

## الفصل الثاني

### المسابقات في الدول العربية

#### النموذج الأول

⊠ أجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول: أوجد مجموعة الحل في كل مما يلي:

$$|x| - x^2 \geq 0 \quad (1) \quad \left[\frac{3}{x}\right] = 5 \quad (2)$$

$$e^{x^2-2x} = 1 \quad (3) \quad \frac{x-1}{x+2} > -1, x \neq -2 \quad (4)$$

♦ السؤال الثاني:

$$(1) \text{ أوجد : ( أ ) } \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x-1}{x-1} \right| \quad (ب) \lim_{x \rightarrow 3} x[x]$$

(2) لتكن  $\theta: h \rightarrow z$  حيث  $\theta(x) = \frac{x}{x^3+x}$  أجب عما يلي:

( أ ) أوجد مجال الدالة  $\theta$ . (ب) أوجد نقاط تقاطع منحنى  $\theta$  مع محور  $x$ .

(ج) أوجد المحاذيات الأفقية: الرأسية (إن وجدت).

( د ) مجموعة النقاط الحرجة (إن وجدت).

(هـ) فترات التزايد والتناقص للدالة  $\theta$ . ( و ) ارسم بيان الدالة  $\theta$ .

♦ السؤال الثالث:

(1) أوجد التكاملات الآتية:

$$(ب) \int \frac{1}{1+e^{2x}} dx \quad (أ) \int \frac{6x}{3x-2} dx$$

(2) أوجد مجموعة قيم  $x$  التي تحقق المعادلة الآتية:

$$\tan x + \tan 45 + \sqrt{3} \tan x \tan 45 - \sqrt{3} = 0, \quad 0 < x < 360^\circ$$

$$(3) \text{ أثبت أن: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

◆ السؤال الرابع:

(1) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (3, 4) ومقطعه مع محور  $y$  ضعف مقطعه مع محور  $x$ .

(2) أخذت عينتان من مجتمعين فأعطتا النتائج الآتية:

$$n = 50, \quad \bar{x}_j = 6, \quad \sum_{j=1}^{40} y_j = 280$$

ثم دمجت المجموعتان. ما الوسط الحسابي للمجموعة الناتجة؟

(3) أوجد مجموعة حل المعادلة:  $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = 2640$

النموذج الثاني

⊠ اجب عن جميع الأسئلة التالية:

◆ السؤال الأول:

(1) أوجد كلاً من النهايات التالية (إن وجدت)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x-2x^5}{1+4x^5} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [2x+1] - [x] \quad (\text{ج})$$

(2) أوجد  $\frac{dy}{dx}$  في كل مما يلي:

$$y = \sqrt{\sin \sqrt{x}} + \cos^{-1} \pi x \quad (\text{ب})$$

$$(y^2 - 2x)^5 = 7x \quad (\text{أ})$$

(3) ارسم بيان الدالة  $\vartheta(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$ ، مبيناً المحاذيات الأفقية والرأسية والمجالات

التي تكون عليها متزايدة والتي تكون عليها متناقصة.

◆ السؤال الثاني:

(1) إذا كانت:  $\vartheta(x)$  معرفة على  $[1, 4]$  وكانت  $\vartheta(x) = x^3 + x + 1$

أثبت أنه توجد  $c \in ]1, 4[$  بحيث أن المماس المرسوم عند  $(c, \vartheta(c))$  يوازي

المستقيم المار بالنقطتين  $(1, \vartheta(1))$ ،  $(4, \vartheta(4))$

(2) أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx \quad (\text{أ})$$

$$\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx \quad (\text{ج})$$

(3) أوجد المساحة المحدودة بمنحنيات الدوال:  $e(x) = e^x$ ,  $c(x) = e^{-x}$ ,  $d(x) = e^2$

◆ السؤال الثالث:

(1) إذا كانت:  $\sum_{r=1}^n \log a \left(\frac{1}{2}\right)^r = 10$  أوجد قيمة  $a$  حيث  $a \in h^+$

(2) إذا كان:  $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = 1$  أثبت أن:  $a, b \in h$ ,  $a = 1 - b$

(3) إذا كانت  $(z, *)$  زمرة وكان  $c$  عنصراً محدداً في  $z$ . وعرفت المجموعة  $y_c$  بحيث

$$y_c = \{x : x \in z, c * x = x * c\}$$

(4) بفرض أن  $a, b, c$  قياسات زوايا مثلث أثبت أن:

$$\frac{\sin b \sin c}{\sin a - \sin b \cos c} = \tan b$$

◆ السؤال الرابع:

(1) بين أن وتر الدائرة  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  والناتج عن قطع المستقيم:

$$l : x + y - 4 = 0$$
 لهذه الدائرة تقابله زاوية مركزية قائمة.

(2) إذا كانت  $c$  هي صورة  $(-3, 0)$  تحت تأثير انعكاس في المستقيم  $-x =$

$$y: 3 \quad \bar{z} \text{ أوجد إحداثي } \bar{c}.$$

(3) إذا كان:  $x = \frac{2-4t}{1-t}, y = \frac{8+6t}{3+t}$  حيث  $t = \sqrt{-1}$  أثبت أن:  $x^2 + y^2 = 16$

◆ السؤال الخامس:

(1) اكتب مراحل حل المسألة في الرياضيات مبيناً باختصار دور المعلم في كل مرحلة.

(2) وضع المقصود بالتقويم التكويني (البنائي) مبيناً أهميته في العملية التعليمية.

(3) وضع المقصود بالطريقة القياسية في تدريس الرياضيات مع مثال حول استخدام

هذه الطريقة.

## النموذج الثالث

✧ أجب عن جميع الأسئلة التالية:

◆ السؤال الأول:

(1) إذا كانت  $z = \{a, c, e\}$ ،  $y = \{b, d, e\}$ ،  $x = \{a, b, c\}$ ،  $s = \{a, b, c, d, e\}$

(أ) أوجد:  $\bar{x}$ ،  $\bar{y}$ ،  $\bar{z}$  حيث أن  $\bar{x}$ ،  $\bar{y}$ ،  $\bar{z}$  هي متممة كل من  $x$ ،  $y$ ،  $z$  على الترتيب.

