الباب الثاني

الموجات الكهرومغنطيسية

Electromagnetic Waves

[١] معادلات الموجات الكهرومغنطيسية

(تغير المجال الكهرمغنطيسي مع الزمن):

نعتبر وسطاً غير موصل وخال من الشحنات (فراغ حر) فتكون معادلات ماكسويل:

$$div\,\vec{E} = 0 \qquad \_\_\_\_(1) \quad , \quad div\,\vec{H} = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$curl\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \qquad \_\_\_\_(3) \quad , \quad curl\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad \_\_\_\_(4)$$

ويشكل حل تلك المعادلات ما يسمى بالموجات الكهرومغنطيسية، حيث أن الحل كما سنرى يمثل موجات متحركة بسرعة معينة.

والآن: بأخذ $curl$ للمعادلة (3):

$$\therefore curl\,curl\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} curl\,\vec{H} = 0$$

وبالتعويض عن $cur\,\vec{H}$ من (4) وإعتبار أن:

$$curl\,curl\,\vec{E} = grad\,div\,\vec{E} - \nabla^2\,\vec{E} = -\nabla^2\,\vec{E}$$

(حيث $div\,\vec{E} = 0$، من (1))

$$-\nabla^2\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\therefore \nabla^2\,\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \quad \Box\,\vec{E} = 0 \qquad \_\_\_\_(5)$$

حيث $\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$ مؤثر دالمبيرت (الدالمبرتيان).

أيضاً: بأخذ $curl$ للمعادلة (4):

$$\therefore curl\, curl\, \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} curl\, \vec{E} = 0$$

وبالتعويض عن $cur\, \vec{E}$ من (3) وإعتبار أن:

$$curl\, curl\, \vec{H} = grad\, div\, \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}$$

(حيث $div\, \vec{H} = 0$، من (2))

$$-\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \quad \Box \vec{H} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

وإذا كانت المعادلة التي تصف موجة متحركة بسرعة v هي:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

فبالمقارنة يتضح أن المعادلتين (6) ,(5) تمثلان حركة موجية بسرعة $v = c$ وهي سرعة الضوء في الفراغ. ويطلق على هذه الحركة الموجية اسم الموجات الكهرومغنطيسية التي تتحرك في الفراغ بالسرعة c.

<u>معادلات الجهود للموجات الكهرومغنطيسية:</u>

يعرف الجهدان $\vec{A}, \phi$ بالعلاقتين:

$$\vec{E} = -grad\, \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad , \qquad \vec{H} = curl\, \vec{A}$$

مع شرط لورنتز:

$$div\, \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

وحيث أن:

$$curl\, \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore curl\, curl\, \vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-grad\, \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore grad\ div\ \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{c}\, grad \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = grad\,(div\, \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) = 0$$

$$\therefore \quad \Box \vec{A} = 0 \qquad \_\_\_\_(7)$$

أيضاً وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن الجهد القياسي ϕ يخضع لنفس العلاقة:

$$\therefore \quad \Box \phi = 0 \qquad \_\_\_\_(8)$$

أي أن الجهدين $\vec{A}, \phi$ للموجات الكهرومغنطيسية يخضعان لنفس المعادلة الموجية ذات الصورة:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

أو $\Box u = 0$ والمتحركة بالسرعة $v = c$.

[٢] حل المعادلة الموجية للموجات المستوية في الفراغ:

نعتبر المعادلة الموجية $\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ أو

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

وبفرض أن u تعتمد على إحداثي موضع واحد (وليكن x) بالإضافة إلى الزمن t:

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

تسمى الموجات في هذه الحالة بالموجات المستوية (plane waves).

ولحل المعادلة (1) للموجات المستوية:

نفرض أن $\eta = t + \frac{x}{c} \quad , \quad \xi = t - \frac{x}{c}$

$$\therefore t = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \quad , \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$$

وبالتعويض في (1) بالمتغيرات الجديدة: حيث أن:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c} \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{c} \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 1$$

$$c\frac{\partial u}{\partial x} = c\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$= c\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{1}{c}\right)\right] = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

من (3) ,(2) بالجمع:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

أيضاً من (3) ,(2) بالطرح:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة الآتية:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

وباستخدام (5) ,(4):

$$\therefore \left(2\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\therefore 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

الحل العام لهذه المعادلة يأخذ الصورة:

$$u = u_1(\xi) + u_2(\eta) \qquad (7)$$

حيث أنه بالتعويض من (7) في (6) تحقق المعادلة.

وبالتالي فإن المعادلات الموجية للكميات الكهرومغنطيسية $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}, \phi$ ويمكن كتابتها بالصورة:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad , \quad \cdots$$

وحلولها هي: $\vec{E} = \vec{E}_1(\xi) + \vec{E}_2(\eta) \ , \ \vec{H} = \vec{H}_1(\xi) + \vec{H}_2(\eta), \cdots$

وبوجه عام فإن: $u = u_1(t - \frac{x}{c}) + u_2(t + \frac{x}{c})$

حيث يمثل الحد $u_1(t - \frac{x}{c})$ موجة مستوية تتحرك بسرعة c في الإتجاه الموجب لمحور x (موجة ساقطة)، بينما يمثل الحل $u_2(t + \frac{x}{c})$ موجة مستوية تتحرك في الإتجاه السالب لمحور x (موجة منعكسة).

[٣] الموجات المستوية أحادية اللون: Plane Monochromatic Waves

إذا كان مجال الموجات الكهرومغنطيسية يمثل بدالة دورية بسيطة في الزمن فإن تلك الموجات تسمى أحادية اللون (مونوكروماتية) وتمثلها العلاقات:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\phi} \quad , \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\phi}$$

حيث $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ متجهات ثابتة المقدار يسمى كل منها بالسعة (amplitude) والكمية $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - wt$ تسمى طور الموجة (phase).

المتجه $\vec{k} = k\vec{n}$ يسمى المتجه الموجي حيث $\vec{n}$ متجه الوحدة في إتجاه إنتشار الموجة، k هو العدد الموجي الذي يرتبط بالتردد الزاوي w بالعلاقة $k = \frac{w}{c}$

وإذا كان الطول الموجي $\lambda = \frac{c}{\upsilon}$ حيث υ هي التردد الخطي للموجة ويرتبط بالتردد الزاوي w بالعلاقة $w = 2\pi\upsilon$

$$\therefore\ k = \frac{w}{c} = \frac{2\pi\upsilon}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

في حالة الموجات المستوية (المجال يتغير مع الإحداثي x والزمن t)

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(kx-wt)} = \vec{E}_0\ e^{i(\frac{w}{c}x-wt)}$$

$$= \vec{E}_0\ e^{-iw(t-\frac{x}{c})} = \vec{E}_0\, e^{-iw\xi}$$

حيث $\xi = t - \dfrac{x}{c}$

$$\vec{H} = \vec{H}_0\ e^{i(kx-wt)} = \vec{H}_0\, e^{-iw\xi}$$

أيضاً فإن الجهدين $\vec{A},\phi$ يخضعان لنفس العلاقات:

$$\vec{A} = \vec{A}_0\, e^{-iw\xi} \quad , \quad \phi = \phi_0\ e^{-iw\xi}$$

والآن: حيث أنه في حالة الموجة المستوية:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

ولما كانت:

$$\vec{A} = \vec{A}_0\, e^{i(kx-wt)} \quad , \quad \phi = \phi_0\ e^{i(kx-wt)}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -iw\,\vec{A} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -iw\,\phi$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = (-iw)^2\,\vec{A} = -w^2\vec{A} \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-iw)^2\,\phi = -w^2\phi$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{w^2}{c^2}\vec{A} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{w^2}{c^2}\phi = 0$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + k^2\,\vec{A} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k^2\,\phi = 0$$

أي أن الجهدين $\vec{A},\phi$ يخضعان للمعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2\,u = 0$$

التي هي معادلة الموجات أحادية اللون.

