الباب الرابع

النظرية الكلاسيكية (التقليدية) للإشعاع
Classical Theory of Radiation

مقدمة:

ينتج الإشعاع الكهرومغطيسي نتيجة حركة الشحنات، كما أن الشحنات المتحركة أيضاً تنتج مجالات كهرومغنطيسية توصف بمعادلات ماكسويل للمجالات الكهرومغنطيسية. والشحنات المتحركة إما أن تكون ذات حركة منتظمة أو أن تكون شحنات معجلة (تتحرك بعجلة).

وإذا كانت سرعة إنتشار المجال الكهرومغنطيسي في الفضاء الحر هي c وسرعة الشحنات كمصدر لهذا المجال هي v، فإن النسبة $\frac{v}{c}$ تلعب دوراً مهماً في تحديد صفات الإشعاع الناتج عن حركة الشحنات.

ولما كانت c كبيرة جداً فإنه في حالة $v << c$ تكون المجالات من النوع الإستاتيكي حيث يمكن إهمال السرعة v بالنسبة إلى c، أما في حالة $v \simeq c$ فإن المجالات تكون من النوع المستعرض حيث المتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ يكونان متعامدان وكلاهما متعامد مع إتجاه الإنتشار.

وبذلك يكون لدينا حالتان:

(i) حالة لا نسبية $(v << c)$ ، (ii) حالة نسبية $(v \simeq c)$

وفي كلتا الحالتين يمكن التعبير عن المجال بواسطة ما يسمى بالجهد المتأخر (retarded potential) والذي سندرسه بالتفصيل في هذا الباب.

أيضاً فإن هناك عامل هام يتحكم في الإشعاع الناتج عن الشحنات المتحركة وهو عجلة (أو تسارع) تلك الشحنات، ومن الناحية الفيزيائية فإن العجلة تعمل على استحداث نبضات في المجالات ويزداد بذلك المدى الذي يعمل فيه هذا المجال.

١- جهود التأخير (Retarded Potentials):

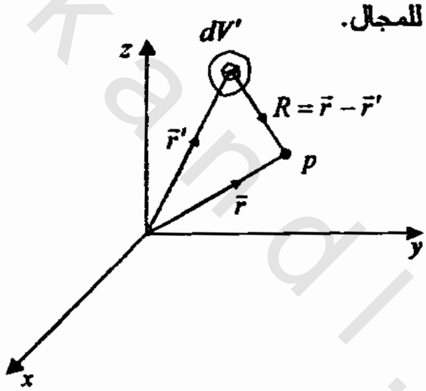
إن مسألة وجود مجال كهرومغنطيسي متغير (في الفراغ) مع توزيع شحني $\rho(\vec{r}',\vec{t}')$ وتيار $\vec{J}(\vec{r}',t')$ حيث $(\vec{r}',\vec{t}')$ هي إحداثيات نقطة المصدر أو المنبع (Source field)، يمكن حلها باستخدام ما يعرف بالجهود المتأخرة:

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}',\vec{t}')}{R} dV' \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{R} dV' \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

حيث: $R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad , \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

وهنا $\vec{r}$ هي إحداثيات نقطة الرصد p (point of observation) التي نحدد عندها الجهدين $\phi, \vec{A}$ للمجال.



أيضاً فإن: $dV' = dx'\,dy'\,dz' = d^3\vec{r}'$ تمثل عنصر الحجم في منطقة المصدر.

أما t' فتحددها العلاقة: $t' = t - \dfrac{R}{c}$

والتي تعني أن جهد المجال عند النقطة p التي إحداثياتها $(\vec{r}.t)$ يحدد بقيمتي الشحنة والتيار عند فترة سابقة $t' = t - \dfrac{R}{c}$. ويقيس الحد $\dfrac{R}{c}$ التأخر الحادث نتيجة السرعة المحدودة لإنتشار الموجات.

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t - R/c)}{R} dV' \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

العلاقتان (4) ,(3) يمثلان حلاً للمعادلتين الموجيتين غير المتجانستين:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho' \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}' \qquad \text{\_\_\_\_\_(6)}$$

مع شرط لورنتز:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(7)}$$

ملحوظة: عند حل المعادلتين (6) ,(5) واستخدام (7) نجد أن هناك حلاً آخر يكتب بالصورة:

$$\nabla^*(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,', t + R/c)}{R} dV' \qquad \text{\_\_\_\_\_(8)}$$

$$\vec{A}^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t + R/c)}{R} dV' \qquad \text{\_\_\_\_\_(9)}$$

حيث $\vec{A}^*, \phi^*$ تعرفان بالجهدين المتقدمين (advanced potentials).

مثال: أثبت أن إشعاع عنصر شحني لامتناهي في الصغر يتكون من جزئين:

أحدهما يكون منبعثاً من المصدر وصورته $\psi_1(t - \frac{R}{c})$ والآخر متجهاً نحـــو المصدر وصورته $\psi_2(t + \frac{R}{c})$ حيث R متجه موضع المصدر، c ســرعة الإشعاع.