(ب) أوجد:  $(x \cup \bar{z}) \cap (\bar{y} \cup z)$

(ج) تحقق من صحة ما يأتي:  $(x \cup y \cup z)^c = \bar{x} \cap \bar{y} \cap \bar{z}$

(2) إذا كانت:  $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(أ) أوجد عدد عناصر المجموعة:  $y = \{(a, b): a \neq b, a, b \in x\}$

(ب) أوجد عدد الأعداد الممكن تكوينها من عناصر المجموعة  $x$  بحيث:

(i) أن يكون العدد مكوناً من 3 أرقام.

(ii) أن يكون العدد مكوناً من 3 أرقام مختلفة بحيث يكون رقم الأحاد

عددًا أولياً.

◆ السؤال الثاني:

(1) (أ) إذا كانت  $(a, ar, ar^2, \dots)$  تكون متتالية هندسية حدودها موجبة فأثبت

أن:  $(\log a, \log ar, \log ar^2, \dots)$  تكون متتالية عددية.

(ب) أثبت أن:  $(2)^{4n} = (1+t)^{8n}$  حيث  $t = \sqrt{-1}$ ،  $n$  عدد صحيح موجب.

(ج) حل المعادلة:  $x^4 = 1$  في حقل الأعداد الحقيقية.

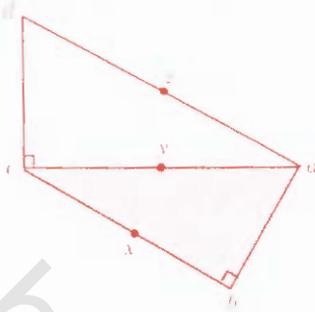
(2) (أ) إذا كان:  $\sum_{r=0}^{5x} 3 = 30$  فأوجد قيمة  $x$

(ب) برهن أن الشكل الذي رؤوسه  $(1, 5)$ ،  $(3, 2)$ ،  $(1, -1)$ ،  $(2, -2)$  هو

معين ثم أوجد مساحته.

(ج)  $abcd$  مربع أوجد إحداثي الرأس  $c$  علماً بأن:  $(3, 5)$ ،  $(0, 0)$  حيث  $c$  تقع

في الربع الأول.



(3) الشكل المقابل فيه :

$ab = dc = 8 \text{ cm}$  ، قائمة  $(\angle abc)$  ،

$\overline{cd} \perp$  المستوى  $abc$  فإذا كانت  $x, y, z$

منصفات  $\overline{ad}, \overline{ac}, \overline{bc}$  على الترتيب فأثبت أن :

$\overline{zx} \perp \overline{bc}$  ثم أوجد قياس الزاوية الزوجية

بين المستويين  $abc, zbc$

◆ السؤال الثالث :

(1) (أ) أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

$$\sin 600^\circ \cos 330^\circ - \cos(-120^\circ) \sin 210^\circ = -1$$

(ب) إذا كان :  $\sin c + \cos c = \frac{7}{5}$  فاحسب قيمة :

$\cos 2c$  (ii)

$\sin 2c$  (i)

(ج) أثبت صحة المتطابقة :  $\frac{\sin 2e + \sin e}{\cos 2e + \cos e + 1} = \tan e$

$$\left. \begin{array}{l} x < 1 \text{ عندما } x^2 + bx + 3 \\ x = 1 \text{ عندما } 4 \\ x > 1 \text{ عندما } ax + b \end{array} \right\} = d(x) \text{ إذا كان : (1) (أ)}$$

فأوجد قيمة كل من  $a, b$  علماً بأن  $d(x)$  متصلة عند  $x = 1$

(ب) أوجد مجموعة الحل :  $2[x - 2] = [5, 5]$

(ج) إذا كان :  $l(a \cup b) = \frac{7}{12}$  ،  $l(b) = \frac{2}{3}$  ،  $l(\bar{a}) = \frac{1}{2}$  فأوجد :

$$l(a \cap b) \text{ (1)} \quad l(a/b) \text{ (2)} \quad l(b/\bar{a}) \text{ (3)}$$

◆ السؤال الرابع :

$$(1) \text{ (أ) أوجد : } \int_0^1 (x^2 - 4x + 5)^5 (x - 2) dx$$

(ب) إذا كان :  $\int_a^b d(x) \cdot dx = \int_a^a d(x) \cdot dx = \int_b^a d(x) \cdot dx$  فأثبت أن :  $\int_a^b d(x) \cdot dx$  يساوي صفراً .

(ج) إذا كانت :  $\vartheta(x) = \int_0^x \frac{dx}{(j^2 + 1)^2}$  فأوجد  $\vartheta(0)$  ،  $\bar{\vartheta}(0)$

(2) ارسم المنطقة التي تعطى مساحتها بالتكامل  $\int_2^0 |x-3| dx$  وأوجد مساحتها

باستخدام خصائص شكلها الهندسي، ثم تحقق من ذلك بحساب التكامل.

#### ◆ السؤال الخامس:

- (1) إذا فشل الهندسة النظرية في تحقيق أهدافها التربوية لدليل على وجود صعوبات تقف في طريق التلاميذ وخصوصاً المبتدئين منهم عند دراسة هذه المادة.  
حدد بطريقة مختصرة الأسباب التي أدت إلى هذا الفشل.
- (2) شهدت مناهج الرياضيات في معظم دول العالم تطوراً جذرياً وظهرت رياضيات عصرية (حديثة) اذكر أهم العوامل التي دعت دول العالم لتطوير مناهج الرياضيات.

### النموذج الرابع

▣ اجب عن جميع الأسئلة التالية:

#### ◆ السؤال الأول:

- (1) إذا كان  $\omega$  أحد الجذرين التخيليين التكعيبيين للواحد الصحيح فكون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها  $(\omega^7 - 1)^2$ ,  $(\omega^5 - 1)$
- (2) أوجد الحد الخالي من  $x$  في مفكوك  $(x^2 + \frac{1}{x})^{15}$
- (3) إذا كانت:  $\vartheta(x) = x^4 - 4ax^2 + 2bx - 16$  فأوجد قيمتي  $a$ ,  $b$  اللتين تجعلان العدد 2 جذراً مكرراً مرتين لكثيرة الحدود  $\vartheta(x)$ .