[٤] الطبيعة المستعرضة للموجات الكهرومغنطيسية:

(العلاقة بين $\vec{E},\vec{H}$ للموجات المستوية)

نعتبر موجة مستوية تتحرك في الإتجاه الموجب لمحور x فتكون:

$$\vec{E}=\vec{E}(t-\frac{x}{c})=\vec{E}(\xi)\ ,\ \vec{H}=\vec{H}(\xi)\ ,\ \vec{A}=\vec{A}(\xi)$$

معادلات ماكسويل لتلك الموجة هي:

$$div\,\vec{E}=0\ ,\ div\,\vec{H}=0\ ,\ curl\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\ ,\ curl\,\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

لحل هذه المعادلات في حالة الموجات المستوية أو لإيجاد العلاقة بين $\vec{E},\vec{H}$ لهذه الموجات:

<u>الطريقة الأولى</u>: حيث أن

$$\vec{A}=\vec{A}(\xi)\ ,\ \xi=t-\frac{x}{c}$$

$$\therefore\ \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}=\vec{A}'\cdot(1)=\vec{A}' \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}=\vec{A}'\cdot(-\frac{1}{c})=-\frac{1}{c}\vec{A}' \qquad \_\_\_\_(2)$$

وباختبار الجهدين $\vec{A}\ ,\ \phi$ بحيث أن $\phi=0$ (حيث أن $\rho=0$)

$$\therefore\ div\,\vec{A}=0$$

وهو شرط لورنتز في هذه الحالة.

$$\therefore\ \vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\vec{A}' \qquad \_\_\_\_(3)$$

$$\vec{H}=curl\,\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=(\vec{n}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\vec{A})$$

$$=(\vec{n}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial x})=-\frac{1}{c}(\vec{n}\wedge\vec{A}') \qquad \_\_\_(4)$$

وذلك باستخدام (2) ,(1) واعتبار أن $\vec{\nabla}=\vec{n}\frac{\partial}{\partial x}$

حيث $\vec{n}$ هو متجه الوحدة في إتجاه إنتشار الموجة المستوية (في إتجاه x)
من (4) ,(3) نحصل على:

$$\vec{H} = (\vec{n} \wedge \vec{E}) \qquad \_\_\_\_ (5)$$

وهذا يعني أن المجال المغنطيسي $\vec{H}$ للموجة المستوية يكون عمودياً على كل من المجال الكهربي $\vec{E}$ واتجاه إنتشار الموجة $\vec{n}$.

<u>طريقة أخرى</u>: حيث أنه يمكن التعبير عن الموجات المستوية بالعلاقات الآتية:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)} \qquad \_\_\_\_ (6)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)} \qquad \_\_\_\_ (7)$$

فباعتبار أن $curl\,(\phi\,\vec{A}) = \phi\, curl\,\vec{A} - \vec{A} \wedge grad\,\phi$

وبأخذ $curl$ للعلاقة(6):

$$\therefore\ curl\,\vec{E} = curl\,(\vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)})$$

$$= e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)} \cdot (curl\,\vec{E}_0) - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla}\,(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)})$$

$$= 0 - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla}\,(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)})$$

حيث $curl\,\vec{E}_0 = 0$ ، $\vec{E}_0$ متجه ثابت

$$\therefore\ curl\,\vec{E} = -\vec{E}_0 \wedge (i\vec{k}\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)})$$

$$= -i(\vec{E} \wedge \vec{k}) = i(\vec{k} \wedge \vec{E}) = ik(\vec{n} \wedge \vec{E}) \qquad \_\_\_\_ (8)$$

ولكن:

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}(-iw)\,\vec{H} = \frac{iw}{c}\vec{H} \qquad \_\_\_\_ (9)$$

بمساواة (9) ,(8) نحصل على:

$$\frac{iw}{c}\vec{H} = ik(\vec{n} \wedge \vec{E})$$

$$\therefore \vec{H} = (\vec{n} \wedge \vec{E})$$

حيث $k = \frac{w}{c}$ وهي نفس العلاقة (5).

أيضاً: بأخذ div للعلاقة (6):

$$\therefore div\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot[\vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)}]$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)} = i\vec{k}\cdot\vec{E} = ik(\vec{n}\cdot\vec{E}) = 0$$

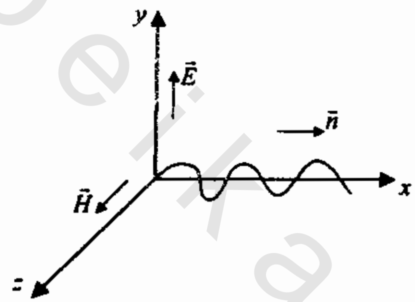
حيث $div\,\vec{E} = 0$

$$\therefore (\vec{n}\cdot\vec{E}) = 0 \qquad \_\_\_\_(10)$$

وهذا يعني أن $\vec{E}$ يكون متعامداً مع إتجاه إنتشار الموجة $\vec{n}$.

وعلى هذا الأساس يمكن القول بأنه:

في حالة الموجات الكهرومغنطيسية المستوية فإن المتجهين $\vec{E},\vec{H}$ يقعان في مستوى واحد عمودي على إتجاه إنتشار الموجة.



ولذلك فإن تلك الموجات تسمى بالموجات المستعرضة (Transverse Waves)

أيضاً من العلاقة (5) يمكننا كتابة العلاقتين:

$$(\vec{E}\cdot\vec{H}) = 0 \qquad \_\_\_\_(11)$$

حيث أن $\vec{E}, \vec{H}$ متعامدان.

$$|\vec{H}| = |\vec{n}\wedge\vec{E}| = |\vec{n}||\vec{E}|\sin\frac{\pi}{2} = |\vec{E}| \qquad \_\_\_\_(12)$$

أي أن القيمة العددية للمجالين $\vec{E}, \vec{H}$ واحدة.

<u>وبالنسبة لطاقة الموجات الكهرومغنطيسية:</u>

كثافة الطاقة هي:

$$W = \frac{E^2+H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi} \qquad \_\_\_\_(13)$$

حيث أن $E = H$.

وهذا يعني أن كثافة الطاقة الكهربية تساوي كثافة الطاقة المغنطيسية ويكون فيض الطاقة (متجه بوينتنج):

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{E})]$$

$$= \frac{c}{4\pi}[E^2 \vec{n} - (\vec{E} \cdot \vec{n})\vec{E}] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n}$$

حيث $(\vec{E} \cdot \vec{n}) = 0$ ، $E = H$

$$\because\ \vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}(\frac{E^2 + H^2}{2})\vec{n} = c(\frac{E^2 + H^2}{8\pi})\vec{n} = cW\vec{n} \qquad \_\_\_\_(14)$$

ومنها يتضح أن: فيض الطاقة يكون في إتجاه إنتشار الموجة $\vec{n}$ وأن المجال يتحرك بإشعاع (موجات من الطاقة) سرعته هي سرعة الضوء (c).

وأخيراً فإن كمية حركة الموجات الكهرومغنيطسية المستوية يكون:

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2}\vec{\gamma} = \frac{1}{c}W\vec{n} \qquad \_\_\_\_(15)$$

[٥] إستقطاب الموجات التوافقية المستوية:

Polarization of a plane harmonic waves

تعرف الموجات التوافقية المستوية بأنها الموجات التي تكون فيها الدالة $\vec{E}(\xi)$ دالة توافقية بحيث يأخذ الحل العام الصورة التالية:

$$\vec{E} = Re[\vec{E}_0\, e^{-iw\xi}] = Re[\vec{E}_0\, e^{-iw(t-\frac{x}{c})}] = Re[\vec{E}_0\, e^{i(kx-wt)}]$$

حيث $\vec{E}_0$ هو متجه مركب يمكن كتابته مثلاً بالصورة:

$$\vec{E}_0 = \vec{b}\, e^{-i\alpha}$$

$$\therefore\ \vec{E} = Re[\vec{b}\, e^{i(kx-wt-\alpha)}] \qquad \_\_\_\_(1)$$

وبكتابة الموجة $\vec{b}$ بالصورة :

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2$$

حيث $\vec{b}_2$, $\vec{b}_1$ متجهان حقيقيان. ويكون مربع $\vec{b}$ أي:

$$\vec{b}^2 = (\vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2)^2 = \vec{b}_1^2 + \vec{b}_2^2 + 2i\,(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)$$

هو أيضاً كمية حقيقية بحيث أن $(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2) = 0$ أي أن المتجهان $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ هما متجهان متعامدان.

$$\vec{E} = \text{Re}\,[(\vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2)\,e^{i(kx-wt-\alpha)}] = \text{Re}[(\vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2)\,e^{-i\psi}]$$

حيث $\psi = wt - kx + \alpha$

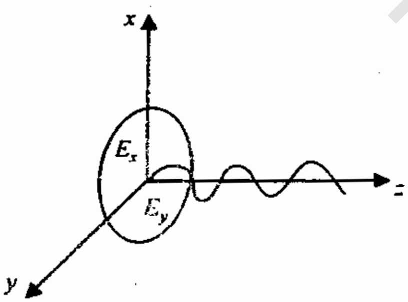
$$\therefore\ \vec{E} = \text{Re}\,[(\vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2)(\cos\psi - i\sin\psi)]$$
$$= \text{Re}[\vec{b}_1\cos\psi + \vec{b}_2\sin\psi - i(\vec{b}_1\sin\psi - \vec{b}_2\cos\psi)]$$
$$= \vec{b}_1\cos\psi + \vec{b}_2\sin\psi$$

إذا أخذنا $\vec{b}_1$ في إتجاه محور x و $\vec{b}_2$ في إتجاه محور y وإتجاه إنتشار الموجة في إتجاه محور z فإننا نحصل على:

$$E_x = |\vec{b}_1|\cos\psi \quad , \quad E_y = |\vec{b}_2|\sin\psi$$

$$\therefore \frac{E_x}{|\vec{b}_1|} = \cos\psi \quad , \quad \frac{E_y}{|\vec{b}_2|} = \sin\psi$$

$$\therefore\ \frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = \cos^2\psi + \sin^2\psi = 1 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$



ومن تلك المعادلة يتضح أن متجه المجال الكهربي يدور في المستوى (xy) عمودياً على إتجاه إنتشار الموجة راسماً قطعاً ناقصاً (أو إهليلج).

