Delta bxc$ :

$$\frac{by}{yx} = \frac{bd}{dc} = \frac{2}{4}$$

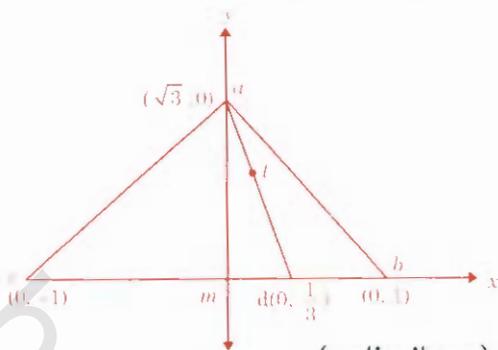
$$\therefore \overline{ax} : \overline{xy} : \overline{yb} = 3 : 4 : 2$$

$$\overline{bd} = \frac{1}{3} \overline{bc} \text{ ولكن } \overline{ax} = \frac{1}{3} \overline{ab}$$

$$\therefore \overline{ax} = \overline{bd}$$

(ويمكن الحصول على هذه النتيجة باختصار باستخدام نظرية منيلوس دون رسم  $\overline{dy}$ )

$\therefore \Delta axc, \Delta bda$  ينطبقان (ضلعان وزاوية محصورة) ومنه  $(\angle axc) = (\angle bda)$



∴ الشكل  $x b d t$  رباعي دائري

$$\therefore (\angle x t b) = (\angle x d b)$$

ولكن  $(\angle x d b) = 90^\circ$

$$\text{(لأن } (\angle b) = 60^\circ, \overline{b d} = \frac{1}{2} \overline{b x} \text{)}$$

$$\therefore (\angle x t b) = 90^\circ, (\angle b t c) = 90^\circ$$

∴  $t$  تقع على الدائرة التي قطرها  $\overline{b c}$  (وهو المطلوب)

من الحل يتبين أنها مسألة تعجب حزب المحافظين كما أن الحل التحليلي لها لا يخلو من جمال خلاسته:

نتخذ  $\overline{m a}$ ،  $\overline{c b}$  محورين للإحداثيات (حيث  $m$  منتصف  $\overline{b c}$ ) ونفرض للسهولة أن نصف طول ضلع المثلث يساوي الوحدة.

∴ النقط  $a, c, d, m$  هي كما بالرسم. ثم نعين النقطة  $t$  باستخدام قانون التقسيم من الداخل، ونعوض بإحداثياتها في معادلة الدائرة التي قطرها  $\overline{b c}$  نجد أنهما يحققان المعادلة أو نوجد ميلي كل من  $\overline{t c}$ ،  $\overline{t b}$  نجد أن حاصل ضربهما = -1

(5) بالمثل يمكن إعطاء حل أو حلول للمسألتين الآتيتين (هما عكسان لمسألتين سبق معالجتهما) ويكشفان عن جانب من الخواص الرائعة في المثلث متساوي الأضلاع.

### • المسألة الأولى:

$\triangle a b c$  متساوي الأضلاع. فرضت النقطة  $t$  داخله بحيث كان:

$$\overline{t a} : \overline{t b} : \overline{t c} = 1 : \sqrt{3} : 2$$

أثبت أن  $t$  تقع على دائرة طول قطرها  $\overline{b c}$  وإذا كان  $\overline{c t}$ ،  $\overline{a t}$  يقطعان  $\overline{a b}$ ،  $\overline{b c}$

في  $x, d$  على الترتيب. فأثبت أنهما يقسمان  $\overline{a b}$ ،  $\overline{b c}$  بنسبة 2 : 1

### • المسألة الثانية:

$\triangle a b c$  متساوي الأضلاع. فرضت النقطة  $d \in \overline{b c}$  بحيث كان  $\overline{b d} : \overline{d c} = 1 : 2$

وصل  $\overline{a d}$ . رسم  $\overline{c t}$  يصنع مع  $\overline{c a}$  زاوية قياسها يساوي  $(\angle b a d)$  ويقطع  $\overline{a d}$

في  $t$ . أثبت أن  $t$  تقع على دائرة طول قطرها  $\overline{b c}$

(6) وهذه التمارين يمكن أن تقدم للطلبة الممتازين وهي متنوعة الحلول رغم أنها اشتقت من مصدر واحد.

(1)  $\Delta abc$  متساوي الأضلاع،  $d \in \overline{bc}$  بحيث كان  $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$ ، رسم  $\overline{ad}$ ،

$t \in \overline{ad}$  بحيث كان:  $\overline{at} : \overline{td} = 3 : 4$  أثبت أن  $\overline{cd}$  يمس الدائرة المارة برؤوس  $\Delta atc$ .

(2)  $\Delta abc$  متساوي الأضلاع،  $d \in \overline{bc}$  بحيث كان  $\overline{bd} : \overline{dc} = 1 : 2$ ،

أثبت أن العمود النازل من منتصف  $\overline{ac}$  على  $\overline{ad}$  يقسمه بسبة  $3 : 4$ .

(3)  $\Delta abd$  فيه:  $(\angle b) = 60^\circ$ ،  $\overline{ab} = 3\overline{bd}$ ،  $t \in \overline{ad}$ ، بحيث كان:

$\overline{at} : \overline{td} = 3 : 4$ ، أثبت أن:  $(\angle btd) = 30^\circ$

(4)  $\Delta abd$  فيه:  $(\angle b) = 60^\circ$ ،  $\overline{ab} = 3\overline{bd}$ ، أثبت أن:

القطعة الواصلة من  $d$  إلى منتصف  $\overline{ab}$  تساوي  $\frac{1}{2}\overline{ad}$  (عددياً)

(يوجد حل في حدود منهج الإعدادية).

## (8) منصف زاوية في مثلث:

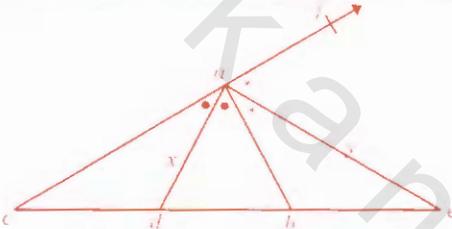
للأستاذ / كامل فؤاد عبد الجواد م.ث بمدرسة دكرنس الثانوية

هذا المثلث - الشكل البسط ذو الأضلاع الثلاثة - ما أعجبه ! وما أكثر الخواص التي يمكن أن نكتشفها فيه : علاقات بين أضلاعه وزواياه وارتفاعاته ومتوسطاته ومنصفات زواياه الداخلة والخارجة والدوائر المرسومة داخله وخارجه .... إلخ .

(1) **تمرين :**

في  $\Delta abc$  قياس الزاوية بين منصف زاوية  $a$  الخارجة والشعاع  $cb = \frac{\angle b - \angle c}{2}$

أي المطلوب: إثبات أن:  $(\angle e) = \frac{\angle b - \angle c}{2}$



**الحل:**

البرهان:  $(\angle fab) = (\angle abc) + (\angle c)$

$(\angle fae) = (\angle e) + (\angle c)$

$(\angle fab) = 2(\angle fae)$  ولكن

$$\therefore (\angle abc) + (\angle c) = 2(\angle e) + 2(\angle c)$$

$$\therefore (\angle abc) - (\angle c) = 2(\angle e)$$

أي أن:  $(\angle e) = \frac{\angle b - \angle c}{2}$  (وهو المطلوب)

(2) **تمرين :**

في الشكل السابق: إذا رسمنا المنصف الداخلي فإنه يكون عمودياً على

$$\therefore \frac{x}{y} = \tan e = \tan \frac{b-c}{2}$$

أي أن النسبة بين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية في مثلث تساوي ظل نصف الفرق بين الزاويتين الأخرين.

وهذه القاعدة يمكن أن يكون لها تطبيقات مفيدة مثلاً:

أوجد الشرط اللازم لمتساوي المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية في مثلث.

