

الإلكتروديناميكا النسبية

Relativistic Electrodynamics

تمهيد (١): ملخص لأهم القوانين في الإلكترونيديناميكا الكلاسيكية

تطبق قواعد النظرية النسبية على علم الإلكترونيديناميكا بهدف وضع قوانين ومعادلات هذا العلم في صورة متألّفة (covariant)، وذلك بوضع الكميات الكهرومغناطيسية على صورة متجهات رباعية في فضاء منكوفسكي الرباعي الأبعاد، وكذلك بوضع المعادلات التي تصف تلك الكميات في صورة متألّفة أو لا متغيرة الشكل عند الانتقال من نظام للإحداثيات إلى نظام آخر. ونعطي فيما يلي ملخصاً لأهم الكميات والقوانين في علم الإلكترونيديناميكا تمهيداً لوضعها في الصورة النسبية (انظر الباب الأول).

(١) الشحنة الكلية (q): تعرف بالعلاقة $q = \int \rho dV$ ، حيث ρ هي الشحنة لوحدة الحجم (أو كثافة الشحنة).

(٢) التيار الكلي (I): يعرف بالعلاقة $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{s}$ ، حيث $\vec{j}$ هو التيار المار عبر وحدة المساحات (أو كثافة التيار).

(٣) إذا تحركت شحنة ρ بسرعة $\vec{V}$ فينتج عنها تياراً كهربائياً $\vec{j}$ يعطي بالعلاقة: $\vec{j} = \rho \vec{V}$.

(٤) يوصف المجال الكهرومغناطيسي في الفراغ بكميتين هما: $\vec{E}$ (شدة المجال الكهربائي)، $\vec{H}$ (شدة المجال المغناطيسي).

وفي حالة وجود وسط مادي توجد كميتان أخريتان هما:

$\vec{D}$ (متجه الإزاحة - Displacement vector)

$\vec{B}$ (متجه الحث - Induction vector)

(٥) المعادلات الأساسية للمجال الكهرومغناطيسي (معادلات ماكسويل):

(i) في الفراغ الحر (وتعرف بالمعادلات الميكروسكوبية):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{curl} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{curl} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

(ii) في الوسط المادي (وتعرف بالمعادلات الماكروسكوبية):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{curl} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{curl} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

(٦) معادلة الاتصال (Equation of continuity)

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{تربط بين } \rho, \vec{j} \text{ وصورتها:}$$

(٧) الجهود الكهرومغناطيسية (Electromagnetic Potentials)

توجد كميتان هامتان هما: الجهد الكهربائي (القياسي) ϕ ، الجهد الإتجاهي (المغناطيسي) $\vec{A}$ ويعرفان بالعلاقين:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, & \vec{H} &= \operatorname{curl} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, & \vec{B} &= \operatorname{curl} \vec{A} \end{aligned}$$

وفي الوسط:

وفي حالة عدم وجود مجال مغناطيسي: فإن $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ وبذلك فإن:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$$

(٨) العلاقة بين $\vec{A}, \phi$ تعرف بشرط لورنتز (Lorentz Condition)

وصورتها:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(٩) أي شحنة كهربائية (q) سواء كانت ساكنة أو متحركة يكون لها مجال كهربائي شدته $\vec{E}$ ، وإذا تحركت الشحنة يتولد لدينا تياراً كهربائياً $\vec{j}$ ، وهذا التيار يولد مجالاً مغناطيسياً شدته $\vec{H}$.

∴ حركة الشحنات الكهربائية يصاحبها مجالين:

الكهربائي ($\vec{E}$) نتيجة وجود الشحنة، والمغناطيسي ($\vec{H}$) نتيجة التيار الناتج عن الحركة.

(١٠) إذا كان لدينا نظامين للإحداثيات S, S' بحيث أن S' كان متحركاً بسرعة v بالنسبة إلى S ، ولنعتبر وجود شحنة q ساكنة في S' ومتحركة معه بالسرعة v فيكون لدينا راصدين:

(i) راصد موجود في S' : يشاهد q ساكنة وبالتالي يكون لديه مجال كهربائي $\vec{E}$ فقط.

(ii) راصد موجود في S : يشاهد q متحركة (بالسرعة v - سرعة S') وهي بذلك تولد مجالاً مغناطيسياً، وبالتالي يكون لديه مجالين أحدهما كهربائي (نتيجة وجود الشحنة) والآخر مغناطيسي (نتيجة حركة الشحنة).

∴ المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة q في النظام S' يولد مجالاً كهرومغناطيسياً في النظام S .

وهذا هو الأساس الذي طبقت بموجبه النظرية النسبية على علم الإلكتروديناميكا.

تمهيد (٢): ملخص لأهم قوانين النظرية النسبية (Theory of Relativity)

في النظرية النسبية نعالج حركة الأجسام المتحركة بالنسبة إلى بعضها بسرعات كبيرة للغاية قد تصل إلى سرعة الضوء

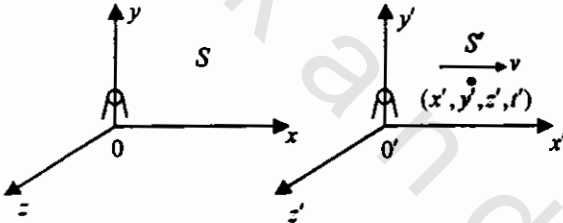
سرعة الضوء = $300 \text{ ألف كيلومتر في الثانية}$

فروض النظرية النسبية:

- (١) قوانين الطبيعة (القوانين التي نصف الظواهر الطبيعية) يكون لها نفس الشكل الرياضي في سائر الأنظمة (أنظمة الإحداثيات) المتحركة بالنسبة لبعضها، وبصورة مختصرة: نقول أن قوانين الطبيعة متغايرة (covariant).
- (٢) سرعة الضوء c هي مقدار ثابت لا يتغير بتغير النظام الذي تقاس فيه، أي أنها لا متغيرة (Invariant).

تحويلات لورنتز:

المنظومة S' تتحرك بسرعة منتظمة v بالنسبة إلى المنظومة S . العلاقة بين (أو معادلات التحويل بين) الإحداثيات (x', y', z', t') في S' والإحداثيات التي يقيسها شخص موجود في S أي (x, y, z, t) تعرف بتحويلات لورنتز وصورتها:



$$x' = \alpha(x - vt) , \quad y' = y , \quad z' = z , \quad t' = \alpha\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

حيث c هي سرعة الضوء.

$$\beta = \frac{v}{c} , \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{وحيث}$$

حالة خاصة: عندما تكون السرعة $v \ll c$ (أقل بكثير جداً من c)

$$\alpha \approx 1 \quad \leftarrow \quad \frac{v}{c} \approx 0 \quad \leftarrow \quad \frac{v}{c} \ll 1$$

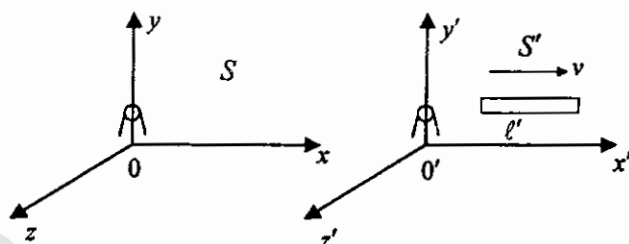
ونحصل على $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$

هذه التحويلات تنطبق في الميكانيكا الكلاسيكية (النيوتونية) وتعرف بتحويلات جاليليو.

التحويلات العكسية: $x = \alpha(x' + vt')$, $y = y'$, $z = z'$, $t = \alpha\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$

حيث α تظل كما هي، $x, y, z, t \rightarrow x', y', z', t'$ ، $v \rightarrow -v$

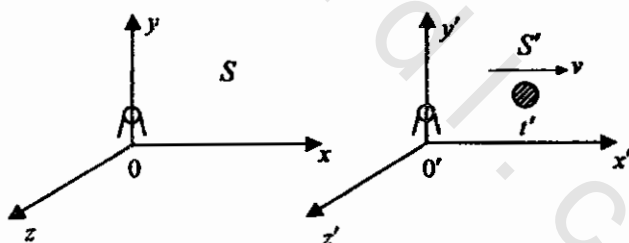
(١) ظاهرة إنكماش الطول (Length contraction)



طول المسطرة في النظام الموجودة فيه هو l' (الطول الصحيح هو l) ، طول المسطرة كما يقيسه راصد في النظام S هو $l_0 = l'$ (proper length)

العلاقة بين l, l_0 : $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ أي أن: $l < l_0$

(٢) ظاهرة تمدد الزمن (Time dilation)



زمن قياس ظاهرة معينة (حادثة - event) في النظام S' هو t' (الزمن الصحيح $t = \tau$) ، زمن الحادثة كما يقيسه راصد في النظام S هو t

العلاقة بين t, τ : $t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ← $t > \tau$

كلاسيكياً: $\beta \rightarrow 1$ ومنها: $t = \tau$ ، $l = l_0$

لا توجد ظاهرتا إنكماش الطول وتمدد الزمن.

مثال: أثبت أن شكل مؤثر دالمبيرت لا يتغير بتغير نظام الإحداثيات وذلك باستخدام تحويلات لورنتز.

الحل: المطلوب إثبات أن:

$$\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

□ في المجموعة S' = □ في المجموعة S

تحويلات لورنتز:

$$x' = \alpha(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \alpha(t - \frac{v}{c^2}x)$$

التحويلات العكسية:

$$x = \alpha(x' + vt'), y = y', z = z', t = \alpha(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

نلاحظ أن المتغيرات هنا هي x, t فإذا كانت $f = f(x, t)$ فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial t}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \alpha, \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \alpha \frac{v}{c^2}$$

من التحويلات العكسية:

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x'} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \text{--- (1)}$$

أيضاً

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{--- (3)}$$

أيضاً

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t'} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \right) = \alpha v \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{---(4)}\end{aligned}$$

وبتفاضل (1)، (2)، (3)، (4) مرة ثانية:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad \text{---(5)}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{---(6)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{---(7)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad \text{---(8)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \square' &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &\quad - \alpha^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) \\ &= \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\alpha^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} \leftarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ ولكن}$$

$$\therefore \alpha^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$$

$$\square' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \square$$

ملحوظة: معامل دالمبيرت يدخل في معادلة هامة جداً في الرياضيات التطبيقية، وهي

المعادلة الموجية (Wave Equation) وصورتها: $\square \phi = 0$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

وحيث أن $\square = \square'$ فيمكننا كتابة:

$$\square' \phi = 0$$

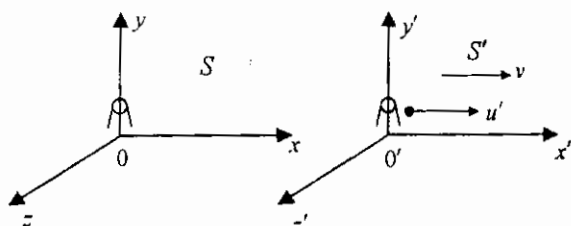
$$\therefore \nabla'^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = 0 \quad (2)$$

أي أن المعادلة الموجية هي معادلة متغايرة (Covariant) أي لا يتغير شكلها بتغير نظام الأحداث المستخدم، وأحياناً يستخدم اصطلاح متألف بدلاً من متغاير لكلمة (Covariant) وهذا يؤكد الفرض الأول في النظرية النسبية.

ملخص لقوانين الديناميكا النسبية Relativistic Dynamics

[١] معادلة التحويل للسرعة:

جسيم يتحرك بسرعة u' في اتجاه محور x' في النظام S' الذي يتحرك هو أيضاً بسرعة v بالنسبة إلى S فتكون سرعة الجسيم u في النظام S :



$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (1)$$

نتائج:

(١) كلاسيكياً: $\frac{v}{c} \ll 1$ أي $\frac{v}{c} \approx 0 \leftarrow u = u' + v$ وهو القانون الكلاسيكي

لتحصيل السرعتين u', v (في نفس الاتجاه).

(٢) سرعة الضوء ثابتة في جميع الأنظمة (الفرض الثاني)

ولإثبات ذلك: نفرض أن الجسم يتحرك في S' بسرعة تساوي سرعة الضوء $\leftarrow u' = c$ والمطلوب إيجاد سرعته u في النظام S .

فبالتعويض في (1)

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{\frac{c + v}{c}} = c \left(\frac{c + v}{c + v} \right) = c$$

(٣) لا توجد سرعة أكبر من سرعة الضوء:

إذا كان S' يتحرك بسرعة $v = c$ وكان الجسم يتحرك في S' بسرعة $u' = c$ فمن الناحية الكلاسيكية تكون المحصلة (محصلة السرعتين) هي: $u = c + c = 2c$ ، أما في النظرية النسبية فإن:

$$u = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$

∴ محصلة السرعتين $u = c, u' = c$ هي أيضاً c وليست $2c$ كما في الحالة الكلاسيكية.

∴ لا توجد في النسبية سرعة أكبر من c .

[٢] تغير الكتلة مع السرعة:

كلاسيكياً: كتلة الجسم وهو ساكن = كتلته وهو متحرك أي $m = m_0$

في النسبية: $m \neq m_0$ ولكن: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

حيث u سرعة الجسم المتحرك، وهذا القانون يؤول إلى: $m = m_0$ (كلاسيكياً) حيث $\frac{u}{c} \approx 0$

[٣] كمية الحركة النسبية:

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

[٤] الطاقة (Energy):

• طاقة السكون (Rest Energy) $E_0 = m_0 c^2$

• طاقة الحركة (kinetic Energy) $T = (m - m_0) c^2$

• الطاقة الكلية $E = mc^2 \leftarrow E = E_0 + T = m_0 c^2 + (m - m_0) c^2 = mc^2$

[٥] العلاقة بين الطاقة الكلية E وكمية الحركة في النظرية النسبية:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

في الميكانيكا الكلاسيكية:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

في النسبية:

ملاحظة: الجسيمات ذات الكتلة الساكنة الصفرية

Particles with zero rest mass

هي جسيمات تتميز بأن كتلتها الساكنة = صفر $\leftarrow m_0 = 0$

فتكون طاقتها $E = pc$

مثال: أثبت أن الجسيمات ذات الكتلة الساكنة الصفرية تتحرك بسرعة الضوء.

الإثبات:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \rightarrow m_0 = m \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \rightarrow 0 = m \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 0$$

$$\therefore 1 - \frac{u^2}{c^2} = 0 \rightarrow \frac{u^2}{c^2} = 1 \rightarrow \boxed{u = c}$$

كأمثلة لهذه الجسيمات: الفوتون، النيوتريون.

[٦] المتجهات الرباعية 4-Vectors

هي متجهات لها أربع مركبات، وتظهر هذه المتجهات في فراغ رباعي الأبعاد يعرف بفراغ منكوشكي (Minkowski space) تتكون أبعاده من:

(١) ثلاث أبعاد للمكان (space)

(٢) بعد رابع للزمن (time)

أي متجه رباعي يكتب بالصورة:

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (\vec{A}, A_4) = A_n, A_4), \quad n=1, 2, 3$$

أمثلة على المتجهات الرباعية في الديناميكا النسبية:

[١] المتجه الرباعي للمكان - الزمان (X_μ)

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, x_4) = (\vec{r}, x_4)$$

حيث: $\vec{r} = x_1, x_2, x_3 = x, y, z$

$$x_4 = ict \quad | \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\therefore \boxed{x_\mu = (\vec{r}, ict)}$$

[٢] المتجه الرباعي للسرعة u_μ (Velocity 4-vector)

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad | \quad d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$= (\alpha \vec{u}, i\alpha c) \quad | \quad \vec{u} = u_x, u_y, u_z$$

[٣] المتجه الرباعي للطاقة - كمية الحركة (Momentum-Energy 4-vector)

$$p_\mu = m_0 u_\mu = (\vec{p}, i \frac{E}{c}) \quad | \quad \vec{p} = p_x, p_y, p_z$$

وبلاحظ أن:

$$u_\mu u_\mu = u_\mu^2 = -c^2 = \text{Inv.}$$

$$p_\mu p_\mu = p_\mu^2 = -m_0^2 c^2 = \text{Inv.}$$

وبوجه عام: حاصل ضرب أي متجه رباعي في نفسه = كمية لا متغيرة (Inv.)