تسمى مثل تلك الموجة بالموجة المستقطبة إهليليجيا(أو ناقصياً) Elliptically Polarized وتمثل هذه الحالة الصورة العامة للموجة التوافقية المستوية المعطاة بالعلاقة (1).

__حالات خاصة:__

(١) إذا كانت $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$ فإن القطع الناقص (2) يتحول إلى دائرة حيث تكون المركبتان E_x , E_y متساويتان، ويصبح المتجه المحصل $\vec{E}$ ذو قيمة ثابتة ويدور في المستوى (x, y) راسماً دائرة. وتسمى الموجة في هذه الحالة

بالموجة المستقطبة دائرياً Circularly Polarized وبالنسبة لملاحظ أو مراقب يشاهد الموجة الآتية فإن نهاية المتجه الكهربي المحصل سوف تظهر كأنها تتحرك في دائرة، أو أن المحل الهندسي لنهاية المتجه المحصل لكل من E_x , E_y هو دائرة.

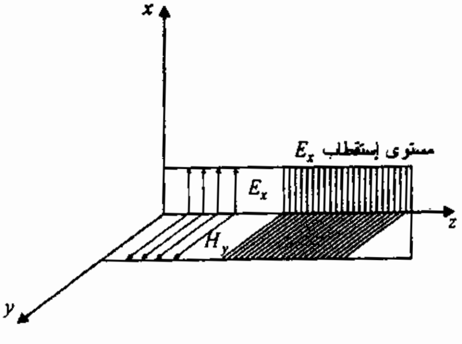
(٢) إذا كانت $\vec{b}_1 = 0$ أو $\vec{b}_2 = 0$ فإن ذبذبات المجال $\vec{E}$ تحدث في مستوى واحد. وتسمى مثل تلك الموجة بالموجة المستقطبة في المستوى (plane Polarized)، فمثلاً إذا كانت E_x موجودة، $E_y = 0$ فإن الموجة تكون مستقطبة في الإتجاه x، وإذا كانت E_y موجودة، $E_x = 0$ فإن الموجة تكون مستقطبة في الإتجاه y.

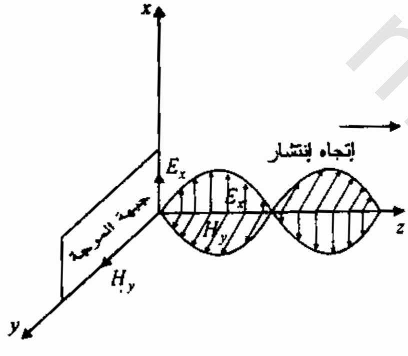
ويلاحظ أن في حالة الإستقطاب الناقصي أو الدائري فإن كلاً من E_x , E_y تكون موجودة.

في حالة الموجات المستقطبة في المستوى (xy) فإن هذا المستوى الذي يحتوي على E_x , H_y يسمى جبهة الموجة (Wave front)، ومعادلته هي

$$z = \vec{k} \cdot \vec{r} = const.$$

إذا كانت E_x موجودة، $E_y = 0$ أي حالة الموجة المستقطبة في الإتجاه x فإن المستوى (xz) يكون هو مستوى إستقطاب E_x.





[٦] إنتشار الموجات الكهرومغنطيسية في وسط عازل متماثل

Isotropic dielectric

لندرس الآن إنتشار الموجات الكهرومغنطيسية في وسط عازل متماثل (أيزوتروبي) له ثابت عازل ε ونفاذية μ ثابتان.

في حالة العازل المثالي فإن معامل التوصيل $\sigma = 0$ وفي غياب الشحنات فإن $\rho = 0$ وتصبح معادلات ماكسويل:

$$div\,\vec{D} = 0 \quad , \quad div\,\vec{B} = 0$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

حيث: $\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu\,\vec{H}$

$$\therefore\ div\,\varepsilon\,\vec{E} = 0 \quad \_\_\_\_(1) \quad , \quad div\,\mu\,\vec{H} = 0 \quad \_\_\_\_(2)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \_\_\_\_(3) \quad , \quad curl\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \_\_\_\_(4)$$

بضرب (4) في μ وأخذ $curl$ للطرفين.

$$\therefore\ curl\,curl\,\mu\,\vec{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(curl\,\vec{E})$$

وبإستخدام العلاقة:

$$curl\,curl = grad\,div - \nabla^2$$

واعتبار العلاقتين (3) ,(2) نحصل على:

$$grad\,div\,\mu\,\vec{H} - \nabla^2\,\mu\,\vec{H} = \frac{\varepsilon\,\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore\ \nabla^2\,\vec{H} - \frac{\varepsilon\,\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad \_\_\_\_\_(5)$$

أيضاً من (3) بالضرب في ε وأخذ $curl$ الطرفين واستخدام (1), (4):

$$\therefore\ curl\,curl\,\varepsilon\vec{E} = -\frac{\varepsilon\,\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(curl\,\vec{H})$$

$$\therefore\ grad\,div\,\varepsilon\vec{E} - \nabla^2\,\varepsilon\,\vec{E} = -\frac{\varepsilon\,\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \nabla^2\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \_\_\_\_(6)$$

من (6) ,(5) نرى أن المجالين الكهربي و المغنطيسي يحققان المعادلة الموجية

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

حيث v سرعة إنتشار الموجة وتعطي من:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \rightarrow v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \rightarrow \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

حيث c سرعة الضوء في الفراغ.

<u>في حالة الموجات المستوية أحادية اللون:</u>

تأخذ المعادلتان (6) ,(5) الصورة:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \_\_\_\_(7)$$

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad \_\_\_\_(8)$$

ويكون حل هاتين المعادلتين له الصورة:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0(x)e^{-iwt} \qquad \_\_\_\_(9)$$

$$\vec{H}(x,t) = \vec{H}_0(x)e^{-iwt} \qquad \_\_\_(10)$$

من (9) فإن:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{E}_0}{\partial x}\cdot e^{-iwt} \quad , \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\vec{E}_0}{\partial x^2}\cdot e^{-iwt}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = (-iw)\,\vec{E}_0\; e^{-iwt} \quad , \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -w^2\,\vec{E}_0\, e^{-iwt}$$

وبالتعويض في (7):

$$\therefore \frac{\partial^2\vec{E}_0}{\partial x^2}e^{-iwt} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(-w^2)\;\vec{E}_0\, e^{-iwt} = 0$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \mu w^2}{c^2} \vec{E}_0 = 0$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + k_w^2 \vec{E}_0 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(11)}$$

حيث $k_w = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon \mu}$ هو العدد الموجي في حالة الوسط العازل.

الحل العام للمعادلة (11) هو:

$$\vec{E}_0(x) = \vec{a}_1 e^{ik_w x} + \vec{a}_2 e^{-ik_w x} \qquad \text{\_\_\_\_\_(12)}$$

بالتعويض من (12) في (9):

$$\therefore\ \vec{E}(x,t) = [\vec{a}_1 e^{ik_w x} + \vec{a}_2 e^{-ik_w x}] e^{-iwt} = \vec{a}_1 e^{-i(wt-k_w x)} + \vec{a}_2 e^{-i(wt+k_w x)}$$

الحد الأول يمثل موجة تنتشر في الإتجاه الموجب لمحور x، بينما يمثل الحد الثاني موجة تنتشر في الإتجاه السالب لمحور x (موجة منعكسة).

بالنسبة للمجال المغنطيسي فإن حل المعادلة (10) يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة:

$$\vec{H}(x,t) = \vec{b}_1 e^{-i(wt-k_w x)} + \vec{b}_2 e^{-i(wt+k_w x)}$$

وباعتبار الموجات متحركة في الإتجاه الموجب لمحور x فقط فإن:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{a}_1 e^{-i(wt-k_w x)} = \vec{E}_0 e^{i(k_w x - wt)}$$

$$\vec{H}(x,t) = \vec{b}_1 e^{-i(wt-k_w x)} = \vec{H}_0 e^{i(k_w x - wt)}$$

في حالة الموجة المستوية المتحركة في إتجاه المتجه $\vec{k}_w$ حيث $\vec{k}_w = k_w \vec{n}$، فإن:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i}(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i}(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)$$

حيث $\vec{r}$ هو متجه الموضع المرسوم من نقطة أصل ثابتة 0.

ويكون المستوى $\vec{k}_w \cdot \vec{r} = 0$ هو جبهة الموجة.