#### ◆ السؤال الثاني:

(1) إذا كان  $(x-1)$  أحد عوامل المحدد  $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & x+k \end{vmatrix}$  فأوجد قيمة  $k$

(2)  $abc$  مثلث فيه  $\tan \frac{a}{2} = \frac{5}{6}$ ،  $\tan \frac{b}{2} = \frac{2}{5}$ . أثبت أن محيط المثلث يساوي  $3c$

(3) إذا كانت:  $z = \{ \{a, b, c\} : a, b, c \in x \}$ ،  $x = \{ x : x \in y, -3 \leq x < 5 \}$

فكم عدد عناصر  $z$ ؟

◆ السؤال الثالث:

(1) إذا كانت:  $y = x^3 + 2$ ،  $z = x^2 + 3$ ، فعيّن  $\frac{d^2j}{dy^2}$  عندما  $x = 2$

(2) يصب زيت بمعدل  $50 \text{ cm}^3/\text{s}$  في قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه 18 cm وطول نصف قطر قاعدته 5 cm، ومثبت بحيث يكون محوره رأسياً ورأسه لأسفل. فإذا كان الزيت يتسرب من ثقب القمع بمعدل  $30 \text{ cm}^3/\text{s}$  فأوجد معدل زيادة ارتفاع الزيت في القمع عندما يصل هذا الارتفاع 6 cm.

◆ السؤال الرابع:

(1) (أ) أوجد:  $\int 4x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 dx$  (ب) أوجد:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+4x-12}$

(ج) إذا كان:  $y = \int \sin x \cos x dx$  فأوجد:  $\frac{d^2y}{dx^2}$

(2) (أ) أوجد القيم العظمى الصغرى المحلية للدالة:  $d(x) = x^4 - 18x^2$

(ب) وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل وطول قطر قاعدته 16 cm وارتفاعه 6 cm به ماء يتسرب منه بمعدل  $8 \text{ cm}^3/\text{m}$ ، فما هي سرعة هبوط سطح الماء عندما يكون عمق الماء فيه 3 cm.

(ج) بدأ جسم حركته من نقطة ثابتة  $f$  وكانت سرعة  $z \text{ cm/s}$  بعد  $n$  ثانية تتعين بالعلاقة:  $z = 6n^2 - 18n + 12$ ، أوجد أقل سرعة يتحرك بها وبين أن السرعة تنعدم مرتين، ثم أوجد المسافة التي يقطعها خلال الفترة التي تقع بين زمني انعدام السرعة.

◆ السؤال الخامس:

(1) اذكر باختصار أهداف تدريس الرياضيات.

(2)  $abc$  مثلث نصفت زاوية  $bac$  بالمنصف  $\overline{ax}$  الذي يلاقي القاعدة في  $x$ . ثم رسم

$$\overline{xy} \text{ يوازي } \overline{ba}. \text{ أثبت أن: } \overline{ay} = \overline{xy}$$

ناقش هذا التمرين بالطريقة التحليلية.

## النموذج الخامس

⊠ أجب عن جميع الأسئلة التالية:

♦ السؤال الأول:

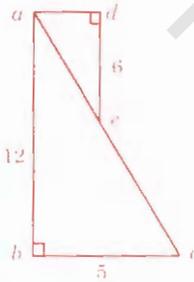
(1) إذا كانت  $x = \{a, b, c, d\}$  فأوجد ما يلي:

(أ) علاقة  $z_1$  على  $x$  على صورة أزواج مرتبة بحيث تكون علاقة تكافؤ وليست تخالفية.

(ب) علاقة  $z_2$  على  $x$  على صورة أزواج مرتبة بحيث تكون علاقة ترتيب جزئي.

♦ السؤال الثاني:

(1) في الشكل المقابل:



$$(\angle d) = (\angle b) = 90^\circ, ab = 12, eb = 5, de = 6,$$

$$(\angle e) = (\angle eab) \text{ المطلوب:}$$

(أ) إثبات أن  $\Delta abc$  يشابه  $\Delta dea$

(ب) إيجاد كل  $\overline{ad}$  ،  $\overline{ae}$

(2) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

$$\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \cos 20^\circ \sin 70^\circ = 1$$

(3) ارسم منحنى الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{3}{x^2 + 5}$  موضعاً أثناء الحل والرسم ما يلي:

(أ) النقاط الحرجة للدالة (إن وجدت).

(ب) التزايد والتناقص للدالة.

(ج) القيم القصوى (إن وجدت).

(د) محاور المحاذاة (الاقتراب).

♦ السؤال الثالث:

(1) أوجد التكاملات الآتية:

$$\int (4x + 6)\sqrt{2x + 3} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int (\tan^{-1} x + \tan^6 x) dx \quad (\text{أ})$$

(2) أوجد  $\frac{dy}{dx}$  لما يلي:

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2}{x}\right), x \neq 0 \quad (\text{ب})$$

$$xy + \frac{x}{y^2} = 5, y \neq 0 \quad (\text{أ})$$

(3) إذا كانت:  $t: [1, 3] \rightarrow h$  حيث  $t(x) = x^3 + ex + 5$  حيث  $d: [b, c] \rightarrow h$  حيث

$$d(x) = 3x^2 + 2$$

أوجد قيمة (أ) كل من:  $b, c, e$  إذا كانت الدالة  $t$  مقابلة (أصلية) للدالة  $d$ .

$$(ب) \int_b^c d(x).dx$$

(4) إذا كان رقم التليفون مكوناً من ستة أرقام. فكم رقم تليفوني يمكن تكوينه إذا استخدمت.

#### ◆ السؤال الرابع:

(1) لتكن درجات مجموعة من الطلاب كالآتي:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) = 0 \text{ . أثبت أن: } (\bar{x}) \text{ والوسط الحسابي لدرجاتهم}$$

(2) لتكن \* عملية ثنائية إبدالية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة كالآتي:

$$a * b = a + b - 5$$

(أ) أوجد العنصر المحايد لهذه العملية. (ب) أوجد نظير العدد 8.

$$(3) \text{ إذا كانت: } x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ أوجد } x^n \text{ حيث } n \in y^*$$

(4) اكتب الكسر:  $\frac{x^2}{x^6 + 27}$  على صورة كسور جزئية.

#### ◆ السؤال الخامس:

عرض المصطلحات والمفاهيم الآتية بما لا يزيد عن ثلاثة أسطر لكل مصطلح أو مفهوم ومن ثم أعط مثلاً على كل حالة.