[٤] متجه القوة (Force 4-vector)

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0 \frac{du_\mu}{d\tau} = (F_n, F_4)$$

$$F_n = F_1, F_2, F_3 = \alpha(F_x, F_y, F_z) = \alpha \vec{F} \quad | \quad \vec{F} = F_x, F_y, F_z \quad \text{حيث}$$

$$\therefore F_\mu = (\alpha \vec{F}, F_4)$$

معادلات التحويل للمتجهات الرباعية:

تخضع المتجهات الرباعية لمعادلة تحويل في فراغ منكوفسكي صورتها:

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$$

حيث $a_{\mu\nu}$ هو معامل التحويل بين المجموعتين S, S' وهو ممتد يعرف بممتد منكوفسكي وصورته هي:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

ملحوظة: لمعرفة تفاصيل كل هذه الموضوعات يرجع إلى كتابنا:

(النظرية النسبية الخاصة والعامة) - دار الفكر العربي - القاهرة (٢٠١٠).

الإلكتروديناميكا النسبية

[١] المتجه الرباعي للشحنة - التيار Charge - Current 4-Vector

$$\boxed{\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

من معادلة الاتصال:

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$$

فإذا كان:

$$\therefore \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

وبكتابة:

$$J_x = J_1, \quad J_y = J_2, \quad J_z = J_3$$

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$

$$\therefore \frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)} = 0$$

وبأخذ: $ict = x_4, \quad ic\rho = J_4$

$$\therefore \frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} + \frac{\partial J_4}{\partial x_4} = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0}$$

____(1)

حيث: $\mu = 1, 2, 3, 4$

المعادلة (1) تعرف بالصورة المتغيرة (أو المتألفة) أو الممتدة لمعادلة الاتصال.

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\vec{r}, ict) \quad (\text{المتجه الرباعي للزمان - المكان})$$

$$J_\mu = (J_1, J_2, J_3, J_4) = (\vec{J}, ic\rho) \quad (\text{المتجه الرباعي للشحنة - التيار})$$

معادلات التحويل للمتجه الرباعي J_μ : نعتبر شحنة كثافتها ρ تتحرك مع

المجموعة S' بالسرعة v بالنسبة إلى S ، فيكون قانون التحويل للمتجه

الرباعي J_μ بين المجموعتين S, S'

$$J'_\mu = a_{\mu\nu} J_\nu$$

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

ولإيجاد معادلات التحويل للمركبات الأربعة للمنتج J_μ نكتب $\mu = 1, 2, 3, 4$

$$\underline{\mu=1}: J'_1 = a_{1\nu} J_\nu$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_{11} J_1 + \alpha_{12} J_2 + \alpha_{13} J_3 + \alpha_{14} J_4 \\ &= \alpha_{11} J_1 + \alpha_{14} J_4 \\ &= \alpha J_1 + i\alpha\beta J_4 \\ &= \alpha (J_1 + i\beta J_4) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} a_{12} = 0 \\ a_{13} = 0 \\ a_{11} = \alpha \\ a_{14} = i\alpha\beta \end{array} \right.$$

وباعتبار أن: $J_1 = J_x, J'_1 = J'_x, J_4 = ic\rho$

$$J'_x = \alpha (J_x + i \frac{v}{c} \cdot ic\rho) = \alpha (J_x - v\rho) \rightarrow \boxed{J'_x = \alpha (J_x - v\rho)}$$

$$\underline{\mu=2}: J'_2 = a_{2\nu} J_\nu = a_{22} J_2 = J_2 \quad \therefore \boxed{J'_y = J_y}$$

$$\underline{\mu=3}: J'_3 = a_{3\nu} J_\nu = a_{33} J_3 = J_3 \quad \therefore \boxed{J'_z = J_z} \quad \left| \begin{array}{l} a_{22} = 1 \\ a_{33} = 1 \\ a_{44} = -i\alpha\beta \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu=4}: J'_4 &= a_{4\nu} J_\nu = a_{41} J_1 = a_{44} J_4 \\ &= -i\alpha\beta J_1 + \alpha J_4 \\ &= \alpha (J_4 - i\beta J_1) \end{aligned}$$

وبكتابة: $J_1 = J_x, J_4 = ic\rho, J'_4 = ic\rho', \beta = \frac{v}{c}$

$$\therefore ic\rho' = \alpha (ic\rho - i \frac{v}{c} J_x)$$

$$\therefore \boxed{\rho' = \alpha (\rho - \frac{v}{c^2} J_x)}$$

وبالقسمة على ic :

ملخص للعلاقات:

$$J'_x = \alpha (J_x - v\rho) , J'_y = J_y , J'_z = J_z$$

$$\rho' = \alpha (\rho - \frac{v}{c^2} J_x)$$

العلاقات العكسية:

$$J_x = \alpha (J'_x + v\rho') , J_y = J'_y , J_z = J'_z$$

$$\rho = \alpha (\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x)$$

كلاسيكياً: $\frac{v}{c} \ll 1$ وبالتالي: $\alpha \approx 1$, $\frac{v}{c} \approx 0$

$$J'_x = J_x - v\rho , J'_y = J_y , J'_z = J_z , \rho' = \rho$$

أمثلة محلولة:

مثال (1): أوجد قانون التحويل لكثافتي التيار والشحنة لشحنة ساكنة في المجموعة S' .

الحل: إذا كانت الشحنة ρ' (في المجموعة S') ساكنة فمعنى هذا عدم تولد تيار عنها، أي أن:

$$J'_1 = J'_2 = J'_3 = 0 , J'_4 = ic\rho'$$

وتصبح معادلات التحويل:

$$J_x = \alpha (J'_x + v\rho') , J_y = J'_y , J_z = J'_z$$

$$\rho = \alpha (\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x)$$

بالصورة الآتية:

$$J_x = \alpha v\rho' , J_y = 0 , J_z = 0$$

$$\rho = \alpha \rho' = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \boxed{\rho' = \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ملحوظة: الشحنة ρ' (في المجموعة التي توجد فيها) تسمى الشحنة الصحيحة أو كثافة الشحنة الصحيحة (proper charge density) وتكتب عادة ρ_0

$$\therefore \rho_0 = \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

وهذا يعني أن: $\rho_0 < \rho$

أي أن الراصد في المجموعة S يرى مقدار كثافة الشحنة أكبر من الشحنة الأصلية (الصحيحة).

$$\boxed{\rho_0 = \rho} \quad \text{كلاسيكياً: } \frac{v}{c} \rightarrow 0 \quad \text{وبذلك فإن:}$$

مثال (٢): باستخدام تحويلات لورنتز في النظرية النسبية أثبت أن الشحنة الكهربائية هي كمية لا متغيرة (Inv.).

الحل: من تحويلات لورنتز فإن العلاقة بين عنصري الحجم dV , dV' في

$$dV = dV' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{المجموعتين } S, S' \text{ هي:}$$

(يحدث إنكماش للحجم تماماً كما في الطول).

الشحنة الكهربائية الموجودة في الحجم dV (في المجموعة S): $dq = \rho dV$

في المجموعة S' : $dq \rightarrow dq'$

والمطلوب إثبات أن: $dq = dq' = \text{Inv.}$ ، فحيث أن: $\rho = \alpha \rho'$ (مثال (١))

$$\therefore dq' = \rho dV = (\alpha \rho') \left(\frac{dV'}{\alpha} \right) \quad \left| \quad dV = \frac{dV'}{\alpha} = dV' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right.$$

$$= \rho' dV' = dq' = \text{Inv.}$$

مثال (٣): أثبت أن العلاقة بين المنحى الرباعي للشحنة - التيار (J_μ) ومنحى

السرعة الرباعي للشحنة (U_μ) هي: $J_\mu = \rho_0 U_\mu$ في فراغ منكوفسكي.

ملاحظة: تناظر هذه العلاقة العلاقة: $\vec{J} = \rho \vec{v}$ في فراغ إقليدس الثلاثي.

الحل: حيث أن: $\vec{J} = \rho \vec{v}$

$$\begin{aligned}\therefore (J_x, J_y, J_z) &= \rho(v_x, v_y, v_z) \\ &= (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z)\end{aligned}$$

بالإنتقال إلى فراغ منكوفسكي الرباعي:

$$\begin{aligned}J_\mu &= (\vec{J}, ic\rho) \\ &= (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho) \\ &= \rho(v_x, v_y, v_z, ic) \\ &= \rho\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, ic\right) \\ &= \rho \frac{d\tau}{dt} \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{d(ict)}{d\tau}\right) \\ &= \rho \frac{d\tau}{dt} \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau}\right) \\ &= \rho \frac{d\tau}{dt} \left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)\end{aligned}\quad \text{---(1)}$$

ولكن: متجه السرعة الرباعي: $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ ، وأيضاً:

$$\rho_0 = \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

حيث $d\tau$ هو الزمن الصحيح ، بالتعويض في (1):

$$J_\mu = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) U_\mu = \rho_0 U_\mu$$

وهو المطلوب.

[٢] المتجه الرباعي للجهد الكهرومغناطيسي (A_μ)

Electromagnetic Potential 4-vector

يرتبط الجهدان الكهربائي ϕ والمغناطيسي $\vec{A}$ بشرط لورنتز

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

والذي يمكن كتابته بالصورة:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial (i\phi)}{\partial (ict)} = 0$$

$$A_x = A_1, A_y = A_2, A_z = A_3 \quad \text{وبكتابة:}$$

$$i\phi = A_4$$

$$x = x_1, y = x_2, z = x_3, ict = x_4$$

$$\therefore \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0$$

وبصورة مختصرة:

$$\boxed{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

وتعرف هذه العلاقة بالصورة المتألفة أو المتغايرة (covariant form) لشروط لورنتز.

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (\vec{A}, A_4) = (\vec{A}, i\phi) \quad \text{المتجه:}$$

يعرف بالمتجه الرباعي للجهد الكهرومغناطيسي.

أمثلة محلولة:

مثال (١): أوجد معادلات التحويل لمركبات المتجه الرباعي A_μ بالصورة:

$$A'_x = \alpha(A_x - \beta\phi), A'_y = A_y, A'_z = A_z$$

$$\phi' = \alpha(\phi - \beta A_x)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{حيث}$$

الحل: نأأأأ قانن النأوأل بالأورة:

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu \quad , \quad a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu=1}: \quad A'_1 &= a_{1\nu} A_\nu = a_{11} A_1 + A_{14} A_4 \\ &= \alpha A_1 + i\alpha\beta A_4 \\ &= \alpha (A_1 + i\beta A_4) \end{aligned}$$

$$A_1 = A_x \quad , \quad A'_1 = A'_x \quad , \quad A_4 = i\phi \quad \text{بكتابة:}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\therefore A'_x = \alpha \left(A_x + i \frac{v}{c} \cdot i\phi \right) = \alpha \left(A_x - \frac{v}{c} \phi \right) \quad \text{_____ (1)}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu=2}: \quad A'_2 &= a_{2\nu} A_\nu = a_{22} A_2 = A_2 \\ \therefore A'_y &= A_z \quad \text{_____ (2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu=3}: \quad A'_3 &= a_{3\nu} A_\nu = a_{33} A_3 = A_3 \\ \therefore A'_z &= A_z \quad \text{_____ (3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu=4}: \quad A'_4 &= a_{4\nu} A_\nu = a_{41} A_1 + a_{44} A_4 \\ &= -i\alpha\beta A_1 + \alpha A_4 \\ &= \alpha (A_4 - i\beta A_1) \end{aligned}$$

$$A_4 = i\phi \quad , \quad A'_4 = i\phi' \quad , \quad A_1 = A_x \quad \text{وبكتابة:}$$

$$i\phi' = \alpha \left(i\phi - i \frac{v}{c} A_x \right)$$

بالقسمة على i :

$$\therefore \phi' = \alpha \left(\phi - \frac{v}{c} A_x \right) \quad \text{_____ (4)}$$

∴ المعادلات المطلوبة هي:

$$A'_x = \alpha(A_x - \beta\phi) , A'_y = A_y , A'_z = A_z$$

$$\phi' = \alpha(\phi - \beta A_x)$$

ملحوظة (١): المعادلات العكسية:

$$A_x = \alpha(A'_x + \beta\phi') , A_y = A'_y , A_z = A'_z$$

$$\phi = \alpha(\phi' + \beta A'_x)$$

ملحوظة (٢): في الحالة الكلاسيكية

$$\frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow \frac{v}{c} \approx 0 \rightarrow \beta \approx 0$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1$$

وتصبح معادلات التحويل:

$$A'_x = A_x , A'_y = A_y , A'_z = A_z$$

$$\phi' = \phi \rightarrow \boxed{\bar{A}' = \bar{A} , \phi' = \phi}$$

أي أنه كلاسيكياً فإن الجهدين الإتجاهي والقياسي يكونان لا متغيران.

مثال (٢): أثبت أن معادلات الجهدين الكهرومغناطيسية

$$\square \phi = -4\pi\rho \quad \text{_____ (1)}$$

$$\square \bar{A} = -\frac{4\pi}{c} \bar{J} \quad \text{_____ (2)}$$

وكنالك شرط لورنتز:

$$\text{div } \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{_____ (3)}$$

هي معادلات متآلفة (Covariant) أي لا متغيرة نسبياً
(Relativistic Invariants).

الحل: الجهدان $\bar{A}, \phi$ يجمعهما المتجه الرباعي A_μ

الكثافتين $\bar{J}, \rho$ يجمعهما المتجه الرباعي J_μ

وباستخدام قوانين التحويل للمتجهين J_μ, A_μ حيث:

$$J_\mu = (\vec{J}, ic\rho) \quad , \quad A_\mu = (\vec{A}, i\phi)$$

والتي سبق الحصول عليها وهي:

$$J_x = \alpha(J'_x + v\rho'), \quad J_y = J'_y, \quad J_z = J'_z$$

$$\rho = \alpha(\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x)$$

$$A_x = \alpha(A'_x + \frac{v}{c} \phi'), \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \phi = \alpha(\phi' + \frac{v}{c} A'_x)$$

وبمعلومية أن $\square = \square'$ (مثال سابق)

فبعد التحويل من S إلى S' تصبح العلاقتين (1), (2)

$$\square' \alpha(\phi' + \frac{v}{c} A'_x) = -4\pi \alpha(\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x) \quad \text{--- (4)}$$

$$\square' \alpha(A'_x + \frac{v}{c} \phi') = -\frac{4\pi}{c} \alpha(J'_x + v\rho') \quad \text{--- (5)}$$

(أخذنا المركبة $x \perp \vec{A}$)

بضرب (4) في $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\begin{aligned} \square' \alpha(\frac{v}{c} \phi' + \frac{v^2}{c^2} A'_x) &= -4\pi \alpha(\frac{v}{c} \rho' + \frac{v^2}{c^3} J'_x) \\ &= -\frac{4\pi\alpha}{c} (v\rho' + \frac{v^2}{c^2} J'_x) \end{aligned} \quad \text{--- (6)}$$

$$\square' \alpha A'_x (1 - \frac{v^2}{c^2}) = -\frac{4\pi\alpha}{c} J'_x (1 - \frac{v^2}{c^2}) \quad \text{بطرح (5) من (6):}$$

$$[\alpha^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}] \alpha^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1 \quad \text{ولكن:}$$

فبقسمة الطرفين على $\alpha(1 - \frac{v^2}{c^2})$ نحصل على:

$$\square' A'_x = -\frac{4\pi}{c} J'_x$$

وبالمثل بالنسبة للمركبتين y, z وفي صورة إتجاهية يمكننا كتابة:

$$\boxed{\vec{A}' = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}'}$$

أيضاً: بضرب (5) في $\beta = \frac{v}{c}$

$$\begin{aligned} \boxed{\alpha \left(\frac{v}{c} A'_x + \frac{v^2}{c^2} \phi' \right)} &= -\frac{4\pi}{c} \alpha \left(\frac{v}{c} J'_x + \frac{v^2}{c} \rho' \right) \\ &= -4\pi \alpha \left(\frac{v}{c^2} J'_x + \frac{v^2}{c^2} \rho' \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ب طرح (4) من (7):

$$\boxed{\alpha \cdot \phi' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} = -4\pi \alpha \rho' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

وبقسمة الطرفين على $\alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$ نحصل على:

$$\boxed{\phi' = -4\pi \rho'}$$

وهو المطلوب الأول.

المطلوب الثاني: إثبات أن شرط لورنتز يكون متآلفاً

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0$$

نكتب شرط لورنتز في المجموعة S' :

وبدلالة المركبات:

$$\frac{\partial A'_x}{\partial x'} + \frac{\partial A'_y}{\partial y'} + \frac{\partial A'_z}{\partial z'} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0 \quad (8)$$

ولكن: عند إثباتنا أن $\square = \square'$ وجدنا أن:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

بالتعويض في (8) واستخدام معادلات التحويل من النظام S' إلى النظام S

للكميات A'_x, A'_y, A'_z, ϕ' نحصل على:

$$\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \alpha \left(A_x - \frac{v}{c} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z) \\ + \frac{\alpha}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \alpha \left(\phi - \frac{v}{c} A_x \right) = 0$$

$$\therefore \alpha^2 \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{v}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ + \frac{\alpha^2}{c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{v^2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) = 0$$

$$\therefore \alpha^2 \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = 0 \right.$$

$$\therefore \frac{\partial A_x}{\partial x} \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0$$

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$$

أي أن شرط لورنتز يكون لا متغيراً نسبياً وهو المطلوب ثانياً.