إذا اعتبرنا السطح $\phi = \vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt = const$ فإن سرعة إنتشار هذا السطح ذو الطور الثابت $(\phi = c)$ تسمى سرعة الطور (phase velocity) للموجة، ويمكن الحصول عليه بتفاضل معادلة السطح بالنسبة للزمن.

$$k_w x - wt = const.$$

$$\therefore k_w \frac{dx}{dt} - w = 0 \quad \rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$$ حيث

$$\therefore\ k_w v - w = 0 \quad \therefore\ v = \frac{w}{k_w} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

<u>ولإيجاد العلاقة بين $\vec{E}, \vec{H}$ في حالة المادة العازلة:</u>

حيث أن $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}$، فبأخذ $curl$ الطرفين، وإعتبار أن:

$$curl\,(\phi\,\vec{A}) = \phi\, curl\,\vec{A} - \vec{A} \wedge grad\,\phi$$

$$\therefore\ curl\,\vec{E} = curl\,[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}]$$

$$= (e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}) \cdot (curl\,\vec{E}_0) - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla}(e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)})$$

$$= 0 - \vec{E}_0 \wedge i\,\vec{k}_w\, e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}$$

$$= -i\,(\vec{E}_0 \wedge \vec{k}_w)\, e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)} \qquad \Big|\, curl\,\vec{E}_0 = 0$$

$$= -i\,(\vec{E} \wedge \vec{k}_w) = i\,(\vec{k}_w \wedge \vec{E})$$

$$= i\,k_w (\vec{n} \wedge \vec{E}) \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث $\vec{k}_w = k_w\,\vec{n}$.

ولكن:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -iw\,\vec{H}_0\, e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)} = -iw\,\vec{H}$$

$$\therefore\ curl\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}(-iw\,\vec{H}) = \frac{iw\mu}{c}\vec{H} \qquad \_\_\_\_(2)$$

بمساواة (2) ,(1) نحصل على:

$$i\,k_w (\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{iw\mu}{c}\vec{H}$$

$$\therefore\ (\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{w\,\mu}{c\,k_w}\vec{H}$$

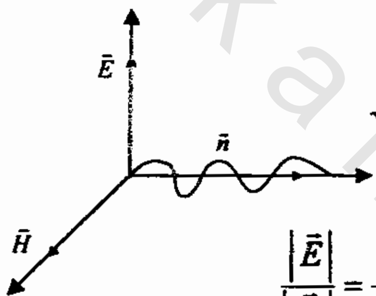
ولما كان $k_w = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\,\mu}$

$$\therefore\ \frac{k_w\,c}{w} = \sqrt{\varepsilon\,\mu}$$

$$\therefore (\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}\vec{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\vec{H}$$

$$\therefore\ \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(\vec{n} \wedge \vec{E}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

ومن ذلك يتضح أن $\vec{H}$ يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي كل مــن $\vec{n},\vec{E}$ بحيث تكون المتجهات $\vec{H},\vec{n},\vec{E}$ نظاماً يمينياً كما هو مبــين بالـشكل، وبحيــث أن $\vec{E},\vec{H}$ يقعان في مستوى عمودي على إتجاه إنتشار الموجة $\vec{n}$.



وبأخذ القيمة العددية من العلاقة (3)، فإن:

$$\sqrt{\varepsilon}\,\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu}\left|\vec{H}\right| \leftarrow \left|\vec{H}\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\vec{E}\right|$$

وتكون النسبة بين $\left|\vec{E}\right|,\left|\vec{H}\right|$ هي:

$$\frac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{H}\right|} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

أي أنها تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين μ,ε.

تسمى هذه النسبة عادة بالمعاوقة الذاتية للوســط (Z) (intrinsic impedance)

وبذلك فإن:

$$\frac{E}{H} = Z \quad \therefore\ E = Z\,H \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(4)}$$

وتكون كثافة الطاقة الكهربية لها نفس قيمة الكثافة المغنطيسية حيث:

$$W = \frac{\varepsilon\,E^2 + \mu\,H^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon\,E^2}{4\pi} = \frac{\mu\,H^2}{4\pi}$$

وذلك لأن $\varepsilon\,E^2 = \mu\,H^2$

$$\therefore\ \frac{\varepsilon\,E^2}{8\pi} = \frac{\mu\,H^2}{8\pi}$$

كما أن كثافة فيض الطاقة للموجات الكهرومغنطيسية (أو متجه بوينتنج) يعطي من:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

$$\therefore |\vec{\gamma}| = \frac{c}{4\pi}|\vec{E} \wedge \vec{H}| = \frac{c}{4\pi}|\vec{E}||\vec{H}| = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2 = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H^2$$

$$\therefore |\vec{\gamma}| = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\cdot\frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = v\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = vW$$

حيث $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ هي سرعة الطور للموجات المستوية و W هي كثافة الطاقة للمجال الكهرومغنطيسي المولد لتلك الموجات.

[٧] إنتشار الموجات الكهرومغنطيسي في وسط موصل

(ثابت العازل المركب – Complex dielectric const.)

نعتبر وسطا موصلاً متماثلاً ($\mu = const.$, $\varepsilon = const.$, $\sigma = const.$)

معادلات ماكسويل لهذا الوسط هي:

$$div\,\vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \quad \_\_\_(1) \quad , \quad div\,\mu\,\vec{H} = 0 \quad \_\_\_(2)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \_\_\_(3) \quad , \quad curl\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\,\vec{E} \quad \_\_\_(4)$$

حيث $\sigma\,\vec{E}$ يمثل تيار التوصيل.

باستخدام تلك المعادلات وبنفس الطريقة السابقة في بند (٦) يمكننا إثبات أن المجالين الكهربي والمغنطيسي $\vec{E},\vec{H}$ يخضعان لنفس العلاقة والتي صورتها:

$$\nabla^2\,\vec{u} - \frac{\varepsilon\,\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\,\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$

حيث $\vec{u} = \vec{E},\vec{H}$

$$\therefore\ \nabla^2\,\vec{E} - \frac{\varepsilon\,\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\,\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \_\_\_(5)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \qquad \text{\_\_\_(6)}$$

وبكتابة

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-wt)} = \vec{E}_0(x) e^{-iwt}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0\, e^{i(kx-wt)} = \vec{H}_0(x) e^{-iwt}$$

وبالتعويض في (5) بإعتبار أنه للموجه المستوية فإن:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial x} e^{-iwt} \quad , \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} e^{-iwt}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -iw\vec{E}_0 e^{-iwt} \quad , \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -w^2 \vec{E}_0 e^{-iwt}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} e^{-iwt} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(-w^2 \vec{E}_0 e^{-iwt}) - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}(-iw\vec{E}_0 e^{-iwt}) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon\mu w^2}{c^2}\vec{E}_0 + i\frac{4\pi\sigma\mu w}{c^2}\vec{E}_0 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \vec{E}_0(x)}{dx^2} + \frac{\mu w^2}{c^2}(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{w})\vec{E}_0(x) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \vec{E}_0(x)}{dx^2} + \gamma^2 \vec{E}_0(x) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(7)}$$

حيث:

$$\gamma^2 = \frac{\mu w^2}{c^2}(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{w})$$

$$\therefore \gamma = \frac{w}{c}\sqrt{\mu(\varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{w})} = \frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon_w}$$

يسمى ثابت الإنتشار Propagation constant

ويناظر العدد الموجي k في حالة الفراغ والعدد k_w في حالة العازل

$$\varepsilon_w = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{w}$$

يسمى ثابت العازل المركب (complex dielectric const.) للوسط الموصـــل. ويؤول إلى ε في حالة الوسط غير الموصل (حيث $\sigma = 0$).

المعادلة (7) يمكن كتابتها في الصورة:

$$\frac{d^2\vec{E}}{dx^2} + \gamma^2\,\vec{E} = 0 \qquad (8)$$

وذلك بضرب الطرفين في e^{-iwt} وإعتبار أن $\vec{E} = \vec{E}_0(x)e^{-iwt}$

وفي حالة الحركة في الفراغ ذو الثلاثة أبعاد فإن:

$$\nabla^2\vec{E} + \gamma^2\,\vec{E} = 0 \qquad (9)$$

ويلاحظ أن: الحل العام للمعادلة (8) هو:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\gamma x - wt)}$$

بينما الحل العام للمعادلة (9) هو:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{\gamma}\cdot\vec{r} - wt)}$$

حيث $\vec{\gamma} = \gamma\,\vec{n}$ هو المتجه المنــاظر للمتجــه $\vec{k} = k\,\vec{n}$ فــي حالـــة الفــراغ و $\vec{k}_w = k_w\,\vec{n}$ في حالة العازل.