أي المطلوب: إثبات أن:  $(\angle e) = \frac{b-c}{2}$

**الحل:**

$$\tan \frac{b-c}{2} = \text{النسبة بين المنصفين}$$

$$\therefore 1 = \tan \frac{b-c}{2}$$

$$\therefore \left( \frac{b-c}{2} \right) = 45^\circ$$

وهو الشرط المطلوب  $\therefore (\angle b - c) = 90^\circ$

مثلاً، المثلث الذي قياسات زواياه  $10^\circ$ ،  $70^\circ$ ،  $100^\circ$  من الدرجات يكون به المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية الثالثة متساويين. وتوجد صور أخرى طريفة لهذا الشرط أثرت للقارئ استنتاجها منها.

$$\therefore \frac{b}{c} = \tan \left( 45^\circ + \frac{a}{2} \right)$$

كما أن نتيجة هذا البند تسهل حل مسألة طريفة أعرضها فيما يلي:

**المسألة:**

حل  $\Delta abc$  المعلوم فيه قياس الزاوية  $a$  وطول المنصفين الداخلي والخارجي لها.

**الحل:**

المنصفان معلومان  $\therefore \tan \frac{b-c}{2}$  معلوم ومنه نوجد  $(\angle b - c)$  ولكن  $(\angle b + \angle c)$

معلوم لأن  $(\angle a)$  معلومة

$\therefore$  يمكن إيجاد قيمة كل من قياس الزاويتين  $(\angle c)$  ،  $(\angle b)$

ولإيجاد  $(\angle c)$  ،  $(\angle b)$  نحل المثلثين  $abd$  ،  $acd$  المعلوم في كل منهما زاويتان

والضلع  $\overline{ad}$

(3) ونتيجة البند السابق تفري بالتوسع

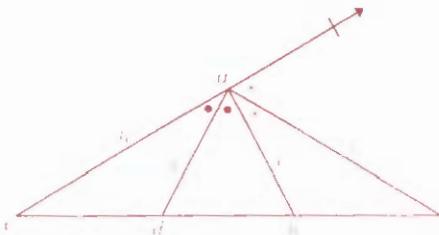
في الموضوع مع استخدام حساب

المثلثات ثم العودة للهندسة بعد كشف

أسرارها. ونوجد طرقاً مختلفة لتسلسل

البند، ولكنني انتهيت للآتي:

في الشكل المرسوم:



مساحة  $(\Delta ade) =$  مساحة  $(\Delta aeb) +$  مساحة  $(\Delta adb)$

$$\therefore \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} \bar{c}y \sin(90^\circ - \frac{a}{2}) + \frac{1}{2} \bar{c} \times x \sin \frac{a}{2} \quad \therefore xy = \bar{c}y$$

$$\therefore xy = \bar{c}y \cos \frac{a}{2} + \bar{c}x \sin \frac{a}{2} = \bar{c} (y \cos \frac{a}{2} + x \sin \frac{a}{2})$$

$$\therefore \bar{c} = \frac{xy}{\left(y \cos \frac{a}{2} + x \sin \frac{a}{2}\right)} \quad \dots (1)$$

مساحة  $(\Delta ade) =$  مساحة  $(\Delta aec) -$  مساحة  $(\Delta adc)$

$$\therefore \frac{1}{2} x \times y = \frac{1}{2} \bar{b} \times y \sin(90^\circ + \frac{a}{2}) - \frac{1}{2} \bar{b} \times x \sin \frac{a}{2}$$

$$\therefore xy = \bar{b}y \cos \frac{a}{2} - \bar{b}x \sin \frac{a}{2} = \bar{b} \left(y \cos \frac{a}{2} - x \sin \frac{a}{2}\right)$$

$$\therefore \bar{b} = \frac{xy}{\left(y \cos \frac{a}{2} - x \sin \frac{a}{2}\right)} \quad \dots (2)$$

وهاتان العلاقتان يمكن استخدامهما في حل المثلثات المعلوم فيها قياس زاوية وطول المنصفين الداخلي والخارجي لها، كما يمكن استخدامهما في أغراض أخرى.

(4) من العلاقتين السابقتين:

$$\frac{a}{c} = \frac{y \cos \frac{a}{2} + x \sin \frac{a}{2}}{xy}, \quad \frac{a}{b} = \frac{y \cos \frac{a}{2} - x \sin \frac{a}{2}}{xy}$$

$$\therefore \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{2y \cos \frac{a}{2}}{xy} \quad \text{بالجمع}$$

$$\therefore \frac{\bar{b} + \bar{c}}{\bar{b}\bar{c}} = \frac{2 \cos \frac{a}{2}}{x} \quad \dots (3)$$

$$\therefore \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{2 \sin \frac{a}{2}}{xy} \quad \text{بالطرح}$$

$$\therefore \frac{\bar{b} - \bar{c}}{\bar{b}\bar{c}} = \frac{2 \sin \frac{a}{2}}{y}, \quad \therefore y = \frac{2 \bar{b}\bar{c}}{\bar{b} - \bar{c}} \sin \frac{a}{2}$$

وهاتان العلاقتان يمكن استخدامهما في إيجاد طولي المنصفين لزاوية إذا علمت

قياسها وعلم طولاً الضلعين اللذين يحصرانها.

وسوف نعطي اهتماماً بالعلاقة (3) التي يمكن صياغتها في العبارة:

طول المنصف الداخلي لزاوية في المثلث يساوي الوسط التوافقي بين ضلعي هذه الزاوية  $\times$  جيب تمام نصف قياسها).

**نتيجة:**

$$\frac{x}{y} = \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}} \cos \frac{a}{2} \div \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} \sin \frac{a}{2} = \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}} \tan \frac{a}{2} = \tan \frac{b-c}{2}$$

وهذه هي النتيجة التي وصلنا إليها هندسياً في بند (2).

(5) حساب طول  $\bar{de}$  بدلالة عناصر  $\Delta abc$ :

$$(\bar{de})^2 = x^2 + y^2$$

$$= \left[ \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}} \cos \frac{a}{2} \right]^2 + \left[ \frac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} \sin \frac{a}{2} \right]^2$$

$$= 4\bar{b}^{-2}\bar{c}^{-2} \left[ \frac{1}{(\bar{b}+\bar{c})^2} \cos^2 \frac{a}{2} + \frac{1}{(\bar{b}-\bar{c})^2} \sin^2 \frac{a}{2} \right]^2$$

$$= \frac{4\bar{b}^{-2}\bar{c}^{-2}}{(\bar{b}^{-2}-\bar{c}^{-2})^2} \left[ (\bar{b}-\bar{c})^2 \cos^2 \frac{a}{2} + (\bar{b}+\bar{c})^2 \sin^2 \frac{a}{2} \right]^2$$

$$= \frac{4\bar{b}^{-2}\bar{c}^{-2}}{(\bar{b}^{-2}-\bar{c}^{-2})^2} \left[ \bar{b}^{-2} \left( \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} \right) + \bar{c}^{-2} \left( \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} \right) \right]^2$$

$$-2\bar{b}\bar{c} \left( \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \right)$$

$$= \frac{4\bar{b}^{-2}\bar{c}^{-2}}{(\bar{b}^{-2}-\bar{c}^{-2})^2} \left( \bar{b}^{-2} + \bar{c}^{-2} - 2\bar{b}\bar{c} \cos a \right) = \frac{4\bar{b}^{-2}\bar{c}^{-2}}{(\bar{b}^{-2}-\bar{c}^{-2})^2} a^2$$

$$\therefore \bar{de} = \frac{2\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}^{-2}-\bar{c}^{-2}}$$

وواضح أن هذه الطريقة منطقية ما دام قد حصلنا على طولي  $\bar{ad}$ ،  $\bar{ae}$  وهي قد أهدتنا

متطابقة طريفة.