الحل: معادلتا الحركة الموجية:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho'$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}'$$

وفي حالة التوزيع الشحني اللامتناهي في الصغر يمكن كتابة $\rho' = 0 , \vec{J}' = 0$

$$\therefore \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

وبكتابة $f \equiv \phi, \vec{A}$ ، فإن:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

والتي يمكن كتابتها باستخدام الإحداثيات القطبية الكروية بالصورة:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial f}{\partial R}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

نختار حلاً بالصورة:

$$f = \frac{\psi(R,t)}{R} = \frac{\psi}{R} = \psi \cdot (\frac{1}{R})$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{\psi}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R}$$

$$\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial f}{\partial R}) = \frac{\partial}{\partial R}(-\psi + R\frac{\partial \psi}{\partial R})$$

$$= -\frac{\partial \psi}{\partial R} + R\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} + \frac{\partial \psi}{\partial R} = R\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

أيضاً فإن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\psi}{R}) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

بالتعويض من (3) ,(2) في (1):

$$\frac{1}{R^2}[R\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}] - \frac{1}{c^2 R}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

وهي معادلة موجة مستوية يمكن حلها باستخدام طريقة كيرشوف كالآتي:

$$\eta_1 = t - \frac{R}{c} \quad , \quad \eta_2 = t + \frac{R}{c}$$

$$\therefore \quad t = \frac{\eta_2 + \eta_1}{2} \quad , \quad R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} c$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial \eta_1} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta_1} = \frac{c}{2}(-\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial \eta_2} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta_2} = \frac{c}{2}(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})$$

أيضاً فإن:

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})$$

$$= (\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial \eta_2})(-\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial \eta_1}) = -\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \eta_1}$$

وتصبح المعادلة (4):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta_1 \eta_2} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(5)$$

والحل العام لهذه المعادلة يكتب بالصورة:

$$\psi(\eta_1 \, , \, \eta_2) = \psi_1(\eta_1) + \psi_2(\eta_2)$$

أو بالصورة:

$$\psi(R,t) = \psi_1(t - \frac{R}{c}) + \psi_2(t + \frac{R}{c}) \qquad \text{\_\_\_\_}(6)$$

حيث يمثل الحد $\psi_1(t - \frac{R}{c})$ موجة كروية تنبعث من المصدر أو موجة تنبعث على صورة إشعاع خارج من المصدر بسرعة c، بينما الحد $\psi_2(t + \frac{R}{c})$ يمثل موجة تتحرك نحو المصدر بنفس السرعة c.

وحيث أن $f = \frac{\psi}{R}$ فإن الحل العام للمعادلة (1) هو:

$$f = \frac{\psi_1}{R} + \frac{\psi_2}{R} = \frac{\psi_1(t - r/c)}{R} + \frac{\psi_2(t + r/c)}{R}$$

يمثل الحد الأول: الحل الخاص بالجهود المتأخرة بينما يمثل الحد الثاني الحل الخاص بالجهود المتقدمة، وهو المطلوب.

الجهد المتأخر عند مسافة كبيرة من منظومة الشحنات:

نعتبر منظومة من الشحنات المتحركة، ونحاول إيجاد الجهدين ϕ, A لهذه المنظومة عند مسافة كبيرة من المنظومة.

فحيث أن:

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,',t-R/c)}{R} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t-R/c)}{R} dV'$$

حيث $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$.

فعند مسافات كبيرة من نقطة الأصل $(r >> r')$ فإن الكمية $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$ يمكن النظر إليها على أنها $f(\vec{r}) = |\vec{r}| = r$ عند النقطة $(\vec{r}+\delta\vec{r})$ حيث $\delta\vec{r} = -\vec{r}\,'$، وباستخدام العلاقة:

$$f(\vec{r}+\delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \vec{\nabla} f(\vec{r})\cdot\delta\vec{r}$$

يمكننا كتابة: $$R = |\vec{r}-\vec{r}\,'| = r + \vec{\nabla} r\cdot(-\vec{r}\,') = r - (\frac{\vec{r}}{r})\cdot\vec{r}\,' = r - \vec{n}\cdot\vec{r}\,'$$

حيث:

$$\vec{\nabla}(r) = \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$ (متجه الوحدة في إتجاه $\vec{r}$)

وبذلك يصبح جهدا التأخر عند مسافات كبيرة من منظومة الإشعاع (Radiating system) بالصورة:

$$\nabla(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,',t-r/c+\vec{n}\cdot\vec{r}\,'/c)}{r-\vec{n}\cdot\vec{r}\,'} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t-r/c+\vec{n}\cdot\vec{r}\,'/c)}{r-\vec{n}\cdot\vec{r}\,'} dV'$$

ومن ذلك نرى أن زمن التأخر (أو التأخير) يتكون من جزئين:

(i) $t_0 = \frac{r}{c}$ لا يعتمد على $\bar{r}'$ ويسمى زمن التأخير للمنظومة، ويحدد الزمن الذي تصل فيه الإضطرابات الكهرومغنطيسية إلى نقطة الرصد p من نقطة الأصل.

(ii) $\tau' = -\frac{\bar{n}\cdot\bar{r}'}{c}$ ويعرف بالتأخر الذاتي (Self retardation) ويحدد الزمن اللازم للإضطرابات الكهرومغنطيسية للوصول إلى حدود المنظومة، أو هو الزمن الذي تأخذه الموجه الكهرومغنطيسية في مرورها خلال منظومة الشحنات.

