الباب الثالث
الأوليمبياد في الرياضيات

الفصل الأول
المسابقات الدولية الأمريكية والأوروبية

الفصل الثانى
المسابقات في الدول العربية

الفصل الأول
المسابقات الدولية الأمريكية والأوروبية

(1) الأوليمبياد الرياضية في الدول الاشتراكية:

للأستاذ/ محمد محمد السيد مفتش عام سابقا بجنوب القاهرة .

جاء في التوصيات التي توج بها مؤتمر تعليم الرياضيات لمرحلة ما قبل الجامعة الذي عُقد في مصر في ديسمبر 1981م دعوة لتنظيم أوليمبياد أو مسابقات رياضية (علم الرياضيات) في قطرنا المصري لطلابنا في المراحل قبل الجامعية تشجيعًا للتفوق وفرزًا للمتفوقين في هذه المادة التي تزداد حاجة منطقتنا لها في كل نواحي الإنتاج المعروفة، ويا حبذا لو أفرزت هذه الأوليمبياد المصرية أو أوليمبياد عربية تضم كل الدول العربية.

والمسابقات في الرياضيات ليست جديدة بالنسبة لنا. فقد عرفتها مصر، وفي عصرنا الحالي تتخذ المسابقات في الرياضيات في كل الدول المتحضرة تقريبًا صفة التعميم على نطاق واسع مجهول. ويطلق على المسابقات هذه مصطلح الأوليمبياد، اقتباسًا من التسمية التي تطلق على المسابقات الرياضية العالمية لألعاب الكرة والجري والسباحة وغيرها (وهي امتداد لمسابقات تاريخية جديدة اعتادها الإغريق قديمًا ونسبوها لجبل الأوليمب عندهم) وهذه المسابقات (سواء في الرياضة البدنية أو الرياضيات الذهنية) تسبقها عادة مسابقات تمهيدية كانت تجري في مختلف الدول المشاركة فيها لاختيار الفرق التي سوف تحظى بشرف تمثيل بلادها في تلك المسابقة العالمية.

وأولمبياد الرياضيات انتشرت على نطاقات واسعة في الدول الاشتراكية وبدأت في سنة 1934م في روسيا. واقتبست دول أخرى نفس النظام. وأهم ما تهدف إليه هذه المسابقات الكشف عن نوابغ الطلبة لتركيز العناية بهم وتعهدهم فمنهم يبرز القادة والمبتكرون المخترعون وقد يكون هذا الإجراء هو الذي كان وراء هذا الفيض الواسع من التقدم المذهل في رياضيات الدول الاشتراكية وغيرها، وفي

مختلف العلوم الطبيعية التي تقوم أعمدتها على العقول الرياضية الناضجة. فمن بين آلاف الفائزين في هذه الأولمبيادا الروسية في موسكو ولينجراد وكييف وأوروبا.. خرج قادة وبُحاث رياضيون أثروا العلم الروسي البحت والتجريبي.

والمسابقات في علم الرياضيات في الدول الاشتراكية وغيرها لا تولد من فراغ، فلابد أن تسبقها ويمهد لها توجيهات ودراسات يتوافد عليها الآلاف من الطلبة الذين يعدون أنفسهم لها، في فصول متجانسة. كما تتم تغذية مادتها الدسمة بمؤلفات وكتب قريبة التناول من يد كل شخص طموح يقبل تحديها. وتحتضن الدول فصول هؤلاء المتسابقين وتعد للإشراف على تغذية طموحهم أساتذة مختارين حيث يعرفون النظريات الرياضية وتطبيقاتها ومناقشة حلولها وتشجيع الحلول المبتكرة والاهتمام بالطريقة قبل النتيجة. فحتى في حالة الفشل لن يضيع الدارس وقته عبثًا. وتحليل عناصر الفشل كسب له قيمته في تلمس الطريق للنجاح.

وهناك هدف جانبي يولد من هذه المسابقات لو أجريت في منطقتنا العربية. فمن المسائل التي ستطرح على النوابغ الناشئين ستتجمع ثروة من المسائل الجديدة المبتكرة بلغتنا العربية، لابد أن تجد طريقها بالتدريج لمؤلفاتنا وكتبنا الرياضية التي حلها الطلاب وسئموا منها، والنظر في كتاب الرياضيات الروسية، وما تضمنته من مسائل وطرق مبتكرة كفيل بإقناعنا بوجود ثروة من الأفكار تنتظر نقلها للغتنا العربية حتى تصير قريبة التناول وتحت أنظار نوابغ طلبتنا.

وفيما يلي نعطي دفعة جديدة لنفس الموضوع وذلك بتلخيص معرب لأحد تقارير المستشار الثقافي لإحدى الدول الأوروبية (مستر هلموت بوشيل الألماني) عن إحدى المسابقات الأوليمبية التي اشتركت فيها ألمانيا الشرقية مع دول أخرى (أوروبية). وقد قدم التقرير إلى مكتب مستشار الرياضيات في مصر 1972م، وأغلب الظن أن أصل التقرير لا يزال قابعًا في محفوظات ذلك المكتب يتمنى لو رأى النور فربما تزيد ـ عندئذ ـ فرصة الانتفاع به.

والتقرير ـ كما يتضح فيما بعد ـ واف فمستويات المسابقة فيه تتدرج من المدرسة فالقسم فالمنطقة فالدولة عامة. وفي المرحلة الأخيرة هذه يتم اختيار الممثلين للمسابقة الدولية التي أورد أسئلتها.

المستوى الأول: (مستوى المدرسة)

المسائل للصفوف من (5) إلى (12):

لكل صف 4 مسائل يحلها الطلاب في المنزل، وله أن يساعده أي شخص إذ الغرض هو نشر الأفكار الرياضية، وخلق وعي بهذا الحقل التعليمي. ويشترك أغلب الطلبة في هذا الدور من المسابقة. وقد يجيب بعضهم بنجاح عن كل المسائل، ولكنهم أقلية والاقتباس التالي من مسابقة 1969م (المسابقة التاسعة) لبيان مستوى المسائل.

س1: صف (7) (13 سنة):

مجموعة من 100 سائح من جمهورية ألمانيا الديمقراطية سافروا للخارج والبيانات الآتية عنهم صحيحة.

(أ) 10 سياح لا يتكلمون الإنجليزية أو الروسية.

(ب) 75 سائحًا يتكلمون الروسية. (جـ) 83 سائحًا يتكلمون الإنجليزية.

أوجد عدد السياح الذين يتكلمون اللغتين معًا.

جـ1: السؤال بسيط والجواب 68.

س2: صف (8) (14 سنة):

هل يوجد مضلعات لها إحدى الخاصيتين التاليتين؟

(أ) عدد الأقطار 3 مرات عدد الرءوس. (ب) عدد الرءوس 3 مرات عدد الأقطار.

جـ2: نفرض أن عدد أضلاع المضلع هو n

∵ القطر هو قطعة مستقيمة واصلة بين كل رأسين غير متتاليين.

∵ عدد الأقطار = ${}_2\vartheta^n - n$

$\therefore\ {}_2\vartheta^n - n = 3n$ $\therefore\ \dfrac{n(n-1)}{2\times1} - n = 3n$

$\therefore\ n(n-1) = 8n$ $\therefore\ n^2 - n - 8n = 0$

$\therefore\ n^2 - 9n = 0$ $\therefore\ n(n-9) = 0$

$\therefore\ n = 9$ أو $n = 0$

∴ المضلع ذو الأضلاع التسعة يحقق الخاصية (أ).

ثانيًا: $3({}_2\vartheta^n - n) = n$

$\therefore n(3n - 11) = 0$ $\quad\quad \therefore n = \frac{11}{3}$ أو $\therefore n = 0$

$\therefore$ لا يوجد مضلعات تحقق الحاصية (ب).