مسألة: أثبت أن الصورة المتألفة (Covariant) لمعادلات الجهدين الكهرومغناطيسيين يمكن كتابتها بالصورة:

$$\boxed{\partial_\mu (\partial_\mu A_\nu) = -\frac{4\pi}{c} J_\nu}$$

حيث $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ، μ, ν تأخذ القيم 1, 2, 3, 4

ومن ذلك أثبت أن هذه المعادلة تكون لا متغيرة نسبياً (Relativistic Invariant)، وذلك باعتبار أن مؤثر دالمبيرت $\square = \square'$ يكون لا متغير نسبياً.

حل المسألة: معادلتى الجهدين $\vec{A}, \phi$

$$\square \phi = -4\pi\rho \quad \text{--- (1)} , \quad \square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad \text{--- (2)}$$

حيث:

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

وبأخذ: $x = x_1, y = x_2, z = x_3, ict = x_4$

$$\begin{aligned} \therefore \square &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \\ &= \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu \quad \text{وبكتابة:}$$

$$\therefore \square = \partial_\mu \partial_\mu \quad (1)$$

وتعرف هذه العلاقة بالصورة المتغايرة أو المتألفة للمؤثر $\square$

وتصبح المعادلتين (1), (2) بالصورة:

$$(1) \partial_\mu [\partial_\mu \phi] = -4\pi\rho$$

$$\therefore \partial_\mu [\partial_\mu (i\phi)] = -\frac{4\pi}{c} (ic\rho)$$

ولكن: $A_4 = i\phi, j_4 = ic\rho$

$$\therefore \partial_\mu [\partial_\mu A_4] = -\frac{4\pi}{c} j_4 \quad (2)$$

$$(2) \partial_\mu [\partial_\mu \vec{A}] = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

وبكتابة: $\vec{A} = A_n, \vec{j} = j_n, n=1,2,3$

$$\therefore \partial_\mu [\partial_\mu A_n] = -\frac{4\pi}{c} j_n \quad (3)$$

المعادلتين (3), (2) يمكن كتابتهما في المعادلة الآتية:

$$\partial_\mu [\partial_\mu A_v] = -\frac{4\pi}{c} j_v \quad (4)$$

حيث $v=1,2,3,4$ وهو المطلوب أولاً.

المطلوب الثاني: إثبات أن المعادلة (4) تكون لا متغيرة نسبياً، وهذا يعني إثبات أن المعادلتين (2)، (1) يكونان لا متغيران نسبياً.

ولإثبات ذلك: حيث أن: $\square = \square'$

$$\therefore \partial_\mu \partial_\mu = \partial'_\mu \partial'_\mu$$

وحيث أن: $A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$, $j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu$ (معادلات التحويل للمتجهين A_μ, j_μ)

ففي المجموعة S' تصبح المعادلة (4):

$$\partial'_\mu [\partial'_\mu A'_\mu] = -\frac{4\pi}{c} j'_\mu$$

وبالانتقال إلى المجموعة S :

$$\therefore \partial_\mu \partial_\mu a_{\mu\nu} A_\nu = -\frac{4\pi}{c} a_{\mu\nu} j_\nu$$

$$\therefore a_{\mu\nu} [\partial_\mu \partial_\mu A_\nu + \frac{4\pi}{c} j_\nu] = 0$$

وحيث أن $a_{\mu\nu} \neq 0$ ، فإن

$$\therefore \partial_\mu \partial_\mu A_\nu + \frac{4\pi}{c} j_\nu = 0$$

$$\therefore \partial_\mu (\partial_\mu A_\nu) = -\frac{4\pi}{c} j_\nu$$

وهذا يعني أنه: عند الانتقال من المجموعة S' إلى المجموعة S فإن شكل المعادلة (معادلة الجهود الكهرومغناطيسية) لا تتغير. وهو المطلوب ثانياً.

[٣] معادلات التحويل لمركبات شدتي المجالين الكهربى والمغناطيسى:

حصلنا فيما سبق على معادلات التحويل لكل من:

$$\rho, \vec{j}(j_x, j_y, j_z), \phi, \vec{A}(A_x, A_y, A_z), \square$$

ولأن نوجد معادلات التحويل للمجالين الكهربى $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$

والمغناطيسى $\vec{H}(H_x, H_y, H_z)$

حيث أن:

$$\vec{E}' = -\text{grad } \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} \quad (1)$$

$$\vec{H}' = \text{curl } \vec{A}' = \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} \right) \hat{i} + \dots \quad (2)$$

(في المجموعة S')

أيضاً: فإن معادلات التحويل للمؤثرات التفاضلية:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (3)$$

أيضاً: معادلات التحويل للمتجه الرباعي A_μ :

$$A'_x = \alpha(A_x - \beta\phi), \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z$$

$$\phi' = \alpha(\phi - \beta A_x) \quad (4)$$

من العلاقة (1): المركبة x لـ $\vec{E}$:

$$E'_x = -\frac{\partial \phi'}{\partial x'} - \frac{1}{c} \frac{\partial A'_x}{\partial t'}$$

$$= -\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \alpha \left(\phi - \frac{v}{c} A_x \right) - \frac{\alpha}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \alpha \left(A_x - \frac{v}{c} \phi \right)$$

$$= -\alpha^2 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{v}{c} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{v^2}{c^3} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{v}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{v^2}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right]$$

$$= -\alpha^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial A_x}{\partial t} \right]$$

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = E_x \quad \left| \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 \right.$$

$$\therefore \boxed{E'_x = E_x} \quad (5)$$

$$E'_y = -\frac{\partial \phi'}{\partial y'} - \frac{1}{c} \frac{\partial A'_y}{\partial t}$$

المركبة y لـ $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} &= -\alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi - \frac{v}{c} A_x \right) - \frac{\alpha}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y \\ &= -\alpha \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{c} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + v \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \right] \\ &= -\alpha \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \frac{v}{c} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

ولكن:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = -E_y$$

$$\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i} H_x + \hat{j} H_y + \hat{k} H_z$$

$$\therefore H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\therefore E'_y = -\alpha \left[-E_y + \frac{v}{c} H_z \right] = \alpha \left(E_y - \frac{v}{c} H_z \right)$$

$$\therefore \boxed{E'_y = \alpha (E_y - \beta H_z)}$$

(6)

المركبة z لـ $\vec{E}$:

$$E'_z = -\frac{\partial \phi'}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial A'_z}{\partial t'}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial z} \cdot \alpha \left(\phi - \frac{v}{c} A_x \right) - \frac{\alpha}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) A_z \\ &= -\alpha \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + \frac{v}{c} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] \\ &= -\alpha \left[\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + \frac{v}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad \text{ولكن:}$$

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\therefore E'_z = \alpha \left(E_z + \frac{v}{c} H_y \right)$$

$$\therefore \boxed{E'_z = \alpha (E_z + \beta H_y)} \quad \text{---(7)}$$

ولإيجاد معادلات التحويل لمركبات شدة المجال المغناطيسي $\vec{H}$:

المركبة H_x

$$H'_x = (\text{curl } \vec{A}')_x = \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} \right) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = H_x$$

وذلك لأن $A'_z = A_z$, $A'_y = A_y$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad \therefore \boxed{H'_x = H_x} \quad \text{---(8)}$$

المركبة H_y

$$\begin{aligned} H'_y &= (\text{curl } \vec{A}')_y \\ &= \left(\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \alpha \left(A_x - \frac{v}{c} \phi \right) - \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_z \\ &= \alpha \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{v}{c} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \right] \\ &= \alpha \left[H_y + \frac{v}{c} E_z \right] \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} H_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ E_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

$$\therefore \boxed{H'_y = \alpha (H_y + \beta E_z)} \quad \text{---(9)}$$

المركبة H_z

$$H'_z = (\text{curl } \vec{A}')_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'}$$

$$= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_y - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \alpha \left(A_x - \frac{v}{c} \phi \right)$$

$$= \alpha \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \frac{v}{c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) \right]$$

$$= \alpha \left[H_z + \frac{v}{c} (-E_y) \right]$$

$$= \alpha \left(H_z - \frac{v}{c} E_y \right)$$

$$\therefore \boxed{H'_z = \alpha(H_z - \beta E_y)} \quad \text{--- (10)}$$

الخلاصة: معادلات التحويل لمركبات $\vec{E}, \vec{H}$:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z), \quad E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y)$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \alpha(H_y + \beta E_z), \quad H'_z = \alpha(H_z - \beta E_y)$$

المعادلات العكسية:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \alpha(E'_y + \beta H'_z), \quad E_z = \alpha(E'_z - \beta H'_y)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \alpha(H'_y - \beta E'_z), \quad H_z = \alpha(H'_z + \beta E'_y)$$

أمثلة محلولة:

$$\vec{E} = \vec{E}' = \text{Inv.}$$

مثال (١): أثبت أن

$$\vec{H} = \vec{H}' = \text{Inv.}$$

في التقريب الكلاسيكي ($v \ll c$).

الحل: في التقريب الكلاسيكي: $v \ll c$

$$\frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow \boxed{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \rightarrow \boxed{\beta \rightarrow 0}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow 1}$$

وتصبح معادلات التحويل:

$$E_x = E'_x, E_y = E'_y, E_z = E'_z \quad \therefore \vec{E} = \vec{E}'$$

$$H_x = H'_x, H_y = H'_y, H_z = H'_z \quad \therefore \vec{H} = \vec{H}'$$

$$\therefore \vec{E} = \text{Inv.}, \quad \vec{H} = \text{Inv.}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): أثبت أن الصورة الإتجاهية لمعادلات التحويل لشدتي المجالين الكهربى ($\vec{E}$) والمغناطيسى ($\vec{H}$) هي:

$$\vec{E}' = \alpha \vec{E} + (1 - \alpha) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{v}}{v^2} + \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) \quad \text{_____ (i)}$$

$$\vec{H}' = \alpha \vec{H} + (1 - \alpha) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{H}) \vec{v}}{v^2} - \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{E}) \quad \text{_____ (ii)}$$

حيث السرعة $\vec{v}$ تكون في إتجاه محور x .

الحل: حيث أن $\vec{v}$ في إتجاه x

$$\therefore \vec{v} = (v, 0, 0)$$

$$\frac{1}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}.$$

$$= \frac{1}{c} [\vec{i}(0) + \vec{j}(-v H_z) + \vec{k}(v H_y)]$$

$$= \vec{i}(0) + \vec{j}\left(-\frac{v}{c} H_z\right) + \vec{k}\left(\frac{v}{c} H_y\right)$$

$$\frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \left[0, -\frac{\alpha v}{c} H_z, \frac{\alpha v}{c} H_y\right] \quad \text{_____ (1)}$$

أيضاً

$$\frac{1}{c} (\vec{v} \wedge \vec{E}) = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c} [\vec{i}(0) + \vec{j}(-v E_z) + \vec{k}(v E_y)]$$

$$= \vec{i}(0) + \vec{j}(-\frac{v}{c} E_z) + \vec{k}(\frac{v}{c} E_y)$$

$$\therefore \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{E}) = [0, -\frac{\alpha v}{c} E_z, \frac{\alpha v}{c} E_y] \quad \text{_____ (2)}$$

ايضاً:

$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{E} &= v(\hat{v} \cdot \vec{E}) = v E_x \\ (\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{v} &= v \vec{v} E_x \\ \frac{(\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{v}}{v^2} &= \frac{\vec{v}}{v} E_x = \hat{v} E_x = \hat{i} E_x \end{aligned}$	$\begin{aligned} \vec{v} &= v \hat{v} \\ \hat{v} \cdot \vec{E} &= E_x \\ [\hat{v} = \hat{i}] \\ \hat{v} &= \frac{\vec{v}}{v} \quad (\text{متجه وحدة في اتجاه } v) \end{aligned}$
---	--

$$\therefore \frac{(\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{v}}{v^2} = [E_x, 0, 0] \quad \text{_____ (3)}$$

وبالمثل:

$$\frac{(\vec{v} \cdot \vec{H}) \vec{v}}{v^2} = [H_x, 0, 0] \quad \text{_____ (4)}$$

ولإثبات أن (i), (ii) هما صورتان الإتجاهيتان لمعادلات التحويل لكل من $\vec{E}$, $\vec{H}$ أي للمركبات

$$(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$$

من (i), (ii) وباستخدام العلاقات (1), (2), (3), (4)

نجد أن:

$$E'_x = \alpha E_x + (1 - \alpha)[E_x] + 0 = \alpha E_x + E_x - \alpha E_x = E_x$$

$$\therefore \boxed{E'_x = E_x}$$

$$E'_y = \alpha E_y + (1 - \alpha)[0] + (-\frac{\alpha v}{c} H_z) = \alpha (E_y - \frac{v}{c} H_z)$$

$$\therefore \boxed{E'_y = \alpha (E_y - \beta H_z)}$$

$$E'_z = \alpha E_z + (1 - \alpha)[0] + \left(\frac{\alpha v}{c} H_y\right) = \alpha \left(E_z + \frac{v}{c} H_y\right)$$

$$\therefore \boxed{E'_z = \alpha (E_z + \beta H_y)}$$

وبالمثل: من المعادلة (ii) وباستخدام (4)، نجد أن:

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \alpha (H_y + \beta E_z), \quad H'_z = \alpha (H_z - \beta E_y)$$

وهذا يعني أن العلاقتين (i)، (ii) هما صورتان الإتجاهيتان لمعادلات التحويل لمركبات كل من $\vec{E}$ ، $\vec{H}$ ، وهو المطلوب.

مثال (٣): أثبت أن معادلات ماكسويل للمجالات الكهرومغناطيسية تكون متآلفة (Covariant) عند الانتقال من النظام S إلى النظام S' وذلك باستخدام تحويلات لورنتز النسبية.

الحل: معادلات ماكسويل في النظام S :

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{--- (1)} \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{--- (3)} \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{--- (4)}$$

وفي صورة مركبات:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad \text{--- (5)}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad \text{--- (6)}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}] \quad \text{--- (7)}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \frac{4\pi}{c} (j_x \hat{i} + j_y \hat{j} + j_z \hat{k}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}] \quad \text{--- (8)}$$

نقسم معادلات ماكسويل إلى مجموعتين:

المجموعة الأولى: تشمل المعادلتين (4), (1) ونثبت أنهما متآلفتان (Covariant)

نستخدم العلاقات الآتية:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \alpha(E'_y + \beta H'_z), \quad E_z = \alpha(E'_z - \beta H'_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad \rho = \alpha \left(\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x \right)$$

بالتعويض في (5):

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) E'_x + \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \alpha \left(E'_y + \frac{v}{c} H'_z \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \alpha \left(E'_z - \frac{v}{c} H'_y \right) \\ & = 4\pi \cdot \alpha \left(\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \right) - \frac{v}{c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{\partial H'_z}{\partial y'} + \frac{\partial H'_y}{\partial z'} \right) = 4\pi \left(\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x \right)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - 4\pi \rho' \right) = -\frac{v}{c} \left(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} j'_x \right)$$

بأخذ:

$$\left(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - 4\pi \rho' \right) = P$$

$$\left(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} j'_x \right) = Q$$

$$\therefore \boxed{P = -\frac{v}{c} Q} \quad (9)$$

ومن (8) بأخذ المركبة x (معامل $\hat{i}$):

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} j_x = 0 \quad (10)$$

وعند الانتقال للمجموعة S' فإن:

$$H_y = \alpha(H'_y - \beta E'_z) \quad , \quad H_z = \alpha(H'_z + \beta E'_y) \quad , \quad j_x = \alpha(j'_x + v\rho')$$

بالتعويض في (10):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \alpha(H'_z + \frac{v}{c} E'_y) - \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \alpha(H'_y - \frac{v}{c} E'_z) \\ & - \frac{1}{c} \cdot \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) E'_x - \frac{4\pi}{c} \cdot \alpha(j'_x + v\rho') = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} j'_x \\ = -\frac{v}{c} \left(\frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - 4\pi\rho' \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{Q = -\frac{v}{c} P} \quad (11)$$

من (9), (11) يمكن إثبات أن: $Q = 0$, $P = 0$
بالتعويض من (9) في (11):

$$Q = -\frac{v}{c} \left[-\frac{v}{c} Q \right] = \frac{v^2}{c^2} Q$$

$$\therefore \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) Q = 0$$

$$\boxed{P=0} \quad \text{ومن (9) ,} \quad \boxed{Q=0} \quad \leftarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} \neq 0 \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - 4\pi\rho' = 0$$

$$\therefore \text{div } \vec{E}' - 4\pi\rho' = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\text{div } \vec{E}' = 4\pi\rho'}$$

أيضاً:

$$\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} j'_x = 0$$

$$(\text{curl } \vec{H}')_x - \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} j'_x = 0$$

$$(\text{curl } \vec{H}')_x = \frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'}$$

$$\therefore (\text{curl } \vec{H}')_x = \frac{4\pi}{c} j'_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E'_x}{\partial t'}$$

وبالمثل بالنسبة للمركبتين y, z :

$$\therefore \text{curl } \vec{H}' = \frac{4\pi}{c} \vec{j}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}$$

∴ المعادلتان (4), (1) لماكسويل هما معادلتان متآلفتان (covariants).

