

المعادلات الأساسية للنظرية الكهرومغناطيسية

[١] معادلات ماكسويل Maxwell's Equation

تتكون معادلات ماكسويل (وهي المعادلات الأساسية في النظرية الكهرومغناطيسية) من أربعة معادلات تصف المجال الكهرومغناطيسي وصفاً تاماً.

المجال الكهرومغناطيسي Electromagnetic Field

يتكون من مجالين:

(١) مجال كهربى Electric Field

(٢) مجال مغناطيسى Magnetic Field

تعريف:

المجال الكهربى: هو منطقة تظهر فيها آثار الكهربائية

شدة المجال الكهربى (\vec{E}): هي القوة المؤثرة على وحدة الشحنات الموجودة في حيز (منطقة) ما.

المجال المغناطيسى: هو منطقة تظهر فيها آثار المغناطيسية.

شدة المجال المغناطيسى (\vec{H}): هي القوة المؤثرة على وحدة الأقطاب المغناطيسية الموجودة في حيز (منطقة) ما.

شكل المجال: هو عبارة عن خطوط متوازية تسمى خطوط القوى أو خطوط المجال.

المجال الكهربى:

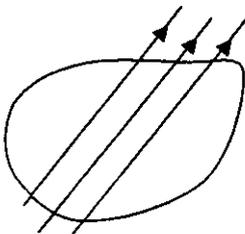
خطوط القوى متباعدة، أي لها تباعد (divergence)

$$\text{div } \vec{E} \neq 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

قانون جاوس:

يعطينا المجال (\vec{E}) الناتج عن شحنات كثافتها (ρ).



المجال المغنطيسي:

خطوط القوى مغلقة أي غير متباعدة أي ليس لها تباعد

$$\boxed{\text{div } \vec{H} = 0}$$

ويعرف بقانون جاوس للمجال المغنطيسي.

ملحوظة:

أي متجه \vec{A} يشكل مجالاً (Field) يسمى المجال الإتجاهي (Vector Field) ويمكن تمثيله بمجموعة من خطوط القوى، وهي إما أن تكون:

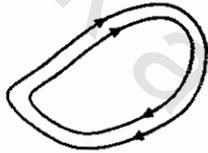
$$\text{div } \vec{A} \neq 0$$

(1) مفتوحة



$$\text{div } \vec{A} = 0$$

(2) مغلقة



معادلات ماكسويل

| في الفراغ (Vacuum) | في الوسط (Medium) |
|---|---|
| Microscopic Max. Equation | Macroscopic Max. Equation |
| معادلات ماكسويل الماكروسكوبية | معادلات ماكسويل الماكروسكوبية |
| (1) $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$ | (1) $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$ |
| (2) $\text{div } \vec{H} = 0$ | (2) $\text{div } \vec{B} = 0$ |
| (3) $\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ | (3) $\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| (4) $\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$ | (4) $\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$ |

حيث :

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

ρ هي كثافة الشحنة (charge density) (مرتبطة بالمجال الكهربى).

\vec{j} هي كثافة التيار (Current density) (مرتبطة بالمجال المغنطيسى).

\vec{E}, \vec{H} شدتا المجالين الكهربى والمغنطيسى (فى الفراغ).

\vec{D}, \vec{B} شدتا المجالين الكهربى والمغنطيسى فى وجود الوسط (المادة).

ويسمى \vec{D} متجه الإزاحة (Displacement Vector)، كما يسمى \vec{B} متجه الحث أو التأثير (Induction Vector).

العلاقة بين $(\vec{E}, \vec{H}), (\vec{D}, \vec{B})$: هي علاقة خطية صورتها:

$$(i) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

حيث ϵ تسمى السماحية للوسط (permittivity).

$$\vec{D} = \vec{E} \leftarrow \epsilon = 1 \quad \text{فى حالة الفراغ:}$$

$$(ii) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

حيث μ تسمى النفاذية للوسط (permeability).

$$\vec{B} = \vec{H} \leftarrow \mu = 1 \quad \text{فى حالة الفراغ:}$$

إثبات معادلات ماكسويل:

(1) إثبات معادلة ماكسويل الماكروسكوبية الأولى:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$$

فى الفراغ: من قانون جاوس

$$\text{div } \vec{E}_0 = 4\pi \rho \quad (1)$$

حيث \vec{E}_0 المجال الناتج عن الشحنات ρ .

فى الوسط (المادة): هناك شحنات تأثيرية ρ_i ناتجة عن عملية الاستقطاب (أى عن

وجود المادة فى المجال (\vec{E}_0) ، ولها هى الأخرى مجال \vec{E} ، حيث:

$$\operatorname{div} \vec{E}_i = 4\pi \rho_i \quad \text{---(2)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_i \quad \text{.: المجال الكلي:}$$

بجمع (1)، (2):

$$\operatorname{div} (\vec{E}_o + \vec{E}_i) = 4\pi (\rho + \rho_i)$$

$$\therefore \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho + \rho_i)$$

ولكن $\rho_i = -\operatorname{div} \vec{p}$ (حيث \vec{p} متجه الاستقطاب).

$$\therefore \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho - \operatorname{div} \vec{p})$$

$$\therefore \operatorname{div} (\vec{E} + 4\pi \vec{p}) = 4\pi \rho$$

$$\text{وبوضع } (\vec{E} + 4\pi \vec{p}) = \vec{D}$$

حيث \vec{D} هو متجه الإزاحة (Displacement vector)

$$\therefore \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho$$

وهو المطلوب.

في حالة الفراغ: لا يوجد استقطاب $\vec{p} = 0$

$$\therefore \vec{D} = \vec{E} \rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

(٢) إثبات معادلة ماكسويل الماكرو سكوبية الثانية:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

من قانون جاوس للمجال المغنطيسي: $\operatorname{div} \vec{H} = 0$

وفي حالة الفراغ:

$$\operatorname{div} \vec{H}_o = 0 \quad \text{---(1)}$$

حيث \vec{H}_o المجال المغنطيسي الأصلي (في الفراغ).

في حالة وجود وسط ممغنط: تتولد مغنطيسية تأثيرية لها كثافة ρ_i ولها أيضاً

مجال مغنطيسي تأثيري \vec{H}_i .

ومن التناظر بين ظاهرتي الاستقطاب (في الكهربية)، والمغنط (في المغنطيسية)

حيث:

$$\operatorname{div} \vec{E}_i = 4\pi\rho_i \rightarrow \operatorname{div} \vec{H}_i = 4\pi\rho_i \quad \text{---(2)}$$

بجمع (1)، (2):

$$\operatorname{div} (\vec{H}_o + \vec{H}_i) = 4\pi\rho_i$$

$$\therefore \operatorname{div} \vec{H} = 4\pi\rho_i \quad \text{---(3)}$$

حيث $\vec{H} = \vec{H}_o + \vec{H}_i$

ولكن: $\rho_i = -\operatorname{div} \vec{M}$ (في ظاهرة التمغنط)، حيث \vec{M} متجه التمغنط

بالتعويض في (3):

$$\operatorname{div} \vec{H} = 4\pi(-\operatorname{div} \vec{M})$$

$$\therefore \operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} (4\pi \vec{M})$$

$$\therefore \operatorname{div} (\vec{H} + 4\pi \vec{M}) = 0$$

$$\vec{H} + 4\pi \vec{M} = \vec{B} \quad \text{ويوضع:}$$

حيث \vec{B} متجه التأثير أو الحث (Induction vector).

$$\therefore \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

وهو المطلوب.

في حالة الفراغ: لا يوجد وسط ممغنط $\vec{M} = 0$

$$\vec{B} = \vec{H} \rightarrow \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

(3) إثبات العلاقة الثالثة لماكسويل:

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

في حالة الوسط:

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

وفي حالة الفراغ:

من قانون فاراداي في الحث (أو التأثير) الكهرومغناطيسي:

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

---(1)

$$\varepsilon_i = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

حيث ε_i هي القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية، وتعطي بالعلاقة:

وحيث أن $\phi = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$ الفيض الكلي للمجال \vec{H} (في فراغ)، وللحث \vec{B} (في الوسط)

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$
 ويعطى بالعلاقة:

فبالتعويض في (1):

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

ومن نظرية ستوكس في المتجهات:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \text{curl } \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\therefore \int \text{curl } \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\therefore \int [\text{curl } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}] \cdot d\vec{s} = 0$$

ولما كان التكامل مأخوذاً على كل المحيط الذي يحد السطح S فإن:

$$\text{curl } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \therefore \text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

وهو المطلوب.

في حالة الفراغ: $\vec{B} = \vec{H}$

$$\therefore \text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

(٤) إثبات المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$m_i = \frac{4\pi}{c} I$$

من علاقة أمبير:

حيث: القوة الدافعة المغناطيسية: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = m_i$

I هي التيار الكلي ($I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$)، حيث \vec{J} هو كثافة التيار

$$\therefore \int \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

وباستخدام قانون ستوكس:

$$\therefore \int [\text{curl } \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{s}]$$

$$\therefore \int [\text{curl } \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{J}] \cdot d\vec{s} = 0$$

ولما كان التكامل مأخوذاً على الدائرة التي تحدد السطح فإن:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

حيث \vec{J} كثافة التيار الكلي المار في الدائرة.

[٢] أنواع التيارات التي تمر في دائرة:

(١) التيار العادي (أو الاصطلاحي) أو الإنقالي (Convention Current)

هو التيار الذي يمر في سلك نتيجة حركة الشحنات، وتعطي كثافة هذه التيار

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad \text{بالعلاقة:}$$

حيث ρ كثافة للشحنات المتحركة، \vec{v} سرعتها.

في حالة $\vec{v} = 0 \leftarrow \vec{j} = 0$ أي لا يوجد تيار مادامت للشحنات ساكنة.

(٢) تيار التوصيل (Conduction Current)

هو التيار الناتج عن وجود مادة موصلة (conductor) في مجال كهربائي،

فلذا كان معامل التوصيل للمادة هو σ ، وكانت للمادة موجودة في مجال

شدته \vec{E} ، فإن تيار التوصيل يعطي بالعلاقة:

$$\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$$

(٣) تيار الإزاحة (Displacement Current)

ينتج هذا التيار في حالة وجود تغير في متجه الإزاحة \vec{D} أي في حالة

$$\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{وجود } \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \text{، وقيمهته:}$$

الإثبات: من معادلة ماكسويل الأولى:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho \rightarrow \rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{D}$$

ومن معادلة الاتصال: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ، حيث \vec{j} هو التيار المعتاد (الإنقالي).

$$\therefore \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D} \right) = 0$$

$$\therefore \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\operatorname{div} (\vec{j} + \vec{j}_d) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

حيث: $\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_d$ التيار الكلي، \vec{j}_d تيار الإزاحة ويعطى بالعلاقة:

$$\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

في حالة وجود فراغ: $\vec{D} \rightarrow \vec{E}$ ويصبح تيار الإزاحة:

$$\vec{j}_{do} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

العلاقة بين تيار الإزاحة \vec{j}_d وتيار الاستقطاب \vec{j}_p :

$$\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_d) \\ &= \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \left[\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi \vec{p}) \right] \end{aligned}$$

حيث $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{p}$

$$\begin{aligned} \therefore \operatorname{curl} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi \vec{p}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_p) \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

أيضاً:

$$\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi \vec{p}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}_{do} + \vec{j}_p$$

∴ تيار الإزاحة = تيار الإزاحة في الفراغ + تيار الإستقطاب (في وجود المادة)

أيضاً: يمكن كتابة العلاقة (1) بالصورة:

$$\begin{aligned} \therefore \text{curl } \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{j}_p \right] \\ &= \frac{4\pi}{c} [\vec{j}_{do} + \vec{j} + \vec{j}_p] = \frac{4\pi}{c} [\vec{J}] \end{aligned}$$

حيث: $\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_{do} + \vec{j}_p = \vec{j} + \vec{j}_d$ (التيار الكلي).

وإذا أخذنا تيار التوصيل في الاعتبار فإن:

$$\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_d + \vec{j}_c = \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E}$$

[٣] الجهود الكهرومغناطيسية Electromagnetic Potentials

المطلوب: إثبات أن حل معادلات ماكسويل:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho \quad \text{_____ (1)}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{_____ (2)}$$

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{_____ (3)}$$

$$\text{div } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{_____ (4)}$$

حيث $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$

يمكن إيجاد بدلالة دالتين أحدهما قياسية ϕ والأخرى إتجاهية \vec{A} وذلك بالصورة:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{curl } \vec{A}$$

تسمى \vec{A} , ϕ بالجهود الكهرومغناطيسيين.

حيث: ϕ تسمى الجهد القياسي. Scalar potent.

\vec{A} تسمى الجهد الإتجاهي. Vector potent.

ملحوظة: ϕ ترتبط بالمجال الكهربى \vec{E} فتسمى أحياناً الجهد الكهربى.

\vec{A} ترتبط بالمجال المغنطيسى \vec{H} فتسمى أحياناً الجهد المغنطيسى.

الإثبات: من المتجهات:

$$\text{div}(\text{curl } \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

فمن المعادلة (2): $\text{div } \vec{B} = 0$

.. يمكن كتابة: $\vec{B} = \text{curl } \vec{A}$

حتى تحقق علاقة المتجهات، حيث \vec{A} يسمى بالجهد الإتجاهي.

أيضاً: من المتجهات

$$\text{curl}(\text{grad } \phi) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \wedge (-\vec{\nabla} \phi) = 0$$

$$\text{curl}(-\text{grad } \phi) = 0$$

فمن المعادلة (3):

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \vec{A}) = -\frac{1}{c} \text{curl} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \text{curl} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

.. يمكن كتابة:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi$$

$$\therefore \vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

حيث ϕ تسمى بالجهد القياسي.

ملاحظات:

(1) في حالة الفراغ: معادلات ماكسويل هي:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{curl} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ويكون الحل هو:

$$\vec{H} = \operatorname{curl} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(ويلاحظ عدم تغير هذه المعادلة سواء في الفراغ أو الوسط)

(2) الحالة المستقرة Stationary State

هي الحالة التي لا تعتمد على الزمن:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

وتصبح معادلات ماكسويل:

$$(i) \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = 0$$

يسمى المجال حينئذ بالمجال الكهروستاتيكي (Electrostatic).

$$(ii) \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{curl} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

يسمى المجال حينئذ بالمجال المغنطوستاتيكي (Magnetostatic).

يسمى العلم الذي ندرس فيه المجال الكهروستاتيكي بعلم الكهروستاتيكا - *Electrostatics*.

ويسمى العلم الذي ندرس فيه المجال المغنطيوستاتيكي بعلم المغنطيوستاتيكا - *Magnetostatics* ويسمى العلم الذي ندرس فيه المجالين بالكهرومغناطيسية *Electromagnetism*.

وحيث أن حركة الشحنات (أي وجود الحد $\frac{\partial \rho}{\partial t}$) تولد تياراً كهربياً فينتج لدينا علماً يسمى: *الإلكتروديناميكا* (أو *الديناميكا الكهربائية*) *Electrodynamics* وهي أنواع نذكر منها:

(١) كلاسكية (Classical Elect.) سرعة الشحنات المتحركة محدودة.

(٢) نسبية (Relativistic Elect.) سرعة الشحنات المتحركة كبيرة جداً.

(٣) كمية (Quantum Elect.) ندرس فيها الأنظمة الذرية المشحونة.

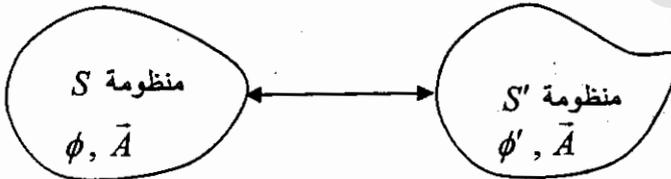
التحويلات المعيارية (Gauge Transformations): هما تحويلان صورتها

$$\phi = \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + \text{grad } \lambda \quad \text{---(2)}$$

حيث λ دالة قياسية اختيارية.

معنى التحويل (Transformation)



باستخدام (1), (2) لا تتغير قيمتا \vec{E}, \vec{H} عند الانتقال من S إلى S' بمعنى أن:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}'} \quad , \quad \boxed{\vec{H} = \vec{H}'}$$

الإثبات: بالنسبة للمجال المغنطيسي:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \text{curl } \vec{A} = \text{curl}(\vec{A}' + \text{grad } \lambda) = \text{curl } \vec{A}' + \text{curl } \text{grad } \lambda \\ \therefore \vec{H} &= \text{curl } \vec{A}' = \vec{H}' \quad (\text{استخدمنا العلاقة } \text{curl } \text{grad } \lambda = 0) \quad \text{--- (3)} \\ \therefore \vec{H} &= \vec{H}' \text{ نحصل على } \vec{A} = \vec{A}' + \text{grad } \lambda\end{aligned}$$

بالنسبة للمجال الكهربى:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{A}' + \text{grad } \lambda] \\ &= -\text{grad} \left[\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \lambda) = \text{grad} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \\ \text{grad } \lambda = \vec{\nabla} \lambda = \hat{i} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{array} \right. \\ &= -\text{grad } \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}'\end{aligned}$$

$$\text{حيث: } \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\phi = \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}}$$

∴ بوضع $\phi = \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}$ نحصل على $\vec{E} = \vec{E}'$ وهو المطلوب.