أيضاً فإن:

$$\begin{aligned} curl\,\vec{E} &= curl[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{\gamma}\cdot\vec{r} - wt)}] \\ &= (e^{i(\vec{\gamma}\cdot\vec{r} - wt)})\,curl\,\vec{E}_0 - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla}(e^{i(\vec{\gamma}\cdot\vec{r} - wt)}) \\ &= -i(\vec{E}_0 \wedge \vec{\gamma})e^{i(\vec{\gamma}\cdot\vec{r} - wt)} \\ &= -i(\vec{E} \wedge \vec{\gamma}) = i\gamma(\vec{n} \wedge \vec{E}) \qquad (10) \end{aligned}$$

وحيث أن

$$\begin{aligned} curl\,\vec{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ &= -\frac{\mu}{c}(-iw\,\vec{H}) = \frac{iw\,\mu}{c}\,\vec{H} \qquad (11) \end{aligned}$$

فبمساواة (10),(11) نحصل على:

$$i\gamma(\vec{n}\wedge\vec{E})=\frac{iw\mu}{c}\vec{H}$$

$$\therefore\ (\vec{n}\wedge\vec{E})=\frac{w\mu}{c\gamma}\ \vec{H}=\frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon_w}}\ \vec{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_w}}\ \vec{H} \qquad \_\_\_\_(12)$$

حيث أن:

$$\gamma=\frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon_w}$$

$$\therefore\ \frac{c\gamma}{w}=\sqrt{\mu\varepsilon_w} \qquad , \qquad \varepsilon_w=\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma}{w}$$

$$\therefore\ \vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon_w}{\mu}}(\vec{n}\wedge\vec{E}) \qquad \_\_\_\_(13)$$

وهي العلاقة المناظرة للعلاقة:

$$\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\vec{n}\wedge\vec{E})$$

في حالة الوسط العازل.

أيضاً فإن ثابت الإنتشار γ هو:

$$\gamma=\frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon_w}=\frac{w}{c}\sqrt{\mu(\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma}{w})}$$

فبتربيع الطرفين:

$$\therefore\gamma^2=\frac{w^2}{c^2}\cdot(\mu\varepsilon_w)=\frac{w^2}{c^2}\ \mu\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma\mu w}{c^2} \qquad \_\_\_\_(14)$$

وبوضع $\gamma=\alpha+i\beta$، فإن المعادلة (14) تصبح:

$$\gamma^2=\alpha^2+2i\alpha\beta-\beta^2=\frac{1}{c^2}(w^2\ \mu\varepsilon+i\cdot 4\pi\sigma\mu w)$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية في الطرفين نحصل على:

$$\alpha^2-\beta^2=\frac{1}{c^2}w^2\ \mu\varepsilon \qquad \_\_\_\_(15)$$

$$2\alpha\beta=\frac{1}{c^2}\cdot 4\pi\sigma\mu\varepsilon \qquad \_\_\_\_(16)$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$\alpha^2=\frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[\sqrt{1+(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2}+1] \qquad \text{\_\_\_\_(17)}$$

$$\beta^2=\frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[\sqrt{1+(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2}-1] \quad , \qquad \text{\_\_\_\_(18)}$$

البرهان: من (15): بوضع $\alpha^2-\beta^2=a$ ، $2\alpha\beta=b$

$$\therefore \alpha\beta=\frac{b}{2} \quad \therefore \alpha=\frac{b}{2\beta} \quad , \quad \beta=\frac{b}{2\alpha}$$

$$a=\alpha^2-\beta^2=\alpha^2-\frac{b^2}{4\alpha^2}$$

$$\therefore 4\alpha^2 a=4\alpha^4-b^2$$

$$\therefore 4\alpha^4-4\alpha^2 a-b^2=0$$

$$\therefore \alpha^4-\alpha^2 a-\frac{b^2}{4}=0$$

بإكمال المربع:

$$\therefore \alpha^4-\alpha^2 a+(\frac{a}{2})^2=\frac{b^2}{4}+(\frac{a}{2})^2$$

$$\therefore (\alpha^2-\frac{a}{2})^2=\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}(1+\frac{b^2}{a^2})$$

وبأخذ الجذر التربيعي:

$$\therefore \alpha^2-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{1+b^2/a^2}$$

$$\therefore \alpha^2=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{1+b^2/a^2}=\frac{a}{2}[\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}+1] \qquad \text{\_\_\_\_[I]}$$

أيضاً حيث أن:

$$\alpha^2-\beta^2=a$$

$$\therefore \beta^2-\alpha^2+a=0$$

$$\therefore \beta^2-\frac{b^2}{4\beta^2}+a=0$$

$$\therefore \beta^4+\beta^2 a-\frac{b^2}{4}=0$$

وبإكمال المربع:
$$\therefore\ \beta^4+\beta^2 a+(\frac{a}{2})^2=\frac{b^2}{4}+(\frac{a}{2})^2$$
$$\therefore (\beta^2+\frac{a}{2})^2=\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}(1+\frac{b^2}{a^2})$$

وبأخذ الجذر التربيع:
$$\therefore \beta^2+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{1+b^2/a^2}$$
$$\therefore \beta^2=\frac{a}{2}\sqrt{1+b^2/a^2}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}[\sqrt{1+b^2/a^2}-1] \qquad \_\_\_\_(II)$$

وبوضع قيم a,b في كل من (II) , (I) نحصل على المعادلتين (18) ,(17).

<u>الحل العام للموجات المستوية المنتشرة في وسط متصل:</u>

إذا كان الإنتشار يتم في إتجاه محور x مثلاً فإن هذا الحل يكون بالصورة:
$$\vec{E}=\vec{E}_0\,e^{i(\gamma x-wt)}=\vec{E}_0\,e^{i(\alpha+i\beta)x}\,e^{-iwt}=\vec{E}_0\,e^{i(\alpha x-wt)}\cdot e^{-\beta x}$$
$$\vec{H}=\vec{H}_0\,e^{i(\gamma x-wt)}=\vec{H}_0\,e^{i(\alpha+i\beta)x}\,e^{-iwt}=\vec{H}_0\,e^{i(\alpha x-wt)}\cdot e^{-\beta x}$$

<u>حالات خاصة:</u>

(١) <u>حالة الموجات المنتشرة في عازل جيد:</u>

في حالة العازل التام (أو المثالي) فإن $\sigma=0$، أما في حالة العازل الجيد (أو الحقيقي) فإن σ تكون ذات قيمة صغيرة جداً بحيث أن: $\sigma<<w\varepsilon$، ولهذا فإنه يمكننا كتقريب جيد أن نكتب:
$$\sqrt{1+(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2}=(1+(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2)^{1/2}=1+\frac{1}{2}(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2$$

حيث أخذنا الحدين الأولين فقط وأهملنا الحدود الباقية نظراً لأن $\frac{\sigma}{w\varepsilon}<<1$

وتؤول العلاقتان (18) ,(17) إلى:
$$\alpha^2=\frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[1+\frac{1}{2}(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2+1]$$
$$=\frac{w^2\varepsilon\mu}{c^2}+\frac{w^2\varepsilon\mu}{4c^2}(\frac{16\pi^2\sigma^2}{w^2\varepsilon^2})=\frac{w^2\varepsilon\mu}{c^2}[1+\frac{4\pi^2\sigma^2}{w^2\varepsilon^2}]$$

$$\therefore \alpha = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1+\frac{4\pi^2\sigma^2}{w^2\varepsilon^2}} = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}(1+\frac{4\pi^2\sigma^2}{w^2\varepsilon^2})^{1/2}$$

$$= \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}(1+\frac{2\pi^2\sigma^2}{w^2\varepsilon^2}) = \frac{w}{v}(1+\frac{2\pi^2\sigma^2}{w^2\varepsilon^2})$$

وفي حالة العازل المثالي: فإن: $\sigma = 0$ وبالتالي فإن:

$$\alpha = \frac{w}{v} \rightarrow \quad \therefore \boxed{v = \frac{w}{\alpha}}$$

حيث $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ هي سرعة إنتشار الموجه في الوسط العازل.