$\bar{a}^2 = (\bar{b} - \bar{c})^2 \cos^2 \frac{a}{2} + (\bar{b} - \bar{c}) \sin^2 \frac{a}{2}$  ولكنها ليست أسرع الطرق فقد وجدت ثلاث طرق أخرى أكثرها اختصاراً هي:

$$\bar{de} = x + \sin \frac{b-c}{2} = \frac{2\bar{bc}}{\bar{b} + \bar{c}} \cos \frac{a}{2} + \frac{b-c}{a} \cos \frac{a}{2} = \frac{2\bar{abc}}{\bar{b}^2 - \bar{c}^2}$$

ويضعف من شأن هذا البرهان أن القانون المستخدم:  $\sin \frac{b-c}{2} = \frac{\bar{b}-\bar{c}}{a} \cos \frac{a}{2}$

وهو إحدى نتائج قانون الجيب، ليس بدرجة كافية من الشهرة.

### • نتائج:

(1) إذا كان:  $\frac{\bar{b}}{c} = m$  مثلاً فإن:  $\bar{b} = m\bar{c}$

$$\bar{de} = \frac{2\bar{a} \times m\bar{c}^2}{m^2\bar{c}^2 - \bar{c}^2} = 2\bar{a} \times \frac{2\bar{a}m}{m^2 - 1}$$

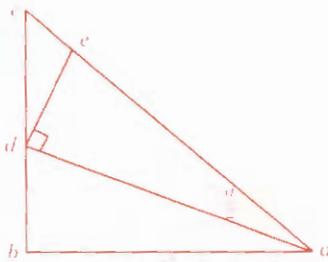
∴ نصف قطر دائرة أبولونيوس =  $\frac{2m}{m^2 - 1} \times \bar{bc}$

وذلك للنقطتين  $b, c$ ، النسبة  $m$

(ب) إذا كانت  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  أضلاعاً لمثلث فإن:  $\bar{a}, (\bar{b} - \bar{c}) \cos \frac{a}{2}, (\bar{b} + \bar{c}) \sin \frac{a}{2}$

تكون أضلاعاً لمثلث قائم الزاوية وتره  $\bar{a}$ .

(ج) إذا كان كل من  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  جذرياً فإن  $\bar{de}$  يكون جذرياً لذلك.



(6) المنصف الداخلي والوسط التوافقي:

$$x = \frac{2\bar{bc}}{\bar{b} + \bar{c}} \cos \frac{a}{2}$$

∴ الوسط التوافقي بين  $\bar{b}, \bar{c}$   $x \sec \frac{x}{2} = \bar{b}, \bar{c}$

ومن المفيد أن نطلب من الشكل طولاً يساوى  $x \sec \frac{a}{2}$

ونجد ذلك سريعاً لو كان لدينا  $\bar{df} \perp \bar{ad}$  ويقطع  $\bar{ac}$  فى  $f$

∴  $\bar{af}$  هو المطلوب مقداراً. ونعود لتركيب البرهان كالاتي:

$$\bar{af} = x \sec \frac{a}{2} = \frac{2\bar{bc}}{\bar{b} + \bar{c}} \cos \frac{a}{2} \sec \frac{a}{2} = \frac{2\bar{bc}}{\bar{b} + \bar{c}}$$

والنتيجة أننا وصلنا إلى طريقة هندسية سهلة لإيجاد الوسط التوافقي بين طولين  $\bar{b}$  ،  $\bar{c}$  مثلاً بجعلهما ضلعين في مثلث بينهما أي زاوية وننصف هذه الزاوية بالمنصف  $\bar{ad}$  مثلاً ثم نقيم عموداً من  $d$  يقطع أحد الضلعين أو امتداده في  $f$  فيكون  $\bar{af}$  هو الوسط التوافقي المطلوب.

(7) برهان هندسي لما سبق:

• مسألة:

$\triangle abc$  نصف  $(\angle a)$  بالمنصف  $\bar{ad}$  الذي لاقى  $\bar{bc}$  في  $d$ . ثم أقيم  $df \perp ad$  فقطع  $\bar{ac}$  في  $f$ . برهن على أن  $\bar{af}$  وسط توافقي بين  $\bar{ab}$  ،  $\bar{ac}$

الحل:

لذلك نرسم  $\bar{br} \perp \bar{ad}$  فيقطع  $\bar{ac}$  في  $r$  حينئذ يكون  $\bar{ar} = \bar{ab}$  ،  $\bar{br} \parallel \bar{df}$

$$\therefore \frac{\bar{ab}}{\bar{ac}} = \frac{\bar{bd}}{\bar{dc}} \quad (\text{نظرية}) ,$$

$$\frac{\bar{rf}}{\bar{fc}} = \frac{\bar{bd}}{\bar{dc}} \quad (\text{نظرية})$$

$$\therefore \frac{\bar{ab}}{\bar{ac}} = \frac{\bar{rf}}{\bar{fc}} = \frac{\bar{rf} - \bar{ar}}{\bar{ac} - \bar{af}} = \frac{\bar{af} - \bar{ab}}{\bar{ac} - \bar{af}} = \frac{\bar{ab} - \bar{af}}{\bar{af} - \bar{ac}}$$

$\therefore \bar{af}$  (وسط توافقي) بين  $\bar{ab}$  ،  $\bar{ac}$

• نتيجة: ينطبق المثلثان كل على الآخر

تمام الانطباق إذا ساوى في أحدهما طولاً ضلعين وطول منصف الزاوية بينهما نظائرهما في المثلث الآخر.

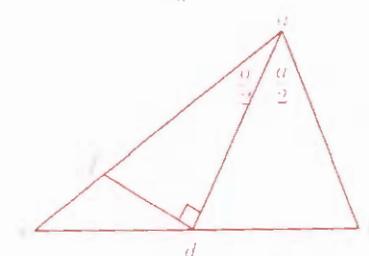
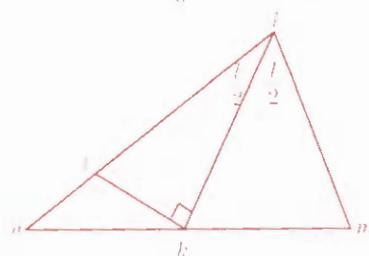
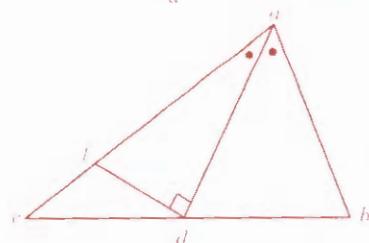
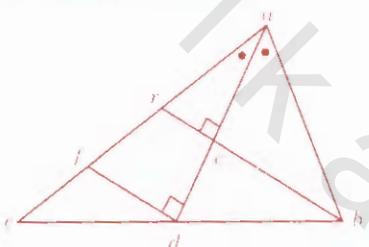
لأنه في المثلثين إذا كان:

$$\bar{ab} = \bar{lm} , \bar{ac} = \bar{ln} , \bar{ad} = \bar{lk}$$

ورسمنا  $\bar{fd} \perp \bar{ad}$  ،  $\bar{kt} \perp \bar{lk}$  كما بالشكل

فإن:  $\bar{af}$  يكون وسطاً توافقياً بين  $\bar{ab}$  ،  $\bar{ac}$

ويكون  $lt$  وسطاً توافقياً بين  $\bar{lm}$  ،  $\bar{ln}$



$$\therefore \overline{af} = \overline{lt}$$

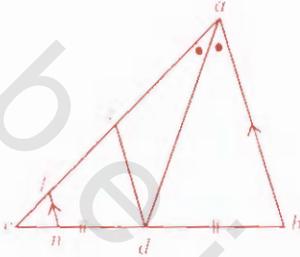
$\Delta adf \cong \Delta lkt$  ينطبق على  $\Delta lkt$   $\therefore$

$$\therefore \frac{1}{2} (\angle a) = \frac{1}{2} (\angle l)$$

$$\therefore (\angle a) = (\angle l)$$

$$\therefore \Delta abc \cong \Delta lmn$$

### (8) طريقة أخرى لإيجاد الوسط التوافقي:



نرسم  $\Delta abc$  الذي فيه:  $\overline{ab}$ ،  $\overline{ac}$  هما الطولان المراد