شرط لورنتز: Lorentz Condition

هو عبارة عن علاقة بين \vec{A}, ϕ (الجهدين الكهرومغنطيسيين) وصورته:
(١) في حالة الفراغ:

$$\boxed{\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \quad \text{--- (1)}$$

(٢) في حالة المواد العازلة ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$)
حيث μ النفاذية، ϵ السماحية (ثابت العازل).

$$\boxed{\text{div } \vec{A} + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \quad \text{--- (2)}$$

في الفراغ: $\mu = 1, \epsilon = 1$

(٣) في حالة المادة الموصلة (الحالة العامة) $[\vec{j} = \sigma \vec{E}]$

حيث σ معامل التوصيل، \vec{j} تيار التوصيل.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \sigma \phi = 0} \quad \text{--- (3)}$$

تعرف (3) بالصورة العامة لشرط لورنتز.

ملاحظة: عدم وجود موصل: $\sigma = 0$ ، وجود فراغ: $\mu = 1, \epsilon = 1$

الإثبات: نفرض أن:

$$a = \operatorname{div} \vec{A} + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \sigma \phi = 0$$

وبتطبيق التحويلات المعيارية (التي لا تغير من معادلات المجال).

$$\vec{A} = \vec{A}' + \operatorname{grad} \lambda, \quad \phi = \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \operatorname{div} \vec{A}' + \operatorname{div} \operatorname{grad} \lambda + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu}{c} \sigma \phi' - \frac{4\pi\mu}{c^2} \sigma \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ &= (\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \sigma \phi') + (\nabla^2 \lambda - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu}{c^2} \sigma \frac{\partial \lambda}{\partial t}) \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

وحيث أن λ دالة قياسية إختيارية فيمكن إختيارها بحيث تحقق العلاقة:

$$\nabla^2 \lambda - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu}{c^2} \sigma \frac{\partial \lambda}{\partial t} = a \quad \left| \operatorname{div} \operatorname{grad} \lambda = \nabla^2 \lambda \right.$$

وتصبح (1):

$$a = (\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \sigma \phi') + a$$

$$\therefore \operatorname{div} \vec{A}' + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \sigma \phi' = 0$$

ويمكن وضع هذه العلاقة بالصورة العامة (بإسقاط الشرط)

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \sigma \phi = 0}$$

وهو شرط لورنتز في صورته العامة.

معادلات لورنتز للجهدين \vec{A}, ϕ (Lorentz Equation)

أولاً: في حالة الفراغ: باستخدام معادلات ماكسويل في الفراغ

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{___(1)}$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad \text{___(2)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{___(3)}$$

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{___(4)}$$

والحل العام لهم بدلالة \vec{A}, ϕ :

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} \quad \text{___(5)}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{___(6)}$$

وكذلك شرط لورنتز:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{___(7)}$$

يمكن إثبات أن الجهدين \vec{A}, ϕ يحققان المعادلتين التفاضليتين الآتيتين:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad \text{___(8)}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{___(9)}$$

حيث ρ, \vec{j} هما كثافة الشحنة والتيار على التوالي.

الإثبات: باستخدام (6), (5), والتعويض في (4):

$$\text{curl}(\text{curl } \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

ولكن: من المتجهات:

$$\boxed{\text{curl } \text{curl } \vec{A} = \text{grad } \text{div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}}$$

$$\therefore \text{grad } \text{div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \text{grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j} + \text{grad} \left(\text{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j}$$

وهي المعادلة (9).

أيضاً: بالتعويض من (6) في (1) واستخدام شرط لورنتز:

$$\text{div} \left[-\text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right] = 4\pi \rho$$

$$\therefore -\text{div} \text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{A} = 4\pi \rho$$

$$\text{div} \bar{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ومن شرط لورنتز

$$\text{div} \text{grad} \phi = \nabla^2 \phi$$

ومن المتجهات أيضاً

$$\therefore -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 4\pi \rho$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho}$$

وهي المعادلة (8).

المعادلتان (8)، (9) تعرفان بمعادلتَي لورنتز للجهدين \bar{A}, ϕ في حالة الفراغ.

معادلات دالمبيرت (D'Alembert Equations)

يعرف مؤثر لابلاس (اللابلاسيان Laplacian operator) بالعلاقة:

$$\Delta = \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

كما يعرف مؤثر دالمبيرت (الدالمبيرتيان D'Alembertian Operator) بالعلاقة:

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

بالعلاقة:

وتصبح المعادلتين (8)، (9) بالصورة:

$$\square \phi = -4\pi \rho$$

____ (8)

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{---(9)}$$

في حالة الفراغ الحر: (الخالي من الشحنات والتيار $\vec{j} = 0, \rho = 0$)
تؤول المعادلتان (9), (8) إلى:

$$\square \phi = 0, \quad \square \vec{A} = 0$$

وتعرف هاتان المعادلتان بمعادلتى دالمبيرت.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

ملحوظة: في الحالة المستقرة

$$\square \rightarrow \nabla^2$$

يؤول مؤثر دالمبيرت إلى مؤثر لابلاس.

وتصبح معادلتا دالمبيرت بالصورة:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}, \quad \boxed{\nabla^2 \vec{A} = 0}$$

وتعرف هاتان المعادلتان بمعادلتى لابلاس.

مثال: أثبت أن معادلتى لورنتز في حالة الوسط العازل ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}$)
تأخذان للصورة الآتية:

$$\nabla^2 \phi - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad \text{---(1)}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} \quad \text{---(2)}$$

الحل: معادلات ماكسويل في الوسط العازل

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho \quad \text{---(3)}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{---(4)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{---(5)}$$

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{---(6)}$$

حيث: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}$

وباستخدام العلاقتين:

$$\vec{B} = \text{curl } \vec{A} \quad \text{---(7)}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{---(8)}$$

وكذلك شرط لورنتز (للمادة العازلة).

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{---(9)}$$

من (3):

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 4\pi \rho$$

$$\therefore \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi \rho}{\epsilon}$$

وبالتعويض من (8):

$$\therefore \text{div}(-\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

ولكن: $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$

$$\therefore -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

$$\therefore -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho} \quad \text{---(1)}$$

أيضاً: من المعادلة (6):

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \left| \vec{D} = \epsilon \vec{E} \right.$$

$$\text{curl}(\mu \vec{H}) = \frac{4\pi \mu}{c} \vec{j} + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \text{curl } \vec{B} = \frac{4\pi \mu}{c} \vec{j} + \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \text{curl curl } \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

ولكن: $\text{curl curl } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$

$$\therefore \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} - \text{grad} \left(\frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}} \quad \text{---(2)}$$

حيث: $\text{div } \vec{A} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (شرط لورنتز).

أمثلة محلولة:

ملحوظة: تتميز الكميات المستخدمة في الإلكتروديناميكا (النظرية الكهرومغناطيسية)

بوحدة معينة، فمثلاً:

التيار الكهربائي يقاس بوحدة الأمبير

كمية الشحنة تقاس بوحدة الكولوم

المقاومة الكهربائية تقاس بوحدة الأوم

الجهد الكهربائي يقاس بوحدة الفولت

شدة المجال الكهربائي يقاس بوحدة الجاوس

شدة المجال المغناطيسي تقاس بوحدة الأورستد، وهكذا

ويعتمد شكل المعادلات التي تدخل فيها هذه الكميات على نظام الوحدات المستخدمة

ويوجد لدينا نظامان أساسيان للوحدات:

(١) نظام (esu) (Electrostatic Units) أو cgs (سم جم ث).

(٢) النظام المتري (MKS) (متر كجم ث) أو النظام

الدولي (International System)

نظام esu: يستخدم في النظرية الرياضية للكهرومغناطيسية عادة.

نظام MKS: يستخدمه علماء الفيزياء عادة.

مثال على الفرق بين شكل المعادلات في النظامين:

في النظام المتري: $[4\pi = 1, c = 1]$ غالباً

.. معادلات ماكسويل في النظام المتري تأخذ الشكل:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{curl} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{curl} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

في نظام esu:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{curl} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{curl} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

أيضاً: في نظام MKS: المعادلة

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

تصبح:

معادلة الاتصال: $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ تظل كما هي:

شرط لورنتز: $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ يصبح:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

أيضاً: هناك فرق آخر بين النظامين:

في الـ esu :

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ متجه الإزاحة، $\epsilon = 1$ في حالة الفراغ

حيث ϵ السماحية (permittivity) (أو ثابت العازل للوسط (Dielectric Constant)

في الـ MKS (النظام الدولي):

شدة المجال في الفراغ \vec{E}_0 ، شدة المجال في الوسط \vec{E}

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{\vec{E}_0}{\vec{E}} \text{ (في الوسط).}$$

حيث ϵ_0 هي ثابت العازل للفراغ (له قيمة تختلف عن الواحد).

الفرق بين \vec{D} , \vec{E} :

$$\vec{D} = \frac{q \vec{r}}{4\pi r^3}, \quad \vec{E} = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}$$

∴ \vec{E} يعتمد على طبيعة الوسط (لوجود ϵ في معادلته)، بينما \vec{D} لا يعتمد على ذلك بل يعتمد على q .

قانون كولوم (القانون الأساسي في الكهربية):

$$\begin{array}{c} q_1 \quad r \quad q_2 \\ \text{---} \end{array} \quad F \propto q_1, q_2, \left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \rightarrow F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

حيث k ثابت.

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \leftarrow k=1 \quad \leftarrow \text{esu في الـ}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \leftarrow k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \leftarrow \text{في الـ MKS}$$

مثال (1): أثبت أن معادلات ماكسويل في الفراغ الحر في النظام MKS لا تتغير

صورتها باستخدام التحويلات $[\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \vec{H} \rightarrow -\vec{E}]$

الحل: الفراغ الحر (free space) هو الفراغ الخالي من الشحنات

$$\vec{j} = 0 \quad \leftarrow \rho = 0$$

معادلات ماكسويل في الـ MKS:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}$$

تؤول المعادلات إلى:

$$\boxed{\text{div } \vec{H} = 0}, \quad \text{div}(-\vec{E}) = 0 \rightarrow \boxed{\text{div } \vec{E} = 0}$$

$$\text{curl } \vec{H} = -\frac{\partial(-\vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\text{curl } \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\text{curl } (-\vec{E}) = \frac{\partial(\vec{H})}{\partial t} \rightarrow \boxed{\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

.. باستخدام التحويلات السابق لا تتغير صورة معادلات ماكسويل في الفراغ الحر (باستخدام الـ MKS System).

مثال (٢): أوجد معادلة الاتصال بالصورة:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

وذلك باستخدام: (١) الـ MKS (النظام الدولي)
(٢) الـ esu (النظام الإلكترونيستاتيكي)

الحل:

(١) في النظام MKS: من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

بأخذ div الطرفين:

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{ولكن: من المعادلة الأولى لماكسويل:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = 0 \quad \text{وأيضاً من المتجهات:}$$

(حاصل الضرب الثلاثي القياسي لثلاث متجهات بينهما متجهان متساويان يساوي صفراً).

$$\therefore 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho) \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

(٢) في النظام esu: من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

بأخذ div للطرفين:

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (div \vec{E})$$

ومن المعادلة الأولى لماكسويل:

$$div \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

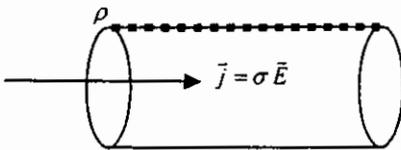
$$\therefore 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi\rho)$$

بقسمة الطرفين على $\frac{4\pi}{c}$:

$$\therefore 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

ملحوظة: في الأمثلة القادمة سوف نستخدم باستمرار نظام الـ esu (الذي أخذناه في الأجزاء السابقة).

مثال (٣): في حالة موصل (Conductor) يمر به تيار $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ، حيث σ معامل التوصيل للمادة الموصلة، وتستقر عليه شحنات كثافتها ρ ، أثبت أن تلك الشحنات تأخذ في الأضمحلال (decaying) بطريقة أسية (exponential) حتى تتلاشى عندما $t \rightarrow \infty$.



الحل: معادلات ماكسويل للموصل الذي

تستقر عليه الشحنات (ρ) ويمر به

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$div \vec{D} = 4\pi\rho, \quad div \vec{B} = 0$$

$$curl \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad curl \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}$$

حيث $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ تيار الإزاحة، $\frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}$ تيار التوصيل.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

ومن المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}$$

بأخذ div للطرفين:

$$\text{div curl } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{div } \vec{E}$$

ومن المعادلة الأولى لماكسويل:

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 4\pi\rho \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div curl } \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = 0$$

وأيضاً:

$$\therefore 0 = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \right) + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \right)$$

بالقسمة على $\frac{4\pi}{c}$:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho$$

وبأخذ: $\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$ ويعرف بزمن الاسترخاء (Relaxation time)

$$\therefore 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \rho$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \rho \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\ln \rho = -\frac{t}{\tau} + \text{const.}$$

وبإجراء التكامل:

وبأخذ $\text{const.} = \ln \rho_0$ ، حيث ρ_0 هي قيمة ρ عندما $t = 0$.

$$\therefore \ln \rho = \ln \rho_0 - \frac{t}{\tau}$$

$$\therefore \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{t}{\tau} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore \boxed{\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$| e^{-\infty} = 0$$

وهذا يعني أن الشحنة ρ تـضمحل (أو تتضاءل) أسياً حتى تصل إلى $\rho = 0$ (تتلاشى) عندما $t = \infty$. وهو المطلوب.

مثال (٤): أثبت أن وجود وسط (جسم مادي) في مجال كهرومغناطيسي يؤدي إلى وجود شحنة إضافية (تأثيرية) كثافتها $\rho_i = -\text{div } \vec{p}$ والتيار الإضافي كثافته:

$$\vec{j}_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c \text{curl } \vec{M}$$

حيث \vec{p} هو متجه الاستقطاب، \vec{M} هي متجه التمغنط ويعرفان بالعلاقين:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{p}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$$

الحل: نستخدم المعادلتين الأولى والرابعة لماكسويل (لاحتوائهما على ρ, \vec{j}) في حالة وجود الوسط. فمن المعادلة الأولى:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{p} \quad \text{حيث}$$

$$\therefore \text{div}(\vec{E} + 4\pi \vec{p}) = 4\pi \rho$$

$$\therefore \text{div } \vec{E} = 4\pi[\rho - \text{div } \vec{p}]$$

$$= 4\pi[\rho + (-\text{div } \vec{p})]$$

$$= 4\pi[\rho + \rho_i] \quad \text{---(1)}$$

$$\rho_i = -\text{div } \vec{p}$$

حيث

ومن المعادلة الرابعة:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{p}$$

وبالتعويض عن:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \rightarrow \vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$$

$$\therefore \text{curl}(\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi \vec{p})$$

$$\therefore \text{curl } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left[\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c \text{curl } \vec{M} \right]$$

$$= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_i \quad \text{---(2)}$$

$$\vec{j}_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c \text{curl } \vec{M}$$

حيث

من (2), (1) يتضح أن وجود وسط (جسم مادي) في مجال كهرومغناطيسي يؤدي إلى وجود شحنة إضافية (تأثيرية) $\rho_i = -\text{div } \vec{p}$ والتيار الإضافي (تأثيري)

$$\vec{j}_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c \text{curl } \vec{M}$$

حيث \vec{p}, \vec{M} هما متجهتا الاستقطاب والتمغنط على التوالي. وهو المطلوب.

مثال (5): معادلة الإرسال البرقي Equation of Telegraphy

أثبت أنه في حالة الوسط الموصل المتجانس الخالي من الشحنات الحرة، فإن الكميات الكهرومغناطيسية

$$\vec{u} = \vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}_c, \vec{A}$$

تخضع لنفس العلاقة الآتية:

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

وتعرف بمعادلة الإرسال البرقي (التلجراف).

الحل:

(i) في حالة \vec{E} : من المعادلة الرابعة لماكسويل للموصل المتجانس ($\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$)

مع غياب الشحنات الحرة ($\rho = 0 \leftarrow \vec{j} = 0$)

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \quad \text{---(1)}$$

ومن المعادلة الأولى:

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{---(2)}$$

ومن المعادلة الثالثة:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

وبأخذ curl الطرفين واعتبار أن:

$$\text{curl curl } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\therefore \text{curl curl } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{curl } \vec{H}$$

$$\therefore \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \vec{H})$$

وبالتعويض من (1)، (2):

$$0 - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \right]$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{--- (3)}$$

وهي المعادلة الخاصة بالمتجه \vec{E} .

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \leftarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ حيث أن } \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

بالتعويض في (3):

$$\frac{1}{\epsilon} (\nabla^2 \vec{D}) = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \cdot \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

وبضرب الطرفين في ϵ :

$$\nabla^2 \vec{D} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad \text{--- (4)}$$

(iii) في حالة $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_c}{\sigma}$$

بالتعويض في (3):

$$\frac{1}{\sigma} (\nabla^2 \vec{j}_c) = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \vec{j}_c}{\partial t^2}$$

وبضرب الطرفين في σ :

$$\therefore \nabla^2 \vec{j}_c = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{j}_c}{\partial t^2} \quad \text{--- (5)}$$

(iv) حالة \vec{H} : من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

بأخذ curl للطرفين:

$$\text{curl curl } \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \text{curl } \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{curl } \vec{E} \quad \text{--- (6)}$$

$$\text{curl curl } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = 0 - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H} \quad \text{ولكن:}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{(المعادلة الثالثة)}$$

$$-\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] \quad \text{بالتعويض في (6):}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \quad \text{--- (7)}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \leftarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{(v) حالة } \vec{B}$$

بالتعويض في (7):

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

بضرب الطرفين في μ :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad \text{--- (8)}$$

(vi) حالة \vec{A} (الجهد الإتجاهي):

$$\text{حيث أن: } \vec{B} = \text{curl } \vec{A} \quad \text{(تعريف المتجه } \vec{A} \text{)}$$

بأخذ curl الطرفين:

$$\text{curl } \vec{B} = \text{curl curl } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{curl } \vec{B} = \text{grad div } \vec{A} - \mu \text{curl } \vec{H} \quad \text{--- (9)}$$

من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$\text{curl } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{---(10)}$$

وباستخدام شرط لورنتز المعمم (في حالة وجود وسط) وصورته:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \phi + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{---(11)}$$

بالتعويض من (10), (11) في (9):

$$\nabla^2 \vec{A} = \text{grad} \left[-\frac{4\pi\mu\sigma}{c} \phi - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] - \left[\frac{4\pi\mu\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \therefore \nabla^2 \vec{A} &= -\frac{4\pi\mu\sigma}{c} \text{grad } \phi - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi \\ &\quad - \left[-\frac{4\pi\mu\sigma}{c} \text{grad } \phi - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] \\ \therefore \boxed{\nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}} &\quad \text{---(12)} \end{aligned}$$

(vii) حالة ϕ (الجهد القياسي):

من معادلة ماكسويل الأولى للوسط الموصل غير المشحون ($\rho = 0$)

$$\text{div } \vec{D} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{وبالتعويض عن:}$$

$$\therefore \text{div} \left(-\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\therefore \text{div } \text{grad } \phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) \quad \text{---(13)}$$

ولكن:

$$\text{div } \text{grad } \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c} \phi - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{ومن شرط لورنتز المعمم:}$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{4\pi\mu\sigma}{c} \phi - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad \text{بالتعويض في (13):}$$

$$\therefore \nabla^2 \phi = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{--- (14)}$$

وهو المطلوب.