أيضاً فإن:

$$\beta^2 = \frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[1+\frac{1}{2}(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2 - 1]$$

$$= \frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[\frac{8\pi^2\sigma^2}{w^2\varepsilon^2}] = \frac{4\pi^2\mu}{c^2\varepsilon}\sigma^2$$

$$\therefore \beta = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sigma$$

وفي حالة العازل المثالي فإن: $\sigma = 0$ وتكون $\beta = 0$

$$\therefore \gamma = \alpha + i\beta = \alpha \qquad \therefore v = \frac{w}{\gamma} = \frac{w}{k_w}$$

(٢) حالة إنتشار الموجات في موصل جيد:

في حالة الموصل الجيد فإن تيار التوصيل يكون كبيراً جداً بالمقارنة مع تيار الإزاحة أي أن $\sigma >> w\varepsilon$.

$$\therefore \varepsilon_w = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon} = \varepsilon[1+i\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}] \simeq i\frac{4\pi\sigma}{w}$$

حيث أهملنا الواحد بالنسبة إلى الحد الثاني نظراً لأن $\frac{\sigma}{w\varepsilon} >> 1$

ويكون:

$$\alpha^2 = \frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[\sqrt{(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2} + 1]$$

$$= \frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon} + 1] \simeq \frac{w^2\varepsilon\mu}{2c^2}[\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}] \simeq \frac{2\pi w\mu}{c^2}\sigma$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi w \mu \sigma}$$

$$\beta^2 = \frac{w^2 \varepsilon \mu}{2c^2}[\sqrt{(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon})^2} - 1] \simeq \frac{w^2 \varepsilon \mu}{2c^2}[\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}] \simeq \frac{2\pi w \mu}{c^2}\sigma$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi w \mu \sigma} = \alpha$$

وتؤول العلاقة $\gamma = \alpha + i\beta$ في حالة الموصل الجيد إلى:

$$\gamma = \alpha + i\alpha - (1+i)\alpha$$

وبوضع $\delta = \frac{1}{\alpha}$ الذي يسمى بعمق النفاذ (penetration depth) أو العمق السطحي (skin depth).

$$\therefore \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{2\pi w \mu \sigma}}$$

$$\therefore \gamma = (1+i)\alpha = \frac{1+i}{\delta}$$

$$= \frac{1+i}{c}\sqrt{2\pi w \mu \sigma} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(\frac{2}{c}\sqrt{\pi w \mu \sigma})$$

ولكن:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore (i)^{1/2} = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^{1/2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \gamma = (i)^{1/2}(\frac{2}{c}\sqrt{\pi w \mu \sigma}) = \frac{2}{c}\sqrt{i\pi w \mu \sigma}$$

أيضاً: إذا كانت $\gamma = \frac{w}{c}\sqrt{\mu \varepsilon_w}$

تمثل ثابت الإنتشار في الوسط الموصل ويرتبط بالطول الموجي λ بالعلاقة الشهيرة $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\therefore \frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon_w} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \therefore w = \frac{2\pi c}{\lambda\sqrt{\mu\varepsilon_w}}$$

حيث ε_w هو ثابت العازل المركب في الوسط الموصل.

$$\therefore \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{2\pi c}{\lambda\sqrt{\mu\varepsilon_w}}\cdot\mu\sigma}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_w}}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}Z}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c\lambda}{\sigma Z}} \qquad \_\_\_\_(*)$$

حيث $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_w}}$ تسمى معاوقة السطح (Surface impedance) للوسط الموصل أو المعاوقة الذاتية (intrinsic impedance) وتعتمد على خواص الوسط نفسه.

<u>ملحوظة هامة</u>: من العلاقة (*) إذا كان تردد الموجات $\nu = \frac{c}{\lambda}$، فإن $c\lambda = \frac{c^2}{\nu}$ وتؤول هذه العلاقة إلى:

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c^2/\nu}{\sigma Z}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\sigma Z\nu}} = \frac{c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\sigma Z\nu}}$$

ومنها يتضح أن عمق النفاذ (δ) يتناسب عكسياً مع معامل التوصيل σ ومع معاوقة السطح Z. كما أن δ تقل في تناسب عكسي مع الجذر التربيعي للتردد. ويلاحظ أن قيمة δ تكون صغيرة جداً للموصلات الجيدة عند الترددات العالية، وتسمى هذه الظاهرة بالظاهرة السطحية (skin effect).

وأخيراً فإن الحل العام للمعادلة الموجية يمكن كتابته في حالة الموصل الجيد بالصورة:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i\gamma x} = \vec{E}_0\, e^{i(\alpha+i\beta)x} = \vec{E}_0\, e^{-\beta x}\, e^{i\alpha x}$$

ولكن $\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi w\mu\sigma}$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_0\, e^{-x/\delta}\, e^{i(x/\delta)} \qquad \_\_\_\_(**)$$

ومنها نرى أن سعة الموجه تضمحل مع المسافة أي تضمحل كلما نفذت الموجه في الوسط بحيث تصبح نسبة مهملة من الموجه الساقطة عند المسافات الصغيرة جداً.

وإذا نفذت الموجه إلى مسافة δ في الوسط الموصل فإن السعة تضمحل (أو تقـل) إلى e^{-1} أي إلى $\frac{1}{e}$ أي إلى نحو ٣٧% من قيمتها الأصلية (الأولية).

وننتقل بعد ذلك إلى عدد من الأمثلة المحلولة على الموجات الكهرومغنطيسية.

أمثلة محلولة على الموجات الكهرومغنطيسية

مثال(١): أثبت أن الموجه الكهرومغنطيسية المستقطبة في المستوى $\vec{H} = \vec{k}\, e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r}+wt)}$ تحقق العلاقة $div\,\vec{H} = 0$ إذا كانت $\vec{n}$ عمودية على $\vec{k}$ فقط أي إذا كانت $\vec{n}\cdot\vec{k} = 0$ حيث $\vec{k}$ هو متجه الوحدة في إتجاه z، $\vec{n}$ متجه الوحدة في إتجاه إنتشار الموجه.

الحل: نفرض أن

$$\vec{H} = (H_1, H_2, H_3),\ \ \vec{k} = (k_1, k_2, k_3)\ \ ,\ \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

في الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة فإن:

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = n_1\, x + n_2\, y + n_3\, z$$

$$div\,\vec{H} = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[k_1\, e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r}+wt)} = i\, n_1\, k_1\, e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r}+wt)}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y} = i\, n_2\, k_2\ e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r}+wt)}\ \ ,\ \ \frac{\partial H_3}{\partial z} = i\, n_3\, k_3\ e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r}+wt)}$$

$$\therefore\ \ i(n_1k_1 + n_2k_2 + n_3k_3)\, e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r}+wt)} = div\,\vec{H}$$

العلاقة $div\,\vec{H} = 0$ يجب أن تحقق العلاقة:

$$n_1k_1 + n_2k_2 + n_3k_3 = 0$$

أي

$$\vec{n}\cdot\vec{k} = 0$$

أي أن $\vec{H}$ المعطاة تحقق العلاقة $div\,\vec{H} = 0$ إذا كان فقط $\vec{n}\cdot\vec{k} = 0$ أي إذا كانت $\vec{n}$ عمودية على $\vec{k}$.

وهذا يعني أنه في الموجات الكهرومغنطيسية المستقطبة في المستوى (plane polarized waves) فإن المجال المغنطيسي يكون عمودياً على إتجاه إنتشار الموجة.

مثـال(٢): باستخدام معادلات ماكسويل أشتق المعادلة الموجية للمجال الكهربي $\vec{E}$ لموجة مستوية تنتشر في الإتجاه الموجب لمحور z في الفراغ الحر.

فإذا كان المجال الكهربي في إتجاه محور x. وبإعتبار التغير التوافقي حيث المجال الكهربي يعطي بالعلاقة $E_x = E_0\, e^{-iwt}$، أوجد الحل العام للمعادلة السابقة.

الحل: من معادلة ماكسويل الثالثة:

$$curl\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

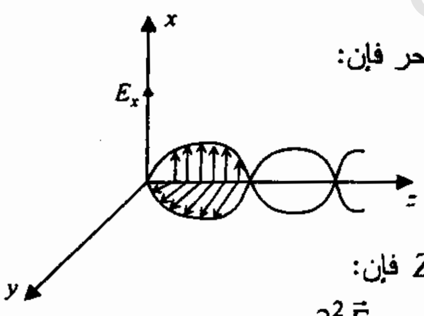
بأخذ $curl$ للطرفين:

$$curl\, curl\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(curl\, \vec{H})$$

$$\therefore grad \cdot div\, \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

حيث $curl\, \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

ولما كانت $div\, \vec{E} = 0$ في حالة الفراغ الحر فإن:



$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

وإذا كان المجال E_x ينتشر في الإتجاه Z فإن:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

وفي حالة التغير التوافقي فإن:

$$E_x = E_0\, e^{-iwt}$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial t} = -iw\, E_0\, e^{-iwt}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (-iw)^2\, E_0\, e^{-iwt} = -w^2\, E_x$$

وبإعتبار الإنتشار للمجال E_x في الإتجاه z فإنه بالتعويض في (1):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}(-w^2 E_x)=-\frac{w^2}{c^2}E_x$$

$$\therefore \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\frac{w^2}{c^2}E_x=0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية هو:

$$E_x=E_0\cos w(t-\frac{z}{c}) \qquad \_\_\_\_(3)$$

ولإثبات ذلك: نوجد $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$ من هذه العلاقة ونقارن مع (2):

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z}=-E_0\sin w(t-\frac{z}{c})\cdot(-\frac{w}{c})=\frac{w}{c}E_0\sin w(t-\frac{z}{c})$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\frac{w}{c}E_0\cos w(t-\frac{z}{c})\cdot(-\frac{w}{c})$$

$$=-\frac{w^2}{c^2}E_0\cos w(t-\frac{z}{c})=-\frac{w^2}{c^2}E_x$$

$$\therefore \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\frac{w^2}{c^2}E_x=0$$

وهي نفس العلاقة (2)، أي أن (3) يمثل الحل العام للعلاقة (2)، وهو المطلوب.