المجموعة الثانية: تشمل المعادلتين (3), (2) ونثبت أنهما متآلفتان.

فمن المعادلة (6):

$$\frac{\partial H'_x}{\partial x} + \frac{\partial H'_y}{\partial y} + \frac{\partial H'_z}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) H'_x + \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \alpha \left(H'_y - \frac{v}{c} E'_z \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \alpha \left(H'_z + \frac{v}{c} E'_y \right) = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'} \right) = \frac{v}{c} \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'} \right)$$

وبأخذ:

$$\left(\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'} \right) = L$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'} = M$$

$$\therefore L = \frac{v}{c} M$$

_____ (12)

ومن المعادلة (7) بأخذ المركبة x :

$$\therefore \frac{\partial E'_z}{\partial y} - \frac{\partial E'_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

وعند الانتقال إلى المجموعة S' :

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \alpha(E'_z - \frac{v}{c} H'_y) - \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \alpha(E'_y + \frac{v}{c} H'_z) + \frac{1}{c} \cdot \alpha(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'}) H'_x = 0$$

$$\therefore (\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'}) = \frac{v}{c} (\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'})$$

$$\therefore \boxed{M = \frac{v}{c} L} \quad \text{--- (113)}$$

من (12), (13) يمكن إثبات أن: $M = 0, L = 0$

بالتعويض من (12) في (13):

$$M = \frac{v}{c} (\frac{v}{c} M) = \frac{v^2}{c^2} M$$

$$\therefore (1 - \frac{v^2}{c^2}) M = 0$$

$$\boxed{L=0} \leftarrow \boxed{M=0} \leftarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} \neq 0 \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore \frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{div } \vec{H}' = 0}$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'}$$

$$(\text{curl } \vec{E}')_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'}$$

$$\left| (\text{curl } \vec{E}')_x = \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} \right|$$

وبالمثل بالنسبة للمركبتين y, z

$$\therefore \boxed{\text{curl } \vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t'}}$$

∴ المعادلتان (3), (2) لماكسويل هما معادلتان متآلفتان. وهو المطلوب.

مسائل

(١) باستخدام الصورة الاتجاهية لمعادلات التحويل للمتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ ، وإذا كانت

$$\frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{E^2 + H^2} = \frac{\vec{\beta}}{1 + \beta^2}$$

حيث $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ، $\vec{E}, \vec{H}$ هما شدتا المجالين الكهربائي والمغناطيسي في

المجموعة S ، v هي سرعة المجموعة S' بالنسبة إلى S ، فأثبت أنه عند الانتقال من S إلى S' فإن المتجهين $\vec{E}', \vec{H}'$ يكونان متوازيان (أي أن $\vec{E}' \wedge \vec{H}' = 0$).

(٢) باستخدام معادلات التحويل لمركبات المتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ ، أثبت أنه عند الانتقال من المجموعة S إلى المجموعة S' فإن الكميتين:

$$(i) \vec{E} \cdot \vec{H} \quad , \quad (ii) E^2 - H^2$$

تكونان لا متغيرتين (Invariants)، أي أن:

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = \vec{E}' \cdot \vec{H}' \quad , \quad E^2 - H^2 = E'^2 - H'^2$$

وتعرف هاتين الكميتان بلا متغيرات المجال (Field Invariants).

حل المسألة (١): باعتبار أن:

$$\frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{E^2 + H^2} = \frac{\vec{\beta}}{1 + \beta^2} \quad \text{_____} (1)$$

حيث $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ، وكان $\vec{E}, \vec{H}$ هما المجالان في النظام S فلايثبات أن $\vec{E}', \vec{H}'$ في

النظام S' يكونان متوازيان أي أن: $\vec{E}' \wedge \vec{H}' = 0$

الإثبات: من (1)

$$\frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{E^2 + H^2} = \frac{\vec{v}}{c(1 + \beta^2)} \quad \text{_____} (2)$$

بالضرب قياسياً في $\vec{E}$:

$$\frac{\vec{E} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})}{E^2 + H^2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{c(1 + \beta^2)} \rightarrow \therefore \vec{E} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{_____} (3)$$

حيث $\vec{H} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = 0$ ، وبالضرب قياسياً في $\vec{H}$:

$$\frac{\vec{H} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})}{E^2 + H^2} = \frac{\vec{H} \cdot \vec{v}}{c(1 + \beta^2)} \rightarrow \therefore \vec{H} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4)$$

حيث $\vec{H} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = 0$ ، وحيث أن الصورة الإتجاهية للمجالين $\vec{E}, \vec{H}$ هي :

$$\vec{E}' = \alpha \vec{E} + (1 - \alpha) \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{E})}{v^2} + \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H})$$

$$\vec{H}' = \alpha \vec{H} + (1 - \alpha) \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{H})}{v^2} - \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{E})$$

فباستخدام (3)، (4) :

$$\therefore \vec{E}' = \alpha \vec{E} + \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) , \vec{H}' = \alpha \vec{H} - \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{E})$$

وبالضرب إتجاهياً :

$$\begin{aligned} \vec{E}' \wedge \vec{H}' &= \alpha^2 (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \frac{\alpha^2}{c} [\vec{E} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{E})] + \frac{\alpha^2}{c} [(\vec{v} \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H}] \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{c^2} [(\vec{v} \wedge \vec{H}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{E})] \end{aligned} \quad (5)$$

ولكن :

$$\vec{E} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{E}) = (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{E} = E^2 \vec{v} - 0 = E^2 \vec{v}$$

$$(\vec{v} \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} = -\vec{H} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{H})$$

$$= -[(\vec{H} \cdot \vec{H}) \vec{v} - (\vec{H} \cdot \vec{v}) \vec{H}] = -H^2 \vec{v} + 0 = -H^2 \vec{v}$$

$$(\vec{v} \wedge \vec{H}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{E}) = [(\vec{v} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{E}] \vec{v} - [(\vec{v} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{v}] \vec{E}$$

$$= [\vec{v} \cdot (\vec{H} \wedge \vec{E})] \vec{v} - 0 = -[\vec{v} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})] \vec{v}$$

بالتعويض في (5) :

$$\vec{E}' \wedge \vec{H}' = \alpha^2 (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \frac{\alpha^2}{c} E^2 \vec{v} + \frac{\alpha^2}{c} (-H^2 \vec{v}) + \frac{\alpha^2}{c^2} [\vec{v} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})] \vec{v}$$

$$= \alpha^2 (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \alpha^2 (E^2 + H^2) \frac{\vec{v}}{c} + \frac{\alpha^2}{c^2} [\vec{v} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})] \vec{v}$$

$$\vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{E^2 + H^2}{1 + \beta^2} \right) \quad \text{ومن (2):}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{E}' \wedge \vec{H}' &= \alpha^2 \frac{\vec{v}}{c} \frac{E^2 + H^2}{1 + \beta^2} - \alpha^2 (E^2 + H^2) \frac{\vec{v}}{c} + \frac{\alpha^2}{c^2} \left[\frac{v^2}{c} \frac{E^2 + H^2}{1 + \beta^2} \right] \vec{v} \\ &= \alpha^2 \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{E^2 + H^2}{1 + \beta^2} \right) [1 - (1 + \beta^2) + \beta^2] = 0 \quad \left| \beta = \frac{v}{c} \right.\end{aligned}$$

حل المسألة (٢): لإثبات أن الكميتين

(i) $\vec{E} \cdot \vec{H}$, (ii) $E^2 - H^2$

يشكلان كميتان لا متغيرتان باستخدام قوانين تحويل $\vec{E}, \vec{H}$

$$\begin{aligned}\text{(i) } \vec{E} \cdot \vec{H} &= E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z \\ &= E'_x H'_x + \alpha [E'_y + \beta H'_z] \cdot \alpha [H'_y - \beta E'_z] \\ &\quad + \alpha [E'_z - \beta H'_y] \cdot \alpha [H'_z + \beta H'_y] \\ &= E'_x H'_x + \alpha^2 [E'_y H'_y (1 - \beta^2) + E'_z H'_z (1 - \beta^2)] \\ &\quad \alpha^2 (1 - \beta^2) = 1 \quad \text{ولكن:}\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{E} \cdot \vec{H} = E'_x H'_x + E'_y H'_y + E'_z H'_z = \vec{E}' \cdot \vec{H}' = \text{Inv.}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii) } E^2 - H^2 &= \vec{E} \cdot \vec{E} - \vec{H} \cdot \vec{H} \\ &= E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \\ &= E_x'^2 + \alpha^2 [E'_y + \beta H'_z]^2 + \alpha^2 [E'_z - \beta H'_y]^2 \\ &\quad - [H_x'^2 + \alpha^2 (H'_y - \beta E'_z)^2 + \alpha^2 (H'_z + \beta H'_y)^2] \\ &= E_x'^2 + E_y'^2 \cdot \alpha^2 (1 - \beta^2) + E_z'^2 \cdot \alpha^2 (1 - \beta^2) \\ &\quad - [H_x'^2 + \alpha^2 H_y'^2 (1 - \beta^2) + \alpha^2 \cdot H_z'^2 (1 - \beta^2)] \\ &= E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2 - [H_x'^2 + H_y'^2 + H_z'^2] = E'^2 - H'^2 = \text{Inv.}\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

[4] القوة المؤثرة على شحنة متحركة في مجال كهرومغناطيسي

(قوة لورنتز - Lorentz Force)

تتكون القوة المؤثرة على شحنة e تتحرك في مجال كهرومغناطيسي من جزئين

$$(1) \text{ جزء ناتج عن المجال الكهربائي (القوة الكهربائية): } \vec{F}_{el} = e \vec{E}$$

$$(2) \text{ جزء ناتج عن المجال المغناطيسي (القوة المغناطيسية): } \vec{F}_{mg} = \frac{e}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H})$$

$$\therefore \text{ القوة الكلية: } \vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mg} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) \right)$$

وتعرف هذه القوة بقوة لورنتز.

الإثبات: نفرض أن الشحنة (أو الجسم المشحون) موجود في المجموعة S'

وتتحرك بسرعتها $\vec{v}$ (في إتجاه محور x) بالنسبة للمجموعة S .

$$\therefore \text{ بالنسبة لراصد في } S: v_x = v, v_y = 0, v_z = 0$$

$$\text{وبالنسبة للراصد في } S' (\text{موجود مع الشحنة}): v'_x = 0, v'_y = 0, v'_z = 0$$

ونظراً لأن الشحنة ساكنة في S' فلا يوجد لها مجال مغناطيسي

$$\therefore H'_x = 0, H'_y = 0, H'_z = 0$$

القوى المؤثرة على الشحنة (في المجموعة S'):

$$\vec{F}' = (F'_x, F'_y, F'_z)$$

حيث:

$$F'_x = e E'_x, F'_y = e E'_y, F'_z = e E'_z \quad (1)$$

(نتيجة المجال الكهربائي للشحنة في S').

في المجموعة S : تتحول مركبات القوة طبقاً لقوانين النسبية الخاصة

$$F'_x = F_x, F'_y = \alpha F_y, F'_z = \alpha F_z \quad (2)$$

(في حالة إذا كانت الشحنة ساكنة في S')

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{حيث}$$

معادلات التحويل للمجال الكهربى:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z), \quad E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y) \quad (3)$$

من (1), (2), (3) نجد أن:

$$F'_x = e E'_x, \quad F'_y = e(E'_y - \beta H'_z), \quad F'_z = e(E'_z + \beta H'_y)$$

وهذه المعادلات الثلاثة يمكن كتابتها في صورة إتجاهية هي:

$$\vec{F}' = e[\vec{E}' + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H}')] \quad (4)$$

ونلك لأن:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H}') &= \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{c}[\hat{i}(0) + \hat{j}(-v H_z) + \hat{k}(v H_y)] \quad \left| \beta = \frac{v}{c} \right. \\ &= \hat{i}(0) + \hat{j}(-\beta H_z) + \hat{k}(\beta H_y) \end{aligned}$$

المعادلة (4) هي المعادلة التي نعطينا قوة لورنتز (القوة المؤثرة على شحنة تتحرك في مجال كهرومغناطيسي).

مثال: أثبت أن القوة المؤثرة على جسيم مشحون يتحرك في مجال كهرومغناطيسي يمكن كتابتها بالصورة:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}u - \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}u + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{q}} \right) \quad \text{أو بالصورة:}$$

حيث $\dot{q} = \vec{v}$ السرعة التي تتحرك بها الشحنة

u طاقة الجهد في المجال الكهرومغناطيسي وتعطى بالعلاقة:

$$u = e[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

الحل:

ملحوظة: إذا تحركت شحنة في مجال كهرومغناطيسي فإن طاقة جهد لها تتكون من جزئين:

(١) جزء كهربى: $u_{el} = e\phi$ حيث ϕ الجهد الكهربى (القياسى).

(٢) جزء مغناطيسى: $u_{mg} = -\frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})$ حيث $\vec{A}$ الجهد المغناطيسى (الإتجاهى).

وتكون طاقة الجهد الكلية:

$$u = u_{el} + u_{mg} = e \left[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

ولحل المثال: القوة المؤثرة على الشحنة المتحركة في المجال هي قوة لورنتز

$$\vec{F} = e \left[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H}) \right] \quad (1)$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

بالتعويض في (1):

$$\vec{F} = e \left[-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \{ \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \} \right] \quad (2)$$

ومن المتجهات:

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

أيضاً: يمكن إثبات العلاقة:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3)$$

كالآتى:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} &= (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \vec{A} \\ &= \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{A} \\ &= \left(\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \therefore \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \therefore \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) &= \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \left[\frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \quad (4)\end{aligned}$$

بالتعويض من (4) في (2):

$$\begin{aligned}\therefore \vec{F} &= e \left[-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \{ \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \} \right] \\ &= e \left[-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \\ &= -\vec{\nabla} \left[e \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right\} \right] - \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}\end{aligned}$$

وبكتابة: $u = e \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right\}$

$$\therefore \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} u - \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}} \quad (5)$$

أيضاً بكتابة: $-\frac{e}{c} \vec{A} = \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial u}{\partial \dot{q}}$ (من تعريف (علاقة) u)

بالتعويض في (5):

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} u + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{q}} \right)}$$

ومن ذلك نرى أن القوة المؤثرة على شحنة متحركة في مجال كهرومغناطيسي يمكن اشتقاقها من جهد يعتمد على السرعة، وهو المطلوب.

[٥] الاجرانجيان والهاملتونيان لجسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي

(١) دالة لاجرانج (الاجرانجيان):

يمكن إثبات أن تلك الدالة في وجود المجال الكهرومغناطيسي تأخذ الصورة الآتية:

$$L = T - e\left[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right] \quad (1)$$

حيث $\phi, \vec{A}$ هما الجهدان القياسي والإتجاهي للمجال، $\vec{v}$ ، T طاقة حركة وسرعة الجسم المشحون، e شحنة الجسم.