إيجاد وسطهما التوافقي وتنصف  $(\angle a)$  بالمنصف  $\overline{ad}$

الذي يقطع  $\overline{bc}$  في  $d$  ثم نأخذ  $n \in \overline{bc}$  بحيث

يكون:  $\overline{dn} = \overline{bd}$  ونرسم  $\overline{nf} \parallel \overline{ba}$  ويلاقى

$\overline{ac}$  في  $f$  فيكون  $\overline{af}$  هو الوسط التوافقي المطلوب

وللبرهنة على صحة ذلك ننصف  $\overline{af}$  في  $z$  ونصل

$\overline{dz}$ ، فيكون موازياً لكل من  $\overline{ba}$ ،  $\overline{nf}$

$$\therefore \frac{\overline{az}}{\overline{zc}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}}$$

$$\therefore \frac{\overline{az}}{\overline{zc}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$$

$$\therefore \frac{\overline{az}}{\overline{az} + \overline{zc}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ab} + \overline{ac}}$$

$$\therefore \overline{az} = \frac{\overline{ab} \times \overline{ac}}{\overline{ab} + \overline{ac}}$$

$$\therefore \overline{af} = \frac{2\overline{ab} \times \overline{ac}}{\overline{ab} + \overline{ac}}$$

أي أن:  $\overline{af}$  وسط توافقي بين  $\overline{ab}$ ،  $\overline{ac}$

### • نتيجة: بمقارنة هذه الطريقة بالطريقة السابقة

نجد أن لدينا تمرينين على الأقل:

ففي الشكل:  $\overline{ad}$  ينصف  $(\angle a)$

أولاً: إذا كان  $\overline{dn} = \overline{bd}$ ،  $\overline{nf} \parallel \overline{ba}$

فإن  $\overline{df} \perp \overline{ad}$

ثانياً: إذا كان:  $\overline{fn} \parallel \overline{ab}$ ،  $\overline{df} \perp \overline{ad}$  فإن  $\overline{dn} = \overline{bd}$

والطريف أن لكل من التمرينين برهاناً بنظريات الإعدادي، والعمل نرسم  $\overline{ad}$  حتى

يقطع  $\overline{fn}$  في  $(e)$  مثلاً.

## (9) معالجة مسألة:

مدرس بمدرسة دكرنس الثانوية

للأستاذ/ كامل فؤاد عبد الجواد

يقال إن الحديث ذو شجون بمعنى أننا قد تناولنا بالحديث موضوعاً معيناً فيشير آخر ذا صلة به ، وهذا يدفعنا إلى ثالث وهكذا نجد أنفسنا في النهاية على بُعد قريب أو بعيد عن موضوعنا الأول ولا يختلف الأمر كثيراً في الرياضة ، حيث نتناول بالمعادلة مسألة معينة فتفتح لنا مجالاً وتقودنا إلى مالم نتوقع فنعمل من الحبة قبة كما يقول المثل.

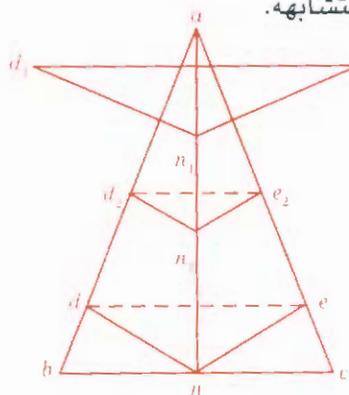
وكان الموضوع أمامي هو : أوجد نقطة على ضلع مثلث معلوم بحيث تكون النسبة بين طولي العمودين النازلين منها على الضلعين الآخرين كالنسبة بينهما على الترتيب.

هذه المسألة تطبيق مباشرة لمسألة إيجاد المحل الهندسي لنقطة بحيث تكون النسبة بين بعديها عن مستقيمين متقاطعين نسبة معلومة. ولكن الذي حدث أنه غاب عني هذا لبعض الوقت، في حين قفزت إلى ذهني فكرة معينة تعتمد على إمكان رسم مثلث يشابه آخر وتقع رؤوسه على أضلاع مثلث معلوم فحاولت كالآتي:

ليكن المثلث  $abc$  والمطلوب تعيين النقطة  $n$  على  $bc$  بحيث إذا أسقط

$$\frac{\overline{nd}}{\overline{ne}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} \text{ يكون: } \overline{nd} \perp \overline{ab}, \overline{ne} \perp \overline{ac}$$

لذلك نفرض نقطة مثل  $n_1$  داخل المثلث ونسقط منها عمودين على الضلعين  $ac$ ،  $ab$  ونأخذ على العمودين البعدين  $\overline{n_1e_1} = \overline{ac}$ ،  $\overline{n_1d_1} = \overline{ab}$ ، ثم نرسم  $d_1e_1 \parallel d_2e_2$  قاطعا  $ab$  في  $d_2$ ،  $ac$  في  $e_2$ ، ونقيم من  $e_2$ ،  $d_2$  عمودين يتلاقيان في  $n_2$ . نصل  $an_2$  ونمده على استقامته حتى يلاقي  $bc$  في  $n$  فتكون  $n$  هي النقطة المطلوبة. وإثبات ذلك سهل حيث أن المثلثات الثلاثة متشابهة.



وهذه الخطة لتعيين النقطة  $n$  تصح أن تكون خطة منطقية لتخطيط المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون النسبة بين بعديها عن مستقيمين متقاطعين نسبة معلومة (مثلاً  $\frac{x}{y}$ ) ليكون  $\overline{ab}$ ،  $\overline{ac}$  متقاطعين في نقطة  $a$ .

(الشكل السابق)  $n$  النقطة المتحركة بالشرط المذكور. نرسم  $\Delta n_1 d_1 e_1$  فيه  $\overline{n_1 d_1}$  ،  $\overline{n_1 e_1}$  عمودان على  $\overline{ac}$  ،  $\overline{ab}$  على الترتيب النسبة بينهما  $\frac{x}{y}$  (عملية) ثم نرسم  $\Delta n_2 d_2 e_2$  يشابه  $\Delta n_1 d_1 e_1$  كما سبق فيكون  $\overline{an_2}$  وامتداده من جهتيه هو المحل الهندسي المطلوب تخطيطه (مع حفظ حق المحل الهندسي الآخر).

يعرف القارئ أن مسائل المحل الهندسي على نوعين: نوع تعطى فيه مواصفات النقطة المتحركة ويطلب كشف المحل الهندسي ونوع آخر يصرح فيه بالمحل الهندسي ويطلب البرهنة على صحة هذا التصريح، فإذا كانت المسألة من النوع الأول فهي دعوى عملية ووجب أن يتضمن الحل الخطوتين:

(1) كشف المحل الهندسي وبيان مواصفاته.  
 (2) الخطة العملية لتخطيطه وإثبات أن كل نقطة عليه تفي بالشرط المذكور. وفي

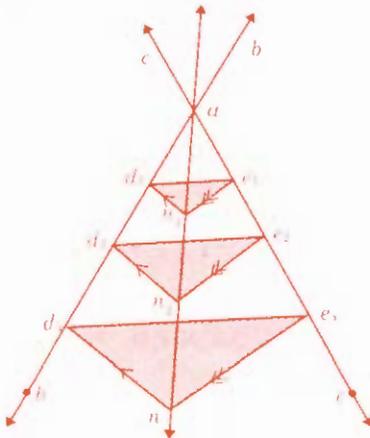
مسألتنا هذه ما هو الطريق الطبيعي الذي يتبعه الذهن للوصول إلى الخطوة الأولى: ليكن:  $\overline{cab}$  ،  $\overline{bab}$  المستقيمين المتقاطعين فإذا فرضنا أوضاعاً للنقطة المتحركة  $n$  بين  $\overline{ac}$  ،  $\overline{ab}$  مثل  $n_3$  ،  $n_2$  ،  $n_1$  ... نجد أن المثلثات  $n_1 d_1 e_1$  ،  $n_2 d_2 e_2$  متشابهة دائماً ونقطة  $a$  هي مركز التشابه لأنه:

$$\therefore \frac{n_1 d_1}{n_1 e_1} = \frac{n_2 d_2}{n_2 e_2} = \frac{x}{y}$$

من التوازي  $m(\angle n_1) = m(\angle n_2)$

$$\frac{n_1 d_1}{n_2 d_2} = \frac{n_1 e_1}{n_2 e_2}$$

∴ في كل مثلثين



∴ المثلثان متشابهان

∴ كل من  $n_2 n_1$  ،  $n_3 n_2$  ... يمر بالنقطة  $a$

∴  $n$  على مستقيم ثابت يمر بالنقطة  $a$

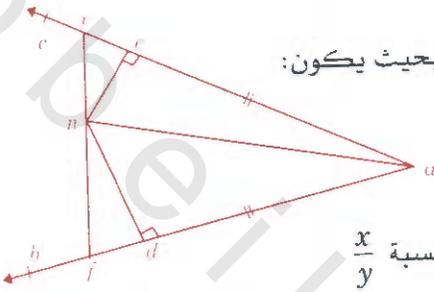
أما إذا أردنا جعل مسألتنا من النوع الثاني