(أ) المفهوم الرياضي. (ب) طريقة الاكتشاف الاستقرائية في الرياضيات.

(ج) التعلم بهدف الانتقال في تعلم الرياضيات. (د) صدق الاختبار.

### النموذج السادس

✉ اجب عن جميع الأسئلة التالية:

◆ السؤال الأول: أوجد مجموعة الحل في كل مما يلي:

$$(2) [5 - 2x] = 4$$

$$(1) \sqrt{x^2 - 4x + 4} < 1$$

$$(4) \frac{x^2 - x - 6}{x + 1} < 0$$

$$(3) k - |x^2 - 3| = 4$$

◆ السؤال الثاني:

(1) أوجد النهاية (إن أمكن) لما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5 - |x|) \times 2x}{25 - x^2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x} \quad (\text{أ})$$

(2) عين مجال كل مما يلي:

$$\vartheta(x) = k - (1 - x) + e^{-x} \quad (\text{ب})$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|-3} \div \frac{x}{x-1} \quad (\text{أ})$$

◆ السؤال الثالث:

(1)  $abc$  مثلث فيه:  $a(1, 2)$ ،  $b(4, 2)$ ،  $c(4, 6)$ ،  $d$  نقطة في منتصف  $\overline{ac}$  والمطلوب:

$$\overline{bd} = \frac{1}{2} \overline{ac} \quad (\text{ب}) \text{ إثبات أن:}$$

(أ) إيجاد إحداثي نقطة  $d$ .

(2) احسب الزكاة المفروضة على مال قدره 16000 درهم حال عليه الحول كاملاً.

◆ السؤال الرابع:

(1) أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة:  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} \div \frac{x^2 - 1}{yx^2 - xy + y}$

(2) عدنان صحيحان موجبان متتاليان وإذا كان مثلي الأول يزيد على نصف الثاني بمقدار 7، فأوجد العددين.

◆ السؤال الخامس:

(1)  $abc$  مثل  $d, e$  في منتصف  $\overline{ac}$ ،  $\overline{ab}$  على الترتيب وكان قياس  $(\angle ade) = 90^\circ$

$$\overline{bc} = 8 \text{ cm}, \overline{ab} = 6 \text{ cm} \quad \text{فأوجد:}$$

(أ) قياس  $(\angle abc)$  (ب) طول  $\overline{de}$  (ج) مساحة المنطقة المثلثة  $abe$

(2) أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه  $17.576 \text{ cm}^3$  مقرباً الناتج لأقرب عدد صحيح.

◆ السؤال السادس:

(1) اكتب ثلاثة أسئلة (من نوع الاختيار من متعدد) تقيس مستويات مختلفة في المجال المعرفي عن درس المربع وخواصه.

## النموذج السابع

⊠ أجب عن جميع الأسئلة التالية:

◆ السؤال الأول:

(1) إذا كانت:  $(x, *)$  زمرة:  $\forall a, b \in x (a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$

فأثبت أن:  $(x, *)$  زمرة تبديلية.

(2) لتكن  $(*)$  معرفة على  $h \times h$  بحيث  $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$

(أ) أوجد محايد العملية \*

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة:  $(2, 3) * (x, y) = (4, -2)$

(3) استخدم الاستقراء الرياضي في إثبات أن:  $7(16)^n + 3$  من مضاعفات العدد 5  $\forall n \in \mathbb{N}_+$  (مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة).

◆ السؤال الثاني:

(1) بدون استخدام قاعدة لوبيتال أوجد:

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x$

(أ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{4x+1} - 3}$

(2) أوجد  $\frac{dy}{dx}$  لكل مما يلي:

(أ)  $y = \sin \sqrt{x^2 + 1} + \cos e^{x^3} \frac{1}{x^2 + 1}$

(ب)  $y = t(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sin x} (1 - z^2) dz$

(3) مر مستقيم بالنقطة  $(2, 1)$  في المستوى الديكارتي فقطع محور السينات الموجب بالنقطة  $a$  محور الصادات الموجب بالنقطة  $b$ . أوجد إحداثيات النقطتين  $a, b$  بحيث تكون مساحة المنطقة المثلثية  $mab$  أصغر ما يمكن. ( $m$  هي نقطة الأصل).

◆ السؤال الثالث:

(1) أوجد كلا من التكاملات التالية:

(ب)  $\int \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$

(أ)  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + e^x} dx$

(2) إذا كان:  $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{z}$  فأثبت أن:  $x, y, z$  في توال هندسي، ثم بين أن:

$$\frac{x^2 + y^2}{y^2 + z^2} = \frac{x}{z}$$

(3) إذا كان:  $|x| < 1$  فأوجد:  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$  بدلالة  $x$  ثم استخدمه

$$2 + 6x + 12x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots$$
 في إيجاد

(4) أوجد معادلة المستقيم  $\bar{m}$  الناتج من انعكاس المستقيم  $\bar{l}$  على المستقيم  $x = 2$

$$\text{حيث معادلة } \bar{l} \text{ هي: } 2x + 3y = -5$$

#### ◆ السؤال الرابع:

(1) بين أن:  $(1+t)^8 + 4(1-t)^4 = 0$  حيث  $t = \sqrt{-1}$

(2) أثبت أن:  $\sec 2c + \tan 2c = \frac{\sin c + \cos c}{\cos c - \sin c}$

(3) في مثلث  $abc$  إذا كان:  $\theta(\angle b) = 105^\circ$ ،  $\theta(\angle a) = 45^\circ$  فأثبت أن:

$$\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = 2 : \sqrt{3} + 1 : \sqrt{2}$$

(4)  $\bar{ab}$  قطر في دائرة طول نصف قطرها  $r$ . امتداد الوتر  $\bar{ad}$  يلاقي المماس

المرسوم للدائرة عند  $b$  في نقطة  $c$ ،  $e \in \bar{ad}$  بحيث  $\bar{ae} = \bar{cd}$ . إذا كان بعد

النقطة  $e$  عن  $\bar{ab} = y$ ، وبعد  $e$  عن المماس للدائرة عند  $a$  يساوي  $x$  فأثبت

$$\text{أن: } y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

#### ◆ السؤال الخامس:

(1) اكتب ثلاثة من أغراض التقويم. وبين الهدف في كل منها.