كلاسيكياً: $T = \frac{1}{2}mv^2$ (الصورة الكلاسيكية لطاقة الحركة)

$$\therefore L = \frac{1}{2}mv^2 - e\left[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right] \quad (2)$$

نسبياً: $T = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})$ (الصورة النسبية لطاقة الحركة)

حيث m_0 الكتلة الساكنة.

$$\therefore L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}) - e\left[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right] \quad (3)$$

إثبات العلاقة (1): من المعلوم في علم الإلكتروديناميكا أن: طاقة الجهد لجسيم

مشحون تتكون من جزئين

$$(1) \text{ جزء كهربائي: } u_e = e\phi, \quad (2) \text{ جزء مغناطيسي: } u_m = -\frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

∴ طاقة الجهد الكلية لجسيم مشحون بشحنة e يتحرك في مجال كهرومغناطيسي:

$$\begin{aligned} u &= u_e + u_m = e\phi - \frac{e}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \\ &= e\left[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$L = T - u = T - e\left[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right] \quad \text{دالة لاجرانج:}$$

ملحوظة (1): من دالة لاجرانج النسبية (3) يمكن الحصول على دالة لاجرانج

الكلاسيكية (2) كالآتي:

بفك الحد الأول من (3) واعتبار أن $v \ll c$ (الحالة الكلاسيكية) أي بإهمال

قوى $\frac{v^2}{2}$ والقوى الأعلى.

$$\begin{aligned}
 L &= m_0 c^2 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - \dots \right) \right] - e \left[\left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} m_0 v^2 - e \left[\left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} m v^2 - e \left[\left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right]
 \end{aligned}$$

ملحوظة (٢): من الصورة النسبية

$$\begin{aligned}
 L &= m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) - e \left[\left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right] \\
 &= m_0 c^2 - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \left[\left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right]
 \end{aligned}$$

وبإهمال الكمية $m_0 c^2$ التي تمثل طاقة السكون أي طاقة الجسم وهو ساكن، نحصل على الصورة المعتادة لدالة لاجرانج لجسيم متحرك في مجال كهرومغناطيسي وهي:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \left[\left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right]$$

مثال: باستخدام قوة لورنتز لجسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي وباستخدام معادلات لاجرانج للحركة أوجد دالة لاجرانج في الصورة الكلاسيكية:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e \left[\left(\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \right]$$

الحل: قوة لورنتز:

$$\vec{F} = e \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) \right] = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \quad (1)$$

بالتعويض عن:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

في (1) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e[-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A})]$$

وحيث أن:

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e[-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}) + \vec{\nabla} \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

$$= e[-\vec{\nabla}(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}]$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{استخدمنا العلاقة:})$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}) = -e\vec{\nabla}[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A}))] \quad \text{---(2)}$$

من المعادلة (2) نرى أن الطرف الأيسر يعبر عن المشتقة الكلية الزمنية (بالنسبة للزمن) والطرف الأيمن يعبر عن المشتقات الجزئية بالنسبة للإحداثيات، وهي نفس الصورة العامة لمعادلة لاجرانج التي صورتها:

$$\frac{d}{dt}(\frac{dL}{d\dot{x}}) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad | \quad x = q, \dot{x} = \dot{q}$$

وبذلك يمكننا كتابة العلاقتين:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} = \frac{dL}{d\vec{v}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[-e\{\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})\}]$$

$$L = \frac{1}{2}m v^2 - e\{\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})\}$$

وهاتان العلاقتان تتحققان إذا كانت:

وهو المطلوب.

[٢] دالة هاميلتون (الهاملتونيان): تعرف دالة هاميلتون بالعلاقة:

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L \quad \text{---(1)} \quad (\text{كلاسيكياً})$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \quad \text{حيث:}$$

ومن المثال السابق:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} \quad (2)$$

(أو بتفاضل دالة لاجرانج L بالنسبة للسرعة)

ومن (2):

$$\vec{v} = \frac{1}{m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \quad (3)$$

بالتعويض عن L في الحالة الكلاسيكية وعن $\vec{p}$ من (2) في (1):

$$\begin{aligned} H &= (m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{v} - [\frac{1}{2} m v^2 - e \{ \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \}] \\ &= m v^2 + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{2} m v^2 + e \phi - \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = \frac{1}{2} m v^2 + e \phi \\ \therefore H &= \frac{1}{2} m v^2 + e \phi \quad (4) \end{aligned}$$

وهي الصورة الكلاسيكية لدالة هاملتون.

ملاحظة (١): حيث أن $T = \frac{1}{2} m v^2$, $u_{el} = e \phi$ (الجهد الإلكتروستاتيكي)

$$\therefore H = T + u_{el}$$

أي أن دالة هاملتون الكلاسيكية يمكن التعبير عنها كمجموع طاقتي الحركة والجهد الإلكتروستاتيكي للجسيم المشحون.

ملاحظة (٢): بالتعويض عن $\vec{v}$ من (3) في (4) نحصل على صورة أخرى لدالة

هاملتون الكلاسيكية لجسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي وهي:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + e \phi \quad (5)$$

ونلاحظ أن:

$$\begin{aligned} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 &= (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \\ &= \vec{p} \cdot \vec{p} - \frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}) + \frac{e^2}{c^2} A^2 \end{aligned}$$

وإذا كانت $\vec{A} \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{A}$ فإن

$$(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 = p^2 - \frac{2e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{p}) + \frac{e^2}{c^2} A^2 \quad (6)$$

دالة هاميلتون النسبية:

بالتعويض عن: $\vec{p} = m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}$ في صورتها النسبية حيث:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

وعن L في صورته النسبية:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right\}$$

في العلاقة: $H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$ نحصل على:

$$H = (m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{v} - [-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e \left\{ \phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right\}]$$

$$= m v^2 + \frac{e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}) + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + e \phi - \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$= m v^2 + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + e \phi$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + e \phi$$

$$= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e \phi$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e \phi$$

$$\therefore H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e \phi \quad (I)$$

وهي صورة دالة هاميلتون النسبية.

مثال: أثبت أن العلاقة بين الطاقة الكلية E وكمية الحركة p في حالة وجود مجال كهرومغناطيسي جهديه $\vec{A}$, ϕ في الصورة النسبية هي:

$$(E - e\phi)^2 = (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

والتي تؤول إلى العلاقة النسبية المعروفة بين $E, \vec{p}$:
في حالة غياب المجال الكهرومغناطيسي ($\phi = 0$, $\vec{A} = 0$)

الحل: من العلاقة (I) بكتابة $H = E$ (الطاقة الكلية)

$$\therefore E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\phi \quad \therefore E - e\phi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

بتربيع الطرفين والقسمة على c^2 :

$$\frac{(E - e\phi)^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{(1 - v^2/c^2)} \quad \text{_____ (1)}$$

ولكن: $\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} = m\vec{v}$

$$\therefore (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 = m^2 v^2 \quad \text{_____ (2)}$$

من (1), (2) بالطرح:

$$\begin{aligned} \frac{(E - e\phi)^2}{c^2} - (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 &= \frac{m_0^2 c^2}{(1 - v^2/c^2)} - \frac{m_0^2 v^2}{(1 - v^2/c^2)} \\ &= \frac{m_0^2 (c^2 - v^2)}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 (c^2 - v^2)}{c^2 - v^2/c^2} = m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

بضرب الطرفين في c^2 :

$$(E - e\phi)^2 - (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$\therefore (E - e\phi)^2 = (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

وهي العلاقة المطلوبة.

[٦] ممتد المجال الكهرومغناطيسي Electromagnetic Field Tensor

يعرف ممتد المجال الكهرومغناطيسي $F_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) في فراغ منكوفسكي الرباعي بالعلاقة الآتية:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

حيث A_μ هو المتجه الرباعي للجهد الكهرومغناطيسي $A_\mu = (\bar{A}, i\phi)$ ، وهذا الممتد هو ممتد غير متماثل: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ، ويمكن حساب مركبات $F_{\mu\nu}$ باستخدام التعريف السابق والنتيجة هي:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

يلاحظ أن مركبات هذا الممتد هي مركبات المجالين الكهربائي (E_x, E_y, E_z) والمغناطيسي (H_x, H_y, H_z) ولذلك سمى بممتد المجال الكهرومغناطيسي.

أمثلة مطولة:

مثال (١): باستخدام القانون:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad \text{--- (1)}$$

حيث $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

أحسب مركبات ممتد المجال الكهرومغناطيسي $F_{\mu\nu}$ وذلك بالصورة:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

الحل: باستخدام القانون (1):

وبأخذ: $\mu = 1, \nu = 1, 2, 3, 4$ نحصل على

$$F_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{array} \right.$$

$$= (\text{curl } \vec{A})_z = H_z$$

$$\text{curl } \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \dots = \hat{i} (\text{curl } \vec{A})_x + \dots$$

$$\vec{H} = \hat{i} H_x + \hat{j} H_y + \hat{k} H_z$$

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$= -(\text{curl } \vec{A})_y = -H_y$$

$$F_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{\partial (i\phi)}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial (ict)} \quad \left| \begin{array}{l} x_4 = ict \\ A_4 = -i\phi \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$= -i \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right)$$

$$= -i E_x$$

أيضاً: بأخذ: $\mu = 2, \nu = 1, 2, 3, 4$

$$F_{21} = -F_{12} = -H_z$$

$$F_{22} = \frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2} = 0$$

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = (\text{curl } \vec{A})_x = H_x$$

$$F_{24} = \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} = \frac{\partial(i\phi)}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial(ict)}$$

$$= -i\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}\right) = -i E_y$$

وبأخذ $\mu=3, \nu=1,2,3,4$

$$F_{31} = -F_{13} = H_y, \quad F_{32} = -F_{23} = -H_x$$

$$F_{34} = \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} = \frac{\partial(i\phi)}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial(ict)} = -i\left(-\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}\right) = -i E_z$$

ولخيراً بأخذ: $\mu=4, \nu=1,2,3,4$

$$F_{41} = -F_{14} = i E_x, \quad F_{42} = -F_{24} = i E_y, \quad F_{43} = -F_{34} = i E_z$$

$$F_{44} = \frac{\partial A_4}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): أثبت أن حاصل ضرب الممتد $F_{\mu\nu}$ في نفسه (أو ما يعرف بمقدار

magnituale) للممتد $F_{\mu\nu}$ هو كمية لا متغيرة (Invariant) ويعطي بالعلاقة

$$F_{\mu\nu}^2 = 2(H^2 - E^2)$$

الحل: يعرف مقدار أي ممتد بأنه:

$$F_{\mu\nu}^2 = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu}^2 = F_{1\nu}^2 + F_{2\nu}^2 + F_{3\nu}^2 + F_{4\nu}^2$$

$$= (F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2) + (F_{21}^2 + F_{22}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2)$$

$$+ (F_{31}^2 + F_{32}^2 + F_{33}^2 + F_{34}^2) + (F_{41}^2 + F_{42}^2 + F_{43}^2 + F_{44}^2)$$

ولكن: حيث أن الممتد $F_{\mu\nu}$ غير متماثل $(F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu})$

فهو يتميز بالخواص: $(\mu = \nu) \leftarrow F_{\mu\nu} = 0$

$$F_{\mu\nu}^2 = F_{\nu\mu}^2 \quad (\mu \neq \nu) \leftarrow F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (\mu \neq \nu)$$

$$F_{\mu\nu}^2 = 2[F_{12}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{41}^2 + F_{42}^2 + F_{43}^2] \quad (1)$$

ولكن: من مركبات $F_{\mu\nu}$:

$$F_{12} = H_z, F_{23} = H_x, F_{31} = H_y$$

$$F_{41} = iE_x, F_{42} = iE_y, F_{43} = iE_z$$

وبالتعويض في (1):

$$F_{\mu\nu}^2 = 2[H_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + (iE_x)^2 + (iE_y)^2 + (iE_z)^2]$$

$$= 2[(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)] = 2(H^2 - E^2)$$

∴ مقدار الممتد $F_{\mu\nu}$ (أي $F_{\mu\nu}^2$) هو $2(H^2 - E^2)$

ومن مثال سابق وجدنا أن الكمية $(H^2 - E^2)$ هي كمية لا متغيرة (Invariant)

وبالتالي فإن $(H^2 - E^2)$ هو أيضاً كمية لا متغيرة $F_{\mu\nu}^2 = \text{Inv.}$

مثال (٣): أكتب قانون التحويل لمركبات الممتد $F_{\mu\nu}$ في فراغ منكوفسكي

(الرباعي الأبعاد)، ومن ذلك أوجد معادلات التحويل لمركبات شدتي المجال

الكهربي والمغناطيسي بالصورة:

$$E'_x = E_x, E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z), E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y)$$

$$H'_x = H_x, H'_y = \alpha(H_y + \beta E_z), H'_z = \alpha(H_z - \beta E_y)$$

$$\text{حيث } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

الحل: قانون التحويل لمركبات الممتد $F_{\mu\nu}$ في فراغ منكوفسكي:

$$F'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{--- (1)}$$

حيث:

$$a_{lm} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

تطبيق القانون (1) لإيجاد معادلات التحويل لمركبات شدة المجال الكهربى $\vec{E}$:

حيث أن:

$$F_{41} = i E_x, \quad F_{42} = i E_y, \quad F_{43} = i E_z$$

$$E_x = \frac{1}{i} F_{41}, \quad E_y = \frac{1}{i} F_{42}, \quad E_z = \frac{1}{i} F_{43}$$

$$E'_x = \frac{1}{i} F'_{41}, \quad E'_y = \frac{1}{i} F'_{42}, \quad E'_z = \frac{1}{i} F'_{43}$$

أيضاً:

ولكن: من (1)

$$\begin{aligned} F'_{41} &= a_{4\mu} a_{1\nu} F_{\mu\nu} \\ &= a_{41} a_{11} F_{11} + a_{42} a_{11} F_{12} + a_{43} a_{11} F_{13} + a_{44} a_{11} F_{14} \\ &= a_{41} a_{11} F_{11} + a_{44} a_{11} F_{14} \\ &= a_{41} (a_{11} F_{11} + a_{14} F_{14}) + a_{44} (a_{11} F_{41} + a_{14} F_{44}) \\ &= a_{41} (a_{14} F_{14}) + a_{44} (a_{11} F_{41}) \\ &= a_{41} (-a_{14} F_{41}) + a_{44} (a_{11} F_{41}) \\ &= (a_{44} a_{11} - a_{41} a_{14}) F_{41} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} F_{11} = F_{44} = 0 \\ F_{14} = -F_{41} \end{array} \right.$$

(2)

ولكن: $a_{44} = \alpha$, $a_{11} = \alpha$, $a_{41} = -i\alpha\beta$, $a_{14} = i\alpha\beta$

$$\begin{aligned} \therefore F'_{41} &= [\alpha^2 - (-i\alpha\beta)(i\alpha\beta)] F_{41} \\ &= \alpha^2 (1 - \beta^2) F_{41} = F_{41} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha^2 (1 - \beta^2) = 1 \\ F_{41} = i E_x, \quad F'_{41} = i E'_x \end{array} \right.$$

$$i E'_x = i E_x \rightarrow \boxed{E'_x = E_x}$$

أيضاً: لإيجاد معادلات التحويل لـ E_y نأخذ $\alpha = 4$, $\beta = 2$ في القانون (1):

$$\begin{aligned} F'_{42} &= a_{4\mu} a_{2\nu} F_{\mu\nu} \\ &= a_{41} a_{21} F_{11} + a_{44} a_{21} F_{14} \\ &= a_{41} (a_{21} F_{11}) + a_{44} (a_{21} F_{14}) \end{aligned}$$

$$a_{41} = -i\alpha\beta, \quad a_{22} = 1$$

ولكن:

$$a_{44} = \alpha, \quad a_{22} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore F'_{42} &= -i\alpha\beta F_{12} + \alpha F_{42} = \alpha (F_{42} - i\beta F_{12}) \\ iE'_y &= \alpha (iE_y - i\beta H_z) \\ \therefore E'_y &= \alpha (E_y - \beta H_z) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} F_{42} &= iE_y \\ F'_{42} &= iE'_y \\ F_{12} &= H_z \end{aligned} \right.$$

وبالمثل: لإيجاد معادلة التحويل لـ E_z نأخذ $\alpha = 4, \beta = 3$ في القانون (1):

$$\begin{aligned} F'_{43} &= a_{4\mu} a_{3\nu} F_{\mu\nu} = a_{41} a_{3v} F_{1v} + a_{44} a_{3v} F_{4v} \\ &= a_{41} (a_{33} F_{13}) + a_{44} (a_{33} F_{43}) \end{aligned}$$

$$a_{41} = -i\alpha\beta, \quad a_{44} = \alpha, \quad a_{33} = 1 \quad \text{ولكن:}$$

$$\begin{aligned} \therefore F'_{43} &= -i\alpha\beta F_{13} + \alpha F_{43} = \alpha (F_{43} - i\beta F_{13}) \\ \therefore iE'_z &= \alpha [iE_z - i\beta (-H_y)] \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} F_{43} &= iE_z \\ F'_{43} &= iE'_z \\ F_{13} &= -H_y \end{aligned} \right.$$

$$\therefore \boxed{E'_z = \alpha (E_z + \beta H_y)}$$

تطبيق القانون (1) لإيجاد معادلات التحويل لمركبات شدة المجال المغنطيسي $\vec{H}$:

بنفس الطريقة السابقة: حيث أن

$$H_x = F_{23}, \quad H_y = F_{31}, \quad H_z = F_{12}$$

$$H'_x = F'_{23}, \quad H'_y = F'_{31}, \quad H'_z = F'_{12}$$

$$F'_{23} = a_{2\mu} a_{3\nu} F_{\mu\nu} = a_{22} a_{3v} F_{2v} = a_{22} (a_{33} F_{23}) = F_{23}$$

$$\therefore \boxed{H'_x = H_x}$$

أيضاً:

$$F'_{31} = a_{3\mu} a_{1\nu} F_{\mu\nu} = a_{33} a_{1v} F_{3v} = a_{33} (a_{11} F_{31} + a_{14} F_{34})$$

$$\therefore H'_y = \alpha (H_y + (i\beta)(-iE_z)) = \alpha (H_y + \beta E_z)$$

$$\therefore \boxed{H'_y = \alpha (H_y + \beta E_z)}$$

وأخيراً:

$$F'_{12} = a_{1\mu} a_{2\nu} F_{\mu\nu} = a_{11} a_{2\nu} F_{1\nu} + a_{14} a_{2\nu} F_{4\nu} = a_{11} (a_{22} F_{12}) + a_{14} (a_{22} F_{42}) \\ = a_{11} F_{12} + a_{14} F_{42} = \alpha F_{12} + i\alpha\beta F_{42} = \alpha (F_{12} + i\beta F_{42})$$

$$\therefore H'_z = \alpha [H_z + i\beta (iE_y)] = \alpha (H_z - \beta E_y)$$

$$\therefore \boxed{H'_z = \alpha (H_z - \beta E_y)}$$

ملاحظات: من قوانين التحويل لمركبات $\vec{E}, \vec{H}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z), \quad E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y)$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \alpha(H_y + \beta E_z), \quad H'_z = \alpha(H_z - \beta E_y)$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$ ، v هي سرعة S' بالنسبة إلى S في اتجاه محور x .