س3: صف (10) (16 سنة):

$d(x) = 2x^2 - 3x + 4$ حيث $x \in h$، أثبت أن: $d(x - 1) = d(x + 1) - 8x + 6$

جـ3: السؤال مألوف ومباشر.

س4: صف (12) (18 سنة):

(أ) أوجد كل الجذور الحقيقية للمعادلة: $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = \frac{9}{16}$

(ب) أوجد العدد الحقيقي a بحيث يكون للمعادلة: $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = a$

(1) لا توجد جذور. (2) يوجد جذر واحد فقط. (3) جذران فقط.

(4) 3 جذور فقط. (5) 4 جذور فقط. (6) أكثر من 4 جذور.

جـ4: (أ) $[x(x+3)][(x+1)(x+2)] = \frac{9}{16}$

$\therefore (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = \frac{9}{16}$ $\quad\quad$ نضع $y = x^2 + 3x$

$\therefore y(y + 2) = \frac{9}{16}$ $\quad \therefore y^2 + 2y = \frac{9}{16}$ $\quad \Rightarrow \quad y = -2\frac{1}{4}$ أو $\frac{1}{4}$

$\therefore x^2 + 3x = \frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{10})$

أو $x^2 + 3x = -2\frac{1}{4}$ $\quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ للمعادلة جذور هي: $\left(-\frac{3}{2}\right)$ ، $\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}\right)$ ، $\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}\right)$

(ب) كما في الجزء a نضع: $y = x^2 + 3x$

$\therefore y^2 + 2y = a$ $\quad \therefore y^2 + 2y - a = 0$ $\quad \therefore y = -1 \pm \sqrt{a + 1}$

إذا كانت $a < -1$ فإن y تكون تخيلية وبالتالي x تكون تخيلية.

إذا كانت: $a = -1$ $\Leftarrow$ $y = -1$ $\quad \therefore$ x لها جوابان هما $-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

إذا كانت $a > -1$ يكون لـ y جوابان مختلفان ويكون لـ x أربعة أجوبة فيما عدا

$a = \frac{9}{16}$ فإن x يكون لها 3 قيم مختلفة كما سبق في (أ) . مما سبق يتضح أن:

(أولاً) لا توجد للمعادلة جذور عندما $a < -1$

(ثانيا) لا يوجد قيمة لـ (أ) بحيث يكون للمعادلة جذر واحد فقط.

(ثالثا) يكون للمعادلة جذران إذا كانت $a = -1$.

(رابعا) يكون للمعادلة 3 جذور إذا كانت $a = \frac{9}{16}$.

(خامسًا) يكون للمعادلة 4 جذور إذا كانت $a > -1$ ما عدا $a = \frac{9}{16}$.

(سادسًا) لا يوجد قيمة لـ a بحيث يكون للمعادلة أكثر من 4 جذور.

المستوى الثاني: (مستوى الأقسام)

س1: صف (5) (11 سنة):

أوجد عددين طبيعيين a, b بحيث $a - b = 3$ ، $ab = 120$

جـ1: المسألة عادية والجواب: $a = 15, b = 12$

• ملحوظة: الأسئلة للصفوف من 5 إلى 12 موضوعة ليحلها التلاميذ. صف 11 وصف 12 يقدم لهما ورقتان ليومين متتاليتين كل ورقة 3 أسئلة وباقي الصفوف ورقة واحدة 4 أسئلة.

يوجد 215 قسمًا في ألمانيا الشرقية. في هذا المستوى يتقدم أحسن التلاميذ نتيجة اختيار المدرسين والمدرسين الأوائل. كان عدد المتسابقين نحو 50 ألف. والذين يرشحون للمستوى الثالث هم الذين يحوزون أعلى الدرجات.

والمسائل التالية اختيرت من المسابقة الثامنة في 17 ، 1959/12/18م

س2: صف (7) (13 سنة):

أنشئ $\Delta\, abc$ حيث r (للدائرة الداخلة) = $3\ \text{cm}$ ، $\bar{c} = 5.5\ \text{cm}$ ، (zc) العمود من c على $\bar{c} = 3\ \text{cm}$

جـ2: المسألة مباشرة.

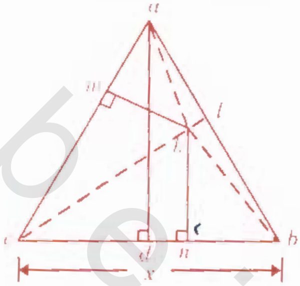
س3: صف (10) (16 سنة):

k نقطة داخل $\Delta\, abc$ المتساوي الأضلاع والنقط l,m,n على الأضلاع الثلاثة برهن أن: $kl + km + kn \leq$ ارتفاع المثلث.

ج3: إذا كانت نقطة k تقع داخل Δ abc المتساوي الأضلاع وكان km و kn و kl أعمدة على الأضلاع ab, bc, ca فإن:

$kl + kn + km =$ الارتفاع ad وهذه خاصية مألوفة للمثلث المتساوي الأضلاع

وبرهانها كالآتي: نفرض أن طول الضلع $= x$



$\therefore$ مساحة$(\Delta\, kca)$ + مساحة $(\Delta\, kbc)$

+ مساحة $(\Delta\, kab)$ = مساحة$(\Delta\, abc)$

$$\therefore\ \frac{1}{2}x \times kn + \frac{1}{2}x \times km + \frac{1}{2}x \times kl = \frac{1}{2}x \times ad$$

$$\therefore\ kn + km + kl = ad$$

فإذا كان: kn أو km أو kl مائلاً.

فإن $kn + km + kl$ يكون أكبر من الارتفاع.

س4: صف (11، 12) (17، 18 سنة):

برهن أن: $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}$ بدون استخدام الجذور.

ج4: لقد تم حل هذا السؤال في الباب الثاني من هذا الكتاب.

س5: صف (11، 12) (17، 18 سنة):

أوجد كل عدد أولي k حيث $k + 14$ ، $k + 10$ كلاهما أولي.

ج5: المطلوب إيجاد كل عدد أولي k بحيث $k + 14$ ، $k + 10$ كلاهما أولي.

كل الأعداد الأولية فردية ما عدا 2 ، وإلا كانت $k + 14$ ، $k + 10$ زوجية أولية ، وهذا محال. $\therefore k = 3$ أو $3m + 1$ أو $3m + 2$: $(m \in t)$ حيث t مجموعة الأعداد الطبيعية .

لو كانت $k = 3m + 1$ تكون $k + 14 = 3m + 15$ تقبل القسمة على 3 فهي ليست أولية.

لو كانت $k = 3m + 2$ تكون $k + 10 = 3m + 12$ تقبل القسمة على 3 فهي ليست أولية.

لو كانت $k = 3$ تكون $k + 10 = 13, k + 14 = 17$ وحيث أن الأعداد 17 ، 13 ، 3 كلها أولية.

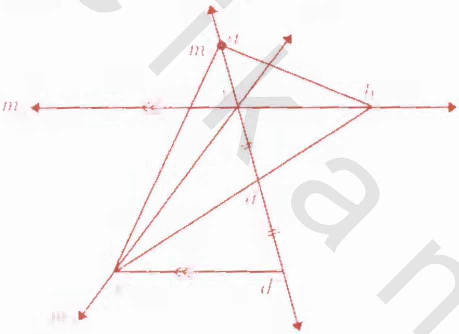
$\therefore$ يوجد قيمة واحدة لـ k هي 3 ليكون $k + 14$ ، $k + 10$ كلاهما أولي.