٤] المجالات شبه المستقرة: Quasi-Stationary Fields

(١) في حالة المجالات المستقرة (Stationary): فإنه من الممكن إهمال التغير في المجال بالنسبة للزمن أي أن:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \leftarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \left| \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

وبذلك فإن \vec{E} , \vec{H} يمكن إعتبارهما ثابتان (مستقران) أو استاتيكيان (Static).
وتؤول معادلات ماكسويل إلى:

| | |
|--|--|
| $\operatorname{div} \vec{H} = 0$: المعادلة الثانية: $\operatorname{curl} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$: المعادلة الرابعة: (معادلات المجال المجلينوستاتيكي) (Magnetostatics) | $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}$: المعادلة الأولى: $\operatorname{curl} \vec{E} = 0$: المعادلة الثالثة: (معادلات المجال الكهروستاتيكي) (Electrostatics) |
|--|--|

(٢) في حالة المجالات شبه المستقرة: تتميز تلك المجالات بالآتي:

(i) بطيئته التغير مع عدم إهمال التغير بالنسبة للزمن إلا في حالة المواد الموصلة.

(ii) في حالة المواد الموصلة: يوجد تيار توصيل \vec{j}_c بحيث يمكن إهمال تيار

الإزاحة بالنسبة إلى تيار التوصيل.

$$\therefore \vec{j}_D \ll \vec{j}_c$$

$$\text{أي أن: } 0 \rightarrow \vec{j}_D \rightarrow 0 \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow 0 \right] \text{ مع بقاء التغير } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$$

مثال: أكتب معادلات ماكسويل لموصل غير مشحون في حالة المجالات شبه المستقرة، ومن ذلك أثبت أن تيار التوصيل هو تيار لولبي (solenoidal).

الحل: إذا كان $div \vec{A} = 0$ فإن المتجه \vec{A} يسمى متجهاً لولبياً أو حلزونياً (Solenoidal)

المطلوب: إثبات أن $div \vec{j}_c = 0$ ← هو تيار لولبي في الحالة المعطاة.

معادلات ماكسويل لموصل غير مشحون ($\rho = 0$) في حالة المجالات شبه المستقرة ($\vec{j}_d = 0$) (لا يوجد غير تيار التوصيل \vec{j}_c)

$$div \vec{D} = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$div \vec{B} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$curl \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{---(3)}$$

$$curl \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c \quad \text{---(4)}$$

$$div curl \vec{H} = \frac{4\pi}{c} div \vec{j}_c$$

من المعادلة (4) بأخذ div للطرفين:

$$div curl \vec{H} = 0 \quad \text{(من المتجهات):}$$

$$\therefore \frac{4\pi}{c} div \vec{j}_c = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{div \vec{j}_c = 0} \quad \text{---(5)}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: في الحالة المعطاة في المسألة ومن العلاقات (1), (2), (5) يتضح أن المتجهات $\vec{D}, \vec{B}, \vec{j}_c$ هي متجهات لولبية.

ملحوظة هامة: في حالة المجالات شبه المستقرة (وفي عدم وجود شحنات حرة)، فإن الجهد الكهروستاتيكي (القياسي) يمكن إهماله ($\phi = 0$).

$$\text{ويصبح شرط لورنتز: } div \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{بالصورة:}$$

$$\boxed{div \vec{A} = 0}$$

وتصبح العلاقة: $\vec{E} = -grad \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ بالصورة

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

مثال: أثبت أنه في حالة المجالات شبه المستقرة ولموصل غير مشحون فإن المتجهات $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}_c, \vec{A}$ تخضع لمعادلة صورتها:

$$\nabla^2 \vec{u} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$

وتعرف بمعادلة التوصيل الكهربى (Equation of Electric Conduction)

الحل: معادلات ماكسويل للمجال شبه المستقر والموصل غير المشحون ($\rho = 0$)

$$div \vec{E} = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$div \vec{H} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$curl \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{---(3)}$$

$$curl \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c \quad \text{---(4)}$$

مع العلاقات الآتية:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{j}_c = \sigma \vec{E}$$

ايضاً: حيث أن:

$$\vec{B} = curl \vec{A} \quad \text{---(5)}$$

والمجالات شبه المستقرة:

$$div \vec{A} = 0 \quad \text{---(6)}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{---(7)}$$

(i) المجال \vec{E} : من المعادلة (3)

$$curl \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

بأخذ $curl$ الطرفين:

$$curl\,curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} curl\,\vec{B} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} curl\,\vec{H} \quad \text{---(8)}$$

ولكن: $curl\,curl\,\vec{E} = grad\,div\,\vec{E} - \nabla^2\vec{E}$ (من المتجهات).

$$\therefore curl\,curl\,\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} \quad \text{ومن (1):}$$

وباستخدام (4) تصبح العلاقة (8) بالصورة:

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi}{c} \vec{j}_c \right] = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \right] = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0} \quad \text{---(9)}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \leftarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{(ii) المتجه } \vec{D}$$

بالتعويض في (9):

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 \vec{D} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0}$$

بضرب الطرفين في ϵ :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{D} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0} \quad \text{---(10)}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_c}{\sigma} \leftarrow \vec{j}_c = \sigma \vec{E} \quad \text{(iii) المتجه } \vec{j}_c$$

$$\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \vec{j}_c - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = 0 \quad \text{بالتعويض في (9):}$$

بضرب الطرفين في σ :

$$\nabla^2 \vec{j}_c - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = 0 \quad \text{---(11)}$$

(iv) المتجه \vec{H} : من (4)

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}$$

بأخذ $curl$ الطرفين:

$$curl \, curl \, \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} curl \, \vec{E}$$

$$grad \, div \, \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

حيث $div \, \vec{H} = 0$ (من (2))

$$\therefore -\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{-\nabla^2 \vec{H} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0} \quad \text{---(12)}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \leftarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{:(v) المتجه } \vec{B}$$

بالتعويض في (12):

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{B} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

بضرب الطرفين في μ :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad \text{---(13)}$$

$$\vec{B} = curl \, \vec{A} \quad \text{:(vi) المتجه } \vec{A} \text{ من (5)}$$

$$curl \, \vec{B} = curl \, curl \, \vec{A} = grad \, div \, \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

حيث $div \, \vec{A} = 0$ (من المعادلة (6)).

$$curl \, \vec{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \vec{E} \leftarrow curl \, \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \quad \text{ومن (4):}$$

$$\therefore -\nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0} \quad \text{---(14)}$$

وهو المطلوب.

[5] المجالات المتغيرة توافقياً مع الزمن

Fields Varying Harmonically With Time

يتميز هذا النوع من المجالات بالعلاقات الآتية:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega t}$$

حيث \vec{E}_0, \vec{H}_0 هما سعنا المجال (Amplitude) (قيمتي \vec{E}, \vec{H} عندما $t=0$)،
تردد ω (frequency) المجال.

الموصل الجيد (Good Conductor)

والعازل الجيد (أو المثالي) (Ideal Dielectric):

(1) يتميز الموصل الجيد بأن تيار التوصيل له يكون كبيراً جداً بحيث يمكن

$$\text{إهمال تيار الإزاحة } \vec{J}_D \gg \vec{J}_c.$$

(2) يتميز العازل الجيد بأن تيار التوصيل له يكون صغيراً جداً جداً بحيث

$$\text{يمكن إهماله بالنسبة إلى تيار الإزاحة } [\vec{J}_c = 0] \quad \vec{J}_D \gg \vec{J}_c$$

مثال: أكتب معادلات ماكسويل للمجالات المتغيرة توافقياً مع الزمن، وأثبت أن

الشرط الخاص بتلك المجالات هو أن يكون:

$$w \ll \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \quad \text{(i)}$$

$$w \gg \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \quad \text{(ii)}$$

حيث w هي تردد المجال المتغير توافقياً مع الزمن

الحل: في حالة المجالات المتغيرة توافقياً مع الزمن فإن:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega t}$$

حيث w تردد المجال.

$$\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i\omega t}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t} \quad \text{أيضاً يمكن كتابة:}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D}_0 e^{i\omega t} = i\omega \vec{D}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}_0 e^{i\omega t} = i\omega \vec{B}$$

ومن معادلات ماكسويل (باعتبار وجود تيارى الإزاحة والتوصيل) وصورتها:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad \text{---(1)}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} \vec{B} = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H} \quad \text{---(3)}$$

$$\operatorname{curl} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{i\omega}{c} \vec{D} \quad \left| \operatorname{curl} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} [\vec{j}_c + \vec{j}_D] \right.$$

$$= \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{i\omega\varepsilon}{c} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \left[\sigma + i \frac{\omega\varepsilon}{4\pi} \right] \vec{E} \quad \text{---(4)}$$

(i) في حالة الموصل الجيد: $\vec{j}_c \gg \vec{j}_D$

$$|\vec{j}_c| \gg |\vec{j}_D| \rightarrow \left| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}_c} \right| \ll 1 \quad \text{---(5)}$$

ولكن:

$$\vec{j}_D = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} [i\omega \vec{E}] = \frac{i\varepsilon\omega}{4\pi} \vec{E} \quad \text{---(6)}$$

$$\vec{j}_c = \sigma \vec{E} \quad \text{---(7)}$$

من (6), (7) في (5):

$$\therefore \frac{\varepsilon\omega}{4\pi\sigma} \ll 1$$

$$\left| |i| = 1, i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, |i^2| = 1 \right.$$

$$\therefore \boxed{w \ll \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}}$$

(ii) في حالة العازل الجيد (أو المثالي): $\vec{j}_c \ll \vec{j}_D$

$$|\vec{j}_c| \ll |\vec{j}_D| \rightarrow \left| \frac{\vec{j}_c}{\vec{j}_D} \right| \ll 1$$

ومن (6), (7)

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \ll 1 \rightarrow \boxed{w \gg \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}}$$

وهو المطلوب.

أمثلة عامة على معادلات المجال الكهرومغناطيسي

تمهيد: ملخص لقوانين المتجهات التي تستخدم عادة في حل مسائل النظرية الكهرومغناطيسية.

$$(i) \text{curl grad } \phi = 0 \quad [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = 0]$$

$$(ii) \text{curl curl } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

$$[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}]$$

$$(iii) \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{B}$$

$$[\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})]$$

حالة خاصة: إذا كان \vec{A} متجه ثابت ($\text{curl } \vec{A} = 0$) ويكون:

$$\boxed{\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{A} \cdot \text{curl } \vec{B}}$$

$$(iv) \text{div} (\phi \vec{A}) = \phi \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } \phi$$

$$[\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \phi)]$$

حالة خاصة: إذا كان \vec{A} متجه ثابت ($\text{div } \vec{A} = 0$) ويكون:

$$\boxed{\text{div} (\phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad } \phi}$$

$$(v) \text{curl} (\phi \vec{A}) = \phi \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \wedge \text{grad } \phi$$

$$[\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{A}) = \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \phi)]$$

حالة خاصة: إذا كان \vec{A} متجه ثابت ($\text{curl } \vec{A} = 0$) ويكون:

$$\boxed{\text{curl} (\phi \vec{A}) = -\vec{A} \wedge \text{grad } \phi}$$

$$(vi) \text{grad} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \wedge \text{curl } \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{curl } \vec{A}$$

حالة خاصة: إذا كان \vec{A} متجه ثابت فإن: $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = 0$, $\vec{B} \wedge \text{curl } \vec{A} = 0$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} \wedge \text{curl } \vec{B}}$$

$$(vii) \text{curl}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) \\ = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

حالة خاصة: إذا كان \vec{A} متجه ثابت فإن: $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = 0$, $\text{div} \vec{A} = 0$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}$$

مثال(1): إذا كان الجهد الإتجاهي \vec{A} يحقق العلاقاتين:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \quad , \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

وكانت \vec{E}, \vec{H} تعرفان بالعلاقين:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \ddot{\vec{A}} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

حيث

فأثبت أن معادلات ماكسويل في الفراغ الحر تتحقق بتلك العلاقات.

الحل: معادلات ماكسويل في الفراغ الحر (الخالي من الشحنات):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{H}} \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}}$$

$$\dot{\vec{E}} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \quad \dot{\vec{H}} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

حيث:

المطلوب إثبات أن المعادلات الأربعة:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} \quad \text{---(2)}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \quad \text{---(3)}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{---(4)}$$

تحقق معادلات ماكسويل المذكورة.

فمن (3): بأخذ div الطرفين:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{المعادلة الأولى لماكسويل})$$

حيث $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (من (1))

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad \text{أيضاً: من المعادلة (4): بأخذ } div \text{ الطرفين:}$$

وهي المعادلة الثانية لماكسويل، حيث $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$ (من المتجهات).

أيضاً: من (3) بأخذ $curl$ الطرفين:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{H}}$$

وهي المعادلة الثالثة لماكسويل، حيث $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{H}$ (من (4)).

وأخيراً: من (4) بأخذ $curl$ الطرفين:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = curl \, curl \, \vec{A} = grad \, div \, \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$= -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \dot{\vec{A}}}{\partial t} = \frac{1}{c} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\vec{A}}}{\partial t} \right]$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}}$$

وهي المعادلة الرابعة لماكسويل، حيث $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\vec{A}}}{\partial t}$ (من (3))، وهو المطلوب.

مثال (٢): أثبت أن المجالين \vec{E}, \vec{H} المعطيان بالعلاقتين:

$$\vec{E} = [0, 0, \cos(y - ct)]$$

$$\vec{H} = [\cos(y - ct), 0, 0]$$

بحققان معادلات ماكسويل في الفراغ الحر.

الحل: معادلات ماكسويل في الفراغ الحر (الخالي من الشحنات):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{H}} \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}}$$

$$[1] \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial [0]}{\partial x} + \frac{\partial [0]}{\partial y} + \frac{\partial [\cos(y-ct)]}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

وهي المعادلة الأولى لماكسويل.

$$[2] \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial [\cos(y-ct)]}{\partial x} + \frac{\partial [0]}{\partial y} + \frac{\partial [0]}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

وهي المعادلة الثانية لماكسويل.

$$[3] \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \cos(y-ct) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \frac{\partial}{\partial y} [\cos(y-ct)] - \hat{j} \frac{\partial}{\partial x} [\cos(y-ct)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\cos(y-ct)] = 0 \quad \text{ولكن}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\cos(y-ct)] = -\sin(y-ct)$$

وحيث أن:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial t} \hat{i} = \frac{\partial}{\partial t} [\cos(y-ct)] \hat{i}$$

$$= \hat{i} \{-\sin(y-ct) \cdot [-c]\} = \hat{i} c \sin(y-ct)$$

$$\therefore \hat{i} \sin(y-ct) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{---(1)}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial y} [\cos(y-ct)] = -\hat{i} \sin(y-ct) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

وهي المعادلة الثالثة لماكسويل.

$$[4] \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos(y-ct) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{k} \frac{\partial}{\partial y} [\cos(y-ct)] = -\hat{k} [-\sin(y-ct)] = \hat{k} \sin(y-ct)$$

وحيث أن:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{k} = \frac{\partial}{\partial t} [\cos(y-ct)] \hat{k}$$

$$= \hat{k} \{-\sin(y-ct)[-c]\} = \hat{k} c \sin(y-ct)$$

$$\therefore \hat{k} \sin(y-ct) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{---(2)}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وهي المعادلة الرابعة لماكسويل. وهو المطلوب.

مثال (3): أثبت أن الجهد الإتجاهي \vec{A} للمعطى بالعلاقة:

$$\vec{A} = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \hat{i} + a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) \hat{j}$$

حيث a, λ ثابتان، يمثل حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر، ثم أستنتج علاقته مناسبتين لشذنتي المجال \vec{E}, \vec{H} في هذه الحالة.

$$\text{الحل: بوضع } \frac{2\pi}{\lambda} (z-ct) = \theta$$

$$\vec{A} = a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad \text{---(1)}$$

لإثبات أن (1) تمثل حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر:

$$[\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \square \vec{A} = 0] \quad \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}}$$

تمثل حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر (لأنها تحققها).

∴ يكفي إثبات أن \vec{A} المعطاة بالعلاقة (1) تحقق العلاقة $\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}}$ ونكون بذلك قد أثبتنا المطلوب.