(2) وضع المقصود بالمفاهيم التالية مبيناً أثرها في عملية التدريس:

التغذية الراجعة، انتقال أثر التعلم، التعزيز، التدريب المجدول.

(3) اكتب الخطوات الرئيسية لحل المسألة الرياضية. ثم ضع مسألة رياضية وطبق

عليها هذه الخطوات.

## النموذج الثامن

☒ أجب عن جميع الأسئلة التالية:

◆ السؤال الأول:

(1) (أ) أوجد مجموعة قيم  $k$  التي تجعل  $t(x) = \frac{x}{2x^2 + kx + 2}$  متصلة على  $h$

(ب) أوجد قيم الثابتين  $a, b$  إذا كانت:  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax + b \right) = 5$

(2) إذا كانت معادلة المستقيم  $l$  هي:  $-x + 2y + 3 = 0$

(أ) أوجد معادلة  $\bar{l}$  (صورة  $\bar{l}$  بالانعكاس في المستقيم  $y = x$ )

(ب) أوجد نقطة تقاطع  $\bar{l}$  مع  $\bar{l}$

(3) (أ) عين مجال الدالة:  $d(x) = \sqrt{|x| - \frac{3}{|x-2|}}$

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة:  $\left[ x - \frac{1}{2} \right] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] = 3$

◆ السؤال الثاني:

(1) (أ) إذا كان:  $k \left( \frac{a+b}{3} \right) = \frac{1}{2}(ka + kb)$  فأثبت أن:  $a^2 - 6ab + b^2$

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بالمنحنيات

$y = x^2, y = 1, y = 2$  حول محور الصادات.

(2) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $(3, -4), (1, -2)$  وتمس محور السينات.

(3) (أ) إذا كان:  $e, \theta(x) = x + 1, x \in h$  تطبيق حقيقي حيث

$(e \circ \theta)(x) = x^2 + 4x + 6$  فأوجد  $(e \circ \theta)(-1)$

(ب) إذا كان:  $\sum_{r=0}^0 \binom{0}{r} t^r = a + bt$  فأوجد قيمة كل من  $a, b$

◆ السؤال الثالث:

(1) إذا كان:  $2y = \sin 2x \cdot \tan x$  فأثبت أن:  $\frac{d^2 y}{dx^2} \tan x \tan 2x - 4y = 0$

(2) (أ) إذا كان  $a > 0 > b, (a - b)b > a(b - a)$  فأثبت أن:  $a + b > 0$

(ب) أوجد:  $\int \sin x \sin 6x \cdot dx$

$$e(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ 1+x, & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \quad (3) \text{ إذا كان:}$$

أوجد  $(\theta o e)(x)$  ثم أوجد نقط انفصال الدالة  $\theta o e$ .

#### ◆ السؤال الرابع:

(1) أوجد معادلة المنحنى  $y = d(x)$  إذا كان معدل تغير ميل المماس له بالنسبة إلى  $x$  عند أي نقطة عليه  $(x, y)$  يساوي  $(6x - 8)$  وللمنحنى قيمة عظمى محلية عند النقطة  $(1, 1)$ .

$$(2) \text{ (i) أوجد: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$$

(ب) إذا كان العدد المركب  $\bar{z} = \frac{z^2 + 5z + 6}{z + 2}$  حيث  $t = \sqrt{-1}$ ،  $\bar{z} = \bar{x} + t\bar{y}$ ،

$z = x + yt$ ،  $x, y, \bar{x}, \bar{y}$  أعداد حقيقية. (أولاً) عبر عن  $\bar{x}, \bar{y}$  بدلالة  $x, y$

(ثانياً) أوجد مجموعة النقطة  $(x, y)$  ليكون  $\|\bar{z}\| < 4$

(3) أثبت أن مجموعة  $n$  حداً الأولى من المتتالية:  $(0.7, 0.77, 0.777, \dots)$

$$\text{يساوي } \frac{7}{81}(9n - 1 + (0.1)^n)$$

#### ◆ السؤال الخامس:

(1) « القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين من مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله » هي إحدى النظريات في هندسة المثلث.

وضح كيف توجه طلابك للتوصل (لإثبات) صحة هذه النظرية بأسلوب استقرائي.

(2) الاختبارات الدورية التشخيصية تساعد في إزالة عقبات التعلم، وتم في نطاق العمل المدرسة، اذكر ثلاثة من أهداف هذه الاختبارات.

(3) من التعميمات في مادة الرياضيات: المسلمات - التعاريف - النظريات. اكتب ما تعنيه كل منها، واذكر مثلاً لكل منها مما درسته في المرحلة الإعدادية أو الثانوية.

(4) عند تصميم الاختبارات من نوع الاختيار من متعدد هناك مبادئ يلزم مراعاتها، اذكر ثلاثة منها، اكتب ثلاثة أسئلة من هذا النوع على موضع العلاقة والتطبيق.

**حل أسئلة نماذج اختبارات المرشحين لوظائف التدريس في  
دولة الإمارات العربية المتحدة عام 1991م، 1996/95م**

للأستاذ / سمير محمد عثمان الحفاوي م. أ. ثانوي .. إدارة شرق المنصورة

كما هو متبع في خطة هذا الكتاب والمعروفة بطريقة الجشطالت، وهي جمع المعلومات المتشابهة في قالب واحد بحيث يسهل الترابط الرياضي بين الأفكار، وبعضها البعض فإننا سوف نقوم بالحل على النحو التالي:

- (1) حل مسائل التكاملات في النماذج الثمانية.
- (2) حل مسائل الهندسة التحويلية والتحليلية.
- (3) حل مسائل حساب المتلثات.
- (4) حل مسائل النهايات.
- (5) حل مسائل المشتقات وبعض تطبيقاتها.
- (6) حل مسائل العمليات الثنائية (الجبر المجرد) .. وهكذا ...