وتوضح هذه القيمة مدى تأخر وصول الموجة الكهرومغنطيسية الآتية من الأجزاء البعيدة من منظومة الشحنات المتحركة (أو منظومة الإشعاع)، بالنسبة إلى الموجة المنبعثة من الأجزاء القريبة للمنظومة.

ملحوظة: إذا كانت سرعة الشحنات هي v ففي خلال الزمن الذي قيمته $\tau' = \frac{\bar{n}\cdot\bar{r}'}{c}$ سوف تزاح الشحنات خلال مسافة تساوي:

$$v\tau' = \frac{v}{c}(\bar{n}\cdot\bar{r}') = \beta(\bar{n}\cdot\bar{r}')$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$ هي النسبة بين سرعة الشحنات وسرعة الموجة الكهرومغطيسية.

وإذا كانت هذه المسافة صغيرة مقارنة بأبعاد المنظومة فيكن إهمال التأخير داخل المنظومة.

٢- إشعاع المزدوج (ثنائي القطب) الكهربي Electric dipole radiation

مقدمة:

تعرف منظومة الإشعاع (Radiation System) بأنها منظومة الشحنات المتحركة بعجلة، وفي حالة إذا كانت نقطة الرصد p للمنظومة تقع على مسافة كبيرة من المنظومة أي إذا كان: $|\bar{r}| >> |\bar{r}'|$

فيمكن كتابة الجهد القياسي لتوزيع الشحنات بالصورة:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \cdots \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots$ تمثل جهود توزيعات أحادي القطب (monopole) وثنائي القطب أو المزدوج الكهربي (dipole) ورباعي الأقطاب (quadrupole) وثماني الأقطاب (octupole) والتوزيعات الأعلى للشحنات على التوالي، ويمكن القول بأن الجهد يكون عادة متعدد الأقطاب، وأن المجالات التي يتم حسابها وفقاً لهذه الجهود متعددة الأقطاب وتعرف بالمجالات عديدة الأقطاب (multipole fields)، كما أن الإشعاع الكهرومغنطيسي الناتج عن حركة الشحنات في توزيعاتها المختلفة يعرف بأنه إشعاع متعدد الأقطاب (multipole Radiation).

وسنقتصر هنا على دراسة المزدوج (ثنائي القطب) فقط.

<u>حساب الجهد القياسي للمزدوج (ثنائي القطب) الكهربي:</u>

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \cdots \simeq \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})(\frac{1}{r}) \_\_\_(1)$$

(إكتفينا بالمفكوك حتى الحد الثاني فقط)

ومن (1) وبالاقتصار على الحد الثاني فقط (حد المزدوج الكهربي) فإن

$$\phi = \phi_0 + \phi_1$$

ولما كانت:

$$\phi = \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV'$$

$$= \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} dV' - \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} dV'$$

$$\therefore \phi_0 = \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}', t') \, dV' = \frac{e}{r} \qquad \_\_\_\_(3)$$

حيث $e = \int \rho' \, dV'$ تمثل قيمة الشحنة النقطية (المفردة).

$$\phi_1 = -\int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\rho(\vec{r}',t')}{r} dV'$$

$$= -\frac{1}{r} \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \rho(\vec{r}' \cdot t') dV' = -\frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'} \vec{\nabla}(t') dV'$$

ولكن: $\vec{\nabla}(t') = \vec{\nabla}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{n}}{c}$ حيث $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ ، $\vec{\nabla}(r) = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\therefore \phi_1 = -\frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'} (-\frac{\vec{n}}{c}) dV'$$

$$= \frac{1}{rc}[\vec{n} \cdot \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'} dV'] = \frac{1}{rc}[\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \int \rho \vec{r}' dV']$$

وبكتابة: $\frac{\partial}{\partial t'} \int \rho \vec{r} \ dV' = \dot{\vec{d}}$ ، $\int \rho \vec{r}' \ dV' = \vec{d}$

حيث $\vec{d}$ تعرف بعزم ثنائي القطب أو عزم المزدوج (dipole moment) للمنظومة.

$$\therefore \phi_1 = \frac{1}{rc}[\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}] \qquad (4)$$

هذه العلاقة تحدد الجهد القياسي للمنظومة في التقريب ثنائي القطب (dipole approximation) حيث $|\vec{r}| >> |\vec{r}'|$

<u>ولإيجاد الجهد الإتجاهي</u>: بكتابة $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \cdots$

حيث $\vec{A}_1$ تمثل الجهد الإتجاهي للمزدوج أو ثنائي القطب الكهربي، وحيث $\vec{A}_2, \vec{A}_3, \cdots$ تمثل الجهود الإتجاهية متعددة الأقطاب.