ولإثبات ذلك:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= \nabla^2 A_x \hat{i} + \nabla^2 A_y \hat{j} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \hat{j} \end{aligned}$$

حيث $A_x = a \cos \theta$, $A_y = a \sin \theta$

$$\begin{aligned} \therefore \nabla^2 \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial z^2} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial z^2} \right) \hat{j} \quad \left| \theta = \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right. \\ &= \left[-a \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \theta \right] \hat{i} + \left[-a \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin \theta \right] \hat{j} \\ &= -a \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] \quad \text{---(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j} = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \hat{i} + a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \hat{j} \quad \text{أيضاً:} \\ \dot{\vec{A}} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \cdot (-c) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \hat{i} + a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \cdot (-c) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \hat{j} \\ &= ac \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \hat{i} - \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \hat{j} \right] \\ &= ac \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) [\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}] \quad \text{---(3)} \end{aligned}$$

$$\ddot{\vec{A}} = -ac^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] \quad \text{---(4)}$$

$$\therefore \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = -a \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] \quad \text{---(5)}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} \quad \text{من (2), (5) نجد أن:}$$

وهذا يعني أن \vec{A} المعطاة تحقق معادلات ماكسويل في الفراغ الحر. وهو المطلوب أولاً.

المطلوب الثاني: إيجاد علاقتين للمتجهين \vec{E}, \vec{H}

حيث أن: $\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}}$ ، ومن (3):

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= -\frac{1}{c} \cdot ac \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) [\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}] \\ &= a \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) [-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}] \end{aligned} \quad \text{---(6)}$$

أيضاً: حيث أن: $\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{H} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a \cos \theta & a \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left[-\frac{\partial}{\partial z} (a \sin \theta) \right] - \hat{j} \left[-\frac{\partial}{\partial z} (a \cos \theta) \right] + \hat{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} (a \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial y} (a \cos \theta) \right] \\ &\quad (\theta = \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \text{ لأن } \frac{\partial}{\partial x} (a \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial y} (a \cos \theta) = 0 \text{ حيث}) \\ \therefore \vec{H} &= \hat{i} \left[-a \cos \theta \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \right] + \hat{j} \left[-a \sin \theta \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \right] \\ &= -a \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] \end{aligned} \quad \text{---(7)}$$

المعادلتان (6)، (7) هما المعادلتان المطلوبتان للمتجهين \vec{E}, \vec{H} .

مثال (٤): أثبت أن العلاقتين

$$\phi = -\text{div} \left[\frac{\vec{a}}{r} e^{in(r-ct)} \right], \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{a}}{r} e^{in(r-ct)} \right]$$

حيث \vec{a} متجه ثابت، n عدد قياسي ثابت، r هي المسافة من مركز معين (أو نقطة أصل) 0] تمثلان حلاً مناسباً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر وأن

هاتان العلاقتان تحققان شروط لورنتز وصورته:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ حيث } \boxed{\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \dot{\phi} = 0}$$

الحل: لكي نثبت أن \vec{A}, ϕ المعطاة تحقق معادلات ماكسويل في الفراغ الحر يكفي إثبات أنهما يحققان المعادلتين:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{H}} \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} \quad \text{---(2)}$$

مع إعتبار العلاقتين:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \quad \text{---(3)}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \text{---(4)}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -inc \lambda \leftarrow \frac{1}{r} e^{in(r-ct)} = \lambda \quad \text{بأخذ}$$

$$\therefore \phi = -\text{div}(\vec{a} \lambda) \quad \text{---(5)}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{a} \lambda) \quad \text{---(6)}$$

ومن المتجهات:

$$\text{div}(\vec{a} \phi) = \phi \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad} \phi$$

$$\boxed{\text{div}(\vec{a} \phi) = \vec{a} \cdot \text{grad} \phi}$$

وإذا كان \vec{a} متجه ثابت:

$$\therefore \phi = -\vec{a} \cdot \text{grad} \lambda \quad \text{---(7)}$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{a}}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\vec{a}}{c} (-inc \lambda) = -in \vec{a} \lambda \quad \text{---(8)}$$

بالتعويض من (7), (8) في (3):

$$\vec{E} = -\text{grad}[-\vec{a} \cdot \text{grad} \lambda] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}[-in \vec{a} \lambda]$$

$$= \text{grad}[\vec{a} \cdot \text{grad} \lambda] + \frac{in \vec{a}}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

$$= \text{grad}[\vec{a} \cdot \text{grad} \lambda] + \frac{in \vec{a}}{c} (-inc \lambda)$$

$$= \text{grad}[\vec{a} \cdot \text{grad} \lambda] + n^2 \vec{a} \lambda \quad \text{---(9)}$$

وبأخذ $curl$ الطرفين:

$$\therefore curl \vec{E} = curl grad [\vec{a} \cdot grad \lambda] + n^2 curl (\vec{a} \lambda)$$

ولكن: $curl grad \phi = 0$ ، حيث ϕ كمية قياسية $\vec{a} \cdot grad \lambda =$

$$\therefore curl \vec{E} = n^2 curl (\vec{a} \lambda) \quad \text{---(10)}$$

ومن (4) وباستخدام (8):

$$\therefore \vec{H} = curl \vec{A} = -in curl (\vec{a} \lambda)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -in \frac{\partial}{\partial t} curl (\vec{a} \lambda) = -in curl \frac{\partial}{\partial t} (\vec{a} \lambda) = -in curl [\vec{a} \frac{\partial \lambda}{\partial t}] \\ &= -in curl [\vec{a} (-inc \lambda)] = -n^2 c curl (\vec{a} \lambda) \end{aligned} \quad \text{---(11)}$$

من (10), (11) نجد أن:

$$\boxed{curl \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

ولإثبات العلاقة: $curl \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ [العلاقة الرابعة لماكسويل].

$$\vec{H} = -in curl (\vec{a} \lambda) \quad \text{من العلاقة:}$$

ومن المتجهات: $curl (\vec{a} \phi) = \phi curl \vec{a} - \vec{a} \wedge grad \vec{a}$

وللمتجه الثابت \vec{a} : $\boxed{curl (\vec{a} \phi) = -\vec{a} \wedge grad \phi}$

$$\therefore \vec{H} = -in[-\vec{a} \wedge grad \lambda] = in[\vec{a} \wedge grad \lambda] \quad \text{---(12)}$$

وبأخذ $grad \lambda = \vec{b}$

$$\therefore \vec{H} = in[\vec{a} \wedge \vec{b}]$$

$$\therefore curl \vec{H} = in curl (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$\boxed{curl (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}} \quad \text{ولكن:}$$

(من المتجهات، حيث \vec{a} متجه ثابت)

$$\therefore curl \vec{H} = in[\vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}]$$

$$= in[\vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \lambda) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \lambda] = in \vec{a} \nabla^2 \lambda - in (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \lambda \quad \text{---(13)}$$

ومن الممكن إثبات أن:

$$\nabla^2 \lambda = -n^2 \lambda$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{curl } \vec{H} &= \text{in } \vec{a} (-n^2 \lambda) - \text{in} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \lambda \\ &= -\text{in} [\vec{a} n^2 \lambda + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \lambda] \end{aligned} \quad \text{___(14)}$$

ومن العلاقة (9):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad} (\vec{a} \cdot \text{grad } \lambda) + n^2 \vec{a} \lambda \\ \therefore \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \text{grad} \left(\vec{a} \cdot \text{grad} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) + n^2 \vec{a} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad \left| \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -ic \lambda \right. \\ &= -\text{in } c \text{grad} (\vec{a} \cdot \text{grad } \lambda) - \text{in}^3 c \vec{a} \lambda \end{aligned} \quad \text{___(15)}$$

ومن المتجهات:

$$\text{grad} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{a} \wedge \text{curl } \vec{b}$$

(للمتجه الثابت \vec{a})

وبأخذ $\vec{b} = \text{grad } \lambda$

$$\begin{aligned} \therefore \text{grad} (\vec{a} \cdot \text{grad } \lambda) &= \text{grad} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{a} \wedge \text{curl } \vec{b} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \text{grad } \lambda + \vec{a} \wedge \text{curl } \text{grad } \lambda \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \text{grad } \lambda = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \lambda \\ &\quad (\text{curl } \text{grad } \lambda = 0) \end{aligned}$$

وتصبح (15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\text{inc} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \lambda - \text{in}^3 c \vec{a} \lambda \\ &= -\text{inc} [(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \lambda + \vec{a} n^2 \lambda] \end{aligned} \quad \text{___(16)}$$

من (14), (16) نجد أن:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وبذلك تكون قد حققنا المطلوب الأول.

المطلوب الثاني: إثبات أن \vec{A}, ϕ تحققان شرط لورنتز:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

شرط لورنتز:

حيث $\lambda = \frac{1}{r} e^{in(r-ct)}$ ، فإن:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{a}}{r} e^{in(r-ct)} \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{a} \lambda)$$

$$\therefore \text{div } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} (\vec{a} \lambda) \quad \text{--- (17)}$$

$$\phi = -\text{div} \left[\frac{\vec{a}}{r} e^{in(r-ct)} \right] = -\text{div} (\vec{a} \lambda)$$

$$\therefore \text{div} (\vec{a} \lambda) = -\phi \quad \text{--- (18)}$$

بالتعويض من (18) في (17):

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\phi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

وهو المطلوب.

مسائل

مسألة (1): إذا كان \vec{A} متجه ثابت، وكانت ϕ دالة قياسية في الموضع والزمن

وتخضع للعلاقة: $\ddot{\phi} = c^2 \nabla^2 \phi$ ، فأثبت أن العلاقتين:

$$\vec{E} = (\vec{A} \cdot \nabla) \nabla \phi - \frac{1}{c^2} \vec{A} \ddot{\phi} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla \phi) \wedge \vec{A}]$$

تمثلان حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر.

مسألة (2): أثبت أن $\vec{A} = \frac{f'(u)}{cr} \hat{k}$ تمثل حلاً مناسباً لمعادلات ماكسويل في

الفراغ الحر، حيث $f(u)$ هي دالة في المتغير: $u = t - \frac{r}{c}$ ، أثبت أيضاً أن

$$\phi = \frac{Z}{cr^3} (rf' + cf) \quad \text{العلاقة: يعطي المناظر}$$

$$r = |\vec{r}|, \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ حيث:}$$

أوجد كذلك متجهاً شدة المجالين الكهربائي والمغناطيسي بالصورة الآتية:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c^2 r^3} (r^2 f'' + rc f' + c^2 f) \hat{k}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{c^2 r^3} (r^2 f'' + c f') (\vec{r} \wedge \hat{k})$$

مسألة (٣): أثبت أن

$$\vec{E} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{k}, \quad \vec{H} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \hat{j}$$

تمثل حلاً مناسباً لمعادلات ماكسويل لوسط عازل متماثل ثابت عازله ε ومعامل نفاذيته μ ، وهو خال من الشحنات ومن التيار الناقل للشحنة، وذلك باعتبار أن $\psi = \psi(x, z, t)$ تحقق المعادلة الموجية:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

وإذا كانت ψ تعطي بالعلاقة: $\psi = \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)}$

$$\ell^2 + m^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \text{ حيث } \Psi(z) = A \cos mz + B \sin mz \text{ فاثبت أن:}$$

حلول المسائل

حل المسألة (١): المطلوب إثبات أن العلاقتين

$$\vec{E} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c^2} \vec{A} \ddot{\phi} \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{A}] \quad \text{---(2)}$$

مع العلاقة:

$$\ddot{\phi} = c^2 \nabla^2 \phi \quad \text{---(3)}$$

تحقق معادلات ماكسويل في الفراغ الحر وصورتها:

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{---(4)}, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad \text{---(5)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{---(6)} \quad , \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{---(7)}$$

أولاً: لتحقيق المعادلة (4): من (1)

$$c^2 \vec{E} = c^2 (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi - \vec{A} \ddot{\phi} \quad \text{---(8)}$$

وبأخذ div للطرفين:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (c^2 \vec{E}) &= c^2 (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \ddot{\phi} \\ &= c^2 (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \nabla^2 \phi - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \ddot{\phi} \end{aligned}$$

$$\therefore c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = c^2 (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \nabla^2 \phi - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) [c^2 \nabla^2 \phi]$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \nabla^2 \phi - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \nabla^2 \phi = 0 \quad \left| \text{div } \vec{E} = 0 \right.$$

ثانياً: لتحقيق المعادلة (5): من (2)

$$c \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{A}] \quad \text{---(9)}$$

ولكن من المتجهات: إذا كان \vec{a} متجه ثابت فإن:

$$\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{curl } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{curl } \vec{b} = -\vec{a} \cdot \text{curl } \vec{b}$$

وبأخذ $\vec{a} = \vec{A}$, $\vec{b} = \vec{\nabla} \phi$

$$\therefore \text{div}[\vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi] = -\vec{A} \cdot \text{curl}[\text{grad } \phi] = 0$$

ومن (9) بأخذ div للطرفين:

$$\text{div}(c \vec{H}) = c \text{div } \vec{H} = \text{div} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{A}] = \frac{\partial}{\partial t} \text{div}[\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{A}] = 0$$

$$\therefore \boxed{\text{div } \vec{H} = 0}$$

ثالثاً: لتحقيق المعادلة (6):

من (1) بأخذ curl الطرفين:

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{E} &= (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \text{curl}[\text{grad } \phi] - \frac{1}{c^2} \text{curl}(\vec{A} \ddot{\phi}) \\ &= -\frac{1}{c^2} \text{curl}[\vec{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{curl}(\vec{A} \phi) \end{aligned} \quad \text{---(10)}$$

حيث \vec{A} متجه ثابت.

ومن المتجهات: وإذا كان \vec{a} متجه ثابت، فإن:

$$\text{curl}(\phi \vec{a}) = \phi \text{curl} \vec{a} - \vec{a} \wedge \text{grad} \phi = -\vec{a} \wedge \text{grad} \phi$$

وبالتعويض في (10) حيث $\vec{a} = \vec{A}$

$$\therefore \text{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [-\vec{A} \wedge \text{grad} \phi] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{A}] \quad \text{--- (11)}$$

ومن (2):

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{A}] \quad \text{--- (12)}$$

من (11), (12) نجد أن:

$$\boxed{\text{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

رابعاً: لتحقيق المعادلة (7):

من (2) بأخذ curl للطرفين:

$$\text{curl} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{curl}(\vec{\nabla} \phi \wedge \vec{A}) \quad \text{--- (13)}$$

ولكن من المتجهات، وإذا كان \vec{a} متجهاً ثابتاً فإن:

$$\text{curl}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \text{div} \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}$$

وبأخذ $\vec{a} = \vec{A}$, $\vec{b} = \vec{\nabla} \phi$

$$\text{curl}(\vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi = \vec{A}(\nabla^2 \phi) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi$$

بالتعويض في (13):

$$\text{curl} \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{curl}(\vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{A} \nabla^2 \phi - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi] \quad \text{--- (14)}$$

ومن (1)، (3):

$$\vec{E} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \vec{A} [c^2 \nabla^2 \phi] = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi - \vec{A} \nabla^2 \phi$$

ونصبح (14):

$$\text{curl} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi - \vec{A} \nabla^2 \phi] = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

وهو المطلوب.

حل المسألة (٢): معادلات ماكسويل في الفراغ الحر:

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{---(1)} \quad , \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{---(3)} \quad , \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{---(4)}$$

المطلوب الأول: إثبات أن $\vec{A} = \frac{f'}{cr} \hat{k}$ تحقق معادلات ماكسويل ويكفي لذلك

إثبات أن \vec{A} تحقق على الأقل المعادلتين (4), (3) مع إعتبار العلاقات:

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} \quad \text{---(5)}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{---(6)}$$

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{---(7)}$$

فمن (6) بأخذ curl الطرفين:

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{E} &= -\text{curl grad } \phi - \frac{1}{c} \text{curl } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{c} \text{curl } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \text{curl } \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{f'}{cr} \hat{k} \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \text{curl} \left(\frac{f''}{r} \right) \hat{k} \quad \text{---(8)} \quad \left| \quad f'' = \frac{\partial f'}{\partial t} \right. \end{aligned}$$

ومن (5):

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} = \text{curl} \left(\frac{f'}{cr} \right) \hat{k} = \frac{1}{c} \text{curl} \left(\frac{f'}{r} \right) \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{curl} \left(\frac{f'}{r} \right) \hat{k} \\ &= \frac{1}{c} \text{curl} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{f'}{r} \right] \hat{k} = \frac{1}{c} \text{curl} \left(\frac{f''}{r} \right) \hat{k} \quad \text{---(9)} \end{aligned}$$

من (9)، (8) نجد أن:

$$\boxed{\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

وهي العلاقة رقم (3).