فنضع نص رأسها في الأسلوب الخبري الآتي:

المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون

النسبة بين بعدها عن مستقيمين متقاطعين نسبة

معلومة وهو مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ويقسم الزاوية بينهما إلى جزئين النسبة بين جيبها كالنسبة المعلومة (يوجد حلان هندسيًا). وإضافة العبارة (ويقسم الزاوية بينهما إلى جزئين النسبة بين جيبها كالنسبة المعلومة) مفيدة لزيادة تحديد المحل الهندسي، وهنا يبرز سؤال جديد: كيف تقسم زاوية إلى جزئين النسبة بين جيبهما نسبة معلومة؟



ليكن المعلوم  $(\angle a)$  والمطلوب رسم  $\overline{an}$  بحيث يكون:

$$\frac{\sin(\angle nab)}{\sin(\angle nac)} = \frac{x}{y} \quad \text{مثلاً}$$

لذلك نأخذ على  $\overline{ab}$ ،  $\overline{ac}$  البعدين

المتساويين  $\overline{ar}$ ،  $\overline{af}$  نصل  $\overline{fr}$  نقسمه في  $n$  بنسبة  $\frac{x}{y}$

فيكون  $\overline{an}$  هو المستقيم المطلوب ولإثبات ذلك نسقط العمودين  $\overline{nd}$ ،  $\overline{ne}$  ثم

$$\frac{\sin nab}{\sin nac} = \frac{nd}{ne} = \frac{nf}{nr} = \frac{x}{y}$$

ومعنى هذا أنه قد ظهرت طريقة أخرى لتخطيط المحل الهندسي في مسألتنا وذلك برسم  $\overline{an}$  كما في العملية.

والسؤال الآن: ما هي الخطوة الأولى المناظرة من حل المسألة؟

إذا فرضنا أوضاعاً للنقطة  $n$  بين  $\overline{ab}$ ،  $\overline{ac}$  ورسمنا  $\overline{fn_1r_1}$ ،  $\overline{fn_2r_2}$  بحيث يكون

المثلثان  $af_1r_1$ ،  $af_2r_2$  متساوي الساقين فإن:

$$\frac{n_1d_1}{n_1e_1} = \frac{n_2d_2}{n_2e_2} = \frac{x}{y}$$

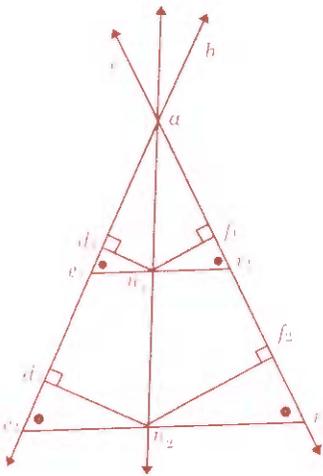
$$\therefore \frac{n_1f_1}{n_1r_1} = \frac{n_2f_2}{n_2r_2} \quad (\text{من تشابه المثلثات})$$

$$\therefore \frac{f_1r_1}{n_1r_1} = \frac{f_2r_2}{n_2r_2} \quad (\text{من خواص التناسب})$$

$$\therefore \frac{f_1r_1}{n_1r_1} = \frac{n_1r_1}{n_2r_2} = \frac{r_1a}{r_2a}, \quad (\angle r_1) = (\angle r_2)$$

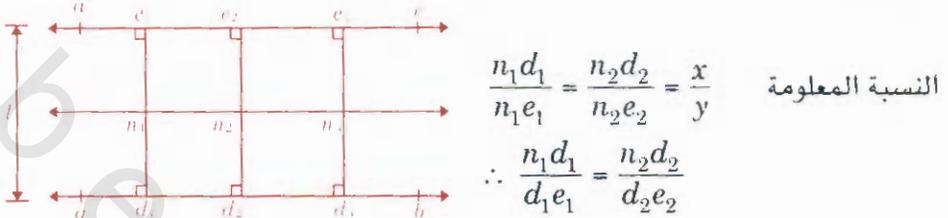
$\therefore \Delta n_1r_1a$ ،  $n_2r_2a$  متشابهان

$$\therefore \overline{n_1a} = \overline{n_2a}$$



وهذا برهان قيمته عندي تغري ببرهان مماثل في حالة توازي المستقيمين:  
ليكن:  $\overline{ac}$  ،  $\overline{ab}$  متوازيين البعد بينهما  $l$  ويراد إيجاد المحل الهندسي للنقطة  $n$  التي تتحرك ...

نفرض أوضاعاً للنقطة  $n$  مثل  $n_1, n_2, n_3, \dots$  ونرسم الأعمدة كما بالشكل



$$\therefore n_1 d_1 = n_2 d_2 \quad \text{لأن} \quad d_1 e_1 = d_2 e_2 = l$$

$\therefore$  الشكل  $d_1 d_2 n_2 n_1$  مستطيل وحيث أن هذا صحيح مهما كان وضع  $n$  فهو المحل الهندسي لها (ويحتفظ بحق المحل الهندسي الآخر وهو خارج المستقيمين من جهة  $\overline{ab}$  إذا كان  $x < y$  ، ومن جهة  $\overline{ac}$  إذا كان  $x > y$  .

بقي سؤال: هل من الممكن اعتبار هذه الحالة الأخيرة حالة خاصة من مسألتنا؟  
نحاول المنطق الآتي:

$$\overline{ca} \text{ و } \overline{ab} \text{ متوازيان} \quad \therefore \overline{ca} \cap \overline{ab} = \emptyset$$

$\therefore$  المحل الهندسي للنقطة  $n$  هو مستقيم يمر بنقطة التقاطع.

$\therefore$  لا يوجد نقطة تقاطع  $\therefore$  المحل الهندسي // كلاً من المستقيمين المتوازيين .

وبعد أيها القارئ: التمارين الآتية تجدها على صلة مباشرة بالموضوع نحاول حلها.