وبالاقتصار على الحد الثاني فإن: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

ولما كان:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV'$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})(\frac{1}{r})$$

$$\therefore\ \vec{A}_1 = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t')}{r}\,dV' = \frac{1}{cr}\int \vec{J}(\vec{r}\,',t')\,dV' \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

$$\therefore\ \vec{A}_2 = -\frac{1}{c}\int \vec{J}(\vec{r}\,',t')[(\vec{r}\,'\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{r}\,dV']$$

$$= -\frac{1}{cr}\int (\vec{r}\,'\cdot\vec{\nabla})\vec{J}(\vec{r}\,',t')\,dV'$$

$$= -\frac{1}{cr}\int \vec{r}\,'\cdot\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\vec{\nabla}(t')\,dV'$$

$$= -\frac{1}{cr}\int \vec{r}\,'\cdot\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}(-\frac{\vec{n}}{c})\,dV' \qquad \Big|\ \vec{\nabla}(t') = -\frac{\vec{n}}{c}$$

$$= \frac{1}{c^2 r}\int \frac{\partial}{\partial t'}(\vec{r}\,'\cdot\vec{n})\vec{J}\,dV'$$

$$= \frac{1}{c^2 r}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\vec{r}\,'\cdot\vec{n})\vec{J}\,dV' \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

<u>والآن لإيجاد الجهد الإتجاهي لثنائي القطب (المزدوج) الكهربي:</u>

من (5): $\vec{A}_1 = \frac{1}{cr}\int \vec{J}(\vec{r}\,',t')\,dV'$

ولما كان $\vec{J}(\vec{r}\,',t') = \rho(\vec{r}\,',t')[\vec{v}\,']$ حيث $\vec{v}\,'$ سرعة الشحنات المتحركة.

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}$$

$$\therefore\ \vec{A}_1 = \frac{1}{cr}\int \rho(\vec{r}\,',t')\cdot\frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\,dV'$$

$$= \frac{1}{cr}\frac{d}{dt'}\int \rho\,\vec{r}\,'\,dV' = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}} \qquad \text{\_\_\_\_(7)}$$

حيث $\vec{d} = \int \rho\,\vec{r}\,'\,dV'$ هو عزم ثنائي القطب.

تمثل (7) الجهد الإتجاهي للإشعاع في التقريب ثنائي القطب حيث أنه يعتمد على الكمية $\vec{d}$ (عزم ثنائي القطب الكهربي).

ملخص: في التقريب ثنائي القطب فإن الجهدين القياسي والإتجاهي يعطيان بالعلاقتين:

$$\phi = \frac{1}{cr}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}$$

وبالتالي فإن $\boxed{\phi = (\vec{n} \cdot \vec{A})}$ حيث $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$.

مثال(١): في التقريب ثنائي القطب حيث $|\vec{r}| >> |\vec{r}'|$ وحيث:

$$\phi = \frac{1}{cr}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}$$

حيث $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ متجه الوحدة في إتجاه $\vec{r}$.

$\vec{d} = \int \rho\,(\vec{r}',t')\,\vec{r}'\,dV'$ هو عزم ثنائي القطب.

أثبت أن:

(١) شدة المجال الكهربي يعطي بالعلاقة:
$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]$$

(٢) شدة المجال المغنطيسي يعطي بالعلاقة:
$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})$$

(٣) المجالين $\vec{E},\vec{H}$ يكونان متعامدان وكل منهما عمودي على المتجه $\hat{n}$.

(٤) متجه بوينتنج $\vec{\gamma}$ الذي يعطي فيض الطاقة المنبعثة من المنظومة كإشعاع يعطي بالعلاقة:
$$\vec{\gamma} = \frac{1}{4\pi r^2 c^3}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})^2\,\vec{n}$$

(٥) كمية الحركة التي تنبعث من المنظومة التي تصدر الإشعاع تعطي بالعلاقة:
$$\vec{p} = \frac{1}{4\pi r^2 c^5}\left|\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}\right|^2 \vec{n}$$

(٦) شدة الإشعاع الذي يعبر المساحة $d\vec{S}$ في الإتجاه $\vec{n}$ يعطي بالعلاقة:
$$I = \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2$$

ومن ذلك أثبت أن شدة الإشعاع الصادر من شحنة مفردة تتحرك بسرعة $\vec{v}$ هي:
$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\left|\dot{\vec{v}}\right|^2$$

الحل: لدينا العلاقتين: $\phi = \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}$

أولاً: إيجاد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$:

من العلاقة $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ وحيث أن:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{cr}\vec{\nabla}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}) = \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}})\vec{\nabla}(t')$$

$$= \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}})(-\frac{\vec{n}}{c}) \qquad \Big| \vec{\nabla}(t') = -\frac{\vec{n}}{c}$$

$$= -\frac{1}{c^2 r}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}})\vec{n}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}] = \frac{1}{cr}\ddot{\vec{d}}$$

$$\therefore \vec{E} = -[-\frac{1}{c^2 r}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}})\vec{n}] - \frac{1}{c}[\frac{1}{cr}\ddot{\vec{d}}]$$

$$= \frac{1}{c^2 r}[\,(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}})\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{n})\,\ddot{\vec{d}}]$$

ولكن:

$$\vec{n}\wedge(\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n}) = (\vec{n}\cdot\vec{n})\,\ddot{\vec{d}} - (\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}})\vec{n}$$

$$\therefore (\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n})\wedge\vec{n} = (\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}})\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{n})\,\ddot{\vec{d}}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n})\wedge\vec{n}] \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