المستوى الثالث: (مستوى المناطق)

كل متسابق من 12-7 يعالج 3 مسائل لكل من يومين متتاليين. المتسابقون هنا هم الفائزون في المستوى الثاني (أقسام) والمناطق عددها 15 منطقة في ألمانيا الشرقية. وعدد المتسابقين في سنة 1970م لهذا المستوى كان نحو 3000 العينات مختارة من مسابقتي 8، 9 سنة 69 وسنة 70.

س1: صف (7) (13 سنة):

3 مستقيمات m_1, m_2, m_3 في مستوى واحد تتقاطع في y، خذ نقطة a على m_1، $a \neq y$ ارسم $\Delta\, abc$ بحيث تكون القطع المستقيمة المتوسطة t_1, t_2, t_3 كلها تقع على m_1, m_2, m_3 على الترتيب.



جـ1: العمل:

(1) نأخذ d على m_1 بحيث $\overline{yd} = \overline{ya}$

(2) ننصف $\overline{yd}$ في d.

(3) نرسم $\overline{dc} \,//\, m_2$ ويقطع m_3 في c

(4) نصل $\overrightarrow{cd}$ ليقطع m_2 في b وبذا يتحدد

رءوس $\Delta\, abc$ متوسطاته تقع على m_1, m_2, m_3 وواضح أن لكل نقطة a على m_1 يوجد مثلث يحقق الشروط وأن جميع هذه المثلثات متشابهة.

س2: صف (8) (14 سنة):

الأعداد a,b,c,d تخضع للشروط الآتية: $a + d < b + c$ ، $a + b = c + d$ ، $d > c$

رتبها كلها بحيث يكون الأكبر أولاً

جـ2:

$d > c$ ...... (1)

$a + b = c + d$ ...... (2) $\qquad a + b < b + c$ ...... (3)

من (3) $\quad a + d + c < b + c + c$

$\therefore a + (d + c) < b + 2c$ ...... (4)

بالتعويض من (2) في (4)

$\therefore a + (a + b) < b + 2c \qquad \therefore 2a + b < b + 2c$

$\therefore a < c$ ...... (5)

من (2) ، (5) $\quad$ ...... (6) $\quad \therefore b > d$

من (1) ، (5) ، (6) $\quad \therefore b > d > c > a$

س3: صف (10) (16 سنة):

أوجد كل أزواج الأعداد الحقيقية a, b حيث $b < a$ وحيث أن:

المجموع والفرق بين مربعين لأحدهما وحاصل الضرب متساوية.

جـ3:

$a + b = ab$ .... (1) $\qquad a^2 - b^2 = a + b$ ...... (2)

من (2)

$\therefore (a - b)(a + b) = a + b \qquad \therefore (a - b)(a - b - 1) = 0$

إذا كان: $a = -b$ بالتعويض في (1)

$\therefore -b + b = ab = (-b)(b) \qquad \therefore b^2 = 0$

$\therefore b = 0 \qquad \therefore a = 0$

$\therefore a = b$ وهذا يناقض المعطيات لأن $b > a$ $\qquad \therefore a = -b$ مرفوض

إذا كان $a = b + 1$ بالتعويض في (1)

$\therefore b - 1 + b = b(b + 1) \qquad \therefore b^2 - b - 1 = 0$

$\therefore b = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad \therefore a = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ أزواج الأعداد الحقيقية التي تحقق شروط المسألة هي: $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ حيث

$a_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}, b_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad a_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}, b_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2},$

س4: صف (10) (16 سنة):

منحنى الدالة $y = x^2 + lx + k$ رسم على محاور كارتيزية. المنحنى يقطع 7 وحدات من محور السينات ويمر بالنقطة (8, 0) أوجد كلاً من l, k (أعداد حقيقية)

جـ4: النقطة (8, 0) تحقق المعادلة: $y = x^2 + lx + k$

$\therefore k = 8 \qquad \therefore$ معادلة المنحنى: $y = x^2 + lx + 8$

نفرض أن المنحنى يقطع محور السينات في النقطتين $(x_2, 0)$ ، $(x_1, 0)$

$\therefore x_1 - x_2 = \pm 7$

جذرا المعادلة: $x^2 + lx + 8 = 0$ هما x_1, x_2

$\therefore$ x_1, x_2 يساوي $\dfrac{-l \pm \sqrt{l^2 - 32}}{2}$ $\therefore$ الفرق بين الجذرين $= \pm 7$

$\therefore l^2 = 81 \qquad \therefore l = \pm 9 \qquad \therefore k = 8, l = \pm 9$

س5: صف (12، 11) (18، 17 سنة):

ما الأعداد الحقيقية a التي تجعل المعادلة: $\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$

لها على الأقل حل واحد حقيقي .. أوجد كل الحلول عندما $a = \dfrac{5}{6}$

جـ5:

$\sin^6 x + \cos^6 x - a(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0 \qquad \because \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\therefore \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)(1 - a) - (\sin 2x \times \cos 2x) = 0$

$\because \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$

$\therefore (1 - 2 \sin 2x \cos 2x)(1 - a) - \sin 2x \cos 2x = 0$

$\therefore \sin 2x \cos 2x\, (2a - 3) = a - 1 \qquad \therefore \sin 2x \cos 2x = \dfrac{a-1}{2a-3}$

$\therefore \sin^2 2x = \dfrac{4(a-1)}{2a-3} \qquad \therefore 1 \ge \dfrac{4(a-1)}{2a-3} \ge 0, a \ne \dfrac{3}{2} \qquad \text{..... (1)}$

$\therefore (2a - 3)^2 \ge 4(a - 1)(2a - 3) \ge 0 \qquad \because 4(a - 1)(2a - 3) \ge 0$

$\therefore a \notin [1, \dfrac{3}{2}] \qquad \text{..... (2)}$

$\because (2a - 3)^2 \ge 4(a - 1)(2a - 3), \qquad \therefore (2a - 3)(2a - 3 - 4a + 4) \ge 0$

$\therefore (2a - 3)(1 - 2a) \ge 0 \qquad \therefore \dfrac{1}{2} \le a \le 1 \qquad \text{...... (3)}$

من (2)، (3) $\qquad \therefore \dfrac{1}{2} \le a \le 2$

عندما $a = \dfrac{5}{6}$

$\therefore \sin^2 2x = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore \sin 2x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore 2x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{4} : \ n \in y$

$\therefore x = \dfrac{1}{2}(n\pi \pm \dfrac{\pi}{4})$

المستوى الرابع: (المستوى القومي)

في أوليمبياد الرياضيين الناشئين الثامن بجمهورية ألمانيا الديمقراطية والذي عقد قرب العاصمة برلين في 29/3/1969 إلى 1/4/1969 وكان هناك 223 متسابقًا منهم 22 بنتًا، 13 من الفصول المنخفضة.

المسائل للصفوف 10-12 فقط ولو أنه مسموح للصفوف الأقل للناجحين بالاشتراك.

الهدف الأساسي هو اختيار أحسن المتسابقين لتمثيل البلاد في أعلى المستويات.

كل متسابق عليه 3 مسائل في كل من يومين متتاليين.

الأسئلة الآتية لإعطاء فكرة عن المستوى.

يلاحظ أنه في المسابقات القومية نحاول وضع مسائل رياضية حديثة (التراكيب الجبرية، المجاميع، ...) بينما في المسابقات الدولية يتجنبون ذلك نظرًا لأن التطوير في مختلف الدول ليس كله في نفس الطور.

س1: صف (10) (16 سنة):

برهن ما يأتي: في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ بمعاملات صحيحة فردية a,b,c الجذران دائمًا غير قياسيين.