[.: السرعة النسبية في اتجاه x]

.. مركبات $\vec{E}, \vec{H}$ الموازية لـ v (المحور x) تكون لا متغيرة.

ومركبات $\vec{E}, \vec{H}$ العمودية على v (أي في اتجاه y, z) تكون متغيرة.

ويمكن كتابة هذه الحقيقة في صورة اتجاهية كالآتي:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \alpha [\vec{E}_{\perp} + (\vec{\beta} \wedge \vec{H})_{\perp}]$$

$$\vec{H}'_{\perp} = \alpha [\vec{H}_{\perp} - (\vec{\beta} \wedge \vec{E})_{\perp}]$$

$$\left| \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \right.$$

وذلك لأن:

$$\alpha (\vec{\beta} \wedge \vec{H}) = \frac{\alpha}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) = \frac{\alpha}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha}{c} [(-v H_z) \hat{j} + v H_y \hat{k}]$$

$$= \alpha [(-\beta H_z) \hat{j} + (\beta H_y) \hat{k}]$$

وأيضاً:

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{\beta} \wedge \vec{E}) &= \frac{\alpha}{c}(\vec{v} \wedge \vec{E}) = \frac{\alpha}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\alpha}{c} [(-v E_z) \hat{j} + v E_y \hat{k}] \\ &= \alpha [(-\beta E_z) \hat{j} + (\beta E_y) \hat{k}]\end{aligned}$$

[٧] معادلة منكوفسكي (معادلة الحركة لجسيم مشحون في مجال

كهرومغناطيسي) (Minkowski Equation)

يمكن إثبات أن معادلة الحركة لجسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي هي:

$$F_\mu = m_0 \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} (F_{\mu\nu} u_\nu) \quad (1)$$

حيث m_0 الكتلة الساكنة للجسيم، e شحنته، u_μ سرعته الرباعية، $F_{\mu\nu}$ ممتد المجال الكهرومغناطيسي.

وتعرف F_μ بقوة منكوفسكي الرباعية 4-force Minkowski وهي تعميم لقوة لورنتز الثلاثية (في ثلاثة أبعاد).

إثبات (١): حيث أن القوة المؤثرة على جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي تعطي بقوة لورنتز

$$\vec{F} = e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})] \quad (1)$$

معادلة الحركة لهذا الجسيم (في الصورة النسبية):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \quad \left| \beta = \frac{v}{c} \right. \quad (2)$$

ولكن الزمن الصحيح (أو الفعلي) (proper time) $d\tau = dt \sqrt{1-\beta^2}$

وتصبح العلاقة (2):

$$\vec{F} = \frac{d}{d\tau}(m_0 \vec{v}) = m_0 \frac{d\vec{v}}{d\tau} \quad (3)$$

بمساواة (1), (3):

$$\vec{F} = m_0 \frac{d\vec{v}}{d\tau} = e \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H}) \right] \quad (4)$$

ولكن: مركبات القوة في النسبية هي:

$$F_1 = \alpha F_x, \quad F_2 = \alpha F_y, \quad F_3 = \alpha F_z$$

$$\therefore \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \frac{1}{\alpha} (F_1, F_2, F_3)$$

ومن (4):

$$F_x = m_0 \frac{dv_x}{d\tau} = \frac{e}{c} [c E_x + (\vec{v} \wedge \vec{H})_x] \quad (5) \quad \left| \vec{v} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \right|$$

$$F_y = m_0 \frac{dv_y}{d\tau} = \frac{e}{c} [c E_y + (\vec{v} \wedge \vec{H})_y] \quad (6)$$

$$= \frac{e}{c} [c E_y + (v_z H_x - v_x H_z)]$$

$$F_z = m_0 \frac{dv_z}{d\tau} = \frac{e}{c} [c E_z + (\vec{v} \wedge \vec{H})_z] \quad (7)$$

$$= \frac{e}{c} [c E_z + (v_x H_y - v_y H_x)]$$

ولكن: من مركبات الممتد $F_{\mu\nu}$:

$$i E_x = F_{41} = -F_{14}, \quad i E_y = F_{42} = -F_{24}, \quad i E_z = F_{43} = -F_{34}$$

$$H_x = F_{23} = -F_{32}, \quad H_y = F_{31} = -F_{13}, \quad H_z = F_{12} = -F_{21}$$

ومن مركبات منجه السرعة الرباعي:

$$u_\mu = \alpha (\vec{v}, ic)$$

$$= (\alpha \vec{v}, ic\alpha) = (u_n, u_4)$$

$$\left| \begin{array}{l} u_n = \alpha \vec{v}, u_4 = ic\alpha \\ n = 1, 2, 3 \end{array} \right|$$

$$u_1 = \alpha v_x = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u_2 = \alpha v_y = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$u_3 = \alpha v_z = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u_4 = i\alpha c = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

بضرب طرفي (5), (6), (7) في α :

$$\alpha F_x = m_0 \frac{d(\alpha v_x)}{d\tau} = \frac{e}{c} [\alpha c E_x + \alpha (v_y H_z - v_z H_y)]$$

$$\begin{aligned} \therefore F_1 &= m_0 \frac{du_1}{d\tau} = \frac{e}{c} [i \alpha c \frac{E_x}{i} + u_2 F_{12} + u_3 F_{13}] \\ &= \frac{e}{c} [u_4 (-i E_x) + u_2 F_{12} + u_3 F_{13}] \\ &= \frac{e}{c} [u_4 F_{14} + u_2 F_{12} + u_3 F_{13}] \\ &= \frac{e}{c} [F_{14} u_4 + F_{12} u_2 + F_{13} u_3] \end{aligned} \quad \text{---(8)}$$

وبالمثل من العلاقتين (7), (6) نحصل على:

$$F_2 = m_0 \frac{du_2}{d\tau} = \frac{e}{c} [F_{24} u_4 + F_{23} u_3 + F_{21} u_1] \quad \text{---(9)}$$

$$F_3 = m_0 \frac{du_3}{d\tau} = \frac{e}{c} [F_{34} u_4 + F_{31} u_1 + F_{32} u_2] \quad \text{---(10)}$$

أيضاً: من قاعدة الشغل والطاقة (تصلح في الميكانيكا الكلاسيكية والنسبية)

التغير في الطاقة = الشغل المبذول في وحدة الزمن

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

نسبياً: حيث أن: $E = mc^2$

$$\therefore \frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

وفي وجود مجال كهرومغناطيسي:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = [e \vec{E} + \frac{e}{c} (\vec{v} \wedge \vec{H})] \cdot \vec{v}$$

$$= [e (\vec{E} \cdot \vec{v}) + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{v} \wedge \vec{H})] = e (\vec{E} \cdot \vec{v})$$

$$\therefore \frac{d}{d\tau}(m_0 c^2) = e(\vec{E} \cdot \vec{v}) \quad |(\vec{v} \cdot \vec{v} \wedge \vec{H}) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}(i\alpha m_0 c) = \frac{ie\alpha}{c}(\vec{E} \cdot \vec{v}) \quad : \frac{i\alpha}{c} \text{ بضرب الطرفين في}$$

$$m_0 \frac{d}{d\tau}(i\alpha c) = \frac{e}{c}[i\alpha(E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z)]$$

$$\therefore m_0 \frac{du_4}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3]$$

$$\therefore F_4 = \frac{e}{c}[F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3] \quad \text{---(11)}$$

المعادلات (11), (10), (9), (8) يمكن كتابتها في صورة ممتدات (Tensorial form) أو في صورة متألّفة (Covariant) كالآتي:

$$F_1 = m_0 \frac{du_1}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3 + F_{14}u_4]$$

$$F_2 = m_0 \frac{du_2}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{21}u_1 + F_{22}u_2 + F_{23}u_3 + F_{24}u_4]$$

$$F_3 = m_0 \frac{du_3}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{31}u_1 + F_{32}u_2 + F_{33}u_3 + F_{34}u_4]$$

$$F_4 = m_0 \frac{du_4}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3 + F_{44}u_4]$$

$$\left| \begin{array}{l} F_{11} = 0 \\ F_{22} = 0 \\ F_{33} = 0 \\ F_{44} = 0 \end{array} \right.$$

وهذه العلاقات الأربع يمكن كتابتها في صورة مختصرة.

$$F_\mu = m_0 \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}(F_{\mu\nu} u_\nu) \quad , \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

وهذه معادلة منكوفسكي المطلوبة، حيث F_μ هي قوة منكوفسكي الرباعية.

مثال: أثبت أن قوة منكوفسكي الرباعية يمكن كتابتها بالصورة:

$$F_\mu = \alpha[\vec{F}, \frac{ie}{c}(\vec{E} \cdot \vec{v})]$$

حيث $\vec{F} = e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})]$ هي قوة لورنتز (الثلاثية) وهذا يعني أن قوة

منكوفسكي هي تعميم لقوة لورنتز في فراغ منكوفسكي.

الحل: قوة منكوفسكي كمتجه رباعي:

$$F_\mu = (F_1, F_2, F_3, F_4) = (F_n, F_4) \quad ; \quad n=1,2,3$$

حيث

$$F_n = m_0 \frac{du_n}{d\tau} = m_0 \frac{d(\alpha \vec{v})}{d\tau} = \alpha \frac{e}{c} [c\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{H})]$$

$$F_4 = m_0 \frac{du_4}{d\tau} = m_0 \frac{d(i\alpha c)}{d\tau} = \alpha \cdot \frac{ie}{c} (\vec{E} \cdot \vec{v})$$

وقد تم حساب هذه المركبات بالتفصيل في الفقرة السابقة

$$\therefore F_\mu = (F_n, F_4)$$

$$= \alpha \frac{e}{c} [\{c\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{H})\} \quad , \quad i(\vec{E} \cdot \vec{v})]$$

$$= \alpha [e\{\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})\} \quad , \quad \frac{ie}{c} (\vec{E} \cdot \vec{v})]$$

$$= \alpha [\vec{F} \quad , \quad \frac{ie}{c} (\vec{E} \cdot \vec{v})] \quad \text{_____ (1)}$$

وهي العلاقة المطلوبة.

ملحوظة: من العلاقة (1) يتضح أن قوة منكوفسكي لها المركبات الآتية:

(i) المركبات الفراغية أو المكانيّة (space compon.)

$$F_n = \alpha \vec{F} = \alpha e [\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})]$$

حيث $\vec{F}$ هي قوة لورنتز.

(ii) المركبة الزمانية (time compon.) أو الرابعة:

$$F_4 = i \frac{\alpha e}{c} (\vec{E} \cdot \vec{v}) = i \alpha e (\vec{E} \cdot \vec{\beta})$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad \text{حيث}$$

[٨] الصورة الممتدة (المتغيرة) لمعادلات ماكسويل

Covariant Form of Maxwell's Equations.

أولاً: معادلات ماكسويل الميكروسكوبية Microscopic M. E.

(في عدم وجود مادة)

يمكن كتابة معادلات ماكسويل الميكروسكوبية

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{---(1)} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{---(3)} \quad , \quad \operatorname{curl} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{---(4)}$$

في صورة متغيرة كالآتي:

[١] المعادلة (4), (1):

$$\boxed{F_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu} \quad \text{---(I)}$$

[٢] المعادلة (3), (2):

$$\boxed{F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0} \quad \text{---(II)}$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma} = \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \quad \text{حيث:}$$

والممتد $F_{\mu\nu}$ هو ممتد المجال الكهرومغناطيسي Electromagnetic Field Tensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

الإثبات:

أولاً: المعادلة (1): $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ يمكن كتابتها في صورة مركبات:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial(iE_x)}{\partial x} + \frac{\partial(iE_y)}{\partial y} + \frac{\partial(iE_z)}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}(ic\rho)$$

$$\therefore \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} = \frac{4\pi}{c} j_4 \quad \text{_____ (5)}$$

وهي الصورة الممتدة للمعادلة (1):

$$\text{المعادلة (4): } \text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{وفي صورة ممتدات:}$$

المركبة x:

$$[\text{curl } \vec{H}]_x - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\therefore \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial(iE_x)}{\partial(ict)} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\therefore \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1 \quad \text{_____ (6)}$$

$$\vec{j} = (j_x, j_y, j_z) = (j_1, j_2, j_3)$$

المركبة y:

$$[\text{curl } \vec{H}]_y - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\therefore \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial(iE_y)}{\partial(ict)} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\therefore \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_2 \quad \text{_____ (7)}$$

المركبة z:

$$[\text{curl } \vec{H}]_z - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\therefore \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial(iE_z)}{\partial(ict)} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\therefore \frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_3 \quad \text{_____ (8)}$$

المعادلات (5), (6), (7), (8) يمكن كتابتها بصورة:

$$\begin{aligned} F_{12,2} + F_{13,3} + F_{14,4} &= \frac{4\pi}{c} j_1 \\ F_{21,1} + F_{23,3} + F_{24,4} &= \frac{4\pi}{c} j_2 \\ F_{31,1} + F_{32,2} + F_{34,4} &= \frac{4\pi}{c} j_3 \\ F_{41,1} + F_{42,2} + F_{43,3} &= \frac{4\pi}{c} j_4 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} F_{12,2} &= \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} \\ F_{21,1} &= \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} \end{aligned} \right.$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة الممتدة:

$$F_{\mu\nu,v} = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad \text{--- (I)} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

ثانياً: المعادلة (2): $\text{div } \vec{H} = 0$ وفي صورة مركبات:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0 \\ \therefore \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} &= \frac{4\pi}{c} j_3 \end{aligned} \quad \text{--- (9)}$$

المعادلة (3): $\text{curl } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ وفي صورة مركبات:

المركبة x:

$$\begin{aligned} (\text{curl } \vec{E})_x + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial (iE_z)}{\partial y} - \frac{\partial (iE_y)}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial (ict)} &= 0 \\ \therefore \frac{\partial F_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_4} &= 0 \end{aligned} \quad \text{--- (10)}$$

المركبة y:

$$(\text{curl } \vec{E})_y + \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial(iE_x)}{\partial z} - \frac{\partial(iE_z)}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial(ict)} = 0$$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0$$

_____ (11)

المركبة z :

$$(\text{curl } \vec{E})_z + \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial(iE_y)}{\partial x} - \frac{\partial(iE_x)}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial(ict)} = 0$$

$$\frac{\partial F_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_4} = 0$$

_____ (12)

للمعادلات (9), (10), (11), (12) يمكن كتابتها بالصورة:

$$F_{43,2} + F_{32,4} + F_{24,3} = 0$$

$$F_{13,4} + F_{34,1} + F_{41,3} = 0$$

$$F_{42,1} + F_{21,4} + F_{14,2} = 0$$

$$F_{12,3} + F_{23,1} + F_{31,2} = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات الأربع في المعادلة:

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0$$

_____ (II)

حيث μ, ν, λ تأخذ القيم 1, 2, 3, 4 وبحيث أن: $\mu \neq \nu \neq \lambda$.