ثانياً: إيجاد شدة المجال المغنطيسي $\vec{H}$:

من العلاقة:

$$\vec{H} = curl\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

$$\therefore \vec{H} = \vec{\nabla}\wedge[\frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}] = \frac{1}{cr}[\vec{\nabla}\wedge\dot{\vec{d}}] = \frac{1}{cr}[\vec{\nabla}(t')\wedge\frac{d}{dt'}\dot{\vec{d}}]$$

حيث $\dot{\vec{d}} = \dot{\vec{d}}(t')$، وبما أن $\vec{\nabla}(t') = -\frac{\vec{n}}{c}$

$$\therefore \vec{H} = \frac{1}{cr}[(-\frac{\vec{n}}{c})\wedge\ddot{\vec{d}}] = \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n}) \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

ثالثاً: من (1):

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]$$

ومن (2):

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \vec{H} \wedge \vec{n}} \qquad \_\_\_\_(3)$$

وهذا يعني أن المتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ متعامدان وكل منهما عمودي على المتجه $\vec{n}$ كما في حالة الموجات المستوية، أي أن الإشعاع ثنائي القطب يخضع للخاصية المستعرضة (transverse property). ولهذا السبب فإن المجال عند المسافات البعيدة (أي في تقريب ثنائي القطب) يسمى مجال موجي أو إشعاعي (radiative field).

رابعاً: **حساب متجه بوينتنج:**

تتميز منظومة الإشعاع (منظومة الشحنات المتحركة) بأن لها طاقة محددة تعرف بطاقة الإشعاع، ويعطي فيض الطاقة التي تنبعث من المنظومة في عملية الإشعاع بمتجه بوينتنج (Poynting vector) الذي يعرف بالعلاقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{\text{c}}{4\pi}(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

وبالتعويض عن $\vec{E} = \vec{H} \wedge \vec{n}$ نحصل على:

$$\vec{\gamma} = \frac{\text{c}}{4\pi}[(\vec{H} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{H}] = \frac{\text{c}}{4\pi}[(\vec{H} \cdot \vec{H})\vec{n} - (\vec{H} \cdot \vec{n})\vec{H}]$$

ولما كانت $\vec{H}$ عمودية على $\vec{n}$ فإن $\vec{H} \cdot \vec{n} = 0$، وأيضاً فإن $\vec{H} \cdot \vec{H} = H^2$

$$\therefore \vec{\gamma} = \frac{\text{c}}{4\pi}[H^2 \vec{n}] = \frac{\text{c}}{4\pi}[\frac{1}{c^2 r}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})]^2 \vec{n} = \frac{1}{4\pi r^2 c^3}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})]^2 \vec{n}$$

خامساً: **حساب كمية حركة المنظومة:**

تتميز منظومة الإشعاع بأن لها كمية حركة (مثل الطاقة) تنبعث حين إصدارها للإشعاع، وتعتبر في نفس الوقت كمية حركة للإشعاع نفسه وتعطي بالعلاقة:

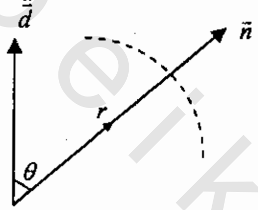
$$\vec{p} = \frac{1}{c^2}\vec{\gamma} = \frac{1}{4\pi r^2 c^5}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})]^2 \vec{n}$$

سادساً: إيجاده شدة الإشعاع:

يعبر عن شدة الإشعاع ثنائي القطب بالطاقة المنبعثة في وحدة الزمن خلال الزاوية المجسمة $d\Omega$، وتساوي فيض الطاقة الذي يعبر المساحة المتجهة $d\vec{S}$ في الإتجاه $\vec{n}$

$$\therefore dI = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \vec{\gamma}\cdot d\vec{S} = \gamma\, dS \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

حيث $dS = r^2\, d\Omega$



وإذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين $\ddot{\vec{d}},\vec{n}$ فإن الزاوية المجسمة تعطي بالعلاقة:

$d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$، أيضاً فإن

$$(\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n})^2 = \left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 |\vec{n}|^2\cdot\sin^2\theta = \left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 \sin^2\theta$$

وبالتعويض عن $\vec{\gamma} = \dfrac{1}{4\pi r^2 c^3}(\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n})^2\,\vec{n}$ في (1):

$$\therefore dI = \frac{1}{4\pi r^2 c^3}(\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n})^2(\vec{n}\cdot d\vec{S}) = \frac{1}{4\pi r^2 c^3}(\ddot{\vec{d}}\wedge\vec{n})^2\, dS$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 \sin^2\theta\,(r^2\, d\Omega) \qquad \Big|\ dS = \vec{n}\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 \sin^2\theta\,[r^2(2\pi\sin\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 \sin^2\theta\,[r^2(2\pi\sin\theta\, d\theta)]$$

$$= \frac{1}{2c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 \sin^3\theta\, d\theta$$

وتكون الشدة الكلية للإشعاع هي (بعد التكامل بالنسبة إلى θ من صفر إلى π):

$$I = \int dI = \frac{1}{2c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 \int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2 \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2$$