ولإثبات أن \vec{A} تحقق العلاقة رقم (4):

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} = \text{curl} \left(\frac{f'}{cr} \right) \hat{k} \quad \text{من (5)}$$

$$\text{curl}(\phi \vec{a}) = \phi \text{curl } \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{\nabla} \phi \quad \text{ومن المتجهات:}$$

وإذا كان \vec{a} متجه ثابت: $\text{curl } \vec{a} = 0$

$$\therefore \text{curl}(\phi \vec{a}) = -\vec{a} \wedge \vec{\nabla} \phi$$

$$\therefore \vec{H} = \text{curl} \left[\frac{f'}{cr} \hat{k} \right] = -\hat{k} \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \quad \text{---(10)}$$

$$\left| \frac{f'}{cr} = \phi, \hat{k} = \vec{a} \right.$$

بأخذ curl الطرفين:

$$\therefore \text{curl } \vec{H} = -\text{curl} \left[\hat{k} \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \right] \quad \text{---(11)}$$

ومن المتجهات، وإذا كان \vec{a} متجهاً ثابتاً فإن:

$$\text{curl}(\hat{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}$$

$$\vec{a} = \hat{k}, \vec{b} = \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \quad \text{وبأخذ}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{curl} \left[\hat{k} \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \right] &= \hat{k} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \right] - (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \\ &= \hat{k} \nabla^2 \left(\frac{f'}{cr} \right) - (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \end{aligned}$$

ولكن $f = f(u) = f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ ، وإذا كان $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$

$$\boxed{\nabla^2 \left(\frac{f'}{cr} \right) = \frac{1}{c^3 r} f'''} \quad \text{فمن السهل إثبات أن:}$$

$$\therefore \text{curl}[\hat{k} \wedge \vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})] = \frac{f'''}{c^3 r} \hat{k} - (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})$$

وتصبح (11):

$$\text{curl} \vec{H} = -\frac{f'''}{c^3 r} \hat{k} + (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}(\frac{f'}{cr}) \quad \text{--- (12)}$$

ومن (7) يمكن إثبات أن: $\phi = -\hat{k} \cdot \vec{\nabla}(\frac{f}{r})$ كالآتي:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -c \text{div} \vec{A} = -c \text{div}(\frac{f'}{cr}) \hat{k} = -\text{div}(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial t}) \hat{k} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} [\text{div}(\frac{f}{r}) \hat{k}] \end{aligned}$$

$$\therefore \phi = -\text{div}(\frac{f}{r}) \hat{k}$$

ولكن من المتجهات:

$$\text{div}(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \lambda$$

وإذا كان \vec{a} متجه ثابت $\leftarrow \text{div} \vec{a} = 0$

$$\therefore \text{div}(\lambda \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \lambda$$

وبأخذ $\lambda = \frac{f}{r}$ ، $\vec{a} = \hat{k}$ ، فإن:

$$\boxed{\phi = -\hat{k} \cdot \vec{\nabla}(\frac{f}{r})} \quad \text{--- (13)}$$

بالتعويض في (6):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}[-\hat{k} \cdot \vec{\nabla}(\frac{f}{r})] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{f'}{cr}) \hat{k} \\ &= \vec{\nabla}(\hat{k} \cdot \vec{\nabla})(\frac{f}{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{f''}{r} \hat{k} = (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}(\frac{f}{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{f''}{r} \hat{k} \quad \text{--- (14)} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}(\frac{f'}{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{f'''}{r} \hat{k}$$

$$\therefore \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\frac{f'''}{c^3 r} \hat{k} + (\hat{k} \cdot \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) \quad \text{---(15)}$$

من (15), (12) نجد أن:

$$\boxed{\text{curl } \bar{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}}$$

المطلوب الثاني: إيجاد ϕ

من العلاقة (13):

$$\phi = -\hat{k} \cdot \bar{\nabla} \left(\frac{f}{r} \right) = -\hat{k} \cdot \bar{\nabla} \left[\left(\frac{1}{r} \right) (f) \right]$$

وباعتبار أن:

$$f = f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r}, \quad \hat{r} = \frac{\bar{r}}{r} \quad (\bar{r} \text{ متجه وحدة في اتجاه } \bar{r})$$

$$\bar{\nabla} \left[\left(\frac{1}{r} \right) (f) \right] = \left[\frac{1}{r} \bar{\nabla} (f) + f \bar{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{r} f' \cdot \left(-\frac{1}{c} \right) + f \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{r} = \left[-\frac{f'}{rc} - \frac{f}{r^2} \right] \left(\frac{\bar{r}}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{r^3 c} (r f' + cf) \bar{r}$$

$$\therefore \phi = -\hat{k} \cdot \left[-\frac{1}{r^3 c} (r f' + cf) \bar{r} \right] = (\hat{k} \cdot \bar{r}) \frac{1}{r^3 c} (r f' + cf)$$

ولكن:

$$\hat{k} \cdot \bar{r} = (\hat{k}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = z(\hat{k} \cdot \hat{k}) = z$$

$$\therefore \phi = \frac{z}{r^3 c} (r f' + cf)$$

وهو المطلوب الثاني.

المطلوب الثالث: إيجاد كل من \bar{E}, \bar{H}

من (14):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left(\frac{f}{r} \right) - \frac{f''}{c^2 r} \hat{k} \\ &= (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \left[\frac{1}{r} f' \cdot \left(-\frac{1}{c} \right) + f \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{r} - \frac{f''}{c^2 r} \hat{k} \\ &= -\frac{1}{cr^3} [rf' + cf] (\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} - \frac{f''}{c^2 r} \hat{k}\end{aligned}$$

ولكن: $(\hat{k} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \hat{k}$ (يمكن إثباتها بسهولة):

$$\therefore \vec{E} = -\frac{1}{cr^3} [rf' + cf] \hat{k} - \frac{f''}{c^2 r} \hat{k} = -\frac{1}{c^2 r^3} (r^2 f'' + rc f' + c^2 f) \hat{k}$$

وهي الصورة المطلوب للمجال \vec{E} .

أيضاً: من (10):

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\hat{k} \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{f'}{cr} \right) = -\frac{\hat{k}}{c} \wedge \vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{r} \right) (f') \right] \\ &= -\frac{\hat{k}}{c} \wedge \left[\frac{1}{r} f'' \cdot \left(-\frac{1}{c} \right) + f' \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{r} \\ &= \frac{\hat{k}}{c} \wedge \left[\frac{f''}{cr} + \frac{f'}{r^2} \right] \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{c^2 r^3} [rf'' + cf'] (\hat{k} \wedge \vec{r})\end{aligned}$$

وهي الصورة المطلوبة للمجال \vec{H} .

حل المسألة (٣): المطلوب إثبات أن \vec{E}, \vec{H} المعطيان يحققان معادلتى ماكسويل

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

اللتان تمثلان الوسط العازل الخالي من الشحنات الحرة والتيار الناقل للشحنة.

$$\vec{E} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{k} \quad \text{أولاً: حيث أن}$$

$$\therefore \text{curl } \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix} = -\hat{i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y \partial x} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \hat{k} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y \partial z} \right)$$

ولما كانت $\psi = \psi(x, z, t)$ فإن:

$$\text{curl } \vec{E} = \hat{j} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{H} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \hat{j} \quad \text{أيضاً: حيث أن}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \hat{j} \quad \text{---(2)}$$

ولما كانت $\psi = \psi(x, z, t)$ فإن:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad \text{---(2)}$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ولأن } \psi \text{ تخضع للمعادلة الموجية:}$$

$$\therefore \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{---(3)}$$

من (1), (3) نجد أن:

$$\text{curl } \vec{E} = \hat{j} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \hat{j} \quad \text{---(4)}$$

$$\boxed{\text{curl } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

من (2), (4) نجد أن:

$$\vec{H} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \hat{j} \quad \text{أيضاً: حيث أن}$$

$$\therefore \text{curl } \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} \right) + \hat{k} \left(-\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{k} \right] \quad \text{---(5)}$$

$$\vec{E} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{k} \quad \text{ولما كانت}$$

$$\therefore \boxed{\text{curl } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\psi = \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)} \quad \text{المطلوب الثاني: إذا كانت}$$

$$\Psi(z) = A \cos mz + B \sin mz \quad \text{فإثبات أن:}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}, \quad \ell^2 + m^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \text{حيث}$$

بتفاضل ψ بالنسبة إلى x مرتين وبالنسبة إلى t مرتين:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = i\ell \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\ell^2 \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)}$$

أيضاً:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} e^{i(\ell x - \omega t)}$$

ومن (3):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore -\ell^2 \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)} + \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} e^{i(\ell x - \omega t)} &= -\frac{\omega^2}{v^2} \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)} \\ &= -(\ell^2 + m^2) \Psi(z) e^{i(\ell x - \omega t)} \end{aligned}$$

وبالقسمة على $e^{i(\ell x - \omega t)}$ نحصل على:

$$\therefore \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} = (-\ell^2 - m^2 + \ell^2) \Psi(z) = -m^2 \Psi(z)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} + m^2 \Psi(z) = 0 \quad \underline{\quad (6)}$$

وهي معادلة تفاضلية حلها العام هو:

$$\Psi(z) = A \cos mz + B \sin mz \quad \text{---(7)}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: هناك صورة أخرى لحل المعادلة (6) هو:

$$\Psi(z) = A e^{imz} + B e^{-imz}$$

[6] متجهات هرتز (Hertzian Vectors)

المتجه \vec{Z} : يسمى متجه هرتز من النوع الكهربى ويسمى أحياناً جهد الاستقطاب (Polarization Potential).

المتجه $\vec{\Gamma}$: يسمى متجه هرتز من النوع المغنطيسي ويسمى أحياناً جهد التمنظط (Magnetization Potential).

خواص متجهات هرتز:

أولاً: يرتبط المتجهان $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ بالجهدين الكهرومغنطيسيين \vec{A}, ϕ بالعلاقتين:

$$\phi = -\text{div} \vec{Z} \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{A} = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \text{curl} \vec{\Gamma} \quad \text{---(2)}$$

(في حالة وجود الوسط حيث ϵ السماحية، μ النفاذية).

الإثبات: من العلاقة بين \vec{A}, ϕ :

$$\text{div} \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

بالتعويض عن ϕ من (1):

$$\text{div} \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\text{div} \vec{Z}) = 0$$

$$\therefore \text{div} \vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c} \text{div} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \text{div} \left(\vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \right) = 0$$

ومن المتجهات: $div \text{curl } \vec{a} = 0$

$$\therefore \vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \text{curl } \vec{\Gamma} \quad | \quad \vec{a} = \vec{\Gamma}$$

$$\therefore \vec{A} = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \text{curl } \vec{\Gamma}$$

ثانياً: المتجهان $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ يخضعان لمعادلة دالمبيرت الموجية في حالة الفراغ،
بمعنى أن:

$$\square \vec{Z} = 0 \rightarrow \nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = 0$$

$$\square \vec{\Gamma} = 0 \rightarrow \nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = 0$$

الإثبات: نثبت أولاً المعادلتين التفاضليتين للمتجهين $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ في حالة وجود الوسط
وذلك بالصورة:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{P} \quad \text{--- (3)}$$

$$\nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = -4\pi\mu \vec{M} \quad \text{--- (4)}$$

حيث: \vec{P} متجه الاستقطاب، \vec{M} متجه التمغنط.

ولإثبات (3)، (4): حيث أن المعادلتين اللتين تحققان \vec{A}, ϕ في وجود الوسط هما:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} \quad \text{--- (5)}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad \text{--- (6)}$$

حيث: $\rho = -\text{div } \vec{P}$, $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{curl } \vec{M}$

فبالتعويض في (5)، (6):

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \left[\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{curl } \vec{M} \right]$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{\epsilon} \operatorname{div} \bar{P}$$

$$\nabla^2 - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square \quad \text{ومن أجل التبسيط: نضع}$$

$$\therefore \square \bar{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \bar{M} \right] \quad \text{---(7)}$$

$$\square \phi = \frac{4\pi}{\epsilon} \operatorname{div} \bar{P} \quad \text{---(8)}$$

ومن تعريف متجهي هرتز:

$$\phi = -\operatorname{div} \bar{Z} \quad \text{---(9)}$$

$$\bar{A} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial t} + \operatorname{curl} \bar{\Gamma} \quad \text{---(10)}$$

بالتعويض من (9) في (8):

$$\square (-\operatorname{div} \bar{Z}) = \frac{4\pi}{\epsilon} \operatorname{div} \bar{P}$$

$$\therefore \operatorname{div} \left(\square \bar{Z} + \frac{4\pi}{\epsilon} \bar{P} \right) = 0$$

ولكن $\operatorname{div} \operatorname{curl} \bar{a} = 0$ ، وهذا يعني أن:

$$\square \bar{Z} + \frac{4\pi}{\epsilon} \bar{P} = \operatorname{curl} \bar{a}$$

حيث \bar{a} متجه إختياري يمكن إعتباره متجهاً ثابتاً $(\operatorname{curl} \bar{a} = 0)$:

$$\therefore \boxed{\square \bar{Z} + \frac{4\pi}{\epsilon} \bar{P} = 0} \quad \text{---(11)}$$

أيضاً: بالتعويض من (10) في (7):

$$\square \left(\frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial t} + \operatorname{curl} \bar{\Gamma} \right) = -\frac{4\pi\mu}{c} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \bar{M} \right)$$

$$\therefore \operatorname{curl} \left(\square \bar{\Gamma} + 4\pi\mu \bar{M} \right) + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\square \bar{Z} + \frac{4\pi}{\epsilon} \bar{P} \right] = 0$$

وباستخدام (11):

$$\therefore \operatorname{curl} \left(\square \bar{\Gamma} + 4\pi\mu \bar{M} \right) = 0$$

ولكن: $curl \text{ grad } \lambda = 0$ ، وهذا يعني أن

$$\square \vec{\Gamma} + 4\pi\mu \vec{M} = \text{grad } \lambda$$

حيث λ كمية قياسية إختيارية يمكن إعتبارها كمية ثابتة ($\text{grad } \lambda = 0$)

$$\therefore \square \vec{\Gamma} + 4\pi\mu \vec{M} = 0 \quad \text{---(12)}$$

من المعادلتين (12)، (11) نرى إرتباط المتجه \vec{Z} بمتجه الإستقطاب \vec{P} وإرتباط المتجه $\vec{\Gamma}$ بمتجه التمغنط \vec{M} ولذلك سمى المتجهان بجهدى الإستقطاب والتمغنط على الترتيب.

وبالتعويض عن $\square = \nabla^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ في (12)، (11) نحصل على:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{P} \quad \text{---(13)}$$

$$\nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = -4\pi \mu \vec{M} \quad \text{---(14)}$$

وهما المعادلتان التفاضليتان للمتجهين $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ في حالة وجود وسط.

في حالة الفراغ: $\mu = 1, \epsilon = 1, \vec{P} = 0, \vec{M} = 0$

$$\therefore \nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = 0$$

أي أن المتجهين $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ في هذه الحالة يحققان معادلة دالمبيرت الموجية.

أمثلة محلولة على سطح هرتز:

مثال (1): أوجد الحل العام لمعادلات ماكسويل في الوسط وفي الفراغ بدلالة متجهي

هرتز $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$.

الحل: الحل العام لمعادلات ماكسويل هو إيجاد المتجهين \vec{E}, \vec{H} . وفي هذا المثال:

المطلوب إيجاد \vec{E}, \vec{H} بدلالة $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ ، بحيث أن \vec{A}, ϕ تشكل حلاً لمعادلات

ماكسويل فيمكننا كتابتهما بدلالة $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ ومن ذلك نوجد \vec{E}, \vec{H} بدلالة $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$.

$$\vec{\phi} = -\text{div } \vec{Z} \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{A} = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \text{curl } \vec{\Gamma} \quad \text{---(2)}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{---(3)}$$

$$\vec{B} = \text{curl } \vec{A} = \mu \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{curl } \vec{A} \quad \text{---(4)}$$

وبالتعويض من (2)، (1) في (3):

$$\vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \text{curl } \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} \quad \text{---(5)}$$

ليشاً بالتعويض من (2) في (4):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{curl} \left[\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \text{curl } \vec{\Gamma} \right] = \frac{\epsilon}{c} \text{curl} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \text{curl } \text{curl } \vec{\Gamma} \quad \text{---(6)}$$

المعادلتان (6)، (5) يعطيان الحل العام لمعادلات ماكسويل (أي \vec{E}, \vec{H}) بدلالة المتجهين $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ في وجود وسط.

في حالة الفراغ: $\epsilon = 1, \mu = 1$

$$\frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} = \dot{\vec{\Gamma}} \quad , \quad \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \dot{\vec{Z}} \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{\Gamma}}$$

$$\text{curl } \text{curl } \vec{Z} = \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z} \quad \text{وحيث أن:}$$

$$\therefore \vec{E} = \text{curl } \text{curl } \vec{Z} - \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{\Gamma}} \quad \text{---(7)}$$

ليشاً: من المعادلة (6):

$$\vec{H} = \text{curl } \text{curl } \vec{\Gamma} + \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{---(8)}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): في المثال رقم (١) أدرس الحالتين الخاصتين:

$$\vec{Z} = 0 \quad \text{(ب) عندما} \quad , \quad \vec{\Gamma} = 0 \quad \text{(أ) عندما}$$

الحل: الحالة الأولى: عندما $\vec{\Gamma} = 0$

نحصل على ما يعرف بالحل من النوع الكهربى (Solution of electric Type)

حيث $\vec{M} = 0$ (متجه التمغنط)

$$\therefore \phi = -\text{div } \vec{Z} \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{A} = \frac{\epsilon\mu}{c} \dot{\vec{Z}} \quad \text{---(2)}$$

أيضاً: المعادلة التي يحققها المتجه \vec{Z} هي:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{4\epsilon}{\epsilon} \vec{P} \quad \text{---(3)}$$

بالتعويض في المعادلة

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ومن (2), (1) واستخدام (3) نحصل على:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad div } \vec{Z} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} \\ &= \text{grad div } \vec{Z} - [\nabla^2 \vec{Z} + \frac{4\pi}{\epsilon} \vec{P}] = \text{curl curl } \vec{Z} - \frac{4\pi}{\epsilon} \vec{P} \quad \text{---(4)} \end{aligned}$$

حيث \vec{P} هو متجه الإستقطاب (الكهربى).

أيضاً بالتعويض في المعادلة:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{curl } \vec{A}$$

ومن (2):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{curl} \left[\frac{\epsilon\mu}{c} \dot{\vec{Z}} \right] = \frac{\epsilon}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{---(5)}$$

في حالة الفراغ: $\epsilon = 1, \vec{P} = 0$ وتؤول (5), (4) إلى:

$$\boxed{\vec{E} = \text{curl curl } \vec{Z}} \quad , \quad \boxed{\vec{H} = \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}}}$$

ملحوظة: هاتان المعادلتان هما حالة خاصة من (8)، (7) في مثال (1) عندما $\Gamma = 0$ (الحل الكهربى).