**أولاً: حل مسائل التكاملات في النماذج الثمانية وهي:**

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} .dx \quad (2) \qquad \int \frac{6x}{3x-2} .dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} .dx \quad (4) \qquad \int x^3 \sin x^2 .dx \quad (3)$$

$$\int (x^2 - 4x + 5)^5 (x - 2) .dx \quad (6) \qquad \int \frac{5x - 7}{x^2 + 3x + 2} .dx \quad (5)$$

$$\int_a^b d(x) .dx = 5 \text{ فأثبت أن: } \int_b^a d(x) .dx = \int_a^b d(x) .dx \quad (7) \text{ إذا كان:}$$

$$\vartheta(x) = \int_0^x \frac{1}{(j^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} .dj \text{ فأوجد: } \vartheta(0), \bar{\vartheta}(0) \quad (8) \text{ إذا كانت:}$$

$$\int 4x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 .dx \quad (9)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ فأوجد: } y = \int \sin x \cos x .dx \quad (10) \text{ إذا كانت:}$$

$$\int (4x + 6)\sqrt{2x + 3} .dx \quad (12)$$

$$\int (\tan^4 x + \tan^6 x) .dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}.dx \quad (14)$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + e^x}.dx \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dx} : \text{فأوجد } y = t(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sin x} (1-z^2).dz \quad (15) \text{ إذا كانت}$$

$$\int \sin x \sin 6x. dx \quad (16) \text{ أوجد}$$

$$\int \frac{6x}{3x-2}.dx \quad (1)$$

$$= 2 \int \frac{3x}{3x-2}.dx = 3 \int \frac{(3x-2+2)}{3x-2}.dx = 2 \int \left( \frac{3x-2}{3x-2} + \frac{2}{3x-2} \right).dx$$

$$= 2 \int \left( 1 + \frac{2}{3x-2} \right).dx = 2 \left( x + \frac{2}{3} \log|3x-2| \right) + s = 2x + \frac{4}{3} \log|3x-2| + s \text{ ثابت}$$

حل ثان:

يمكن إثبات طريقة القسمة المطولة حيث درجة البسط تساوي درجة المقام .. هكذا.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3x-2 \overline{) 6x} \\ \underline{6x-4} \\ 4 \end{array}$$

أي أن خارج القسمة يساوي  $2 + \frac{4}{3x-2}$

$$= 2 + \frac{4}{3} \left( \frac{3}{3x-2} \right)$$

$$\therefore \int \frac{6x}{3x-2}.dx = \left( 2 + \frac{4}{3} \left( \frac{3}{3x-2} \right) \right) = 2x + \frac{4}{3} \log|3x-2| + s$$

$$e^{2x} = y \text{ بوضع } \int \frac{1}{1+e^{2x}}.dx \quad (2)$$

$$\therefore 2e^{2x}.dx = dy \quad \therefore 2y.dx = dy \quad \therefore dx = \frac{dy}{2y}$$

$$\therefore \int \frac{1}{1+e^{2x}}.dx = \int \frac{1}{1+y} \cdot \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y+1)}.dy$$

وباستخدام الكسور الجزئية.

$$\therefore \frac{a}{y} + \frac{b}{y+1} = \frac{1}{y(y+1)} \quad \therefore a(y+1) + by = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ بوضع } , \quad y = -1 \Rightarrow -b = 1 \therefore b = -1 \text{ بوضع}$$

$$\therefore \frac{a}{y} + \frac{b}{y+1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} \int \frac{1}{y(y+1)} \cdot dy &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) \cdot dy = \frac{1}{2} [\log|y| - \log|y+1|] + s \\ &= \frac{1}{2} \left[ \log \left| \frac{y}{y+1} \right| \right] + s \\ &= \log \sqrt{\frac{y}{y+1}} + s = \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}} + s \end{aligned}$$

$$x^2 = y \text{ بوضع} \quad \int x^3 \sin x^2 \cdot dx \quad (3)$$

$$\therefore 2x dx = dy \quad \therefore dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\therefore \int x^3 \sin x^2 \cdot dx = \int x^3 \sin y \cdot \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int x^2 \sin y \cdot dy = \frac{1}{2} \int y \sin y \cdot dy$$

باستخدام التكامل بالتجزئ:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[ y(-\cos y) + \int \cos y \cdot 1 \cdot dy \right] = -\frac{1}{2} y \cos y + \frac{1}{2} \sin y + s \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin x^2 - x^2 \cos x^2 \right] + s \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot dx = \log(e^x + e^{-x}) + s \quad (4)$$

$$\int \frac{5x-7}{x^2+3x+2} \cdot dx \quad (5)$$

$$= \int \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \cdot dx$$

$$\therefore \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

$$\therefore a(x-2) + b(x-1) = 5x-7$$

$$x=2 \Rightarrow b=3 \text{ عندما}$$

$$x=1 \Rightarrow -a=-2 \quad \therefore a=2 \text{ عندما}$$

$$\therefore \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{5x-7}{x-1} + \frac{5x-7}{x-2}$$

$$\therefore \int \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \cdot dx = 2 \int \frac{1}{x-1} \cdot dx + 3 \int \frac{1}{x-2} \cdot dx$$

$$= 2 \log|x-1| + 3|x-2| + s$$

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 5)^5 (x - 2).dx \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 4x + 5)^5 (2x - 4).dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \left[ (x^2 - 4x + 5)^6 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{12} \left[ (x^2 - 4x + 5)^6 \right]_0^1 = \frac{1}{12} \left[ \begin{matrix} 6 & 6 \\ 2 & -5 \end{matrix} \right]$$

$$(1) \dots\dots \therefore \int_b^a d(x).dx = -\int_a^b d(x).dx \quad (7)$$

$$(2) \dots\dots \text{معطى} \therefore \int_b^a d(x).dx = \int_b^a d(x).dx$$

بجمع (1)، (2)

$$\therefore 2 \int_a^b d(x).dx \quad \therefore \int_a^b d(x).dx \quad \text{وهو المطلوب}$$

(8) خذ تعويض مناسب وأكمل الحل.