ملحوظة: إذا كان $\vec{d} = \sum e_i \vec{r}_i$ فإن:

$$\ddot{\vec{d}} = \sum_i e_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum e_i \dot{\vec{v}}_i = \sum e_i \vec{a}_i$$

حيث: $\vec{a}_i = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}_i$ هي عجلة الشحنة (i) المتحركة، ولشحنة نقطية (Point charge) مفردة (e) تتحرك تحت تأثير قوة معينة بعجلة $\vec{a}_i$، فإن

$$\vec{d} = e\vec{r} \quad , \quad \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{v}} = e\vec{a}$$

$$\therefore\ I = \frac{2}{3c^3}(e\vec{a})^2 = \frac{2e^2a^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3}\left|\dot{\vec{v}}\right|^2$$

<u>مثال(٢): إشعاع متذبذب ثنائي القطب Radiation of the dipole oscillator</u>

بإعتبار الإشعاع الصادر من شحنة تتذبذب طبقاً للقانون: $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(wt+\alpha)$ حيث $\vec{r}_0$ هي سعة الحركة التوافقية، w هي التردد الزاوي للحركة، α زاوية الطور (phase angle).

أحسب شدة الإشعاع في التقريب ثنائي القطب لهذا المتذبذب، وأثبت أنها تتناسب مع مربع السعة ومع القوة الرابعة للتردد الزاوي.

<u>الحل</u>: بإعتبار أن شدة الإشعاع لثنائي القطب خلال الزاوية المجسمة $d\Omega$ يعطى بالعلاقة:

$$\therefore\ dI = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{4\pi c^3}(\vec{n}\wedge\ddot{\vec{d}})^2\, d\Omega \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

(أنظر مثال رقم(١))

وفي حالة المتذبذب ثنائي القطب فإن:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(wt+\alpha) \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

وتكون العجلة التي تتحرك بها الشحنة المتذبذبة:

$$\therefore\ \ddot{\vec{r}} = -w^2\vec{r} = -w^2\vec{r}_0\cos(wt+\alpha)$$

وحيث أن عزم ثنائي القطب للشحنة هو: $\vec{d} = e\vec{r}$

$$\therefore\ \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = -e\,w^2\vec{r}_0\cos(wt+\alpha) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

وبالتعويض في (1):

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[ew^2(\vec{n}\wedge\vec{r}_0)\cos(wt+\alpha)]^2\, d\Omega$$

$$= \frac{e^2 w^4}{4\pi c^3}(\vec{n}\wedge\vec{r}_0)^2 \cos^2(wt+\alpha)\, d\Omega$$

ولدورة واحدة فإن متوسط (أو القيمة المتوسطة) لشدة الإشعاع في الزاوية المجسمة $d\Omega$ هي:

$$\overline{dI} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dI = \frac{e^2 w^4}{4\pi c^3}(\vec{n}\wedge\vec{r}_0)^2[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(wt+\alpha)\,dt]\,d\Omega$$

حيث القيمة المتوسطة الكمية $\cos^2(wt+\alpha)$ هي:

$$\overline{\cos^2(wt+\alpha)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(wt+\alpha)\,dt$$

$$= \frac{w}{2\pi}\int_0^{2\pi/w}\frac{1}{2}(1+\cos 2wt)\,dt = \frac{w}{2\pi}[\frac{1}{2}(t+\frac{\sin 2wt}{2w})\Big|_0^{2\pi/w}$$

$$= \frac{w}{2\pi}[\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{w}+\frac{\sin 4\pi}{2w})-0] = \frac{2\pi}{w}[\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{w})] = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \overline{dI} = \frac{e^2 w^4}{4\pi c^3}(\vec{n}\wedge\vec{r}_0)^2[\frac{1}{2}]\,d\Omega = \frac{e^2 w^4}{8\pi c^3}|\vec{r}_0|^2\sin^2\theta\, d\Omega$$

وبذلك تكون الشدة الكلية للإشعاع (أو ما يعرف بالتوزيع الزاوي للقوة الإشعاعية للمتذبذب) هي:

$$I = \int \overline{dI} = \frac{e^2 w^4}{8\pi c^3}|\vec{r}_0|^2\int_0^\pi \sin^2\theta\cdot(2\pi\sin\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{e^2 w^4}{8\pi c^3}(2\pi)|\vec{r}_0|^2\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta$$

$$= \frac{e^2 w^4 r_0^2}{4c^3}[\frac{4}{3}] = \frac{e^2 w^4 r_0^2}{3c^3} = \frac{e^2}{3c^3}(w^4 r_0^2)$$

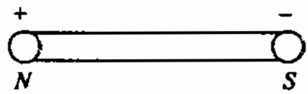
وهذا يعني أن شدة إشعاع المتذبذب في التقريب ثنائي القطب يتناسب مع مربع السعة (r_0^2) ومع القوة الرابعة للتردد الزاوي (w^4). وهو المطلوب.