جـ1: نفرض أن الجذرين دائمًا قياسيان. $\Leftarrow$ $\therefore b^2 - 4ac =$ مربع كامل

$\because$ b عدد فردي، $4ac$ عدد زوجي

$\therefore b^2 - 4ac$ مربع عدد فردي = مربع كامل فردي

$\therefore b^2 - 4ac = (2n+1)^2$ حيث $n \in y$

، $\because$ b عدد فردي $\Leftarrow$ $\therefore b = 2m + 1$ حيث $m \in y$

$\therefore (2m+1)^2 - 4ac = (2n+1)^2$

$\therefore (2m+1)^2 - (2n+1)^2 = 4ac$

$\therefore (2m-2n)(2m+2n+2) = 4ac$

$\therefore (m-n)(m+n+1) = ac \qquad ..... (1)$

m, n إما زوجيان معًا أو فرديان معًا أو أحدهما زوجي والآخر فردي.

(أولًا) نفرض أن m, n زوجيان معًا

$\therefore$ $(m-n)$ عدد زوجي، $(m+n+1)$ عدد فردي

من (1) $\therefore$ عدد زوجي × عدد فردي = عدد فردي وهذا محال

(ثانيا) نفرض أن m, n أحدهما فردي والآخر زوجي

$\therefore$ $(m - n)$ عدد فردي ، $(m + n + 1)$ عدد زوجي

من (1) $\therefore$ عدد فردي × عدد زوجي = عدد فردي وهذا محال وقد نتج هذا التناقض من فرضنا أن الجذرين قياسيان. $\therefore$ الجذران غير قياسيين

س3: أوجد كل الأعداد الحقيقية x التي تحقق المعادلة: $4\log_4 x + 3 = 2\log_x 2$

جـ3:

$\because\ 4\log_4 x + 3 = 2\log_x 2 \qquad \therefore\ 4\log_4 x + 3 = \log_x 4$

نفرض أن: $\log_x 4 = m$ $\qquad \because\ \log_4 x \times \log_x 4 = 1$

$\therefore\ \log_4 x = \dfrac{1}{m}$

من (1):

$\therefore\ \dfrac{4}{m} + 3 = m \qquad \therefore\ m^2 - 3m - 4 = 0$

$\therefore\ (m + 1)(m - 4) = 0 \qquad \therefore\ m = -1$ أو $m = 4$

$\log_4 x = -1$ أو $\log_4 x = \dfrac{1}{4}$

$\therefore x = \dfrac{1}{4}$ أو $x = (4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$ (وهو المطلوب)

ثانيا: صف (12) (18 سنة):

س1: أوجد كل الأعداد الحقيقية k بحيث أن المعادلة:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = k\left(\tan^4 x - \cos^4 x\right) \quad \text{لها في الفترة} \quad \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

(1) لا حل حقيقي. (2) حل واحد حقيقي فقط.

(3) حلان حقيقيان فقط. (4) أكثر من حلين حقيقين.

جـ:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = k\left(\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} - \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\right)$$

$$= \frac{k\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right)\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)}{\sin^4 x \cos^4 x}$$

$\therefore\ (\sin^4 x - \cos^4 x)[\sin^4 x \cos^4 x\ - k(\sin^4 x + \cos^4 x)] = 0$

$\therefore\ \sin^4 x - \cos^4 x = 0 \qquad \therefore\ \tan x = 1$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$ مهما كانت قيمة k

أو $\sin^4 x \cos^4 x - k(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0$

$\therefore\ \frac{1}{16}\sin^4 2x\ - k[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] = 0$

$\therefore\ \frac{1}{16}\sin^4 2x\ - k(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) = 0$

بوضع $\sin 2x = y$

$\therefore\ \frac{1}{16}y^4 - k(1 - \frac{1}{2}y^2) = 0$

$\therefore\ y^4 = \frac{1}{2}(-8k \pm \sqrt{64k^2 + 64k}) \qquad \therefore\ y^4 + 8ky^2 - 16k = 0$

$= \frac{1}{2}(-8k \pm 8\sqrt{k^2 + k}) = 4(-k \pm \sqrt{k^2 + k})$

وحيث أن y^2 موجب دائمًا.

$\therefore\ y^2 = 4(\sqrt{k^2 + k} - k)$

وحيث أن: $0 < x < \frac{\pi}{2} \qquad 0 < 2x < \pi$

$\therefore\ 0 < \sin 2x \leq 1 \qquad \therefore\ 0 \leq y \leq 1 \qquad \therefore\ 0 < y^2 \leq 1$

$\therefore\ 0 < \sqrt{k^2 + k} \leq \frac{1}{4}$ ..... (1)

وحيث أن طرفي المتباينة (1) موجبان

$\therefore$ بتربيع الطرفين ينتج أن: $k^2 + k \leq k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{16}$

$\therefore\ \frac{1}{2}k \leq \frac{1}{16} \qquad \therefore\ k \leq \frac{1}{8}$ ..... (2)

لكي يكون $\sqrt{k^2 + k}$ عددًا حقيقيًا فإن: $k^2 + k \geq 0$

$\therefore$ k لا تقع بين 0 ، -1 ...... (3) فى المتباينة (1)

$\because$ $\sqrt{k^2 + k}$ عدد موجب أو صفر

$\therefore\ k + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad \therefore\ k \leq -\frac{1}{4}$ ..... (4)

وحيث أن: $k \neq 0 \qquad 0 < x$ ...... (5)

من (2) ، (3) ، (4) ، (5) $\therefore\ 0 < x \le \frac{1}{8}$

وعند $k = \frac{1}{8}$ حيث $x = \frac{\pi}{4}$ إذن إذا كان $0 < x \le \frac{1}{8}$ يكون للمعادلة

$\sin^2 2x = 4\left(\sqrt{k^2+k} - k\right)$ حل ويكون للمتغير x قيمتان بجانب $x = \frac{\pi}{4}$

الخلاصة: إذا كان $0 < x \le \frac{1}{8}$ يكون 3 حلول حقيقية.

إذا كان: $k > \frac{1}{8}$ أو $k < 0$ يوجد حل حقيقي واحد فقط.

ولا توجد قيمة لـ k بحيث تكون المعادلة ليس لها حل.

ولا توجد قيمة لـ k بحيث تكون المعادلة لها حلان فقط.

س2: برهن أن لكل قيم x الحقيقية المتساوية الآتية صحيحة:

$$\sin 5x = 16 \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$$

جـ2:

الطرف الأيمن $= \sin(x + 4x) = \sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x$

$= \sin x(2\cos^2 2x - 1) + \cos x \times 2 \sin 2x \cos 2x$

$= \sin x(2\cos^2 2x - 1) + 4 \sin x \cos^2 x \sin 2x$

$= \sin x(2\cos^2 2x - 1) + 2 \sin x\,(1 + \cos 2x) \cos 2x$

$= \sin x[2\cos^2 2x - 1 + 2\cos 2x + 2\cos^2 2x]$

$= \sin x\,[4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1]$

الطرف الأيسر:

$= 4 \sin x \sin(x - \frac{1}{5}\pi) \sin(x + \frac{1}{5}\pi) \sin(x - \frac{2}{5}\pi) \times \sin(x + \frac{2}{5}\pi)$

$= 4 \sin x(\cos\frac{2\pi}{5} - \cos 2x)(\cos\frac{4}{5}\pi - \cos 2x)$

$= 4 \sin x[\cos^2 2x - \cos 2x(\cos\frac{2}{5}\pi + \cos\frac{4}{5}\pi) + \cos\frac{4}{5}\pi \cos\frac{2}{5}\pi]$

$= 4 \sin x[\cos^2 2x - \cos 2x(\cos\frac{2}{5}\pi - \cos\frac{1}{5}\pi) + \frac{1}{2}(\cos\frac{6}{5}\pi + \cos\frac{2}{5}\pi)]$

$= 4 \sin x[\cos^2 2x - \cos 2x(\cos\frac{2}{5}\pi - \cos\frac{4}{5}\pi) + \frac{1}{2}(\cos\frac{2}{5}\pi + \cos\pi)]$