(1)  $\Delta abc$  كيف ترسم مستقيماً من  $a$  يقسم المثلث إلى جزئين النسبة بينهما

$$\text{كالنسبة: } \frac{(\overline{ab})^2}{(\overline{ac})^2} \quad (\text{راجع أول مسألة}).$$

$$(2) \Delta abc \text{ رسم } \overline{an} \text{ فقطع } \overline{bc} \text{ في } n \text{ ، أثبت أن: } \frac{nb}{nc} = \frac{ab}{ac} \times \frac{\sin nab}{\sin nac}$$

(3) أوجد نقطة في مستوى مثلث تكون النسبة بين أبعادها عن أضلاعه نسبة معلومة  
(مثلاً:  $x : y : z$ ).

$$(4) \Delta abc \text{ فيه: } d \in \overline{bc} \text{ ، برهن على أن: } \frac{bd}{dc} = \frac{\sin(\angle dab)}{\sin(\angle dac)}$$

## (10) ملاحظات رياضية:

للأستاذ / كامل فؤاد عبد الجواد م.ت بمدرسة علي مبارك الثانوية

بمناسبة موضوعي هذا أشير إلى كلمة للأستاذ حبيب رزق الله وردت بمقال لسيادته في مجلة عام 1962م تحت عنوان آراء وتجارب حيث قال: « أرجو أن يحاول المدرس حل كل مسألة أو تمرين هندسي بأكثر من حل إذا أمكن، وأن يشجع تلاميذه على إبداء ما عندهم من أفكار أو حلول أو اتجاهات غير واضحة في أذهانهم، وإذا تمكن المدرس من إيجاد حل أو أكثر نتيجة بحث مقترحات تلاميذه فإنه يكون بذلك قد أشبع رغبة في نفوسهم في معرفة مدى فائدة مقترحاتهم في الوصول إلى حلول مختلفة، وهم بذلك يشعرون بالانتصار، ويزداد حبهم للمادة. وبالعكس فإن المدرس الذي يكتفي بالوصول إلى حل واحد للمسألة، فإنه غالباً ما يتقيد به أثناء الدرس ويوجه تلاميذه إليه من غير رغبة أكيدة منهم وإذا حاول أحدهما أن يسأل عما إذا كانت فكرته تؤدي للحل فإنه غالباً ما يكون الجواب بالنفي لأنه جواب غير مبني على البحث السليم والدراسة الدقيقة » .

ولما كنت من أنصار رأي الأستاذ ضد الرأي (خلينا في اللي عرفناه) الذي نسمعه من بعض التلاميذ وقليل من المدرسين للأسف، لذلك أعرض بعضاً مما وصلنا إليه في الفصل نتيجة لتطبيق الرأي السابق، وأرجو أن يعرض الزملاء ما عندهم.

(1) القانون الثالث في اللوغاريتمات نتيجة من القانون الأول:

$$\log_a x^n = \log_a (x \times x \times x \times \dots \text{ إلى } n \text{ العوامل})$$

$$= \log_a x + \log_a x + \dots \text{ إلى } n \text{ الحدود}$$

$$= n \log_a x \text{ (القانون الأول)}$$

الاستدلال السابق سليم فيما لو كانت  $n$  كسراً أو عدداً سالباً ليكن المطلوب

$$\text{إثبات أن: } \log_a x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log_a x$$

$$\log_a x = \log_a (x^{\frac{1}{m}} \times x^{\frac{1}{m}} \times x^{\frac{1}{m}} \times \dots \text{ إلى } m \text{ العوامل})$$

$$= \log_a x^{\frac{1}{m}} + \log_a x^{\frac{1}{m}} + \dots \text{ إلى } m \text{ الحدود}$$

$$= m \log_a x^{\frac{1}{m}}$$

$$\therefore \log x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log_a x \quad \text{بقسمة الطرفين على } m$$

∴ الاستدلال السابق سليم أترك للقارئ التحقق من أن هذا سليم أيضاً في حالة  $n$  سالبة.

(3) المتباينة:  $x^2 - 2xy + y^2 > 0$  تقود إلى أن الوسط العددي لعددتين أكبر من وسطهما الهندسي:

$$x^2 - 2xy + y^2 \text{ موجب لأنه مربع كامل}$$

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$$

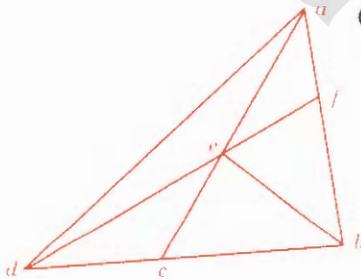
$$\therefore x^2 + y^2 > 2 \frac{xy}{1}$$

$$\therefore x + y > 2\sqrt{xy}$$

$$\therefore (x + y)^2 > 4xy$$

$$\therefore \frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}$$

(4) إثبات نظرية مينلوس بطريقة مماثلة لإثبات نظرية شيفا:



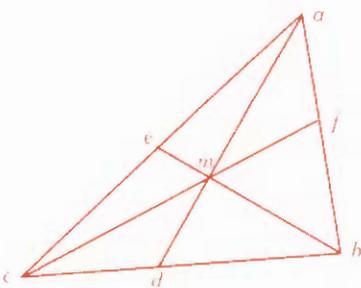
$$(1) \dots \frac{\overline{af}}{\overline{fb}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta dae)}{\text{مساحة } (\Delta dbe)}$$

$$(2) \dots \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta dbe)}{\text{مساحة } (\Delta dce)}$$

$$(3) \dots \frac{\overline{ce}}{\overline{ea}} = \frac{\text{مساحة } (\Delta dce)}{\text{مساحة } (\Delta dae)}$$

من (1)، (2)، (3) نحصل على المطلوب

(5) إثبات نظرية شيفا بالاعتماد على نظرية مينلوس:



$\overline{cm}$  قطع  $\overline{ab}$  في  $f$ ،  $\overline{ad}$  في  $m$ ،  $\overline{bd}$  في  $c$

∴  $\overline{cm}$  قطع أضلاع  $\Delta abd$

$$\therefore \frac{\overline{af}}{\overline{fb}} \times \frac{\overline{bc}}{\overline{cd}} \times \frac{\overline{dm}}{\overline{ma}} = 1$$

$\overline{bm}$  قطع أضلاع  $\Delta cad$

$$\therefore \frac{\overline{ae}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{cb}}{\overline{bd}} \times \frac{\overline{dm}}{\overline{ma}} = 1$$

$$\therefore \frac{\overline{af}}{\overline{fb}} \times \frac{\overline{bc}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{ae}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{cb}}{\overline{bd}}$$

$$\therefore \frac{\overline{af}}{\overline{fb}} \times \frac{\overline{bd}}{\overline{dc}} \times \frac{\overline{ce}}{\overline{ea}} = 1$$

(6) في الإحصاء: إثبات أن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

نفرض أن القيم هي  $a, b, c, \dots$  وأن عددها  $n$  ووسطها الحسابي  $(f)$ .

$$f = \frac{a+b+c+\dots}{n} \quad \therefore \text{من تعريف الوسط الحسابي}$$

$$\therefore a+b+c+\dots = nf$$

$\therefore$  الانحرافات هي:  $a-f, b-f, c-f$

$$\text{مجموعها} = a+b+c+\dots - nf = nf - nf = 0$$

(7) « إذا ساوى قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخر أو كملتها فالنسبة

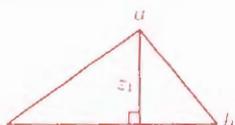
بين المستطيلين المكون كل منها من ضلعي الزاوية كالنسبة بين مساحتي

المثلث على التناظر ».

برهان هذه النظرية وملحقاتها استغرق منا حصتين:

في الحصة الأولى أعطيت البرهان المذكور في الكتاب المقرر ثم بحثت مع التلاميذ

كالعادة عما إذا كان العكس صحيحاً (بغض النظر عن أهميته) ووصلنا إلى الآتي:

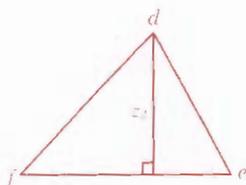


الفرض:

$$\frac{\text{مساحة } (\Delta abc)}{\text{مساحة } (\Delta def)} = \frac{\overline{ab} \times \overline{bc}}{\overline{de} \times \overline{ef}}$$

المطلوب:  $(\angle b) = (\angle e)$  أو  $(\angle b) + (\angle e) = 180^\circ$

العمل: نسقط العمودين  $z_1, z_2$



$$\frac{\text{مساحة } (\Delta abc)}{\text{مساحة } (\Delta def)} = \frac{\frac{1}{2} z_1 \times bc}{\frac{1}{2} z_2 \times ef} \quad \text{البرهان}$$

ولكن من الفرض  $\frac{\text{مساحة } (\Delta abc)}{\text{مساحة } (\Delta def)} = \frac{\overline{ab} \times \overline{bc}}{\overline{de} \times \overline{ef}}$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{ab}}{\overline{de}}$$

$$\therefore \frac{z_1}{\overline{ab}} = \frac{z_2}{\overline{de}}$$

$$\therefore \sin b = \sin e$$

$(\angle b) = (\angle e)$   $\therefore$  أو تكملها وفي الحصة الثانية أعطيت البرهان الآخر للنظرية

وهو المستقل عن التشابه (حيث نضع أحد المثلثين على الآخر).