$$\int 4x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 .dx \quad (9)$$

$$= 4 \int \left(x \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).dx = 4 \int (x+1)^3 .dx = (x+1)^4 + s$$

$$\therefore y = \int \sin x \cos x .dx \quad (10)$$

$$y = \int \sin x d(\sin x), \quad y = \frac{1}{2} \sin^2 x + s$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times 2 \sin x \cos x = \sin x \cos x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x (-\sin x) + \cos x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\int (\tan^4 x + \tan^6 x).dx \quad (11)$$

$$= \int \tan^4 x (1 + \tan^2 x).dx = \int \tan^4 x .\sec^2 x .dx = \frac{1}{5} \tan^5 x + s$$

$$\int (4x+6)\sqrt{2x+3}.dx \quad (12)$$

$$= 2 \int (2x+3)\sqrt{2x+3}.dx = 2 \int (2x+3)^{\frac{3}{2}}.dx$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \int (2x+3)^{\frac{3}{2}}.dx = \frac{2}{5} (2x+3)^{\frac{5}{2}} + s$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+e^x}.dx = \int \frac{e^2 \cdot e^{2x}}{e^x(e^{2x}+1)}.dx \quad (13)$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.dx = \frac{1}{2} \log(e^{2x}+1) + s$$

$$\therefore \sqrt[4]{x} = y \quad x = y^4 \quad \text{بوضع} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}.dx \quad (14)$$

$$dx = 4y^3 \quad \therefore \int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4y^3}{1+y}.dy = 4 \int \left( \frac{y^3+1-1}{y+1} \right).dy$$

$$\therefore y = t(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sin x} (1-z^2).dz \quad (15)$$

$$\therefore y = t(x) = \left[ z - \frac{1}{3}z^3 \right]_{\sqrt{x}}^{\sin x} = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x - \sqrt{x} + \frac{1}{3} (\sqrt{x})^3$$

$$\therefore t(x) = y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x - \sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos x - \sin^2 x \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \sin x \sin 6x . dx \quad (16)$$

$$\therefore \sin a \sin b = \cos \frac{(a-b)}{2} - \cos \frac{(a+b)}{2} = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\therefore \sin x \sin 6x = \frac{1}{2} [\cos 5x - \cos 7x]$$

$$\sin x \sin 6x . dx = \frac{1}{2} [\int (\cos 5x - \cos 7x) ] . dx \left[ \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 7x}{7} \right] + s$$

ثانياً: حل مسائل الهندسة التحليلية والتحويلية وهي:

- (1) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (3, 4) ومقطعة مع محور  $y$  ضعف مقطعه مع محور  $x$ .
- (2) بين أن وتر الدائرة:  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  والناتج عن قطع المستقيم  $\bar{l}: x + y - 4 = 0$  لهذه الدائرة تقابله زاوية مركزية قائمة.
- (3) برهن أن الشكل الذي رؤوسه  $a(2, -1)$ ,  $b(-1, 1)$ ,  $c(2, 3)$ ,  $d(5, 1)$  هو معين، ثم أوجد مساحته.
- (4)  $abcd$  مربع أوجد إحداثي الرأس  $c$  علماً بأن:  $a(0, 0)$ ,  $b(5, 3)$  حيث  $c$  تقع في الربع الأول.
- (5)  $\Delta abc$  فيه  $a(1, 2)$ ,  $b(4, 2)$ ,  $c(4, 6)$ ،  $d$  منتصف  $\bar{ac}$  والمطلوب:  
(أ) إيجاد إحداثيات نقطة  $d$ .  
(ب) أثبت أن:  $\bar{bd} = \frac{1}{2} \bar{ac}$ .
- (6) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $(3, -4)$ ،  $a(1, -2)$  وتمس محور السينات.
- (7) إذا كانت  $\bar{c}$  هي صورة  $c(-3, 0)$  تحت تأثير انعكاس في المستقيم  $\bar{z}: y = x - 3$  أوجد إحداثي  $\bar{c}$ .
- (8) أوجد معادلة المستقيم  $\bar{m}$  الناتج من انعكاس المستقيم  $\bar{l}$  في المستقيم  $x = 2$  حيث معادلة  $\bar{l}$  هي  $2x + 3y = -5$ .
- (9) إذا كانت معادلة المستقيم  $l$  هي:  $-x + 2y + 3 = 0$   
(أ) وجد معادلة  $\bar{l}$  (صورة  $l$  بالانعكاس في المستقيم  $y = x$ ).  
(ب) أوجد نقط تقاطع  $\bar{l}$  مع  $\bar{l}$ .

الحلول:

سوف تقوم إن شاء الله بحل المسائل التي تحمل الأرقام (1)، (2)، (7)، (9) أما الأخرى فهي مباشرة.

$$\begin{aligned} (1) \quad \therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1, & \therefore b &= 2a & \therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{2a} &= 1 \\ \therefore \frac{3}{a} + \frac{2}{a} &= \frac{5}{a} = 1 & \therefore a &= 5, & \therefore b &= 10 \\ \therefore \frac{x}{5} + \frac{y}{10} &= 1 & \therefore 10x + 5y &= 50 & \therefore 2x + y &= 10 \end{aligned}$$

(2) نوجد نقطتي تقاطع  $\bar{l}$  مع الدائرة  $m$  ولتكن  $a, b$  فيكون  $\overline{ab}$  هو وتر الدائرة الناتج عن تقاطعهما مع  $\bar{l}$

$$\therefore x + y - 4 = 0 \quad \therefore x = 4 - y$$

$$\therefore (4 - y)^2 + y^2 - 4(4 - y) = 0$$

$$\therefore y^2 - 8y + 16 + y^2 - 16 + 4y = 0 \quad \therefore 2y^2 - 4y = 0$$

$$\therefore y^2 - 2y = 0 \quad \therefore y = 2 \text{ أو } y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ عندما}$$

$$\therefore a = (4, 0)$$

$$\therefore b = (2, 2) \quad y = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ عندما}$$

$$\therefore (ab)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 4 + 4 = 8$$

$\therefore$  إحداثي مركز الدائرة  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  معامل  $x$  معامل  $y$

$$\therefore m = (2, 0) \quad \therefore (ma)^2 = 4 = r^2, (mb)^2 = 4 = r^2$$

$$\therefore (ma)^2 + (mb)^2 = (ab)^2$$

$\therefore \Delta abm$  قائم الزاوية في  $m$ .

$$y = mx + c \text{ على الصورة } \therefore y = x - 3 \quad (7)$$

$$\therefore m = 1, c = -2$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m^2 \\ 2m^2 & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \bar{c} = (3, -6)$$

$$(9) \therefore y = x \quad \therefore m = \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\therefore z_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