الحالة الثانية: $\vec{Z} = 0$: نحصل على ما يعرف بالحل من النوع المغنطيسي (Solution of magnetic type)

في هذه الحالة: $\vec{P} = 0$ (متجه الإستقطاب)

$$\therefore \phi = 0 \quad \text{--- (6)}$$

$$\vec{A} = \text{curl } \vec{\Gamma} \quad \text{--- (7)}$$

وتصبح العلاقتين الخاصتين بالمتجهين \vec{E}, \vec{H} بالصورة:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \text{curl } \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{\Gamma}} \quad \text{--- (8)}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{curl curl } \vec{\Gamma} \quad \text{--- (9)}$$

في حالة الفراغ: $\mu = 1$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{\Gamma}}} \quad , \quad \boxed{\vec{H} = \text{curl curl } \vec{\Gamma}}$$

مثال (3): إذا كانت الدالة الإتجاهية $\vec{Z}(x, y, z, t)$ تحقق معادلة دالمبيرت

$$\text{الموجبة } \nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{Z}} = 0 \text{ ، فأنثبت أنه يوجد حلان لمعادلات ماكسويل في}$$

الفراغ بأخذ:

$$(i) \quad \phi = -\text{div } \vec{Z} \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \dot{\vec{Z}}$$

$$(ii) \quad \phi = 0 \quad , \quad \vec{A} = \text{curl } \vec{Z}$$

وأن المجالين \vec{E}, \vec{H} المناظرين لهذين الحلين يعطيان بالعلاقات:

$$(i) \quad \vec{E} = \text{curl curl } \vec{Z} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}}$$

$$(ii) \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad , \quad \vec{H} = \text{curl curl } \vec{Z}$$

الحل: هذا المثال على متجه هرتز الكهربى $\vec{Z}(x, y, z, t) = \vec{Z}$

$$\phi = -\text{div } \vec{Z}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \dot{\vec{Z}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \quad \text{بأخذ الحالة الأولى:}$$

فالإثبات أن هاتين الكميتين تمثلان حلاً لمعادلة ماكسويل نتبع الآتى:

(i) نثبت أن \vec{A}, ϕ يحققان شرط لورنتز

$$\phi = -\text{div } \vec{Z} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\text{div } \dot{\vec{Z}}$$

$$\therefore \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{c} \text{div } \dot{\vec{Z}} \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \dot{\vec{Z}} \rightarrow \text{div } \vec{A} = \frac{1}{c} \text{div } \dot{\vec{Z}} \quad \text{---(2)}$$

من (1), (2) يتضح أن:

$$\boxed{\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$$

وهو شرط لورنتز.

(ii) نوجد \vec{E}, \vec{H} بدلالة \vec{Z}

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= -\text{grad } (-\text{div } \vec{Z}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \right)$$

$$= \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}$$

$$= \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{Z}}$$

$$\text{ولكن: } \nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{Z}} = 0 \quad \text{[معادلة دالمبيرت للمتجه } \vec{Z}\text{]}$$

$$\therefore \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{Z}} = \nabla^2 \vec{Z}$$

$$\therefore \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z} = \text{curl } \text{curl } \vec{Z} \quad \text{---(3)}$$

ايضاً:

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} = \text{curl} \left(\frac{1}{c} \dot{\vec{Z}} \right) = \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{--- (4)}$$

(iii) نثبت أن \vec{E} , \vec{H} (المعادلتين (4), (3)) تحققان معادلتى ماكسويل الثالثة والرابعة وبذلك تكون قد أثبتنا أنهما يحققان معادلات ماكسويل.

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{المعادلة الثالثة:}$$

من (3):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{curl } \text{curl } \vec{Z} = \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z} \\ &= \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{Z}} \end{aligned}$$

بأخذ $\text{curl } \text{grad } \lambda = 0$ الطرفين وإعتبار أن

$$\therefore \text{curl } \vec{E} = 0 - \frac{1}{c^2} \text{curl } \ddot{\vec{Z}} = -\frac{1}{c^2} \text{curl } \ddot{\vec{Z}} \quad \text{--- (5)}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{ومن (4):}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{curl } \dot{\vec{Z}} = \frac{1}{c} \text{curl } \frac{\partial \dot{\vec{Z}}}{\partial t} = \frac{1}{c} \text{curl } \ddot{\vec{Z}} \quad \text{--- (6)}$$

من (5), (6) نجد أن:

$$\boxed{\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

المعادلة الرابعة:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \text{curl } \text{curl } \vec{Z} \rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{curl } \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{فمن (3):}$$

$$\therefore \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \text{curl } \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{--- (7)}$$

ومن (4):

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \rightarrow \text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \text{curl curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{--- (8)}$$

من (7), (8) نجد أن:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

للحالة الثانية: بأخذ $\vec{A} = \text{curl } \vec{Z}$, $\phi = 0$,

نثبت أولاً أن هاتين العلاقتين تحققان شرط لورنتز:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{div curl } \vec{Z} + 0 = 0 + 0 = 0$$

ثم نوجد \vec{E}, \vec{H} :

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \vec{Z}) = -\frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{--- (9)}$$

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} = \text{curl curl } \vec{Z} \quad \text{--- (10)}$$

ولإثبات أن \vec{E}, \vec{H} للمعطيان بالعلاقتين (9), (10) تحققان معادلتى ماكسويل

لثلاثة والرابعة:

من (9), (10):

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \text{curl curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{--- (11)}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{curl curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{--- (12)}$$

من (11), (12) نجد أن:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

وهي المعادلة الثالثة.

أيضاً: من (10):

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \text{curl cur } \vec{Z} = \text{grad div } \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z} \\ &= \text{grad div } \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{curl } \vec{H} &= \text{curl}(\text{grad div } \vec{Z}) - \frac{1}{c^2} \text{curl} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} \\ &= 0 - \frac{1}{c^2} \text{curl } \ddot{\vec{Z}} = -\frac{1}{c^2} \text{curl } \ddot{\vec{Z}}\end{aligned}\quad \text{---(13)}$$

ومن (9):

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \text{curl } \ddot{\vec{Z}}\quad \text{---(14)}$$

من (13), (14) نجد أن:

$$\boxed{\text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

وهي المعادلة الرابعة. وهو المطلوب.

مثال (4): إذا كان متجه هيرتز الكهربائي \vec{Z} في حالة موصل منتظم خال من الشحنات الحرة ومعامل توصيلة σ ، يحقق المعادلة:

$$\nabla^2 \vec{Z} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{Z}}$$

فأثبت أن الجهدين الكهرومغناطيسين \vec{A}, ϕ المعطيان بالعلاقتين:

$$\phi = -\text{div } \vec{Z}, \quad \vec{A} = \frac{\epsilon \mu}{c} \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \vec{Z}$$

بحققان معادلات ماكسويل للموصل المذكور.

وأن المجالين الكهربائي والمغناطيسي المناظرين يعطيان بدلالة \vec{Z} بالعلاقتين:

$$\vec{E} = \text{curl cur } \vec{Z}, \quad \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{curl } \vec{Z}$$

الحل: يمكن حل هذا المثال بالخطوات الآتية:

(أ) نثبت أن \vec{A}, ϕ المعطاه تحقق شرط لورنتز.

(ب) نوجد \vec{E}, \vec{H} المناظرين للجهدين \vec{A}, ϕ بدلالة \vec{Z} .

(ج) نثبت أن \vec{E}, \vec{H} الناتجين يحققان على الأقل معادلتين من معادلات ماكسويل وليكونا المعادلتين الثالثة والرابعة.

أولاً: إثبات أن \vec{A}, ϕ يحققان شرط لورنتز للموصل المذكور وصورته:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \phi = 0$$

وهي الصورة العامة لشرط لورنتز.

فحيث أن:

$$\vec{A} = \frac{\epsilon\mu}{c} \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \vec{Z} \quad \text{___(1)}$$

$$\phi = -\text{div } \vec{Z} \quad \text{___(2)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{div } \vec{A} &= \frac{\epsilon\mu}{c} \text{div } \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \text{div } \vec{Z} \\ &= -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} [-\text{div } \vec{Z}] - \frac{4\pi\mu\sigma}{c} [-\text{div } \vec{Z}] \\ &= -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \phi \end{aligned}$$

$$\therefore \text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \phi = 0$$

وهو شرط لورنتز في صورته العامة.

ثانياً: لإيجاد \vec{E}, \vec{H} بدلالة \vec{Z} :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\text{grad}(-\text{div } \vec{Z}) - \frac{1}{c} \left[\frac{\epsilon\mu}{c} \ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \dot{\vec{Z}} \right] \\ &= \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{Z}} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{Z}} \quad \text{___(3)} \end{aligned}$$

$$\text{curl } \text{curl } \vec{Z} = \text{grad } \text{div } \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z} \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore \text{grad div } \vec{Z} = \text{curl curl } \vec{Z} + \nabla^2 \vec{Z}$$

$$= \text{curl curl } \vec{Z} + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{Z}}$$

وتصبح (3):

$$\vec{E} = \text{curl curl } \vec{Z} + \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{Z}} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{Z}} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{Z}}$$

$$= \text{curl curl } \vec{Z} \quad \text{--- (4)}$$

أيضاً: حيث أن: $\vec{B} = \text{curl } \vec{A} = \mu \vec{H}$ فتكون معادلة \vec{H} بالصورة:

$$\therefore \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{curl } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \text{curl} \left[\frac{\epsilon\mu}{c} \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \vec{Z} \right]$$

$$= \frac{\epsilon}{c} \text{curl } \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{curl } \vec{Z} \quad \text{--- (5)}$$

ثالثاً: إثبات أن (5)، (4) تحققان معادلتَي ماكسويل الثالثة والرابعة في حالة

الموصل غير المشحون:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{j}_c = \sigma \vec{E} \quad \text{حيث:}$$

من (4):

$$\vec{E} = \text{curl curl } \vec{Z} = \text{grad div } \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z}$$

$$= \text{grad div } \vec{Z} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{Z}} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{Z}}$$

وبأخذ $\text{curl grad } \lambda = 0$ وإعتبار أن

$$\therefore \text{curl } \vec{E} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \text{curl } \ddot{\vec{Z}} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \text{curl } \dot{\vec{Z}} \quad \text{--- (6)}$$

ومن (5):

$$\therefore \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \text{curl} \ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{curl} \dot{\vec{Z}} \quad \text{---(7)}$$

من (7)، (6) نجد أن:

$$\text{curl} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{---(8)}$$

حيث $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ، وهي معادلة ماكسويل الثالثة.

أيضاً: من (5) بأخذ curl للطرفين:

$$\text{curl} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \text{curl} \text{curl} \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{curl} \text{curl} \vec{Z}$$

ومن (4): $\vec{E} = \text{curl} \text{curl} \dot{\vec{Z}} \leftarrow \vec{E} = \text{curl} \text{curl} \vec{Z}$

$$\begin{aligned} \therefore \text{curl} \vec{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \\ &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c \end{aligned} \quad \text{---(9)}$$

حيث

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{j}_c = \sigma \vec{E}$$

وهي معادلة ماكسويل الرابعة، وهو المطلوب.

[7] طاقة المجال الكهرومغناطيسي Energy of Electromagnetic Field

يمكن إعتبار المجال الكهرومغناطيسي كمنظومة ميكانيكية (مثل الأجسام) تتحرك في الفراغ أو في الوسط بقوانين حركة معينة - ويكون لها (مثل المنظومة الميكانيكية) كميات خاصة بها تدل على حركتها مثل: الطاقة، كمية الحركة وغيرها. ونبدأ هنا بدراسة طاقة المجال الكهرومغناطيسي.

تؤثر على الشحنات المتحركة (الأجسام المشحونة المتحركة) في مجال كهرومغناطيسي قوة هي قوة المجال، ويستلزم ذلك وجود شغل مبذول على تلك الشحنات بواسطة تلك القوة، ولحساب الشغل المبذول أي معادل التغير في الطاقة (قاعدة الشغل والطاقة).

القوة المؤثرة على شحنة مقدارها q هي: $\vec{F} = q\vec{E}$ ، وإذا كانت الشحنة متحركة بسرعة $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ، وكانت الشحنة q ترتبط بكثافة الشحنة

$$q = \int \rho dV \text{ بالعلاقة:}$$

فإن الشغل المبذول بواسطة القوة في التحرك لمسافة $d\vec{r}$

$$du = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (q\vec{E}) \cdot d\vec{r}$$

ويكون الشغل المبذول في وحدة الزمن:

$$\frac{du}{dt} = (q\vec{E}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \int (\rho \vec{E} \cdot \vec{v}) dV$$

ولكن: كثافة التيار الناتج عن حركة الشحنات:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \int (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV \quad \text{---(1)}$$

وباعتبار الشحنات متحركة في وسط مادي، ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{curl } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

بالتعويض في (1):

$$\frac{du}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \text{curl } \vec{H}) dV - \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) dV \quad \text{---(2)}$$

ومن المتجهات:

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{curl } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{curl } \vec{H}$$

$$\therefore \vec{E} \cdot \text{curl } \vec{H} = \vec{H} \cdot \text{curl } \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

بالتعويض في (2):

$$\frac{du}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{H} \cdot \text{curl } \vec{E}) dV - \frac{c}{4\pi} \int \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV - \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) dV$$

ومن معادلة ماكسويل الثالثة:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{du}{dt} &= \frac{c}{4\pi} \int \vec{H} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV - \frac{c}{4\pi} \int \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV - \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV - \frac{c}{4\pi} \int \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV \end{aligned}$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (E^2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) \end{aligned}$$

وبالمثل:

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) \\ \therefore \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV - \frac{c}{4\pi} \int \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV \end{aligned}$$

وبأخذ

$$\frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = W$$

$$\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{y}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = -\int \frac{\partial W}{\partial t} dV - \int \text{div } \vec{y} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int W dV - \int \vec{y} \cdot d\vec{s} \quad \text{--- (3)}$$

(حيث طبقنا نظرية التباعد لجاوس: $\int \vec{y} \cdot d\vec{s} = \int \text{div } \vec{y} dV$)

وبكتابة $\epsilon = \int W dV$ (والتي تمثل طاقة المجال الكهرومغناطيسي).

$$\therefore \frac{du}{dt} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \int \vec{y} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \int \vec{y} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dt} (u + \epsilon) = -\int \vec{y} \cdot d\vec{s}} \quad \text{--- (4)}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة بوينتنج (Poynting Equation) للطاقة.

مناقشة معادلة بوينتج للطاقة:

وصلنا إلى معادلة بوينتج وصورتها:

$$\therefore \frac{d}{dt}(u + \varepsilon) = - \int \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} \quad \text{--- (1)}$$

حيث u هي طاقة الجسيمات المشحونة المتحركة في المجال الكهرومغناطيسي.

والكمية $\varepsilon = \int W dV$ تمثل طاقة المجال الكهرومغناطيسي نفسه.

أما الكمية W فتمثل كثافة الطاقة (Energy density) أي الطاقة المختزنة في وحدة الحجم، حيث:

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad \text{(في حالة الوسط)}$$

في حالة الفراغ: $\vec{D} = \vec{E}$, $\vec{B} = \vec{H}$

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$$

أما المتجه $\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H})$ فيسمى متجه بوينتج (Poynting Vector)،

وفي حالة استخدام نظام MKS للوحدات فإن:

$$\vec{\gamma} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

معادلة بوينتج (المعادلة (1)) تمثل معادلة الطاقة (Equation of Energy) في علم الإلكتروديناميكا، ويمكن كتابتها بالصورة:

$$-\frac{dE}{dt} = \int \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{\gamma}) \quad \text{--- (2)}$$

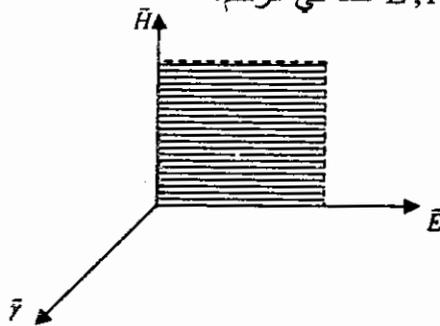
حيث $E = u + \varepsilon$ هي الطاقة الكلية وتعني هذه المعادلة أن:

معدل التناقص في الطاقة الكلية (لشحنات والمجال) يساوي فيض (Flux) المتجه $\vec{\gamma}$ عبر السطح $d\vec{s}$.

المعنى الطبيعي للمتجه $\vec{\gamma}$:

من العلاقة (2) يتضح أن: $\vec{\gamma}$ يمثل معدل التناقص في الطاقة عبر وحدة المساحة ولذلك يعرف $\vec{\gamma}$ أحياناً بفيض الطاقة (Energy Flux).

ومن العلاقة: $\vec{\gamma} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ يتضح أن: $\vec{\gamma}$ يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي على المتجهين \vec{E}, \vec{H} كما في الرسم.

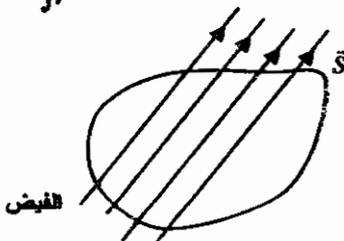


قانون ثبوت الطاقة في الإلكترونيديناميكا:

Law of Conservation of Energy

يمثل الفيض بعدد خطوط القوى التي تعبر سطح ما، فإذا كان السطح ممتداً امتداداً كبيراً (لانهاثياً) فإن الفيض يكون منعماً

$$\therefore \int \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} = 0$$



وتصبح معادلة الطاقة:

$$\frac{d}{dt}(u + \varepsilon) = 0$$

$$\therefore \boxed{u + \varepsilon = \text{const.}}$$

أي أن مجموع طاقتي الشحنات المتحركة وللمجال (أي الطاقة الكلية) يكون ثابتاً (وهو قانون ثبوت الطاقة في علم الإلكترونيديناميكا).