مثال(٣): إذا كانت مركبات متجه شدة المجال الكهربي لموجه كهرومغنطيسية في الفراغ تعطي من: $E_z=0$, $E_y=0$, $E_x=E_0\cos w(t-\frac{z}{c})$

أوجد العلاقات الخاصة بمركبات شدة المجال المغنطيسي.

أحسب متجه بوينتنج الذي يمثل فيض الطاقة خلال وحدة المساحات ومن ذلك أثبت أن المتوسط الزمني لهذا المتجه يعطي من:

$$\vec{\gamma}_{av.}=\frac{c}{8\pi}E_0^2\,\vec{k}$$

حيث $\vec{k}$ متجه الوحدة في إتجاه z (إتجاه إنتشار الموجه).

الحل: حيث أن:

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$curl\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}\,\frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{k}\,\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

ولما كانت E_x تعتمد على z فقط (تنتشر في إتجاه z)

فإن $\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ ويكون: $curl\,\vec{E} = \vec{j}\,\frac{\partial E_x}{\partial z}$

بالتعويض في (1):

$$\therefore\ \vec{j}\,\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}\,\vec{j}$$

$$\therefore\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\therefore\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = -c\,\frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad \_\_\_\_(2)$$

وبالتعويض عن E_x في (2):

$$\therefore\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = -c\,\frac{\partial}{\partial z}[E_0 \cos w(t - \frac{z}{c})]$$

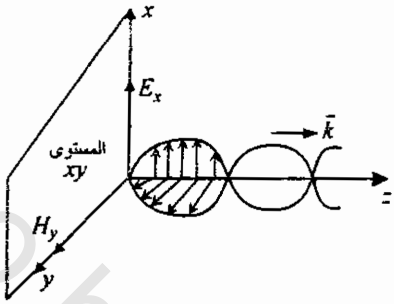
$$= c \cdot (-\frac{w}{c})\,E_0 \sin w(t - \frac{z}{c}) = -w\,E_0 \sin w(t - \frac{z}{c})$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\therefore H_y = -w\,E_0 \int_0^t \sin w(t - \frac{z}{c})\,dt$$

$$= w\,E_0 \cdot \frac{\cos w(t - \frac{z}{c})}{w} = E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}) \qquad \_\_\_\_(3)$$

وبالنسبة للمركبتين H_z ، H_x فإن كليهما يساوي صفراً .



تمثل العلاقة (3) موجة مستوية حيث $\vec{E},\vec{H}$ يقعان في المستوى (xy) العمودي على إتجاه إنتشار الموجه $(\vec{k})$.
متجه بوينتنج أو فيض الطاقة خلال وحدة المساحات يعطي من:

$$\vec{\gamma}=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{H})=\frac{c}{4\pi}[(E_x\,\vec{i})\wedge(H_y\vec{j})]$$

$$=\frac{c}{4\pi}E_xH_y(\vec{i}\wedge\vec{j})=\frac{c}{4\pi}E_xH_y\vec{k} \qquad \_\_\_\_(4)$$

أي أن متجه بوينتنج يكون في إتجاه إنتشار الموجه $(\vec{k})$.

ولما كانت: $E_x=E_0\cos w(t-\frac{z}{c})\ ,\ H_y=E_0\cos w(t-\frac{z}{c})$

فبالتعويض في (4):

$$\therefore\ \vec{\gamma}=\frac{c}{4\pi}E_0^2\cos^2 w(t-\frac{z}{c})\vec{k}$$

ولإيجاد المتوسط الزمني (time average) لهذا المتجه نكامل على دورة واحدة (one period) $T=\frac{2\pi}{w}$ ونقسم التكامل على T.

$$\therefore\ \vec{\gamma}_{av.}=<\vec{\gamma}>=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{\gamma}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vec{\gamma}\,d(wt)$$

وفي حالتنا تلك فإن: $\therefore\ \vec{\gamma}_{av.}=\frac{c}{4\pi}\vec{k}\,E_0^2<\cos^2 w(t-\frac{z}{c})>$

حيث:

$$<(\cos^2 w(t-\frac{z}{c})>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 w(t-\frac{z}{c})\,d(wt)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2(wt+\alpha)\,d(wt) \qquad , \quad \alpha=-w\frac{z}{c}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1+\cos 2(wt+\alpha)]\,d(wt)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} [wt + \frac{\sin 2(wt+\alpha)}{2w}]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} [2\pi + 0] = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{\gamma}_{av.} = \frac{c}{4\pi} \vec{k} E_0^2 \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \, \vec{k}$$

مثال(٤): إذا كانت مركبات المجال الكهربي تعطي من:

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z = a \cos nx \, \cos nct$$

وكان $\vec{H} = 0$ عندما $t = 0$، $\rho = \sigma = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$

(حالة الفراغ الحر الخالي من الشحنات).

أثبت أن مركبات المجال المغنطيسي تعطي من:

$$H_x = 0 \quad , \quad H_z = 0 \quad , \quad H_y = -a \sin nx \sin nct$$

أثبت أيضاً أنه لا يوجد فيض متوسط للطاقة في هذه المسألة (أو أن المتوسط الزمني لفيض الطاقة يساوي صفراً) وهي حالة الموجات المستقرة.

الحل: من معادلة ماكسويل الثالثة:

$$curl \, \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k})$$

ولكن:

$$curl \, \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \, (\frac{\partial E_z}{\partial y}) + \vec{j} (-\frac{\partial E_z}{\partial x}) + \vec{k} (0)$$

$$= \vec{i} \, (0) + \vec{j} (an \sin nx \cos nct) + \vec{k} (0)$$

$$\therefore -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad , \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = an \sin nx \cos nct \; , -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial H_x}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial H_y}{\partial t}=-a\,cn\sin nx\,\cos nct \; , \; \frac{\partial H_z}{\partial t}=0$$

وبالتكامل نحصل على:

$$H_x=c_1 \; , \; H_y=-a\sin nx \sin nct+c_2 \; , \; H_z=c_3$$

ومن الشروط الابتدائية فإن $\vec{H}=0$ عندما $t=0$

$$\therefore c_1=0 \; , \; c_2=0, \; c_3=0$$

$$\therefore H_x=0 \; , \; H_y=-a\sin nx \sin nct \; , \; H_z=0$$

ولإيجاد فيض الطاقة خلال وحدة المساحات أي متجه بوينتج:

$$\vec{\gamma}=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{H})$$

$$=\frac{c}{4\pi}(E_z\vec{k})\wedge(H_y\vec{j})=-\frac{c}{4\pi}(E_zH_y)\vec{i}$$

حيث $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{j}$

وبالتعويض عن

$$E_z=a\cos nx\cos nct \quad , \; H_y=-a\sin nx \sin nct$$

$$\therefore \vec{\gamma}=\frac{ca^2}{4\pi}\cos nx \sin nx \cos nct \sin nct\,\vec{i}$$

$$=\frac{ca^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\sin 2nx\cdot\frac{1}{2}\sin 2nct\,\vec{i}$$

$$=\frac{ca^2}{16\pi}\sin 2nx \sin 2nct\,\vec{i}$$

وذلك لأن: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

ويكون المتوسط الزمني لفيض الطاقة:

$$\vec{\gamma}_{av.}=<\vec{\gamma}>=\vec{i}\,\frac{ca^2}{16\pi}<\sin 2nx \sin 2nct>$$

ولإيجاد: $<\sin 2nx\sin 2nct>$ نضع $\alpha=nct=wt$ ، $\beta=nx$

$$\therefore <\sin\,2nct\,\sin 2nx>=<\sin 2wt \sin 2\beta>$$

ولما كان: $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$$\therefore <\sin 2wt \sin 2\beta> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos 2(wt-\beta) - \cos 2(wt+\beta)]d(wt)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin 2(wt-\beta)}{2w} - \frac{\sin 2(wt+\beta)}{2w}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\therefore \vec{\gamma}_{av.} = <\vec{\gamma}> = \vec{i}\cdot\frac{ca^2}{16\pi}\cdot(0) = 0$$

أي أن المتوسط الزمني (أو متوسط معدل) إشعاع الطاقة يكون مساوياً للصفر، وهي حالة الموجات المستقرة (stationary waves).