ثانياً: معادلات ماكسويل الماكرو سكوبية

(في حالة وجود وسط - Medium)

يمكن كتابة معادلات ماكسويل الماكرو سكوبية

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho \quad \text{_____ (1) , } \text{div } \vec{B} = 0$$

_____ (2)

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3) \quad , \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

في صورة متغايرة كالآتي:

$$\boxed{D_{\mu\nu, \nu} = \frac{4\pi}{c} J_{\mu}} \quad (I)$$

(بالنسبة للمعادلتين (1), (2))

$$\boxed{B_{\mu\nu, \lambda} + B_{\nu\lambda, \mu} + B_{\lambda\mu, \nu} = 0} \quad (II)$$

(بالنسبة للمعادلتين (2), (3))

حيث الممتد $D_{\mu\nu}$ يسمى ممتد الإزاحة الكهرومغناطيسية

(Electromagnetic Displacement Tensor)

ومركباته هي:

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} (\vec{E} \rightarrow \vec{D})$$

وحيث الممتد $B_{\mu\nu}$ يسمى ممتد الحث (أو التأثير) الكهرومغناطيسي

(Electromagnetic Induction Tensor)

ومركباته هي:

$$B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} (\vec{H} \rightarrow \vec{B})$$

إثبات العلاقة (I): من العلاقة $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$ وفي صورة مركبات

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial(iD_x)}{\partial x} + \frac{\partial(iD_y)}{\partial y} + \frac{\partial(iD_z)}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}(ic\rho)$$

$$\therefore \frac{\partial D_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{43}}{\partial x_3} = \frac{4\pi}{c} j_4 \quad \text{_____ (5)}$$

من العلاقة (4): $\text{curl } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ وفي صورة مركبات:

المركبة x:

$$(\text{curl } \vec{H})_x - \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial(iD_x)}{\partial(ict)} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\therefore \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial D_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1 \quad \text{_____ (6)}$$

المركبة y:

$$(\text{curl } \vec{H})_y - \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial(iD_y)}{\partial(ict)} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\therefore \frac{\partial D_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{24}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_2 \quad \text{_____ (6)}$$

المركبة z:

$$(\text{curl } \vec{H})_z - \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial(iD_z)}{\partial(ict)} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\therefore \frac{\partial D_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{34}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_3 \quad \text{_____ (8)}$$

المعادلات (8), (7), (6), (5) يمكن كتابتها بالصورة:

$$D_{12,2} + D_{13,3} + D_{14,4} = \frac{4\pi}{c} j_1$$

$$D_{21,1} + D_{23,3} + D_{24,4} = \frac{4\pi}{c} j_2$$

$$D_{31,1} + D_{32,2} + D_{34,4} = \frac{4\pi}{c} j_3$$

$$D_{41,1} + D_{42,2} + D_{43,3} = \frac{4\pi}{c} j_4$$

أو في صورة ممتدات:

$$\boxed{D_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu} \quad \text{_____ (I)}$$

حيث $D_{\mu\nu}$ هو ممتد الإزاحة الكهرومغناطيسية ومركباته هي مركبات متجه الإزاحة $\vec{D} (D_x, D_y, D_z)$ ومتجه شدة المجال المغناطيسي $\vec{H} (H_x, H_y, H_z)$.

إثبات العلاقة (II): من المعادلة (2): $div \vec{B} = 0$ وفي صورة مركبات

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial B_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{12}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{_____ (9)}$$

المعادلة (3): $curl \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ، وفي صورة مركبات:

المركبة x:

$$(curl \vec{E})_x + \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial (iE_z)}{\partial y} - \frac{\partial (iE_y)}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial (ict)} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial B_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{24}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{32}}{\partial x_4} = 0 \quad \text{_____ (10)}$$

المركبة y :

$$(\text{curl } \vec{E})_y + \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial(iE_x)}{\partial z} - \frac{\partial(iE_z)}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial(ict)} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial B_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{13}}{\partial x_4} = 0$$

_____ (11)

المركبة z :

$$(\text{curl } \vec{E})_z + \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial(iE_y)}{\partial x} - \frac{\partial(iE_x)}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial(ict)} = 0$$

$$\frac{\partial B_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{14}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{21}}{\partial x_4} = 0$$

_____ (12)

المعادلات (9), (10), (11), (12) يمكن كتابتها بالصورة:

$$B_{43,2} + B_{32,4} + B_{24,3} = 0$$

$$B_{13,4} + B_{34,1} + B_{41,3} = 0$$

$$B_{42,1} + B_{21,4} + B_{14,2} = 0$$

$$B_{12,3} + B_{23,1} + B_{31,2} = 0$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة المضغوطة (صورة ممتدات)

$$B_{\mu\nu,\lambda} + B_{\nu\lambda,\mu} + B_{\lambda\mu,\nu} = 0$$

_____ (II)

حيث $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3, 4$ وبحيث أن: $\mu \neq \nu \neq \lambda$

الممتد $B_{\mu\nu}$ هو ممتد الحث الكهرومغناطيسي ومركباته هي مركبات متجه

الحث $\vec{B}$ (Induction vector) وشدة المجال الكهربائي $\vec{E}$

يلاحظ أن الممتدين $D_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ هما ممتدان غير متماثلين

$$D_{\mu\nu} = -D_{\nu\mu} \quad , \quad B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$$

ملخص:

(١) معادلات ماكسويل الميكروسكوبية (في غياب المادة)

$$F_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad , \quad F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0$$

حيث $F_{\mu\nu}$ هو ممتد المجال الكهرومغناطيسي

(٢) معادلات ماكسويل الماكروسكوبية (في وجود المادة)

$$D_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad , \quad B_{\mu\nu,\lambda} + B_{\nu\lambda,\mu} + B_{\lambda\mu,\nu} = 0$$

حيث $D_{\mu\nu}$ ممتد الإزاحة الكهرومغناطيسية، $B_{\mu\nu}$ ممتد الحث الكهرومغناطيسي.

مسألة: أوجد معادلات التحويل لمركبات المتجهات الكهرومغناطيسية

(Electromagnetic Vectors) $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}$ وذلك باستخدام قانوني

التحويل للممتدين $B_{\mu\nu}, D_{\mu\nu}$.

استنتج الصورة الاتجاهية لهذه المعادلات في حالة السرعات الصغيرة.

الحل: أولاً: معادلات التحويل لمركبات المتجهين $\vec{E}, \vec{B}$

نستخدم قانون التحويل للممتد $B_{\mu\nu}$ (لاحتوائه على مركبات المتجهين $\vec{E}, \vec{B}$)،

وصورته:

$$B'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu} a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} B_{\mu\nu} \quad (1)$$

وبذلك يمكن الحصول على معادلات التحويل للمركبات (E_x, E_y, E_z) والمركبات

(B_x, B_y, B_z) بالصورة:

$E'_x = E_x$ $E'_y = \alpha(E_y - \beta B_z)$ $E'_z = \alpha(E_z + \beta B_y)$	$B'_x = B_x$ $B'_y = \alpha(B_y + \beta E_z)$ $B'_z = \alpha(B_z - \beta E_y)$
--	--

وللسرعات الصغيرة ($v \ll c$): حيث $\alpha \rightarrow 1$ ، $\beta^2 \rightarrow 0$

فإن العلاقات السابقة يمكن كتابتها في الصورة الاتجاهية الآتية:

$$\begin{array}{l|l} \vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} & \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//} \\ \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})_{\perp} & \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{E})_{\perp} \end{array}$$

حيث العلامة // تمثل المركبات الموازية والعلامة $\perp$ تمثل المركبات العمودية

للمرعة النسبية v لنظام الإحداثيات (والتي هي في إتجاه محور x).

وحيث أن:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B}) &= \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{j}(-\frac{v}{c} B_z) + \hat{k}(\frac{v}{c} B_y) \\ &= \hat{j}(-\beta B_z) + \hat{k}(\beta B_y) \\ -\frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{E}) &= -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{j}(\frac{v}{c} E_z) + \hat{k}(-\frac{v}{c} E_y) \\ &= \hat{j}(\beta E_z) + \hat{k}(-\beta E_y) \end{aligned}$$

ثانياً: معادلات التحويل لمركبات المتجهين $\vec{H}, \vec{D}$

نستخدم قانون التحويل للممتد $D_{\mu\nu}$ (لاحتوائه على مركبات المتجهين $\vec{H}, \vec{D}$)

$$D'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu} a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} D_{\mu\nu} \quad \text{وصورته}$$

وبذلك يمكن الحصول على معادلات التحويل للمركبات (H_x, H_y, H_z)

والمركبات (D_x, D_y, D_z) بالصورة:

$$\begin{array}{l|l} H'_x = H_x & D'_x = B_x \\ H'_y = \alpha(H_y + \beta D_z) & D'_y = \alpha(D_y - \beta H_z) \\ H'_z = \alpha(H_z - \beta D_y) & D'_z = \alpha(D_z + \beta H_y) \end{array}$$

وللسرعات الصغيرة ($v \ll c$): فإن $\alpha \rightarrow 1$ ، $\beta^2 \rightarrow 0$
وتؤول العلاقات السابقة إلى الصورة الإتجاهية:

$$\begin{array}{l|l} \vec{H}'_{||} = \vec{H}_{||} & \vec{D}'_{||} = \vec{D}_{||} \\ \vec{H}'_{\perp} = \vec{H}_{\perp} - \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{D})_{\perp} & \vec{D}'_{\perp} = \vec{D}_{\perp} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})_{\perp} \end{array}$$

حيث العلامتين $\perp, //$ تمثلان المركبات الموازية والعمودية على السرعة النسبية v (الموازية لمحور x).
وذلك لأن:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{D}) &= -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{j}(\frac{v}{c} D_z) + \hat{k}(-\frac{v}{c} D_y) = \hat{j}(\beta D_z) + \hat{k}(-\beta D_y) \end{aligned}$$

وهكذا ...

[٩] ممتد الطاقة - كمية الحركة للمجال الكهرومغناطيسي:

Energy-Momentum Tensor of Electromagnetic Field

لإيجاد هذا الممتد نبدأ بتمهيدين هما

(١) أساسيات في الميكانيكا التحليلية.

(٢) ممتد الطاقة - كمية الحركة لمنظومة ميكانيكية.

وذلك باعتبار أن المجال الكهرومغناطيسي هو منظومة ميكانيكية (مثل الأجسام) تتحرك في الفراغ أو في الوسط المادي بقوانين حركة معينة، ويكون له بذلك - مثل سائر المنظومات الميكانيكية - كميات خاصة به تدل على حركته، مثل الطاقة، كمية الحركة وغيرها.

تمهيد (١): أساسيات الميكانيكا التحليلية (Analytical Mechanics)

[١] في الميكانيكا التحليلية ندرس المنظومات الميكانيكية

(Mechanical Systems) التي هي عبارة عن تجمع من عدد كبير جداً من الجسيمات الخاضعة لشروط محدودة، ومنها، مثلاً: الجسم المتماثل أو الجاسي (Rigid Body) الذي يتكون من عدد كبير جداً من الجسيمات بحيث أن المسافة بين كل اثنين منها تكون ثابتة إذا تعرض الجسم لأي قوة خارجية.

[٢] إذا تحرك جسم (منظومة ميكانيكية) بحرية في الفراغ مثلاً فيقال أن له ثلاثة درجات حرية (Degrees of Freedom) أي أن له حرية الحركة في ثلاثة أبعاد، وإذا تحرك الجسم في المستوى فيكون له درجتان من درجات الحرية، وهكذا.

[٣] في الميكانيكا التحليلية توصف حالة المنظومة الميكانيكية بدالة لاجرانج (Lagrangian) وهي دالة في الإحداثيات (الموضع) (q_k) والسرعة $(\dot{q}_k)$ والزمن $t \leftarrow L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ ، حيث الإحداثيات q_k تسمى بالإحداثيات المعممة (Generalized Coordinates) فمثلاً:

في الفراغ الأقليدي: الإحداثيات للكرتيزية x, y, z ، فإن $x = q_1, y = q_2, z = q_3$ وأيضاً: إذا كانت المنظمة تتكون من عدد k من الجسيمات:

الجسيم الأول: إحداثياته $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$

الجسيم الثاني: إحداثياته $q_2 = (x_2, y_2, z_2)$

وهكذا حتى الجسيم k فتكون إحداثياته هي q_k .

أيضاً $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ (السرعة المعممة)

[٤] يعرف تكامل الفعل (Action Integral) بالعلاقة:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt$$

وهي كمية هامة جداً في الميكانيكا التحليلية.

[٥] تنص قاعدة أقل فعل (Principle of least action) على أن التغير في الفعل (δS) يساوي صفراً

$$\delta S = 0$$

حيث التغير (Variation) في أي دالة $F = F(q, \dot{q}, t)$ يعرف بالعلاقة:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

[٦] دالة لاجرانج L تحقق معادلة تفاضلية هامة هي معادلة لاجرانج وصورتها:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

وهي المعادلة الأساسية في الميكانيكا التحليلية.

[٧] إذا كانت T هي طاقة الحركة (Kinetic Energy) لجسيم متحرك،

وكانت u هي طاقة الجهد (Potential Energy) فإن دالة لاجرانج L

$$L = T - u$$

[٨] هناك دالة أخرى هامة في الميكانيكا التحليلية هي دالة هاميلتون

(Hamiltonian) H وهي دالة في q_k, p_k, t حيث p_k هي كمية الحركة

المعممة (Generalized Momentum) $H = H(q_k, p_k, t)$ وترتبط H

مع L بالعلاقة الآتية:

$$H = \sum_{k=1} p_k \dot{q}_k - L$$

وفي الحالة البسيطة: إذا كانت $\bar{p}$ هي كمية حركة جسيم وكانت $\bar{v}$ هي

$$H = \bar{p} \cdot \bar{v} - L$$

سرعته فإن:

[٩] يعرف المجال المحافظ (conservative Field): بأنه المجال الذي يتحرك

فيه الجسم بحيث أن القوة المؤثرة على هذا الجسم ترتبط بطاقة الجهد u

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u = -\text{grad } u$$

بالعلاقة الآتية:

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

وفي حالة المجالات المحافظة فإن دالة هاملتون تساوي الطاقة الكلية:

$$H = T + u$$

[١٠] العلاقة بين كمية الحركة ودالة لاجرانج هي:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

وفي الحالة البسيطة: فإن

معادلة لاجرانج المعممة (Generalized L. E.):

لتعميم معادلة لاجرانج أي وضعها في صورة ممتدات (Tensorial Form) أو

صورة متألقة (Covariant):

نكتب المعرعة المعممة بالصورة:

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial x_\mu} = \partial_\mu q = q_{,\mu} \quad (1)$$

ونكتب تكامل الفعل $S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$ بالصورة:

$$S = \int \mathcal{L}(q, q_{,\mu}, x_\mu) dx_\mu \quad (2)$$

وتعرف بالصورة المعممة لـ S ، حيث $\mu = 1, 2, 3, 4$ في حالة فراغ منكوفسكي ذو الأربعة أبعاد.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \quad \text{ونلاحظ أن:}$$

$$\frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial q_{,\nu}}{\partial x_\mu} \rightarrow q_{,\mu,\nu} = q_{,\nu,\mu} \quad (3)$$

ويلاحظ أيضاً أن $\mathcal{L}$ هي دالة لاجرانج المعممة.

التغير في S (من العلاقة (2)):

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} dx_\mu = \int \delta \mathcal{L} dx_\mu = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q_{,\mu} \right] dx_\mu = 0 \quad (4)$$

(من قاعدة أقل فعل).

ولكن (من قوانين حساب المتغيرات) (Calculus of variations):

$$\delta(y') = (\delta y)' \rightarrow \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

$$\therefore \delta\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta)$$

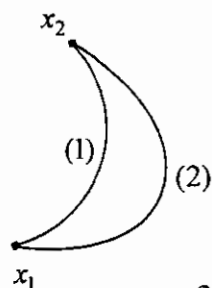
$$\therefore \delta(q_{,\mu}) = \delta\left(\frac{\partial q}{\partial x_\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta q)$$

وتصبح (4):

$$\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta q \right] dx_\mu = 0 \quad (5)$$

وبأخذ الحد الثاني من (5) وإجراء التكامل عليه بالتجزئ:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta q dx_\mu &= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \frac{d}{dx_\mu} (\delta q) dx_\mu = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} d(\delta q) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta q d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}}\right) \end{aligned} \quad (6)$$



ولكن: من حساب المتغيرات أيضاً:

إذا كان لدينا منحنيان متجاوران (1), (2)

يتقاطعان عند x_1, x_2 ، وكانت δq تمثل

التغير في الإحداثيات بين (1), (2).