نعلم أن: $\sin\frac{3}{5}\pi = \sin(\pi - \frac{3}{5}\pi)$

$$\therefore\ 3\sin\frac{1}{5}\pi - 4\sin^3\frac{1}{5}\pi = 2\sin\frac{1}{5}\pi\cos\frac{1}{5}\pi$$

$$\therefore\ 3 - 4\sin^2\frac{1}{5}\pi = 2\cos\frac{1}{5}\pi \qquad \therefore\ 3 - (1 - \cos^2\frac{1}{5}\pi) = 2\cos\frac{1}{5}\pi$$

$$\therefore\ 4\cos^2\frac{1}{5}\pi - 2\cos\frac{1}{5}\pi - 1 = 0 \qquad \therefore\ \cos\frac{1}{5}\pi = \frac{2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

وحيث أن: $\frac{1}{5}\pi$ تقع في الربع الأول $\therefore\ \cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

$$\therefore\ \cos\frac{1}{5}\pi - \cos\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi - (2\cos^2\frac{1}{5}\pi - 1) = 1 + \cos\frac{1}{5}\pi - 2\cos^2\frac{1}{5}\pi$$

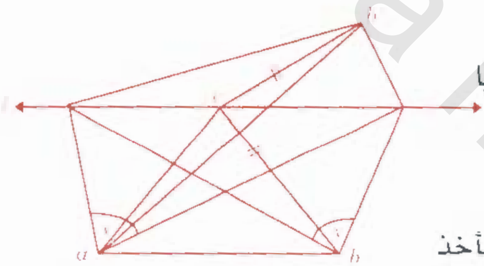
$$= 1 + \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) - 2\times\frac{1}{16}(1+\sqrt{5})^2 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ الطرف الأيسر $= 4\sin x[\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}]$

الطرف الأيمن $= \sin x[4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1] =$

س4: l مستقيم، $\overline{ab}$ قطعة ليست في مستوى l أوجد نقطة c على l حيث محيط الدائرة الخارجية abc نهاية صغرى.

جـ4: المستقيم l والنقطة a يحددان مستويًا وليكن x والمستقيم l والنقطة b يحددان مستويًا وليكن y



شكل (1)

ندير المستوى y حول المستقيم l إلى أن نأخذ النقطة b الوضع $\bar{b}$ حيث $\bar{b}$ تقع في المستوى x، $\bar{b}$، a يقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستقيم l.

نفرض أن: c نقطة ما على المستقيم l نصل $\overline{c\bar{b}}$ ، $\overline{cb}$ ، $\overline{ca}$

محيط $\Delta\, abc = \overline{ac} + \overline{cb} + \overline{ba} = (\overline{ac} + \overline{c\bar{b}}) + \overline{ba}$

$\therefore$ $\overline{ba}$ ثابت لأن a, b نقطتان ثابتتان

$\therefore$ المحيط يكون أصغر ما يمكن إذا كان: $\overline{ac} + \overline{c\bar{b}}$ أصغر ما يمكن.

$\because$ $\overline{ac} + \overline{c\bar{b}}$ يكون أصغر ما يمكن إذا كانت c تقع على $\overline{c\bar{b}}$ أي أن النقطة المطلوبة هي نقطة تقاطع $\overline{c\bar{b}}$ مع المستقيم l ولتحديد موضع c في هذه الحالة نسقط من a, b العمودين $\overline{be}$ ، $\overline{ad}$ على المستقيم l كما في شكل (2) ونصل $\overline{\bar{b}e}$ فيكون $(\angle\, \bar{b}ec) = 90°$

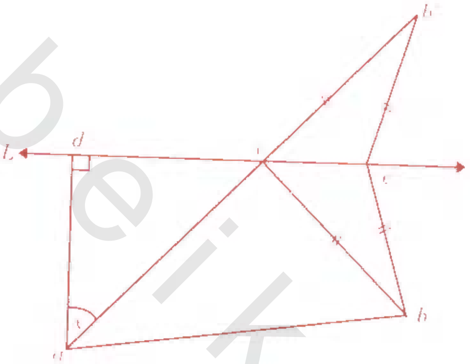
$\because$ $\overline{be}$ ، $\overline{ad}$ عمودان على المستقيم l في المستوى x

$\therefore \overline{ad} \,//\, \overline{be}$

$\therefore \Delta\Delta\, adc, \bar{b}ec$ متشابهان

$$\therefore \frac{\overline{dc}}{ec} = \frac{\overline{ad}}{\overline{b}e} = \frac{\overline{ad}}{\overline{b`n}}$$

$\therefore$ النقطة المطلوب تعينها (c) تقسم من الداخل البعد بين موقعي العمودين النازلين من a, b على المستقيم l بنسبة تساوي النسبة بين طولي هذين العمودين. ويلاحظ أنه إذا كان $\overline{ab} \perp l$ فإن النقطتين d, e تنطبقان وتكون النقطة المطلوبة هى d أو e



شكل (2)

(2) من المسابقات الأمريكية في الرياضيات 1976م

الأستاذ/ بنيامين تاوضروس

مدير إدارة المناهج بالتعليم الابتدائية بالقاهرة 1982م

(1) إذا كان باقي طرح مقلوب $(1 - x)$ من 1 يساوي مقلوب $(1 - x)$ فإن x تساوي ....

(أ) -2 (ب) -1 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) 2 (هـ) 3

جـ1:

$1 - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ $\therefore 1 = \frac{2}{1-x}$ $\therefore x = -1$

---

(2) كم عدد حقيقي x يجعل $\sqrt{-(x+1)^2}$ عددًا حقيقيًا؟

(أ) لا يوجد أي عدد. (ب) واحد. (جـ) اثنان.

(د) عدد محدد أكبر من 2. (هـ) عدد غير منته.

جـ2: $\sqrt{-(x+1)^2} \in h$ إذا كان $-(x+1)^2 \geq 0$

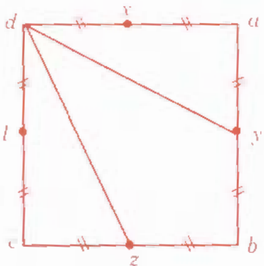
$\because -(x+1)^2$ لا يمكن أن يكون موجبًا $\therefore -(x+1)^2 = 0$ إذا كان: $x = -1$

---

(3) مجموع أبعاد أحد رءوس مربع طول ضلعه 2 وحدة طول عن منتصفات كل من أضلاع المربع يساوي ....

(أ) $2\sqrt{5}$ (ب) $2+\sqrt{3}$ (جـ) $2+2\sqrt{3}$

(د) $2+\sqrt{5}$ (هـ) $2+2\sqrt{5}$



جـ3:

$\overline{dx} + \overline{dy} + \overline{dz} + \overline{dl}$

$= 1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+1$

$= 2 + 2\sqrt{5}$

---

(4) إذا كان الحد الأول من متوالية هندسية = 1، وأساسها = r، وعدد حدودها = n، ومجموع هذه الحدود = c حيث كل من r، c لا يساوي صفرًا فإن مجموع مقلوبات حدود هذه المتوالية يكون:

(أ) $\frac{1}{c}$ (ب) $\frac{1}{r^n c}$ (جـ) $\frac{c}{r^{n-1}}$ (د) $\frac{r^n}{c}$ (هـ) $\frac{r^{n-1}}{c}$

جـ4: مجموع مقلوبات الحدود = $\frac{r^{-n}-1}{r^{-1}-1}$

$$= \frac{r^{-n}-1}{r^{-1}-1} \times \frac{r^n}{r^n} = \frac{1-r^n}{r^{n-1}(1-r)} = \frac{c}{r^{n-1}}$$

---

(5) ما هو عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين عشرة ومائة، والتي كل منها، إذا كُتب في النظام العشري، يزداد بمقدار تسعة، عند عكس وضع رقميه؟

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 8 (د) 9 (هـ) 10

جـ5: نفرض أن رقم الآحاد = x ، رقم العشرات = y

$\therefore (y + 10x) - (x + 10y) = 9 \qquad \therefore x - y = 1$

$\therefore$ رقم الآحاد يزيد واحدًا عن رقم العشرات.