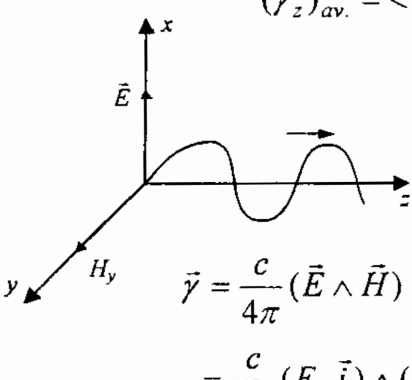
<u>مثال(٥):</u> في حالة الموجات الكهرومغنطيسية المنتشرة في إتجاه محور z في وسط عازل تام، يتحدد المجال الكهربي بالعلاقة: $E_x = E_0\cos(wt-\beta z)$

كما يتحدد المجال المغنطيسي المرافق بالعلاقة: $H_y = \frac{E_0}{Z}\cos(wt-\beta z)$

حيث E_0 هي قيمة E_x عندما $t=0$، $z=0$، Z هي المعاوقة الذاتية للوسط $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

أثبت أن المتوسط الزمني للطاقة المناسبة خلال أي مساحة S عمودية على محور z تعطي من: $(\gamma_z)_{av.} = <\gamma_z> = \frac{c}{8\pi}\frac{E_0^2}{Z}S$

<u>الحل:</u>



الطاقة المنسابة خلال وحدة المساحات أو فيض الطاقة يعطي من متجه بوينتنج

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{H})$$

$$= \frac{c}{4\pi}(E_x\vec{i})\wedge(H_y\vec{i}) = \frac{c}{4\pi}(E_x H_y)\vec{k} = \gamma_z\vec{k}$$

$$\gamma_z = \frac{c}{4\pi}(E_x H_y) = \frac{c}{4\pi}\frac{E_0^2}{Z}\cos^2(wt-\beta z)$$

ولإيجاد المتوسط الزمني:
$$<\gamma_z> = \frac{c}{4\pi}\frac{E_0^2}{Z} <\cos^2(wt-\beta z)>$$

حيث:
$$<\cos^2(wt-\beta z)> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(wt-\beta z)\,d(wt)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1+\cos 2(wt-\beta z)\,d(wt)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[wt+\frac{\sin 2(wt-\beta z)}{2w}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}[2\pi+0] = \frac{1}{2}$$
$$\therefore <\gamma_z> = \frac{c}{4\pi}\frac{E_0^2}{Z}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{c}{8\pi}\frac{E_0^2}{Z}$$

ويكون المتوسط الزمني للطاقة المنسابة خلال المساحة S العمودية على محور z هو:

$$(\gamma_z)_{av.} = <\gamma_z> = \frac{c}{8\pi}\frac{E_0^2}{Z}S$$

وهو المطلوب.

مثال(٦): في حالة الموجات الكهرومغنطيسية المنتشرة في وسط غير موصل بسرعة $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$، أثبت أن المركبات التالية للمجالين الكهربي والمغنطيسي للموجات المستوية المذكورة تمثل حلاً خاصاً لمعادلات ماكسويل في الوسط.

$$E_x = a\cos w\left(t-\frac{z}{v}\right) \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z = 0$$

$$H_x = 0 \quad , \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,a\cos w\left(t-\frac{z}{v}\right) \quad , \quad H_z = 0$$

الحل: في حالة الوسط الغير موصل فإن معادلات ماكسويل تصبح:

$$div\,\vec{E} = 0 \quad \_\_\_\_\_(1) \quad , \quad div\vec{H} = 0 \quad \_\_\_\_\_(2)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \_\_\_\_\_(3) \quad , \quad curl\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \_\_\_\_\_(4)$$

للقيم المعطاة لـــ $\vec{E}, \vec{H}$ فإن

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$div\,\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

أي أن المعادلتين (2) ,(1) تحققان بالقيم المعطاة لكل من $\vec{E}, \vec{H}$.

أيضاً:

$$curl\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{j}\,(\frac{\partial E_x}{\partial z}) + \vec{k}(-\frac{\partial E_x}{\partial y}) = \vec{j}\,[(\frac{aw}{v})\sin w(t - \frac{z}{v})]$$

$$curl\,\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(\frac{\partial H_y}{\partial z}) + \vec{k}(\frac{\partial H_y}{\partial x}) = \vec{i}\,[-\frac{aw}{v}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin w(t - \frac{z}{v})]$$

المعادلتين (4) ,(3) تتحققان بشرط:

$$\frac{aw}{v}\sin w(t - \frac{z}{v}) = -\frac{\mu}{c}(\frac{\partial H_y}{\partial t}) = -\frac{\mu}{c}\cdot(-aw)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin w(t - \frac{z}{v})$$

$$= \frac{aw}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\sin w(t - \frac{z}{v}) = \frac{aw}{v}\cdot\sin w(t - \frac{z}{v})$$

أيضاً:

$$-\frac{aw}{v}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin w(t-\frac{z}{v})=\frac{\varepsilon}{c}(\frac{\partial E_x}{\partial t})=\frac{\varepsilon}{c}[-aw\sin w(t-\frac{z}{v})]$$

$$\therefore -\frac{aw\varepsilon}{c}\sin w(t-\frac{z}{v})=-\frac{aw\varepsilon}{c}\sin w(t-\frac{z}{v})]$$

ومن ذلك يتضح أن الطرفين متساويين في العلاقتين السابقتين مما يثبت أن قيم $\vec{E},\vec{H}$ المعطاة تمثل حلاً خاصاً لمعادلات ماكسويل. وهو المطلوب.

مثال(٧): أثبت أن الجهدين $\vec{A},\phi$ اللذان يصفان الموجه المستوية

$$\vec{E}=[a\cos w(t-\frac{z}{v}),0,0]\,,\ \vec{H}=[0,\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}a\cos w(t-\frac{z}{v}),0]$$

المنتشرة في وسط عازل متماثل، حيث ε,μ ثابتان، يعطيان بالعلاقتين:

$$\vec{A}=[0,0,-(\frac{acx}{v})\cos w(t-\frac{z}{v})]\,,\ \phi=-ax\cos w(t-\frac{z}{v})$$

الحل: المعادلات التي تعرف الجهدين $\vec{A},\phi$ هي:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}=curl\,\vec{A} \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \_\_\_\_(2)$$

مع شرط لورنتز:

$$div\,\vec{A}+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

من (1):

$$\mu(\vec{i}H_x+\vec{j}H_y+\vec{k}H_z)=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$\therefore \mu[\vec{i}(0)+\vec{j}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,a\cos w(t-\frac{z}{v})\ ,\vec{k}(0)]$$

$$=\vec{i}\,(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\vec{j}\,(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\vec{k}\,(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})$$

بمقارنة معاملات $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ في الطرفين نجد أن:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=\mu\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,a\cos w(t-\frac{z}{v}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad \text{\_\_\_\_\_(6)}$$

تتحقق هذه المعادلات إذا كان:

$A_x=0 \quad , \quad A_y=0$ من (6)

ومن (4) نجد أن $\frac{\partial A_z}{\partial y}=0$ أي أن A_z لا تعتمد على y.

ومن (5) نجد أن

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}=-\mu\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,a\cos w(t-\frac{z}{v})=-\sqrt{\varepsilon\mu}\,a\cos w(t-\frac{z}{v})$$

وبالتكامل نجد أن:

$$A_z=-\sqrt{\varepsilon\mu}\,ax\cos w(t-\frac{z}{v})+const. \quad (\text{ثابت})$$

وهذا الثابت يمكن اختياره مساوياً الصفر وتصبح:

$$A_z=-\sqrt{\varepsilon\mu}\,ax\cos w(t-\frac{z}{v})$$

ولما كانت $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ فإن $\sqrt{\varepsilon\mu}=\frac{c}{v}$

$$\therefore A_z=-\frac{acx}{v}\cos w(t-\frac{z}{v})$$

$$\therefore \vec{A}=[0\ ,\ 0\ ,\ -\frac{acx}{v}\cos w(t-\frac{z}{v})]$$

ولإيجاد ϕ: من المعادلة (2) نجد أن:

$$\vec{i}E_x+\vec{j}E_y+\vec{k}E_z=-(\vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z)$$

ولكن: $\vec{E}=[a\cos w(t-\frac{z}{v}),0,0]$ ، $\vec{A}=[0,0,-\frac{acx}{v}\cos w(t-\frac{z}{v})]$

$$\therefore \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=[0\ ,\ 0\ ,\ \frac{acx}{v}\ w\sin w(t-\frac{z}{v})]$$

بمقارنة معاملات $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ نحصل على:

$$\therefore \frac{\partial\phi}{\partial x}=-a\cos w(t-\frac{z}{v})\ ,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{axw}{v}\sin w(t-\frac{z}{v})$$

ومن هذه العلاقات نجد أن:

(i) $\phi=-ax\cos w(t-\frac{z}{v})+const.(c_1)$

(ii) ϕ لا تعتمد على y

(iii) $\phi=-ax\cos w(t-\frac{z}{v})+const.(c_2)$

وباختيار الثابتين c_1,c_2 بحيث يساوي كل منهما الصفر فإننا نحصل على:

$$\phi=-ax\cos w(t-\frac{z}{c})$$

وهو المطلوب ثانياً.