∴ فعند x_1, x_2 لا يوجد تغير $\delta q(x_1) = 0$, $\delta q(x_2) = 0$

وبذلك يتلشى الحد الأول في (6) ونحصل على:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta q dx_\mu &= - \int \delta q d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}}\right) \\ &= - \int \delta q \frac{d}{dx_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}}\right) dx_\mu \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}}\right) \delta q dx_\mu \end{aligned}$$

وبالتعويض في (5):

$$\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \right) \delta q \right] dx_\mu = 0$$

$$\therefore \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \right) \right] \delta q dx_\mu = 0$$

وحيث أن δq إختيارية فشرط تحقق هذه المعادلة هو (نظرية):

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\mu}} \right) = 0} \quad \text{---(7)}$$

وهي معادلة لاجرانج المعممة، وهي عبارة عن الصورة الممتدة (أو المتألفة) لمعادلة لاجرانج العادية التي صورتها:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

تمهيد (٢): ممتد الطاقة - كمية الحركة لمنظومة ميكانيكية

Energy - Momentum Tensor

باستخدام العلاقتين (7), (3) يمكننا كتابة:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \frac{\partial q_{,\nu}}{\partial x_\mu} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \right) q_{,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x_\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \right) \end{aligned} \quad \text{---(1)}$$

ولكن:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \delta_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\delta_{\mu\nu} \mathcal{L}) \quad \left| \delta_\mu^\nu A^\mu = A^\nu \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (\delta_{\mu\nu} \mathcal{L}) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} \right)$$

وبذلك نحصل على العلاقة الآتية:

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_v} [q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}] = 0 \quad \text{---(2)}$$

وبكتابة:

$$T_{\mu\nu} = q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \text{---(3)}$$

فإن (2) تصبح:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_v} = 0$$

$$\therefore T_{\mu\nu,v} = 0 \quad \text{---(4)}$$

حيث $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

المعادلة (3) تمثل ممثداً يعرف بممتد الطاقة - كمية الحركة للمنظومة الميكانيكية،

وهو ممتد متماثل $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

لمعادلة (4) هي القانون العام (أو مبدأ) ثبوت (أو حفظ) الطاقة - كمية الحركة

بمعنى أن: $T_{\mu\nu} = \text{const.}$

ملحوظة: في فراغ منكوفسكي الرباعي فإن الطاقة وكمية الحركة يرتبطان معاً

بمتجه رباعي هو متجه الطاقة - كمية الحركة p_μ .

ممتد الطاقة - كمية الحركة للمجال الكهرومغناطيسي:

اثبتنا أن ممتد الطاقة - كمية الحركة لمنظومة ميكانيكية يكتب بالصورة:

$$T_{\mu\nu} = q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

حيث $\mathcal{L}$ هي دالة لاجرانج للمنظومة.

وسوف نقوم هنا بحساب هذا الممتد للمجال الكهرومغناطيسي، ومن أجل ذلك نعتبر

ما يلي:

(١) في نظرية المجالات (Field Theory) ومنها المجال الكهرومغناطيسي: يعتبر المجال كمنظومة ميكانيكية لها خواص المنظومات الميكانيكية المعروفة في علم الميكانيكا، بمعنى أن

"أي مجال يكون له كتلة وسرعة وكمية حركة وطاقة ... إلخ"

وهي الكميات التي تحدد عادة المنظومات الميكانيكية في علم الميكانيكا.

(٢) إن قوانين علم الإلكتروديناميكا تشبه إلى حد كبير قوانين علم الميكانيكا، حيث أننا ندرس في الميكانيكا حركة الجسيمات غير المشحونة، بينما ندرس في الإلكتروديناميكا حركة الجسيمات المشحونة. والاختلاف بين العلمين ناتج عن وجود الشحنة.

(٣) في علم الميكانيكا نتعامل مع كُتل لها مجال تجاذبي (gravitational Field)، بينما في علم الإلكتروديناميكا نتعامل مع شُحنات لها مجال كهربائي وإذا تحركت تولد مجالاً مغناطيسياً أي أننا نتعامل في الإلكتروديناميكا مع مجالات كهرومغناطيسية (Electromagnetic Fields).

(٤) يعتبر علم الإلكتروديناميكا هو: ديناميكا المجالات الكهرومغناطيسية بإعتبارها منظومات ميكانيكية.

فبالمقارنة مع علم الديناميكا (الميكانيكا):

حيث أن قوانين الميكانيكا هي من الدرجة الثانية في الزمن t بالنسبة إلى الإحداثيات المعممة q ، بينما قوانين الإلكتروديناميكا (المجال الكهرومغناطيسي) والتي تعبر عن الجهدين $\vec{A}, \phi$ هي أيضاً من الدرجة الثانية في الزمن.

وبذلك يمكن أخذ هذين الجهدين كأحداثيات معمرة لوصف المجال الكهرومغناطيسي أي إعتبار أن $\vec{A}, \phi$ هي الإحداثيات المعممة في علم الإلكتروديناميكا.



ويمكن بذلك أخذ المتجه $A_\mu = (\vec{A}, \phi)$ كإحداثيات معممة للمجال الكهرومغناطيسي.

وأيضاً يمكن أخذ مشتقة هذا المتجه بالنسبة إلى كسرعات معممة للمجال، وبذلك يأخذ الممتد $T_{\mu\nu}$ الصورة الآتية للمجالات الكهرومغناطيسية.

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial q}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial q}{\partial x_\nu})} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu})} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \left| \begin{array}{l} q \rightarrow A \\ \downarrow \\ (A_\alpha) \end{array} \right. \\ &= A_{\alpha,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\alpha,\nu})} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned}$$

وهي صورة ممتد للطاقة - كمية الحركة للمجال الكهرومغناطيسي (أي في علم الإلكتروديناميكا).

$$\therefore \boxed{T_{\mu\nu} = A_{\alpha,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\alpha,\nu})} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}}$$

أمثلة محلولة

مثال (1): إذا كان اللاجرانجيان (دالة لاجرانج) للمجال الكهرومغناطيسي نرابط بممتد المجال $F_{\mu\nu}$ بالعلاقة:

$$\mathcal{L} = a F^2$$

حيث a ثابت قيمته في النظام الجاوسي للوحدات

$$F^2 = F_{mn} F_{mn}, \quad a = -\frac{1}{16\pi} \text{ هي (Gaussian System of units)}$$

فأثبت أن ممتد الطاقة - كمية الحركة $T_{\mu\nu}$ يأخذ الصورة الآتية:

$$A_{\alpha,\mu} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} \text{ باعتبار أن}$$

$$\therefore T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} A_{\alpha,\mu} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2$$

الحل: حيث أن

$$T_{\mu\nu} = A_{\alpha,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_{\alpha,\nu})} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\mathcal{L} = a F^2 \quad \text{_____ (2)}$$

$$F^2 = F_{mn} F_{mn}$$

$$\frac{\partial (F^2)}{\partial (A_{\alpha,\nu})} = 2 F_{mn} \frac{\partial F_{mn}}{\partial (A_{\alpha,\nu})} = 2 F_{mn} \frac{\partial (A_{n,m} - A_{m,n})}{\partial (A_{\alpha,\nu})}$$

حيث:

$$F_{mn} = \frac{\partial A_n}{\partial x_m} - \frac{\partial A_m}{\partial x_n} = A_{n,m} - A_{m,n} \quad (F_{mn} \text{ من تعريف الممتد})$$

ولكن:

$$\frac{\partial A_{m,n}}{\partial A_{\alpha,\nu}} = \delta_{m\alpha} \delta_{nv} \quad (\text{من خواص دالة دلتا})$$

$$\frac{\partial (F^2)}{\partial (A_{\alpha,\nu})} = 2 F_{mn} (\delta_{n\alpha} \delta_{mv} - \delta_{m\alpha} \delta_{nv})$$

ولكن من خواص دلتا كروينكر أيضاً:

$$\delta_{n\alpha} \delta_{mv} F_{mn} = \delta_{mv} \delta_{n\alpha} F_{mn} = \delta_{mv} F_{\alpha m} = F_{v\alpha}$$

$$\delta_{m\alpha} \delta_{nv} F_{mn} = \delta_{m\alpha} F_{v m} = F_{\alpha v}$$

$$\therefore \frac{\partial (F^2)}{\partial (A_{\alpha,\nu})} = 2 (F_{v\alpha} - F_{\alpha v}) = 2 (F_{v\alpha} + F_{v\alpha}) \quad | \quad F_{\alpha v} = -F_{v\alpha}$$

$$= 4 F_{v\alpha}$$

ولكن:

$$\mathcal{L} = a F^2 = -\frac{1}{16\pi} F^2 \quad \text{---(3)} \quad \left| \quad a = -\frac{1}{16\pi} \right.$$

$$\therefore \frac{(\partial \mathcal{L})}{\partial (A_{\alpha, \nu})} = 4a F_{\nu\alpha} = -\frac{1}{4\pi} F_{\nu\alpha} \quad \text{---(4)}$$

بالتعويض من (4), (3) في (1) نحصل على:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} A_{\alpha, \mu} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2 \quad \text{---(I)}$$

وهي المعبئة المطلوبة للممتد $T_{\mu\nu}$.

مثال (٢): للممتد (I) هو ممتد غير متماثل ولجعله متماثلاً يجب إضافة ممتد آخر إليه (نو قيمة تساوي صفراً) حتى يتحول إلى ممتد متماثل.

(i) أثبت أن إضافة الممتد $G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu, \alpha} F_{\nu\alpha}$ إلى (I) يحوله إلى الممتد المتماثل.

$$P_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F^2] \quad \text{---(II)}$$

(ii) أثبت أن قيمة الممتد $G_{\mu\nu}$ تساوي صفراً. حتى لا تغير إضافته إلى الممتد (I) من قيمة هذا الممتد.

الحل: بإضافة الممتد

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu, \alpha} F_{\nu\alpha} \quad \left| \quad A_{\mu, \alpha} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} \right.$$

إلى الممتد $T_{\mu\nu}$ المعطى بالعلاقة (I) نحصل على الممتد $P_{\mu\nu}$.

$$P_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} A_{\alpha, \mu} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4\pi} A_{\mu, \alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2$$

$$= -\frac{1}{4\pi} (A_{\alpha, \mu} - A_{\mu, \alpha}) F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2 \\
 &= \frac{1}{4\pi} [-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4\pi} \delta_{\mu\nu} F^2] \quad \text{_____ (I)}
 \end{aligned}$$

حيث

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} = A_{\alpha,\mu} + A_{\mu,\alpha} \quad \left| \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 (\mu = \nu) \\ 0 (\mu \neq \nu) \end{cases} \right.$$

(ii) لإثبات أن $G_{\mu\nu}$: باستخدام معادلات المجال لماكسويل في غياب الشحنات

$$\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \rightarrow F_{\nu\alpha,\alpha} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0}$$

$$\therefore \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\nu} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (A_\mu F_{\alpha\nu})$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\nu} \right] = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (A_\mu F_{\alpha\nu}) \right] = Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\text{متماثل}) \quad \text{حيث:}$$

$$M_{\alpha\beta} = F_{\alpha\nu} A_\mu \quad (\text{غير متماثل})$$

ومن خواص الممتدات المتماثلة وغير المتماثلة فإن:

$$Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha} M_{\beta\alpha} = -Q_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$$

$$\therefore 2Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta} = 0$$

$$\therefore \boxed{Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta} = 0}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\nu} \right] = 0$$

$$\therefore G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\alpha} F_{\nu\alpha} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\nu\alpha} = 0$$

أي أن إضافة الممتد $G_{\mu\nu}$ إلى الممتد $T_{\mu\nu}$ للحصول على الممتد المتماثل $p_{\mu\nu}$ لا يغير من قيمة الممتد $T_{\mu\nu}$. وهو المطلوب.

مثال (٣): باستخدام العلاقة

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F^2] \quad \text{---(I)}$$

لممتد الطاقة - كمية الحركة المتماثل ، أحسب المركبات غير الصفيرية لهذا الممتد.

الحل: ممتد المجال الكهرومغناطيسي يعطى بالمصفوفة:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore F^2 = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu=1}^4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^4 [F_{1\nu} F_{1\nu} + F_{2\nu} F_{2\nu} + F_{3\nu} F_{3\nu} + F_{4\nu} F_{4\nu}]$$

$$= (F_{12} F_{12} + F_{13} F_{13} + F_{14} F_{14})$$

$$+ (F_{21} F_{21} + F_{23} F_{23} + F_{24} F_{24})$$

$$+ (F_{31} F_{31} + F_{32} F_{32} + F_{34} F_{34})$$

$$+ (F_{41} F_{41} + F_{42} F_{42} + F_{43} F_{43})$$

$$= (H_z^2 + H_y^2 - E_x^2) + (H_z^2 + H_x^2 - E_y^2)$$

$$+ (H_y^2 + H_x^2 - E_z^2) + (-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)$$

$$= 2[(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)]$$

$$= 2[H^2 - E^2]$$

---(I)

لحساب p_{11} :

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi} [-F_{1\alpha} F_{1\alpha} + \frac{1}{4} F^2]$$

$$F_{1\alpha} F_{1\alpha} = \sum_{\alpha=1}^4 F_{1\alpha} F_{1\alpha} = F_{11} F_{11} + F_{12} F_{12} + F_{13} F_{13} + F_{14} F_{14}$$

$$= H_z^2 + H_y^2 - E_x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore p_{11} &= \frac{1}{4\pi} [-H_z^2 - H_y^2 + E_x^2 + \frac{1}{2}(H^2 - E^2)] \\ &= \frac{1}{8\pi} [-2H_z^2 - 2H_y^2 + 2E_x^2 + (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)] \\ &= \frac{1}{8\pi} [-H_z^2 - H_y^2 + H_x^2 + E_x^2 - E_y^2 - E_z^2] \\ &= \frac{1}{8\pi} [(E_x^2 + H_x^2) - (E_y^2 + E_z^2 + H_y^2 + H_z^2)] \\ &= \frac{1}{4\pi} [(E_x^2 + H_x^2) - \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2)] \\ &= \frac{1}{4\pi} [(E_x^2 + H_x^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)] \quad \text{_____ (2)} \end{aligned}$$

لحساب p_{22} : بنفس الطريقة نحصل على:

$$p_{22} = \frac{1}{4\pi} [(E_y^2 + H_y^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)] \quad \text{_____ (3)}$$

أيضاً: فإن

$$p_{33} = \frac{1}{4\pi} [(E_z^2 + H_z^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)] \quad \text{_____ (4)}$$

أيضاً: لحساب المركبات $p_{\mu\nu}$ حيث $\mu \neq \nu$.

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu] \quad \text{بنفس الطريقة يمكن إثبات أن:}$$

حيث $\mu, \nu = 1, 2, 3 = x, y, z$

بمعنى أن:

$$p_{12} = \frac{1}{4\pi} [E_1 E_2 + H_1 H_2] = \frac{1}{4\pi} [E_x E_y + H_x H_y] = p_{21}$$

$$p_{13} = \frac{1}{4\pi} [E_1 E_3 + H_1 H_3] = \frac{1}{4\pi} [E_x E_z + H_x H_z] = p_{31}$$

$$p_{23} = \frac{1}{4\pi} [E_2 E_3 + H_2 H_3] = \frac{1}{4\pi} [E_y E_z + H_y H_z] = p_{32}$$

ملاحظة هامة:

في علم الإلكترونديناميكا الكلاسيكية يمكن حساب كمية حركة المجال الكهرومغناطيسي بوصفه منظومة ميكانيكية، ومن ذلك يمكن استنتاج ما يعرف بممتد الأجهاد الكهرومغناطيسي (Electromagnetic Stress Tensor) ومركباته عبارة عن مركبات قوة إجهاد تؤثر عمودياً على وحدة للمساحات من سطح ما موجود في المجال، والصورة العامة لهذا الممتد هي:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (E^2 + H^2)] \quad (\text{انظر الباب الأول})$$

وفي الفراغ الإقليدي (٣ أبعاد) يكون لهذا الممتد تسع مركبات $\mu, \nu = x, y, z$ تشكل مركبات قوى الإجهاد الناتجة عن المجال والمؤثرة على جسيم مشحون موجود في هذا المجال.

وبالمقارنة مع العلاقة التي حصلنا عليها لممتد الطاقة - كمية الحركة وذلك باستخدام معادلات لاجرانج المعممة للمجال وصورتها:

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F^2]$$

وبحساب المركبات $p_{11}, p_{22}, \dots$ للممتد $p_{\mu\nu}$ ومقارنتها بمركبات الممتد $g_{\mu\nu}$ وهي $g_{11}, g_{22}, \dots$ نجد أن: مركبات ممتد الإجهاد الكهرومغناطيسي تكافئ تماماً مركبات ممتد الطاقة - كمية الحركة للمجال الكهرومغناطيسي.