$\therefore$ الأعداد هي 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 $\quad \therefore$ عدد الأعداد = 8

---

(6) إذا كان c عددًا حقيقيًا وكان المعكوس الجمعي لأحد جذري المعادلة: $x^2 - 3x + c = 0$ هو حل للمعادلة: $x^2 + 3x - c = 0$ فإن جذري المعادلة: $x^2 - 3x + c = 0$ هما:

(أ) 2, 1 (ب) −2, −1 (جـ) 3, 0 (د) −3, 0 (هـ) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

جـ6: $m, -m$ هما على الترتيب جذرا للمعادلتين:

$x^2 - 3x + c = 0, \quad x^2 + 3x - c = 0$

$\therefore m^2 - 3m + c = 0, \qquad m^2 - 3m - c = 0$

بالجمع ينتج أن: $2m^2 = 0$

$\therefore m = 0 \quad \therefore c = 0$

$\therefore$ المعادلة: $x^2 - 3x + c = 0$ هي المعادلة: $x^2 - 3x = 0$

$\therefore x = 0$ أو 3

---

(7) إذا كانت $x \in h$ فإن المقدار $(1+x)(1-|x|)$ يكون موجبًا إذا وفقط إذا:

(أ) $|x| < 1$ (ب) $x < 0$ (جـ) $|x| > 1$ (د) $x > -1$

(هـ) $x < -1$ أو $-1 < x < 1$

جـ7: $\because$ $|x| > -1$ عندما $x < 0$ ، $|x| = x$ عندما $x \geq 0$

$$\therefore y = \begin{cases} (1+x)^2 & \text{عندما } x < 0 \\ (1-x)(1+x) & \text{عندما } x \geq 0 \end{cases}$$

$\therefore$ $y = 0$ عندما $x = -1$ أو عندما $x = 1$

$\therefore$ النقط $-1, 0, 1$ تقسم خط الأعداد إلى 4 فترات والجدول التالي يبين إشارة y في هذه الفترات.

الفترة	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, 0[$
إشارة y	موجبة	موجبة	موجبة	سالبة

y تكون موجبة إذا كان: $-1 < x < 1$ ، $x < -1$

وبالعكس إذا كانت y موجبة فإن: $-1 < x < 1$ ، $x < -1$

$\therefore$ y تكون موجبة إذا وفقط إذا كان: $x < -1$ ، $-1 < x < 1$

(8) سوبر ماركت به 128 صندوقًا من التفاح، وكل صندوق يحتوي على 120 تفاحة على الأقل وعلى 144 تفاحة على الأكثر. ما هو أكبر عدد صحيح n صندوق على الأقل يجب أن يحتوي على نفس العدد من التفاح؟

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 24 (هـ) 25

جـ8: نتصور أننا وضعنا الصناديق في أكوام بحيث تكون الصناديق في أكبر الأكوام = n

نفرض أن عدد الأكوام = x ، عدد الصناديق في أكبر الأكوام = n

$\because$ عدد الصناديق = 128 صندوقًا

$\therefore xn \geq 128 \quad ...... (1)$

$\because$ الصندوق يحتوي على 120 تفاحة على الأقل وعلى 144 تفاحة على الأكثر.

$\therefore$ أكبر عدد من الأكوام يمكن أن يكون موجودًا في السوبر ماركت:

$144 - 119 = 25$

$\because$ عدد الأكوام = x فرضًا $\therefore x \leq 25$

$\therefore xn \le 25n$ ..... (2)

من (1) ، (2)

$\therefore 25n \ge xn \ge 128$ $\therefore n \ge \frac{128}{25}$ $\therefore n \ge 5\frac{3}{25}$

$\therefore n = 6$ أو 7 أو 8 أو .... أو 128

أي أن عدد الصناديق في أكبر الأكوام = 6 أو 7 أو 8 أو .... أو 128

∴ أكبر الأكوام يحتوي على 6 صناديق على الأقل.

∴ أكبر عدد صحيح n بحيث n صندوق على الأقل يجب أن تحتوي على نفس العدد من التفاح = 6.

---

(9) إذا كانت مقادير الزوايا الداخلة لمضلع محدب في توال عددي، وكان مقدار أصغر هذه الزوايا = $100°$ ومقدار أكبر هذه الزوايا = $140°$ فإن عدد أضلاع المضلع = ...

(أ) (6) (ب) (8) (جـ) (10) (د) (11) (هـ) (12)

جـ9: ∴ مجموع الزوايا = $(2n - 4) \times 90°$ ..... (1)

$\because c = \frac{n}{2}(a + l)$, : a = الحد الأول , l = الحد الأخير

∴ مجموع الزوايا = $\frac{1}{2}n(100° + 140°) = 120° \times n$ ..... (2)

من (1) ، (2)

$\therefore (2n - 4) \times 90° = 120° \times n$ $\therefore n = 6$

---

(10) إذا كان باقي قسمة كل من الأعداد 2312, 1417, 1059 على m هو r حيث m عدد صحيح أكبر من 1 فإن $(m - r)$ يساوي: ....

(أ) 1 (ب) 15 (جـ) 179 (د) $[m - 15]$ (هـ) $[m - 1]$

جـ10: باقي قسمة 1059 على m هو r

$\therefore 1059 = mn_1 + r : n_1 \in y$ ...... (1)

$\therefore 1417 = mn_2 + r : n_2 \in y$ ...... (2)

$\therefore 2310 = mn_3 + r : n_3 \in y$ ...... (3)

بطرح (1) من (2)

$\therefore 258 = m(n_2 - n_1)$

بطرح (2) من (3)

$\therefore 895 = m(n_3 - n_2)$

$\because$ كل $n_3 - n_1 \in y$ ، $n_2 - n_1 \in y$ ،

$\therefore$ m عامل مشترك للعددين 358 ، 895 ...... (4)

$\because 358 = 2 \times 179, \;\; 895 = 5 \times 179$

$\therefore$ العددان 358 ، 895 لهما عاملان مشتركان هما 1 ، 179 ...... (5)

من (4)، (5)

$\therefore m = 1$ أو $m = 179, \qquad \because m > 1 \qquad \therefore m = 179$

وبقسمة 1059 على 179 نجد خارج القسمة 5 والباقي 164

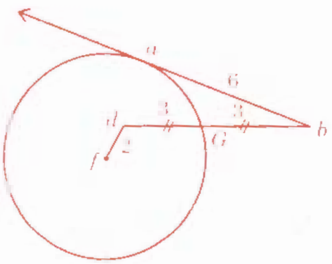
$\therefore r = 164 \qquad \therefore m - r = 179 - 164 = 15$

---

(11) في الشكل المقابل: $\overline{ab}$ يمس الدائرة التي مركزها f في نقطة a، النقطة d تقع داخل الدائرة، $\overline{db}$ يقطع الدائرة فى c فإن كان:

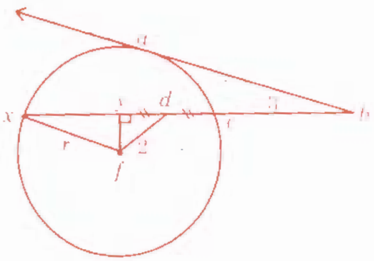
$\overline{fd} = 2$ ، $\overline{ab} = 6$ ، $\overline{bc} = \overline{dc} = 3$

فإن نصف قطر الدائرة يساوي ....