مثال:

(أ) أثبت أنه في حالة المجالات شبه المستقرة (quasi-stationary Fields) الناتجة عن مرور تيار كهربائي ثابت كثافته \vec{j} في دائرة كهربائية فإن الجهد الإتجاهي \vec{A} للمجال المغنطيسي الناتج عن مرور التيار يعطى بالعلاقة:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}$$

(ب) أثبت أن الطاقة الكلية للمجال الناتج عن التيار \vec{j} يساوي مجموع جزئين:

$$\epsilon_e = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV \quad \text{أحدهما كهربائي:}$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{2c} \int (\vec{j} \cdot \vec{A}) dV \quad \text{والثاني مغناطيسي:}$$

الحل:

الجزء الأول: تعرف المجالات شبه المستقرة بالعلاقة: $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

حيث ϕ تمثل الجهد القياسي (الإلكتروستاتيكي) وتوجد لدينا حالتان:

(i) حالة وجود شحنات حرة: $\phi = \text{const.}$

(ii) حالة عدم وجود شحنات: $\phi = 0$

ويؤول شرط لورنتز إلى:

$$\boxed{\text{div } \vec{A} = 0}$$

ولإثبات العلاقة التي يحققها الإتجاهي \vec{A} :

حيث أن: $\vec{B} = \text{curl } \vec{A}$

$$\therefore \text{curl } \vec{B} = \text{curl curl } \vec{A}$$

$$\therefore \mu \text{curl } \vec{H} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} \quad \text{--- (1)} \quad \left| \vec{B} = \mu \vec{H} \right.$$

ومن العلاقة الرابعة لماكسويل للمجالات شبه المستقرة وفي حالة وجود شحنات حرة.

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\mu \left[\frac{4\pi}{c} \vec{j} \right] = -\nabla^2 \vec{A} \quad \text{بالتعويض في (1):}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}}$$

وهو المطلوب.

الجزء الثاني: إيجاد الطاقة الكلية للمجال الناتج عن التيار \vec{j} :

حيث أن

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{8\pi} \int [\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}] dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV = \varepsilon_e + \varepsilon_m\end{aligned}$$

(i) الجزء الكهربى من الطاقة:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV$$

ولكن: $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ (المجال الكهرىبى الإستاتيكى)

$$\therefore \varepsilon_e = -\frac{1}{8\pi} \int [(\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{D}] dV \quad \text{---(2)}$$

ومن المتجهات:

$$\text{div}(\lambda \vec{A}) = \lambda \text{div} \vec{A} + (\text{grad } \lambda) \cdot \vec{A}$$

$$\therefore (\text{grad } \lambda) \cdot \vec{A} = \text{div}(\lambda \vec{A}) - \lambda \text{div} \vec{A}$$

$$\therefore (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{D} = \text{div}(\phi \vec{D}) - \phi \text{div} \vec{D} \quad \left| \lambda = \phi, \vec{A} = \vec{D} \right.$$

بالتعويض فى (2):

$$\therefore \varepsilon_e = -\frac{1}{8\pi} \int [\text{div}(\phi \vec{D}) - \phi \text{div} \vec{D}] dV \quad \text{---(3)}$$

ومن نظرية جاوس فى للمتجهات:

$$\int \text{div} \vec{A} dV = \int \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\therefore \int \text{div}(\phi \vec{D}) dV = \int (\phi \vec{D}) \cdot d\vec{s} = 0$$

فى حالة أمتداد السطح أمتداداً كبيراً (لا نهائياً).

وتؤول (3) إلى:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{8\pi} \int \phi \text{div} \vec{\nabla} dV$$

ومن معادلة ماكسويل الأولى:

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\therefore \varepsilon_e = \frac{1}{8\pi} \int \phi [4\pi \rho] dV = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV \quad \text{---(4)}$$

(ii) الجزء المغنطيسي من الطاقة:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \cdot \text{curl } \vec{A}) dV \quad \text{---(5)}$$

ومن المتجهات:

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{curl } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{H}$$

$$\therefore \vec{H} \cdot \text{curl } \vec{A} = \vec{A} \cdot \text{curl } \vec{H} + \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H})$$

بالتعويض في (5):

$$\therefore \varepsilon_m = \frac{1}{8\pi} \int [\vec{A} \cdot \text{curl } \vec{H} + \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H})] dV$$

ومن نظرية جاوس في المتجهات: $\int \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) dV = \int (\vec{A} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{s} = 0$ في حالة امتداد السطح امتداداً كبيراً (لا نهائياً).

$$\therefore \varepsilon_m = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{A} \cdot \text{curl } \vec{H}) dV$$

ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\therefore \varepsilon_m = \frac{1}{8\pi} \int [\vec{A} \cdot (\frac{4\pi}{c} \vec{j})] dV = \frac{1}{2c} \int (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV \quad \text{---(6)}$$

وهو المطلوب.

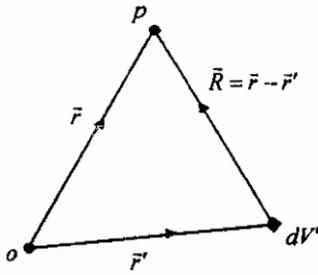
قانون بيو - سافار Biot - Savart Law

هذا القانون يعين شدة المجال المغنطيسي الناتج عن مرور تيار كهربائي في دائرة ما.

إسنتاج القانون: من المثال السابق: فإن الجهد الإتجاهي \vec{A} للمجال المغنطيسي الناتج عن مرور تيار في دائرة يحقق العلاقة:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} \quad \text{---(1)}$$

وهي معادلة تفاضلية الحل العام لها يعطينا قيمة المتجه \vec{A} عند نقطة معينة p تبعد مسافة r عن نقطة الأصل o .



فبفرض أن لدينا كهربية موجودة عند
عنصر حجم dV' يبعد مسافة \vec{r}' عن o ،
فيكون التيار المار في الدائرة هو: $\vec{j}(\vec{r}')$

ويأخذ الجهد الإتجاهي \vec{A} الصورة الآتية:

$$\vec{A}_p(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV'$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

هو بعد الدائرة الكهربية (عند عنصر الحجم dV' عن نقطة p .
وحيث أن المجال المغنطيسي \vec{H} يعطي من:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{curl } \vec{A} = \frac{1}{c} \int \text{curl} \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV' \quad (2)$$

$$\text{curl}(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{curl } \vec{a} + (\text{grad } \lambda) \wedge \vec{a} \quad \text{ومن المتجهات:}$$

$$\therefore \text{curl} \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \left(\frac{1}{R} \right) \text{curl } \vec{j} + \text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \vec{j} \quad \left| \lambda = \frac{1}{R}, \vec{a} = \vec{j} \right.$$

وفي حالة الحركة شبه المستقرة للشحنات فإن التيار \vec{j} الناتج عن حركة الشحنات
يكون ثابتاً.

$$\therefore \text{curl } \vec{j} = 0$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad \text{ومن المتجهات:}$$

$$\therefore \text{curl} \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \vec{j} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \wedge \vec{j} = \frac{\vec{j} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2):

$$\therefore \vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} \wedge \vec{R}}{R^3} dV' \quad (4)$$

وهو قانون بيو - سافار الذي يعطي شدة المجال المغنطيسي الناشئ عن تيار
كهربي مستقر (Steady Current).

مناقشة قانون بيو - سافار:

نعتبر دائرة كهربية عند عنصر الحجم dV' ونأخذ عنصر طول $d\vec{\ell}$ من الدائرة وباعتبار أن \vec{R} هو متجه موضع النقطة p (المطلوب إيجاد شدة المجال عندها) بالنسبة لهذا العنصر، فإذا مر تيار كهربى ثابت الشدة (I) حيث $I = \vec{j} \cdot \vec{s}$ (حيث \vec{s} هي مسافة مقطع السلك)، في الدائرة فإن:

$$\vec{j} dV' = I d\vec{\ell} \quad \text{---(5)}$$

ويصبح قانون بيو - سافار (4) بالصورة:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{(I d\vec{\ell}) \wedge \vec{R}}{R^3} = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad \text{---(6)}$$

والقانون بهذه الصورة يكون سهلاً في التطبيق لإيجاد شدة المجال المغنطيسي الناتج عن مرور تيار في دائرة كهربية.

في النظام الدولي للوحدات: يأخذ القانون (6) الصورة:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad \text{---(7)}$$

ملحوظة (1): إثبات العلاقة $\vec{j} dV' = I d\vec{\ell}$

حيث أن $\vec{j} = \rho \vec{v}$ حيث ρ الكثافة الحجمية للشحنة المتحركة ($q = \rho dV'$) وهنا q الشحنة الكلية، \vec{v} هي السرعة التي تتحرك بها الشحنة.

أيضاً: فإن التيار الكلي:

$$I = \vec{j} \cdot \vec{s}$$

$$\therefore \vec{j} dV' = (\rho \vec{v})(\vec{s} \cdot d\vec{\ell}) = \rho(\vec{v} \cdot \vec{s}) d\vec{\ell} = (\vec{j} \cdot \vec{s}) d\vec{\ell} = I d\vec{\ell}$$

$$[dV' = \vec{S} \cdot d\vec{\ell} \leftarrow \text{الحجم} = \text{مساحة المقطع} \times \text{الطول}]$$

ملحوظة (2): إذا كانت q هي الشحنة الكلية فيمكن إثبات أن

$$\vec{j} \cdot \vec{v} = I d\vec{\ell}$$

$$q \vec{v} = (\rho dV') \vec{v} = \rho(\vec{s} \cdot d\vec{\ell}) \vec{v} = \rho(\vec{s} \cdot \vec{v}) d\vec{\ell} = (\vec{j} \cdot \vec{s}) d\vec{\ell} = I d\vec{\ell}$$

ويأخذ قانون بيو - سافار الصورة الآتية:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3} = \frac{q}{4\pi} \int \frac{\vec{v} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad \text{_____ (8)}$$

مثال: تطبيق على قانون بيو - سافار:

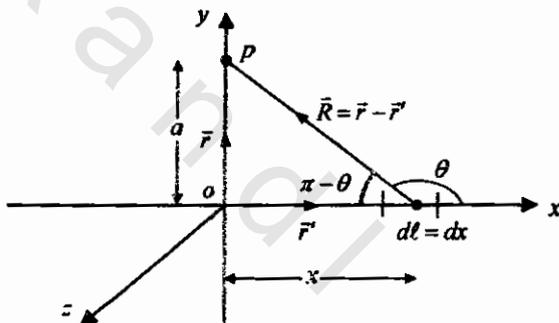
إستخدم قانون بيو - سافار لإيجاد شدة المجال المغنطيسي الناتج عن:

أولاً: سلك طويل يحمل تياراً كهربائياً ثابتاً شدته I .

ثانياً: سلك على شكل حلقة دائرية تحمل تياراً كهربائياً شدته I ، ومن ذلك أوجد شدة المجال عند مركز الحلقة.

الحل:

أولاً: شدة المجال المغنطيسي الناتج عن سلك طويل يحمل تياراً شدته I :



نفرض لدينا سلكاً طويلاً موضوعاً على محور x ويمر به تيار كهربائي شدته I ، والمطلوب إيجاد شدة المجال المغنطيسي الناتج عن هذا التيار عند نقطة p الواقعة على محور y العمودي على السلك والتي تبعد مسافة a عند o (نقطة الأصل).
نأخذ عنصر من السلك طوله $dl = dx$ يبعد مسافة x عن o ومسافة R من p .

في صورة متجهات:

$$\vec{r}' = x \hat{i} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{r} = a \hat{j} \quad \text{_____ (2)}$$

$$d\vec{\ell} = dx \hat{i} \quad \text{_____ (3)}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = a \hat{j} - x \hat{i} = -x \hat{i} + a \hat{j} \quad \text{---(4)}$$

$$\therefore d\vec{\ell} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & a & 0 \end{vmatrix} = (a dx) \hat{k} \quad \text{---(5)}$$

ومن هندسة الشكل:

$$\sin(\pi - \theta) = \frac{a}{R} = \sin \theta$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{a}{\sin \theta} = a \operatorname{cosec} \theta}$$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{a}{x} = -\tan \theta \quad \text{أيضاً:}$$

$$\therefore x = -\frac{a}{\tan \theta} = -a \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -a \left[\frac{\sin \theta (-\sin \theta) - \cos \theta (\cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right] \\ &= a \left[\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] = \frac{a}{\sin^2 \theta} = a \operatorname{cosec}^2 \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{dx = a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta} \quad \text{---(6)}$$

ومن قانون بيو-سافار:

$$dx = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3} = \frac{I}{c} \int \frac{(a dx) \hat{k}}{(a \operatorname{cosec} \theta)^3} = \frac{I}{c} \int \frac{a [a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta] \hat{k}}{a^3 \operatorname{cosec}^3 \theta}$$

$$= \frac{I}{ca} \int \frac{d\theta}{\operatorname{cosec} \theta} \hat{k} = \frac{I}{ca} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \hat{k}$$

$$= \frac{I}{ca} [-\cos \theta]_0^\pi \hat{k} = \frac{I}{ca} [2] \hat{k} = \frac{2I}{ca} \hat{k}$$

$$\therefore \boxed{\vec{H} = \frac{2I}{ca} \hat{k}} \quad \text{---(7)}$$

أي أن المجال المغنطيسي الناتج عن سلك طويل يحمي تيار شدته I موضوع في إتجاه محور x عند نقطة p التي تبعد مسافة a عن السلك تكون قيمته $\left(\frac{2I}{ca}\right)$ وإتجاهه هو إتجاه محور z العمودي على x .

ملحوظة: في النظام الدولي للوحدات يكون قانون بيوسافار:

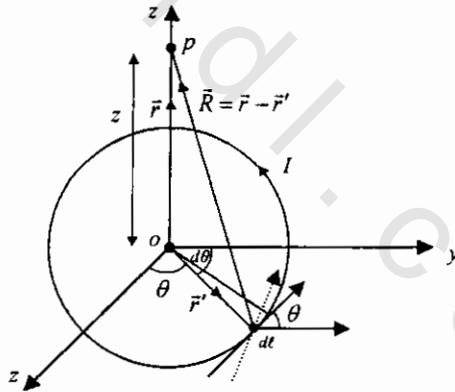
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3}$$

وتصبح شدة المجال للسلك المذكور:

$$\vec{H} = \frac{2I}{4\pi a} \hat{k} = \frac{I}{4\pi a} \hat{k}$$

ثانياً: شدة المجال المغنطيسي الناتج عن سلك على شكل حلقة دائرية (سلك دائري) تحمل تياراً وذلك عند نقطة تقع على امتداد محوره:

نعتبر حلقة دائرية نصف قطرها a موضوعة في المستوى (xy) يمر بها تيار ثابت شدته I .



نقسم الحلقة إلى عناصر طول وليكن أحدها هو العنصر dl وهو مماس للحلقة (أي عمودياً على a)

$$\text{حيث: } dl = a d\theta$$

ويبعد هذا العنصر مسافة $R = |\vec{R}|$ عن نقطة p التي تقع على امتداد محور الحلقة (محور z).

في صورة متجهات:

$$\vec{r} = z \hat{k} \quad \text{---(1)}$$

حيث z هي بعد p عن مركز الحلقة.

$$\vec{r}' = \vec{a} = a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j} \quad \text{---(2)}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' = (z \hat{k}) - (a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j}) \\ &= -a \cos \theta \hat{i} - a \sin \theta \hat{j} + z \hat{k} \end{aligned} \quad \text{---(3)}$$

أيضاً: فإن

$$R = \sqrt{a^2 + z^2} = (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{---(4)}$$

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= -d\ell \sin \theta \hat{i} + d\ell \cos \theta \hat{j} \\ &= -a d\theta \sin \theta \hat{i} + a d\theta \cos \theta \hat{j} \end{aligned} \quad \text{---(5)}$$

ومن قانون بيو - سايفار: فإن المجال عند نقطة p :

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3} \quad \text{---(6)}$$

حيث:

$$R^3 = (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{---(7)}$$

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} \wedge \vec{R} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin \theta d\theta & a \cos \theta d\theta & 0 \\ -a \cos \theta & -a \sin \theta & z \end{vmatrix} \\ &= (az \cos \theta d\theta) \hat{i} + (az \sin \theta d\theta) \hat{j} + (a^2 \sin^2 \theta d\theta + a^2 \cos^2 \theta d\theta) \hat{k} \\ &= (az \cos \theta \hat{i} + az \sin \theta \hat{j} + a^2 \hat{k}) d\theta \end{aligned} \quad \text{---(8)}$$

بالتعويض من (7), (8) في (6):

$$\therefore \vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j} + a^2 \hat{k}}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

تكامل الحدين الأول والثاني يساوي صفرأ.

$$[\cos 0 = 1, \cos 2\pi = 1, \sin 0 = 0, \sin 2\pi = 0]$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{H} &= \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta \hat{k} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{k} \\ &= \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2\pi) \hat{k} = \frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \end{aligned} \quad \text{---(9)}$$

وهي شدة المجال الناتج عن مرور التيار I في الحلقة ذات النصف قطر a عند نقطة p التي تبعد مسافة z عن مركز الحلقة، وإتجاه المجال هو إتجاه محور z (\hat{k}).