وهذه هي معادلة انعكاس مستقيم يمر بنقطة الأصل على الصورة:  $y = mx$

$$\therefore z_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = z_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \bar{y}, y = \bar{x}$$

$\therefore$  معادلة  $\bar{l}$  هي:  $-x + 2y + 3 = 0$

$$\therefore -\bar{y} + 2\bar{x} + 3 = 0$$

$$-y + 2x + 3 = 0 \quad \text{أي:}$$

$\therefore$  معادلة  $\bar{l}$  هي:  $-\bar{y} + 2\bar{x} + 3 = 0$

لاحظ أن نقطة التقاطع هي  $(-3, -3)$

**ملحوظة:** حاول أن تحل رقم (8) بيانياً وتحليلياً.

### ثالثاً: حل مسائل حساب المثلثات:

ونختار من النماذج المسائل التالية حيث أن الأخرى مباشرة:

(1) بفرض أن:  $a, b, c$  قياسات زوايا مثلث أثبت أن:

$$\frac{\sin b \sin c}{\sin a - \sin b \cos c} = \tan b$$

(2) أثبت صحة المتطابقة:  $\frac{\sin 2e + \sin e}{\cos 2e + \cos e + 1}$

(3)  $\Delta abc$  فيه:  $\tan \frac{a}{2} = \frac{5}{6}$  ،  $\tan \frac{b}{2} = \frac{2}{5}$  أثبت أن محيط المثلث يساوي  $3c$ .

$$\sin 2c + \tan 2c = \frac{\sin c + \cos c}{\cos c - \sin c} \quad (4)$$

### الحلول:

$$(1) \therefore (a) + (b) + (c) = 180^\circ$$

$$\therefore (\angle a) = 180^\circ - (\angle b + \angle c)$$

$$\therefore \sin a = \sin(b + c) = \sin b \cos c + \cos b \sin c$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin b \sin c}{\sin a - \sin b \cos c} &= \frac{\sin b \sin c}{\sin b \cos c + \cos b \sin c - \sin b \cos c} \\ &= \frac{\sin b \sin c}{\sin b \cos c} = \frac{\sin b}{\cos b} = \tan b \quad \text{وهو المطلوب} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{\sin 2e + \sin e}{\cos 2e + \cos e + 1} &= \frac{2 \sin e \cos e + \sin e}{2 \cos^2 e - 1 + \cos e + 1} \\ &= \frac{\sin e (2 \cos e + 1)}{\cos e (2 \cos e + 1)} = \frac{\sin e}{\cos e} = \tan e \end{aligned}$$

$$(3) \quad \tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \times \frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\frac{10}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{60}{36 - 25} = \frac{60}{11}$$

$$\therefore \tan b = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \times \frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{20}{25 - 4} = \frac{20}{21}$$

$$\therefore \tan c = -\tan(a + b) = -\left(\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\right)$$

$$= -\left(\frac{\frac{60}{11} + \frac{20}{21}}{1 - \frac{60}{11} \times \frac{20}{21}}\right) = -\left(\frac{60 \times 11 + 11 \times 20}{11 \times 21 - 60 \times 20}\right) = \left(\frac{660 + 220}{231 - 1200}\right) = \frac{880}{969}$$

ثم نوجد  $\sin a$  من  $\tan a$ ,  $\sin b$ ,  $\cos c$  ونستخدم العلاقة:  $\frac{\bar{a}}{\sin a} = \frac{\bar{b}}{\sin b} = \frac{\bar{c}}{\sin c}$

$$\therefore \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{\sin a \sin b + \sin c} = \frac{\bar{c}}{\sin c} = \frac{\bar{a}}{\sin a} = \frac{\bar{b}}{\sin b} = \frac{\bar{c}}{\sin c} \quad \text{خاصية}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \sin 2x + \tan c &= \frac{1}{\cos 2c} + \frac{\sin 2x}{\cos 2c} \\ &= \frac{1 + \sin 2c}{\cos 2c} = \frac{\sin^2 c + \cos^2 c + \sin 2c}{\cos^2 c - \sin^2 c} \\ &= \frac{\sin^2 c + 2 \sin c \cos c + \cos^2 c}{(\cos c - \sin c)(\cos c + \sin c)} \\ &= \frac{(\sin c + \cos c)^2}{(\cos c - \sin c)(\cos c + \sin c)} = \frac{\sin c + \cos c}{\cos c - \sin c} \quad \text{وهو المطلوب} \end{aligned}$$

رابعاً: حل مسائل النهايات. ونختار منها:

(1) أوجد النهايات الآتية (إن وجدت):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x-1} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}} \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - 1x + b \right) = 5 \quad \text{أوجد قيم الثابتين } a, b \text{ إذا كانت:}$$

الحلول:

$$x-1=e \Rightarrow x=e+1 \text{ بوضع } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x-1} \quad (\text{د}) \quad (1)$$

$$\therefore \lim_{e \rightarrow 2} \frac{\sin \pi(e-1)}{e} = - \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\sin \pi e}{e} = -\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x} \quad (\text{ب})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1-e \text{ بوضع } \lim_{x \rightarrow 2} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x \quad (\text{ب})$$

$$= \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e \sin \frac{\pi}{2} (1-e)}{\cos \frac{\pi}{2} (1-e)} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} e \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} e \right)}$$

$$= \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e \cos \frac{\pi}{2} e}{\sin \frac{\pi}{2} e} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{e}{\sin \frac{\pi}{2} e} \times \lim_{e \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2} e = -\frac{\pi}{2} \times 1 = -\frac{2}{\pi} e$$

$$\text{بتطبيق قاعدة لوبيتال} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}} \quad (د)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin \frac{\pi}{2} x \times \frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - 1x + b \right) = 5 \quad (2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x^2 + 1) + (x + 1)(b - ax)}{(x + 1)} \right) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 + bx - ax^2 + b - ax}{(x + 1)} = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - ax^2) + (bx - ax) + (b + 1)}{x + 1} = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a)x^2 + (b - a)x + (b + 1)}{x + 1} = 5$$

ولكي يكون الناتج عدداً حقيقياً لا بد وأن درجة البسط تساوي درجة المقام.

$$\therefore 1 - a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b + 1)x + (b + 1)}{x + 1} = 5 = b - 1$$

$$\therefore b = 6 \quad \therefore a = 1, \quad b = 6$$