(أ) $3 + \sqrt{3}$ (ب) $\frac{15}{\pi}$ (جـ) $\frac{9}{2}$ (د) $2\sqrt{6}$ (هـ) $\sqrt{22}$

جـ11: نرسم $\overrightarrow{bx}$ يقطع الدائرة f في x ، نسقط العمود $\overrightarrow{fy}$ على $\overline{cx}$ ، ثم نصل $\overline{fx}$



$\because (\overline{ba})^2 = \overline{bc} \, . \, \overline{bx}$

$\therefore 36 = 3bx \qquad \therefore bx = 12$

$\therefore cx = 9$

$\therefore cy = 4.5 \qquad \therefore dy = 1.5$

$\therefore r^2 = (\overline{fy})^2 + (\overline{yx})^2$

$= (\overline{fd})^2 - (\overline{dy})^2 + (\overline{yx})^2$

$= 4 - \frac{9}{4} + \frac{81}{4} = 22$

$\therefore r = \sqrt{22}$

(12) $\vartheta(x)$ كثيرة حدود ، فإذا قسمت على $(x - 1)$ كان الباقي 3 وإذا قسمت على $(x - 3)$ كان الباقي 5 ، فإذا قسمت $\vartheta(x)$ على $(x - 1) \times (x - 3)$ كان الباقي:

(أ) $(x - 2)$ (ب) $(x + 2)$ (جـ) 2 (د) 8 (هـ) 15

جـ12: ∵ $(x - 1) \times (x - 3)$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية

$$\therefore\ \vartheta(x) = (x - 1)(x - 3)e(x) + ax + b$$

حيث $e(x)$ كثيرة حدود

بوضع $x = 1$ ينتج أن: $\vartheta(1) = a + b$

$$\therefore\ a + b = 3 \qquad ..... (1)$$

بوضع $x = 3$ ينتج أن: $\vartheta(3) = 3a + b$

$$\therefore\ 3a + b = 5 \qquad ..... (2)$$

بحل (1) ، (2) ينتج أن:

$$\therefore\ a = 1,\ \ b = 2$$

∴ الباقي $ax + b = x + 2$

---

(13) إذا كان كل من $a, b, x \in h - \{1\}$ فإن:

$$4(\log_a x)^2 + 3(\log_b x)^2 = 8(\log_a x)(\log_b x)$$

(أ) لجميع قيم a, b, x (ب) إذا وفقط إذا كان: $a = b^2$

(جـ) إذا وفقط إذا كان: $b = a^2$ (د) إذا وفقط إذا كان: $x = ab$

(هـ) ليس كل ما سبق.

جـ13:

$$\therefore\ (2\log_a x - \log_b x)(2\log_a x - 3\log_b x) = 0$$

$$\therefore\ 2\log_a x = 3\log_b x \quad \text{أو} \quad 2\log_a x = \log_b x$$

$$\therefore\ \log_b x = \log_a x \times \log_b a$$

من (1)، (2)

$$\therefore\ 2\log_a x = \log_a x \times \log_b a \quad \text{أو} \quad 2\log_a x = 3\log_a x \times \log_b a$$

$$\because\ x \neq 1 \qquad \therefore\ \log_a x \neq 0$$

$$2 = 3\log_b a \quad \text{أو} \quad 2 = \log_b a \qquad \therefore\ a = b^2,\ \ a^3 = b^2$$

(14) أوجد أصغر عدد صحيح فردي n يجعل حاصل الضرب:

$$2^{\frac{1}{7}} \times 2^{\frac{3}{7}} \times 2^{\frac{5}{7}} \times \ldots \times 2^{\frac{1}{7}(2n+1)} > 1000?$$

(أ) 7 (ب) 9 (جـ) 11 (د) 17 (هـ) 19

جـ14: مجموع الأسس $\frac{1}{7}[1+3+5+\ldots+(2n+1)]$

نفرض أن عدد حدود المتوالية العددية 1 ، 3، 5، . . . . ، $2n + 1$ يساوي m

$\therefore (2n + 1) = 1 + (m - 1) \times 2 \qquad \therefore m = n + 1$

$\therefore$ مجموع حدود هذه المتوالية $= \frac{1}{2}(n+1)[1+(2n+1)] = (n+1)^2$

$\therefore 2^{\frac{1}{7}(2n+1)} > 1000 \qquad \therefore \frac{1}{7}(n+1)^2 \log 2 > 3$

$\therefore (n+1)^2 > 21 \div \log 2 \qquad \therefore (n+1)^2 > 21 \div 0.301$

$\therefore (n+1)^2 > 69 \qquad \therefore (n+1)^2 > 8^2 \qquad \therefore n > 7$

$\therefore n = 8$ أو 9 أو 10 أو . . . .

$\therefore$ أصغر عدد فردي يحقق المتباينة هو: $n = 9$

---

(15) إذا أعطينا مثلثًا متساوي الأضلاع طول ضلعه l ، وأوجدنا المحل الهندسي للنقطة s التي تقع في مستوى المثلث، والتي مجموع مربعات أبعادها عن رءوس المثلث يساوي عددًا ثابتًا k فإن المحل الهندسي للنقطة s:

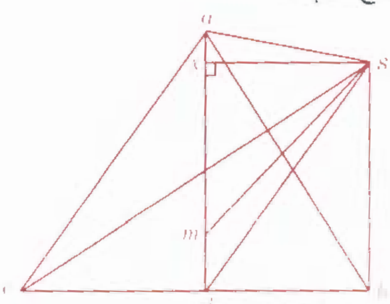
(أ) يكون دائرة إذا كان $k < l^2$

(ب) يحوي ثلاث نقط فقط إذا كان: $k = 2l^2$ ، ويكون دائرة إذا كان $k > 2l^2$

(جـ) يكون دائرة ذات نصف قطر موجب فقط إذا كان: $l^2 < k < 2l^2$

(د) يحوي على عددًا محدودًا من النقط لجميع قيم k.

(هـ) الجواب الصحيح ليس واحدًا من الأجوبة السابقة.



جـ15: نفرض أن d منتصف $\overline{bc}$

، m مركز المثلث متساوي الأضلاع

$\therefore m$ تقسم $\overline{ad}$ بنسبة $2 : 1$

$$\overline{md} = \frac{1}{3} l \sin 60^\circ \quad , \quad \overline{ma} = \frac{2}{3}\, l \sin 60^\circ$$

$$\because\ (\overline{sa})^2 + (\overline{sb})^2 + (\overline{sc})^2 = k$$

$$\therefore\ (\overline{sa})^2 + (\overline{sd})^2 + (\overline{bd})^2 = k$$

$$\therefore\ [(\overline{ms})^2 + (\overline{ma})^2 \pm 2\overline{ma} \times \overline{mx}] + 2[(\overline{ms})^2 + (\overline{md})^2 \pm 2\overline{md} \times \overline{mx}] + 2(\overline{bd})^2 = k$$

$$\therefore\ 3(\overline{ms}) + (\overline{ma})^2 + 2(\overline{bd})^2 = k$$

$$\therefore\ 2(\overline{ms})^2 + \frac{4}{9} l^2 \sin^2 60^\circ + \frac{2}{9} l^2 \sin^2 60^\circ + \frac{1}{2} l^2 = k$$

$$\therefore\ 3(\overline{ms})^2 + l^2 = k \qquad \therefore\ (\overline{ms})^2 = \frac{1}{3}(k - l^2)$$

فإذا كان: $k > l^2$ فإن النقطة ϑ تتحرك على الدائرة مركزها m ونصف قطرها يساوي $\sqrt{\frac{1}{3}\left(k - l^2\right)}$

---

(16) إذا كان: ${}_{r}\vartheta^{n} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$ حيث r, n عددان صحيحان،

$1 \le r < n$ فإن: ${}_{r}\vartheta^{n} \times \dfrac{n-2r-1}{r+1}$ يكون عددًا صحيحًا.