٣- إشعاع ثنائي القطب ورباعي الأقطاب المغنطيسي

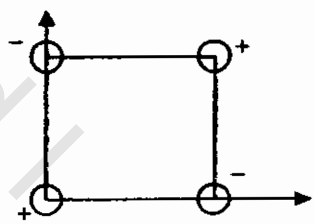
Magnetic dipole and quadrupole radiation

مقدمه:

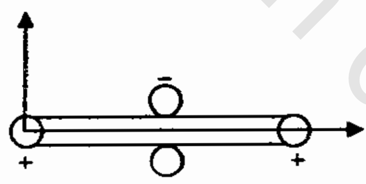
يتكون ثنائي القطب المغنطيسي من قطبين مغنطيسيين متساويي الشدة ومختلفي الإشارة أحدهما شمالي (N) موجب الإشارة والآخر جنوبي (S) سالب الإشارة.



أما رباعي الأقطاب (quadrupole) فيتكون من أربعة أقطاب مرتبة ترتيباً خاصاً كما في الأشكال الآتية:



رباعي أقطاب ثنائي الأبعاد



رباعي أقطاب خطي

وقد بينا فيما سبق أن الشحنات يجب أن تكون معجلة (أي تتحرك بعجلة) حتى تصدر إشعاعاً، ونوضح هنا أنه في بعض الأحيان فإن منظومة الشحنات لا يكون لها عزم ثنائي الأقطاب أي أن $\vec{d} = \int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dV = 0$ وبالتالي فإن $\ddot{\vec{d}} = 0$ وهذا لا يعني عدم وجود إشعاع على وجه العموم، وفي تلك الحالة يجب أن ندرس الحدود الأعلى من مفكوك الجهد، أي الحدود التي أهملت عند دراسة التقريب ثنائي القطب، وهذا يعني أنه في تلك الحالات فإن التقريب ثنائي القطب لا يصف الإشعاع ويجب أن نستخدم التقريبات الأعلى.

وقد سبق أن أوضحنا أنه في حالة الجهد الإتجاهي لمنظومة الإشعاع عند المسافات الكبيرة من المنظومة فإن:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \cdots$$

وبالإكتفاء بالحدين الأول والثاني فإن: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ حيث:

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{cr}\int \vec{J}(\vec{r}',t')\,dV' \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{c^2 r}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\vec{r}'\cdot\vec{n})\,\vec{J}\,dV' \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

(أنظر الفقرة رقم (٢) في هذا الباب)

وقمنا بحساب $\vec{A}_1$ حيث وجدنا أن:

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}} \quad , \quad \vec{d} = \int \rho(\vec{r}',t')\cdot\vec{r}'\,dV'$$

والآن لإيجاد $\vec{A}_2$: باستخدام العلاقة الإتجاهية:

$$\vec{c}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$\therefore\ \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \frac{1}{2}[\vec{c}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) + \frac{1}{2}[\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) + \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})]$$

$$\therefore\ \vec{J}(\vec{r}'\cdot\vec{n}) = \frac{1}{2}[\vec{n}\wedge(\vec{J}\wedge\vec{r}') + \frac{1}{2}[\vec{J}(\vec{r}'\cdot\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J}\cdot\vec{n})]$$

$$= \frac{1}{2}[(\vec{r}'\wedge\vec{J})\wedge\vec{n}] + \frac{1}{2}[\vec{J}(\vec{r}'\cdot\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J}\cdot\vec{n})]$$

وبالتعويض في (2):

$$\therefore\ \vec{A}_2 = \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t'}\int[(\vec{r}'\wedge\vec{J})\wedge\vec{n}]dV' + \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t'}\int[\vec{J}(\vec{r}'\cdot\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J}\cdot\vec{n})]dV'$$

$$= \vec{A}_M + \vec{A}_Q \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

حيث:

$$\vec{A}_M = \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t'}\int[(\vec{r}'\wedge\vec{J})\wedge\vec{n}]dV' = \frac{1}{cr}\frac{\partial}{\partial t'}\{\frac{1}{2c}\int[(\vec{r}'\wedge\vec{J})\wedge\hat{n}]dV'\}$$

وبتعريف العزم المغنطيسي للمنظومة بالعلاقة: $\vec{M} = \frac{1}{2c}\int(\vec{r}'\wedge\vec{J})\,dV'$

$$\therefore \ \vec{A}_M = \frac{1}{cr}\frac{\partial}{\partial t'}(\vec{M}\wedge\vec{n}) = \frac{1}{cr}(\dot{\vec{M}}\wedge\vec{n}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

ويعرف الجهد $\vec{A}_M$ بالجهد المغنطيسي للإشعاع (أو جهد ثنائي القطب المغنطيسي)، ويعرف الإشعاع المناظر بإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي (Magnatic dipole radiation).

أيضاً:

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t'}\int[\vec{J}(\vec{r}'\cdot\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J}\cdot\vec{n})]dV'$$

وبكتابة:

$$\int[\vec{J}(\vec{r}'\cdot\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J}\cdot\vec{n})]dV' = \sum e[\vec{v}(\vec{r}'\cdot\vec{n}) + \vec{r}'(\vec{v}\cdot\vec{n})]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t'}[\sum e\vec{r}'(\vec{r}'\cdot\vec{n})$$

حيث أعتبرنا أن: $\int\vec{J}\,dV' = \sum e\vec{v}$ ، $\vec{v}$ سرعة الشحنة المتحركة.