وطبقاً لهذا البرهان من الممكن نقل هذه النظرية المعتمدة عليها.

للأستاذ / الدكتور عبد الحميد لظفي أستاذ الرياضة بجامعة عين شمس

(1) برهان هيرون مع بعض التعديل على مساحة المثلث

$$= \sqrt{h(h-\bar{a})(h-\bar{b})(h-\bar{c})}$$

ليكن المثلث  $abc$ . نرسم الدائرة الداخلة  $m$  تمس الأضلاع في  $d, e, f$

$\therefore$  مساحة المثلث  $hr =$  ثم نرسم  $\overline{mk} \perp \overline{bm}$  ،  $\overline{ck} \perp \overline{bc}$  فيقطع  $\overline{bc}$  في  $l$

$bmck$  رباعي دائري.

$$\therefore (\angle cbk) = (\angle cmk) = (\angle mae)$$

$$\therefore \Delta aem \simeq \Delta bck$$

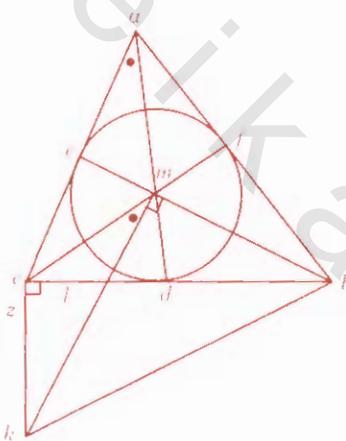
$$\therefore \frac{ae}{bc} = \frac{em}{ck} = \frac{md}{ck} = \frac{dl}{lc}$$

$$\therefore \frac{ae}{ae+bc} = \frac{dl}{dl+lc} = \frac{(\overline{md})^2}{cd}$$

$$\therefore \frac{h-\bar{a}}{h} = \frac{r^2}{(h-\bar{b})(h-\bar{c})}$$

$$\therefore hr^2 = (h-\bar{a})(h-\bar{b})(h-\bar{c})$$

$$\therefore \text{مساحة } (\Delta abc) = \sqrt{h^2 r^2} = \sqrt{h(h-\bar{a})(h-\bar{b})(h-\bar{c})}$$



(2) برهان بطليموس مع بعض التعديل على أن:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

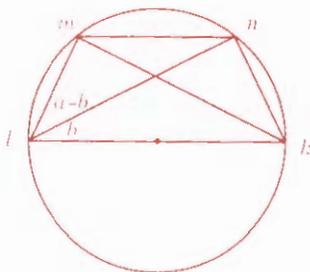
نرسم دائرة قطرها  $\overline{kl}$  يساوي الوحدة

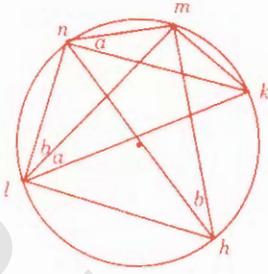
ثم نرسم  $(\angle klm) = a^\circ, (\angle kln) = b^\circ$

$$(\angle mln) = a-b$$

$$\therefore \overline{mn} \cdot \overline{kl} = \overline{km} \cdot \overline{nl} - \overline{ml} \cdot \overline{nk}$$

$$\therefore \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$





(3) برهان بطليموس مع بعض التعديل على أن:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

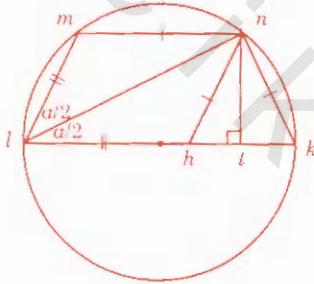
نرسم دائرة قطرها  $\overline{kl}$  يساوي الوحدة

ثم نرسم  $(\angle klm) = a^\circ, (\angle mln) = b^\circ$

ثم نصل القطر  $\overline{mh}$

$$\therefore \overline{ln} \cdot \overline{mh} = \overline{lm} \cdot \overline{nh} - \overline{lh} \cdot \overline{nm}$$

$$\therefore \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$



(4) برهان بطليموس مع بعض التعديل على أن:

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} (1 - \cos a)$$

نرسم دائرة قطرها  $\overline{kl}$  يساوي الوحدة

ثم نرسم  $(\angle klm) = a^\circ, (\angle kln) = \frac{1}{2} a^\circ$

ونأخذ  $\overline{lh} = \overline{lm}$  ونرسم  $\overline{nt} \perp \overline{kl}, \overline{kn} = \overline{nh} = \overline{nm}$

$$\therefore \overline{kt} = \overline{th} = \frac{1}{2} \overline{kh} = \frac{1}{2} (\overline{kl} - \overline{ml}) = \frac{1}{2} (1 - \cos a)$$

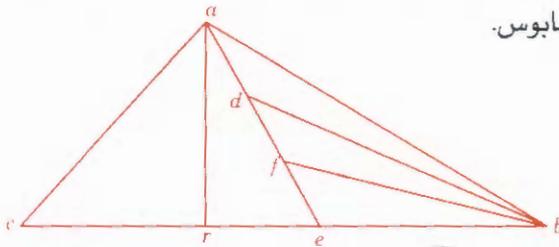
(5) إذا كانت  $d$  نقطة داخل مثلث  $abc$ ، فإن  $\overline{db} + \overline{dc} < \overline{ab} + \overline{ac}$ ، فإذا أخذنا

على  $\overline{bc}$  فهل  $\overline{db} + \overline{de}$  تكون أصغر من  $(\overline{ab} + \overline{ac})$ ، ليس هذا ضرورياً كما

يتبين من الرسم الآتي الذي أورده بابوس.

في  $\Delta abc$  فيه  $\overline{ab} > \overline{ac}$ .

خذ  $e \in \overline{bc}$  بحيث  $f \in \overline{ae}$



$\overline{ae} > \overline{ac}$  بحيث  $\overline{ef} = \overline{ac}$ ،  $d$  منتصف  $\overline{af}$

$$(\overline{db} + \overline{da}) + \overline{ac} > \overline{ab} + \overline{ac}$$

$$\therefore \overline{db} + (\overline{df} + \overline{fe}) > \overline{ab} + \overline{ac}$$

$$\therefore \overline{db} + \overline{de} > \overline{ab} + \overline{ac}$$



(8) مسألة عن المسبع المنتظم المرسوم داخل دائرة، وقد ذكرها ثابت بن قرة، ونسبت إلى أرخميدس.

$\overline{abcd}$  مستقيم فيه:  $(\overline{ab})^2 = \overline{bd} \cdot \overline{cd}$ ،  $cd^2 = \overline{cb} \cdot \overline{ca}$ ، وكل من  $\overline{bc} < \overline{ab}$ ،  $\overline{cd}$ ،  
رسم المثلث  $bec$  بحيث يكون  $\overline{be} = \overline{ab}$ ،  $\overline{ce} = \overline{cd}$ .