(أ) لجميع قيم r, n (ب) لجميع قيم r, n الزوجية ولكن ليس لجميع قيم r, n.

(جـ) لجميع قيم r, n الفردية ولكن ليس لجميع قيم r, n.

(د) عندما $r = 1$ أو $r = n - 1$ ولكن ليس لجميع قيم r, n الفردية.

(هـ) إذا كانت n تقبل القسمة على r ولكن ليس لجميع قيم r, n الزوجية.

جـ16:

$$\frac{n-2r-1}{r+1} = \frac{n-2r-2+1}{r+1} = \frac{(n+1)-2(r+1)}{(r+1)} = \frac{n+1}{r+1} - 2$$

$$\therefore\ \frac{n-2r-1}{r+1} \times {}_{r}\vartheta^{n} = \left(\frac{n+1}{r+1} - 2\right) {}_{r}\vartheta^{n}$$

$$= \frac{n+1}{r+1} \times {}_{r}\vartheta^{n} - 2\,{}_{r}\vartheta^{n} = {}_{r}\vartheta^{n} = \frac{(n+1)\underline{|n}}{(r+1)\underline{|r}\ \underline{|n-r}} - 2\,{}_{r}\vartheta^{n}\,{}_{r}\vartheta^{n} =$$

$$= \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r+1}\ \underline{|(n+1)-(r+1)}} - 2\,{}_{r}\vartheta^{n} = {}_{r+1}\vartheta^{n+1} - 2\,{}_{r}\vartheta^{n}$$

= عدد صحيح - عدد صحيح = عدد صحيح لجميع قيم r, n

(17) ما هو عدد الثلاثيات المرتبة (x, y, z) التي تحقق المعادلات الآتية:

$$x + 2y + 4z = 12, \qquad xy + 4yz + 2xz = 22, \qquad xyz = 6$$

(أ) لا يوجد أي ثلاثية (ب) 1 (جـ) 2 (د) 4 (هـ) 6

جـ17:

$x + 2y + 4z = 12$ ..... (1)

$xy + 4yz + 2xz = 22$ ..... (2) $xyz = 6$ ..... (3)

$\therefore$ من (1): $x + 4z = 12 - 2y$ ..... (4)

$\therefore$ من (2): $y(x + 4z) + 2xz = 22$ ..... (5)

$\therefore$ من (3): $xz = \frac{6}{y}$ ..... (6)

بالتعويض من (4)، (6) في (5) ينتج أن:

$y(12 - 2y) + \frac{12}{y} = 22$ $\therefore y^2 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$

$\because$ مجموع معاملات حدود الطرف الأيمن = 0

$\therefore$ $y = 1$ هو حل للمعادلة (7)

من السهل إثبات أن الحلين الآخرين للمعادلة (7) هما 2، 3

$\therefore y = 1$ أو 2 أو 3

عندما $y = 1$: من (4): $\therefore x + 4z = 10$ من (6) : $\therefore xz = 6$

بحل المعادلتين: $\therefore x = 6$ أو 4 ، $z = 1$ أو $\frac{3}{2}$

$\therefore$ كل من $(\frac{3}{2}$ ، 1 ، 4) ، (1 ، 1 ، 6) هي حل للمعادلات الثلاث

بالمثل عندما $y = 2$ يمكن إثبات أن: $\frac{3}{2}$ أو $z = \frac{1}{2}$ ، 2 أو $z = 6$

$\therefore$ كل من $(\frac{1}{3}$ ، 2 ، 6) ، $(\frac{3}{2}$ ، 2 ، 2) حل للمعادلات المعطاة

وبالمثل عندما $y = 3$ يمكن إثبات أن: 1 أو $z = \frac{1}{2}$ ، 2 أو $z = 4$

$\therefore$ كل من (1 ، 3 ، 2) ، $(\frac{1}{2}$ ، 3 ، 4) حل للمعادلات المعطاة

$\therefore$ يوجد 6 ثلاثيات مرتبة (x, y, z) تحقق المعادلات.

(3) المسابقة الدولية للرياضيات لسنة 1969م

أرسلت الدول المتسابقة 70 مسألة للجنة المحلفين. وهؤلاء اختاروا من بينها 6 مسائل اعتبرت مناسبة لكل من الفرق المتسابقة (مثلاً روعي اختلاف المناهج من دولة لدولة). وكان آنذاك هناك جهود تبذل لإدخال رياضيات حديثة وأفكار جديدة. ولكن منظمي المسابقة رغم تحيزهم لمواضيع (متجهات ـ هندسية تحليلية ـ تفاضل ـ تركيبات رياضية ـ أعداد مركبة ـ احتمالات ... إلخ) إلا أنهم لا يتفقون تماماً عند التنفيذ ولكن المنظمين يضعون في بالهم الاتجاه نحو التجديد.

ومن المعلوم أن المسائل من مستو عال جداً.

ومن بين 112 متسابقاً حصل على الدرجة النهائية ثلاثة متسابقين فقط من (المجر ، بريطانيا، الاتحاد السوفيتي (السابق)).

مسألة (1): وضعتها جمهورية ألمانيا الديمقراطية:

برهن أن هناك أعداداً طبيعية لا نهائية a تخضع للشرط الآتي: العدد $\vartheta = n^4 + a$ ليس عدداً أولياً حيث n أي عدد طبيعي.

مسألة (2): وضعتها المجر:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت حقيقة، x متغير حقيقي:

$$d(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{4}\cos(a_3 + x) + \ldots + \frac{1}{n-1}\cos(a_n + x)$$

برهن أنه إذا كان: $d(x_1) = d(x_2) = 0$

فإن: $x_2 - x_1 = mt$ حيث m عدد صحيح.

مسألة (3): وضعتها بولندا:

لكل $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ حدد الشروط الضرورية والكافية التي تحقق في العدد الحقيقي a بحيث أنه يوجد هرم ثلاثي k حرفاً منه طول كل منهما a والباقي من الأحرف $6 - k$ طول كل حرف الوحدة.

مسألة (4): وضعتها هولندا:

$\overline{ab}$ قطر لنصف دائرة $y, c \in$ للدائرة y حيث $c \neq b$ ، $c \neq a$ رسم $\overline{cd}$ عمود على $\overline{ab}$

d_1, d_2, d_3 ثلاث دوائر لها $\overline{ab}$ مماس مشترك d_1 الدائرة الداخلة للمثلث abc،

d_2, d_3 كل منها تمس $\overline{cd}$ وتمس y

برهن أن الدوائر الثلاث d_1, d_2, d_3 لها مماس مشترك آخر.

مسألة (5): وضعتها منغوليا:

أعطيت n نقطة $(n > 4)$ ليس بينها أي ثلاث على استقامة واحدة وكلها في مستوى واحد.

برهن أنه يوجد على الأقل ${}_{2}\vartheta^{n-3}$ شكل رباعي محدب رءوسه من النقط المعلومة.

مسألة (6): وضعها الاتحاد السوفيتي:

برهن أنه لكل الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2$ حيث $x_1 > 0$ ، $x_2 > 0$ ،

$x_2y_2 - t_2^2 > 0, \ x_1y_1 - t_1^2 > 0$ فالمتباينة الآتية صحيحة:

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (t_1 + t_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - t_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - t_2^2}$$

بين الشروط الكافية والضرورية لصحة علامة التساوي.

الدول المشتركة 14 دولة وكل فريق دولة مكون من 8 أفراد، وكان المطلوب الإجابة في كل من يومين متتالين على 3 أسئلة والزمن 240 دقيقة في كل حالة.