حالة خاصة: شدة المجال عند مركز الحلقة حيث: $z = 0$

$$\vec{H} = \frac{I}{2} \frac{a^2 \hat{k}}{(a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{2} \frac{a^2 \hat{k}}{a^3} = \frac{I}{2a} \hat{k} \quad \text{---(10)}$$

وهو المطلوب.

[٨] كمية حركة المجال الكهرومغناطيسي:

Momentum of Electromagnetic Field

يوصف المجال الكهرومغناطيسي كمنظومة ميكانيكية فيكون له كمية حركة

(مثل المنظومات الميكانيكية) ولحساب كمية حركة المجال نتبع الآتي:

إذا تحركت شحنة q بسرعة \vec{v} في مجال كهرومغناطيسي فتؤثر عليها قوتان:

(i) قوة كهربية: نتيجة المجال الكهربائي \vec{E} للشحنة، وتعطي بالعلاقة:

$$\vec{F}_{el} = q \vec{E} \quad \text{---(1)}$$

(ii) قوة مغناطيسية: نتيجة المجال المغناطيسي (\vec{H}) في حالة الفراغ أو \vec{B} في حالة

الوسط) الناتج عن حركة الشحنة، وتعطي بالعلاقة:

$$\vec{F}_{mg} = \frac{q}{c} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{---(2)}$$

(في حالة الوسط)

وتصبح القوة الكلية المؤثرة على الشحنة المتحركة هي:

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mg} = q[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})] \quad \text{---(3)}$$

وتعرف بقوة لورنتز (Lorentz Force).

وإذا كانت \vec{f} هي كثافة القوة (Force density)

$$\therefore \vec{F} = \int \vec{f} dV$$

وكثافة الشحنة ρ حيث: $q = \int \rho dV$ ، ونصبح العلاقة (3) [بين \vec{f} , ρ]

بالصورة:

$$\vec{f} = \rho[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})] \quad \text{---(4)}$$

وإذا كانت \vec{p} هي كمية الحركة أو الزخم (Momentum) للشحنة المتحركة فمن

قانون نيوتن الثاني:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \int \vec{f} dV$$

وباستخدام (4):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int \rho[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})] dV = \int [\rho \vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{j} \wedge \vec{B})] dV \quad \text{---(5)}$$

حيث: $\vec{j} = \rho \vec{v}$ كثافة التيار (Current density)

والآن: من معادلة ماكسويل الأولى (في الوسط):

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho \rightarrow \rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{D} \quad \text{---(6)}$$

ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{curl } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{---(7)}$$

بالتعويض من (7)، (6) في (5):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt} &= \int \frac{1}{4\pi} \bar{E} \operatorname{div} \bar{D} dV + \int \frac{1}{4\pi} (\operatorname{curl} \bar{H} \wedge \bar{B}) dV - \int \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \wedge \bar{B} \right) dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \bar{E} \operatorname{div} \bar{D} dV + \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{curl} \bar{H} \wedge \bar{B}) dV - \frac{1}{4\pi c} \int \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \wedge \bar{B} \right) dV \quad (8) \end{aligned}$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{D} \wedge \bar{B}) &= \bar{D} \wedge \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \wedge \bar{B} \\ \therefore \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \wedge \bar{B} &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{D} \wedge \bar{B}) - \bar{D} \wedge \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

ومن معادلة ماكسويل الثالثة:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -c \operatorname{curl} \bar{E} \\ \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \wedge \bar{B} &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{D} \wedge \bar{B}) + c (\bar{D} \wedge \operatorname{curl} \bar{E}) \quad \text{---(9)} \end{aligned}$$

بالتعويض من (9) في (8):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int \bar{E} \operatorname{div} \bar{D} dV + \frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{curl} \bar{H} \wedge \bar{B}) dV \\ &\quad - \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial}{\partial t} (\bar{D} \wedge \bar{B}) dV - \frac{1}{4\pi} \int \bar{D} \wedge \operatorname{curl} \bar{E} dV \\ &\quad \frac{1}{4\pi c} \int (\bar{D} \wedge \bar{B}) dV = \bar{P} \quad \text{وبأخذ الكمية} \end{aligned}$$

وإضافة إلى $\frac{1}{4\pi} \int \bar{H} \operatorname{div} \bar{B} dV$ (الذي يساوي صفراً)، وذلك بهدف التماثل في صورة المعادلة.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \int [\bar{E} \operatorname{div} \bar{D} + \bar{H} \operatorname{div} \bar{B}] dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int [\operatorname{curl} \bar{H} \wedge \bar{B} + \operatorname{curl} \bar{E} \wedge \bar{D}] dV \quad \text{---(10)} \end{aligned}$$

وبأخذ

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{curl} \vec{E} \wedge \vec{D} + \operatorname{curl} \vec{H} \wedge \vec{B}] \quad (11)$$

فإن (10) تصبح:

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \int \vec{G} dV \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\vec{p} + \vec{P}) = \int \vec{G} dV} \quad (12)$$

تسمى هذه العلاقة بمعادلة بوينتج الخاصة بكمية الحركة للمجال الكهرومغناطيسي.

مناقشة المعادلة (12):

تعطي المعادلة (12) معدل التغير الزمني لمجموع كميتين هما:

(i) كمية حركة الشحنة (\vec{p}) .

(ii) الكمية \vec{P} والتي يجب أن تكون من نفس نوع \vec{p} (أي كمية حركة)، ونظراً

لوجود الشحنة في مجال كهرومغناطيسي فإن \vec{P} يجب أن تمثل كمية حركة

المجال، حيث:

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int (\vec{D} \wedge \vec{B}) dV \quad (\text{للسوسط}).$$

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int (\vec{E} \wedge \vec{H}) dV \quad (\text{للفراغ}).$$

وحيث أن متجه بوينتج يعطي بالعلاقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H}) dV$$

$$\therefore \vec{P} = \frac{1}{c^2} \int \vec{\gamma} dV$$

وفي حالة النظام MKS للوحدات فإن:

$$\boxed{\vec{P} = \int \vec{\gamma} dV}$$

وهذا يعني أن المتجه $\vec{\gamma}$ يمثل كثافة كمية الحركة (Momentum density)

أي كمية الحركة للمجال في وحدة الحجم (ويمثل هذا المعنى الفيزيائي

لمتجه بوينتج).

Law of conservation of Momentum

من المعادلة (12):

$$\frac{d}{dt}(\bar{p} + \bar{P}) = \int \bar{G} dV$$

حيث \bar{G} تعطي بالمعادلة (11) ويمكن إثبات أنها تساوي تباعد ممتد يعرف بممتد الإجهاد لماكسويل ($g_{\alpha\beta}$ Maxwell Stress Tensor).

$$\therefore \boxed{\bar{G} = \text{div } g_{\alpha\beta}}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\bar{p} + \bar{P}) = \int \text{div } g_{\alpha\beta} dV \quad \text{--- (1)}$$

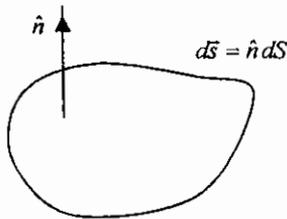
وباستخدام تعميم نظرية جاوس للمتجهات:

$$\int \text{div } g_{\alpha\beta} dV = \int (g_{\alpha\beta})_n dS \quad \text{--- (2)}$$

$$[\int \text{div } \bar{A} dV = \int \bar{A} \cdot d\vec{S} = \int \bar{A} \cdot \hat{n} dS = \int A_n dS]$$

حيث A_n هي المركبة العمودية لـ \bar{A}

$$A_n = \bar{A} \cdot \hat{n}$$



في المعادلة (2):

$(g_{\alpha\beta})_n$ تمثل المركبات العمودية للممتد $g_{\alpha\beta}$ على السطح dS .

وتصبح المعادلة (1) بالصورة:

$$\frac{d}{dt}(\bar{p} + \bar{P}) = \int (g_{\alpha\beta})_n dS$$

وفي حالة إمتداد السطح dS إمتداداً كبيراً فإن: $(g_{\alpha\beta})_n \rightarrow 0$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\bar{p} + \bar{P}) = 0 \rightarrow \boxed{\bar{p} + \bar{P} = \text{const.}}$$

وهو مبدأ ثبوت كمية الحركة في علم الإلكتروديناميكا.

ممتد الإجهاد الكهرومغناطيسي لماكسويل:

Maxwell's Electromagnetic stress tensor

من العلاقة (11) التي تعطي المتجه \vec{G} وفي حالة الفراغ:

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{curl} \vec{E}) \wedge \vec{E} + (\operatorname{curl} \vec{H}) \wedge \vec{H}]$$

وبحساب المركبة x للمتجه \vec{G} :

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{curl} \vec{E}) \wedge \vec{E} + (\operatorname{curl} \vec{H}) \wedge \vec{H}]_x \\ &= \frac{1}{4\pi} [E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + H_x \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) H_z - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) H_y \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} - H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} - H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right. \\ &\quad + \left\{ E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + H_x \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \right\} \\ &\quad + \left\{ E_x \frac{\partial E_z}{\partial z} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + H_x \frac{\partial H_z}{\partial z} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \{ E_x E_y + H_x H_y \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ E_x E_z + H_x H_z \} \right] \quad \text{_____ (1)} \end{aligned}$$

وبتعريف مركبات ممتد الإجهاد للمجال الكهرومغناطيسي بالعلاقة:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu) \quad \text{_____ (2)}$$

$$g_{\mu\mu} = \frac{1}{4\pi} [(E_\mu^2 + H_\mu^2) - \frac{1}{2} (E^2 + H^2)] \quad \text{_____ (3)}$$

وهذا يعني أن المركبات المختلفة لممتد الإجهاد الكهرومغناطيسي هي:

بإعطاء $\mu, \nu = x, y, z$

$$g_{xx} = \frac{1}{4\pi} [(E_x^2 + H_x^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)]$$

$$= \frac{1}{8\pi} [E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2] \quad \text{---(4)}$$

$$[E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2, H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2]$$

$$g_{yy} = \frac{1}{4\pi} [(E_y^2 + H_y^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)]$$

$$= \frac{1}{8\pi} [E_y^2 - E_x^2 - E_z^2 + H_y^2 - H_x^2 - H_z^2] \quad \text{---(5)}$$

$$g_{zz} = \frac{1}{4\pi} [(E_z^2 + H_z^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)]$$

$$= \frac{1}{8\pi} [E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 + H_z^2 - H_x^2 - H_y^2] \quad \text{---(6)}$$

$$g_{xy} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + H_x H_y) = g_{yx} \quad \text{---(7)}$$

$$g_{xz} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_z + H_x H_z) = g_{zx} \quad \text{---(8)}$$

$$g_{yz} = \frac{1}{4\pi} (E_y E_z + H_y H_z) = g_{zy} \quad \text{---(9)}$$

وبوضع هذه المركبات على شكل المصفوفة:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}$$

ويعرف بـ **ممتد الإجهاد الكهرومغناطيسي** لماكسويل (Mazwell's Stress Tensor)

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \text{ : (Symmetric Tensor)}$$

الصورة العامة للممتد $g_{\mu\nu}$: يمكن كتابة الممتد $g_{\mu\nu}$ بدلالة مركبات متجهي

المجال الكهربائي والمغناطيسي بالصورة الآتية:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (E^2 + H^2)] \quad \text{---(10)}$$

حيث:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

العلاقة (10) تجمع العلاقتين (2), (3):

في حالة الوسط: يأخذ الممتد $g_{\mu\nu}$ الصورة الآتية:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [E_\mu D_\nu + H_\mu B_\nu - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})] \quad \text{--- (11)}$$

مثال: أثبت أن العلاقة بين المتجه \vec{G} المعطى بالعلاقة:

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \operatorname{div} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{curl} \vec{E}) \wedge \vec{E} + (\operatorname{curl} \vec{H}) \wedge \vec{H}]$$

وممتد الإجهاد لماكسويل $g_{\alpha\beta}$ هي: $\vec{G} = \operatorname{div} g_{\alpha\beta}$ ، وأن:

$$\int \vec{G} dV = \int (g_{\alpha\beta})_n dS$$

الحل: بحساب المركبة G_x للمتجه \vec{G} نجد أن:

$$G_x = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2\} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \{E_x E_y + H_x H_y\} + \frac{\partial}{\partial z} \{E_x E_z + H_x H_z\} \right]$$

وباستخدام تعريفات المركبات $g_{\alpha\beta}$ لممتد الإجهاد لماكسويل [المعادلات من (4) إلى (9) في الفقرة السابقة] نحصل على:

$$G_x = \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\sigma} \quad | \alpha = 1$$

حيث: $g_{\alpha\sigma} = g_{xx}, g_{xy}, g_{yx}; x_\sigma = x_1, x_2, x_3 = x, y, z; \sigma = 1, 2, 3$

وبالمثل فإن المركبتين G_y, G_z يمكن كتابتهما بالصورة:

$$G_y = \frac{\partial g_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\sigma} \quad | \beta = 2$$

$$G_z = \frac{\partial g_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial g_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x_\sigma} \quad | \gamma = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{G} &= G_x \hat{i} + G_y \hat{j} + G_z \hat{k} = \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\sigma} \hat{i} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\sigma} \hat{j} + \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x_\sigma} \hat{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\sigma} [g_{\alpha\sigma} \hat{i} + g_{\beta\sigma} \hat{j} + g_{\gamma\sigma} \hat{k}] = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} [g_{\mu\sigma}] = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} \\ & \quad | \mu = \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\vec{G} = \text{div } g_{\mu\sigma}} \leftarrow \text{div } g_{\mu\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} : g_{\mu\sigma} \text{ تعريف تباعد الممتد}$$

$$\therefore \int \vec{G} dV = \int \text{div } g_{\mu\sigma} dV \quad \text{_____ (1)}$$

ومن تعميم نظرية جاوس في المتجهات:

$$\int \text{div } g_{\mu\sigma} dV = \int (g_{\mu\sigma})_n dS \quad \text{_____ (2)}$$

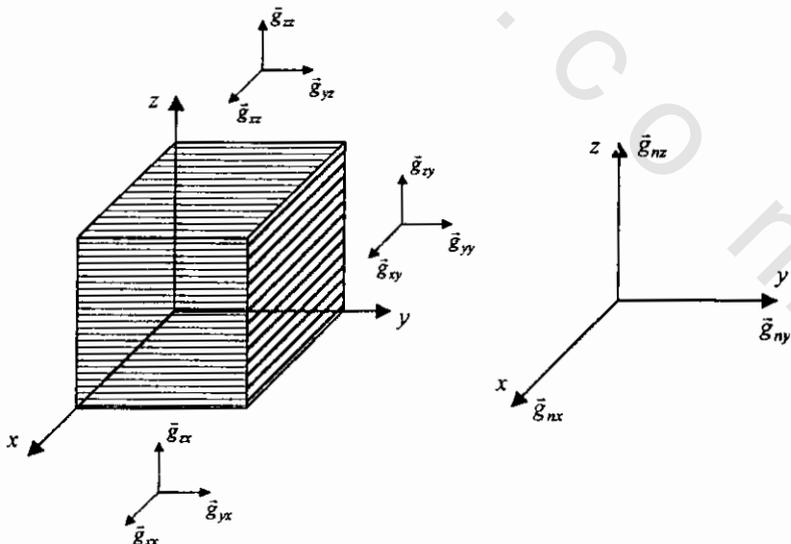
حيث $(g_{\mu\sigma})_n$ هي المركبات العمودية للممتد $g_{\mu\sigma}$ على السطح dS :

من (1)، (2):

$$\therefore \boxed{\int \vec{G} dV = \int (g_{\mu\sigma})_n dS}$$

وهو المطلوب.

المعنى الفيزيائي لمركبات ممتد الإجهاد الكهر ومغناطيسي:



نفرض أن لدينا حجماً V محدوداً بالسطح S ، فإن كانت \vec{f} هي الكثافة الحجمية للقوة المؤثرة على شحنة (أو جسيم مشحون) داخل الحجم فإن:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV \quad \text{---(1)}$$

وإذا كانت $\vec{g}_{n\alpha}$ هي قوى الإجهاد المؤثرة على وحدة المساحات في الإتجاه العمودي، حيث \hat{n} متجه الوحدة العمودي على السطح إلى الخارج، ولها المركبات الإتجاهية:

$$\vec{g}_{n\alpha} = \vec{g}_{nx} + \vec{g}_{ny} + \vec{g}_{nz}$$

وحيث أن العمودي على أوجه المكعب المبين يكون في إتجاه المحاور x, y, z فإن

$$\vec{g}_{nx} = g_{xx} \hat{i} + g_{yx} \hat{j} + g_{zx} \hat{k}$$

$$\vec{g}_{ny} = g_{xy} \hat{i} + g_{yy} \hat{j} + g_{zy} \hat{k}$$

$$\vec{g}_{nz} = g_{xz} \hat{i} + g_{yz} \hat{j} + g_{zz} \hat{k}$$

فمثلاً: المركبة g_{xy} هي المركبة x لقوة الإجهاد \vec{g}_{ny} بحيث يكون العمودي على المساحة في إتجاه محور y .

المركبة g_{zx} هي المركبة x لقوة الإجهاد \vec{g}_{nz} بحيث يكون العمودي على المساحة في إتجاه محور z .

المركبة g_{yx} هي المركبة y لقوة الإجهاد \vec{g}_{nx} بحيث يكون العمودي على المساحة في إتجاه محور x .

وهكذا نحصل على تسع مركبات لقوى الإجهاد المؤثرة على الجسيم المشحون

الموجود في الحجم V ، وتشكل هذه المركبات التسع مركبات ممتد الإجهاد $\vec{g}_{\alpha\beta}$ (حيث $\alpha, \beta = x, y, z$) والذي صورته:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2)]$$