ثم رسمت الدائرة  $aed$ ،  $\overline{eb} \cap \overline{ec} = \{e\}$ ، وقطعا الدائرة الثانية في  $r$ ،  $f$  على الترتيب. أثبت أن  $\overline{fr}$  هو ضلع المسبع المنتظم المرسوم داخل الدائرة.

$$(\overline{ce})^2 = (\overline{cd})^2 = \overline{cb} \cdot \overline{ca}$$

$$\therefore (\angle ceb) = (\angle cae) = (\angle aeb) = (\angle adf) = (\angle dfe)$$

$$\therefore (\widehat{af}) = (\widehat{fr}) = (\widehat{ed})$$

ولكن:

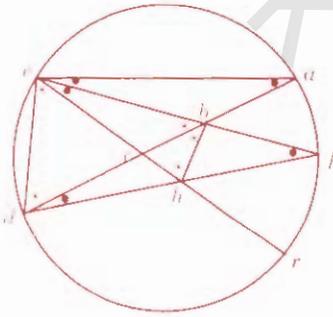
$$(\overline{eb})^2 = (\overline{ab})^2 = \overline{bd} \cdot \overline{cd} = \overline{eh} \cdot \overline{ec}$$

$$\therefore (\angle ebc) = (\angle ehb) = (\angle edb) = (\angle der)$$

$$\therefore 2(\angle bae) = (\angle ebc) = (\angle der)$$

$$\therefore 2(\widehat{ed}) = (\widehat{ae}) = (\widehat{dr})$$

$$\therefore (\widehat{fr}) = \frac{1}{7} \text{ المحيط}$$



إيجاد النسب المثلثية الست لزاوية بقياس قطعة مستقيمة واحدة:

نجعل الزاوية  $amb$  زاوية مركزية في دائرة نصف قطرها الوحدة ثم نرسم  $\overline{bc} \perp \overline{am}$

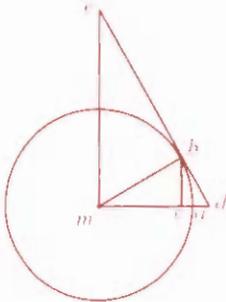
ثم نرسم المماس عند  $b$ ، فيقطع  $\overline{ma}$  في  $d$ ،

العمودي عليه من  $m$  في  $e$  فيكون

طول  $\overline{bc}$  هو الجيب، طول  $\overline{em}$  هو جيب التمام،

طول  $\overline{bd}$  هو الظل، وطول  $\overline{be}$  هو ظل التمام،

طول  $\overline{dm}$  هو القاطع، طول  $\overline{em}$  هو قاطع التمام.



## (12) إثبات قانون الهنود لمساحة الشكل الرباعي الدائري:

للأستاذ / عبد العزيز غريب      مدرس بالأقباط الثانوية ببورسعيد 1958 م.

إثبات أن مساحة الشكل الرباعي الدائري الذي أطوال أضلعه  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$

وطول نصف محيطه  $h$  هي:  $\sqrt{h(h-\bar{a})(h-\bar{b})(h-\bar{c})(h-\bar{d})}$

**العمل:** نصل  $\bar{bd}$  ونفرض أن طوله  $l$

**البرهان:**

مساحة الشكل الرباعي  $abcd$

= مساحة  $(\Delta abd)$  + مساحة  $(\Delta cbd)$

$\therefore$  مساحة  $(\Delta abd) = \frac{1}{2} \bar{cd} \sin a$ ,

, مساحة  $(\Delta cbd) = \frac{1}{2} \bar{ab} \sin c$ ,

$\therefore$  مساحة الشكل  $(abcd) = \frac{1}{2} \bar{cd} \sin a + \frac{1}{2} \bar{ab} \sin c$

$$= \frac{1}{2} \bar{cd} \sin c + \frac{1}{2} \bar{ab} \sin c$$

(لأن  $\sin c = \sin a$  المكمل)

$$= \frac{1}{2} \sin c (\bar{cd} + \bar{ab}) = \frac{1}{2} \times 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} (\bar{cd} + \bar{ab})$$

$$= \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} (\bar{cd} + \bar{ab})$$

$$= \sqrt{\sin^2 \frac{c}{2} \cos^2 \frac{c}{2} (\bar{cd} + \bar{ab})^2}$$

$$= \sqrt{\left( \bar{cd} \sin^2 \frac{c}{2} + \bar{ab} \sin^2 \frac{c}{2} \right) \left( \bar{cd} \cos^2 \frac{c}{2} + \bar{ab} \cos^2 \frac{c}{2} \right)}$$

$\therefore$  تكمل  $(\angle c)$   $\therefore$  تكمل  $(\angle a)$

$$\therefore \sin \frac{c}{2} = \cos \frac{a}{2}, \quad \cos \frac{c}{2} = \sin \frac{a}{2}$$

$\therefore$  بالتعويض ينتج أن:

= مساحة الشكل الرباعي  $abcd$

$$= \sqrt{\left(\bar{c}\bar{d} \cos^2 \frac{a}{2} + \bar{a}\bar{b} \sin^2 \frac{c}{2}\right) \left(\bar{c}\bar{d} \sin^2 \frac{a}{2} + \bar{a}\bar{b} \cos^2 \frac{c}{2}\right)}$$

$$\therefore \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos c = 2 \cos^2 \frac{c}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{c}{2}$$

$$\text{وفي } \Delta abd \text{ من حساب المثلثات } \cos a = \frac{\bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}}$$

$$\text{وفي } \Delta cbd \text{ من حساب المثلثات } \cos c = \frac{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{a}\bar{b}}$$

$$\therefore 2 \cos \frac{a}{2} = 1 + \cos a = 1 + \frac{\bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}}$$

$$= \frac{2\bar{c}\bar{d} + \bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}} = \frac{(\bar{c} + \bar{d})^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}}$$

$$\therefore 4\bar{c}\bar{d} \cos^2 \frac{a}{2} = (\bar{c} + \bar{d})^2 - \bar{l}^2 \quad \dots\dots (2)$$

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a = 1 - \frac{\bar{c}^2 + \bar{d}^2 - \bar{l}^2}{2\bar{c}\bar{d}} = \frac{\bar{l}^2 - (\bar{c} + \bar{d})^2}{2\bar{c}\bar{d}}$$

$$\therefore 4\bar{c}\bar{d} \sin^2 \frac{a}{2} = \bar{l}^2 - (\bar{c} + \bar{d})^2 \quad \dots\dots (3)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\therefore 4\bar{a}\bar{b} \cos^2 \frac{c}{2} = (\bar{a} + \bar{b})^2 - \bar{l}^2 \quad \dots\dots (4)$$

$$\therefore 4\bar{a}\bar{b} \sin^2 \frac{c}{2} = \bar{l}^2 - (\bar{a} + \bar{b})^2 \quad \dots\dots (5)$$

∴ بجمع (2) ، (5) ينتج أن:

$$\therefore 4\bar{c}\bar{d} \sin^2 \frac{a}{2} + 4\bar{a}\bar{b} \cos^2 \frac{c}{2} = (\bar{c} + \bar{d})^2 - (\bar{a} + \bar{b})^2$$

$$\therefore \bar{c}\bar{d} \sin^2 \frac{a}{2} + \bar{a}\bar{b} \cos^2 \frac{c}{2} = \frac{(\bar{a} + \bar{b})^2 - (\bar{c} + \bar{d})^2}{4}$$

∴ بالتعويض في (1) ينتج أن:

مساحة الشكل الرباعي الدائري

$$= \sqrt{\frac{((\bar{c} + \bar{d})^2 - (\bar{a} + \bar{b})^2)((\bar{a} + \bar{b})^2 - (\bar{c} - \bar{d})^2)}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\bar{c} + \bar{d} - \bar{a} + \bar{b})(\bar{c} + \bar{d} + \bar{a} - \bar{b})}{16}} \times \sqrt{\frac{(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{d})(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} + \bar{d})}{16}}$$

وبفرض أن:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = 2h$$

$$\therefore \bar{c} + \bar{d} + \bar{b} - \bar{a} = 2h - 2\bar{a}$$

$$\bar{c} + \bar{d} + \bar{a} - \bar{b} = 2h - 2\bar{b},$$

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{d} - \bar{c} = 2h - 2\bar{c},$$

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{d} = 2h - 2\bar{d},$$

∴ بالتعويض ينتج أن:

مساحة الشكل الرباعي الدائري =

$$\sqrt{\frac{(2h - 2\bar{a})(2h - 2\bar{b})(2h - 2\bar{c})(2h - 2\bar{d})}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{16(h - \bar{a})(h - \bar{b})(h - \bar{c})(h - \bar{d})}{16}}$$

$$= \sqrt{(h - \bar{a})(h - \bar{b})(h - \bar{c})(h - \bar{d})}$$