وبذلك نحصل على:

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}[\sum e\vec{r}'(\vec{r}'\cdot\vec{n})]$$

$$= \frac{1}{2c^2 r}\cdot\frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\sum e[3\vec{r}'(\vec{r}'\cdot\vec{n}) - r'^2\vec{n}]$$

حيث أضفنا في الطرف الأيمن متجهاً متناسباً مع $\vec{n}$ وذلك حيث أن $\vec{A}_Q$ هو متجه لا يتغير (non-varying vector).

وبتعريف متجه عزم رباعي الأقطاب للمنظومة وصورته:

$$Q = \sum e[3\vec{r}'(\vec{r}'\cdot\vec{n}) - r'^2\vec{n}]$$

فإن $\vec{A}_Q$ تصبح:

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{2c^2 r}\cdot\frac{1}{3}\frac{\partial^2\vec{Q}}{\partial t'^2} = \frac{1}{6c^2 r}\ddot{\vec{Q}} \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

يعرف الجهد $\vec{A}_Q$ بمجهد رباعي الأقطاب المغنطيسي للمنظومة، ويعرف الإشعاع المناظر بإشعاع رباعي الأقطاب المغنطيسي(Magnetic quadrupole radiation)

بالتعويض من (5) ,(4) في (3) نجد أن:

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{cr}(\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) + \frac{1}{6c^2 r}\dddot{\vec{Q}}$$

وبذلك فإن $\vec{A}_2$ يمثل الجهد الإتجاهي لثنائي الأقطاب ورباعي الأقطاب المغنطيسيين.

ويلاحظ أننا فيما سبق أوجدنا العلاقتين:

$$\phi_1 = \frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A}_1 = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}$$

ويمثلان الجهدين القياسي والإتجاهي للإشعاع ثنائي القطب ويعتمدان على الكمية $\vec{d}$ التي تمثل عزم ثنائي القطب الكهربي الذي يتكون من شحنتين متساويتين في الشدة ومختلفتان في الإشارة.

ملخص: يمكن كتابة الجهد الإتجاهي لمنظومة الإشعاع بالصورة:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}_d + \vec{A}_M + \vec{A}_Q$$

حيث $\vec{A}_d$ تمثل الجهد الإتجاهي للمزدوج (ثنائي القطب) الكهربي: $\vec{A}_d = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}$

$\vec{A}_M$ تمثل الجهد الإتجاهي للمزدوج (ثنائي القطب) المغنطيسي:

$$\vec{A}_M = \frac{1}{cr}(\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n})$$

$\vec{A}_Q$ تمثل الجهد الإتجاهي لرباعي الأقطاب المغنطيسي:

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{6c^2 r}\dddot{\vec{Q}}$$

وهنا:

$$\vec{d} = \int \rho\,\vec{r}' dV' \quad , \quad \vec{M} = \frac{1}{2c}\int(\vec{r}' \wedge \vec{J})\,dV'$$

$$\vec{Q} = \sum e[3\vec{r}'(\vec{r}'\cdot\vec{n}) - r'^2\vec{n}]$$

تمثل عزوم ثنائي القطب الكهربي وثنائي القطب المغنطيسي ورباعي الأقطاب المغنطيسي على التوالي.

مثال(١): سبق أن أوجدنا المجالين الكهربي $\vec{E}$ والمغنطيسي $\vec{H}$ لثنائي القطب الكهربي بالصورة:

$$\vec{E}_d = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad , \quad \vec{H}_d = \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})$$

والمطلوب إيجاد المجالين $\vec{E}, \vec{H}$ لثنائي القطب المغنطيسي بالصورة:

$$\vec{E}_M = \frac{1}{c^2 r}(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) \quad , \quad \vec{H}_M = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]$$

مع المقارنة بين الحالتين.

الحل: نوجد أولاً $\vec{H}_M$:

$$\vec{H}_M = curl\,\vec{A}_M = \frac{1}{cr} curl\,(\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n})$$
$$= \frac{1}{cr}[\vec{\nabla}(t') \wedge \frac{d}{dt}(\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n})]$$
$$= \frac{1}{cr}[(-\frac{\vec{n}}{c}) \wedge (\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})]$$
$$= -\frac{1}{c^2 r}[\vec{n} \wedge (\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})] = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \qquad \_\_\_\_(1)$$

نوجد ثانياً: $\vec{E}_M$:

حيث أن $\vec{E}_M = \vec{H}_M \wedge \vec{n}$ فبالتعويض عن $\vec{H}_M$ من (1) نحصل على:

$$\vec{E}_M = \frac{1}{c^2 r}[\{(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}\} \wedge \vec{n}] = \frac{1}{c^2 r}[\vec{n} \wedge \vec{n} \wedge (\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})]$$
$$= \frac{1}{c^2 r}[\vec{n} \wedge \{(\vec{n} \cdot \vec{n})\ddot{\vec{M}} - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{M}})\vec{n}\}]$$
$$= \frac{1}{c^2 r}[(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}})(\vec{n} \cdot \vec{n}) - (\vec{n} \wedge \vec{n})(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{M}})]$$
$$= \frac{1}{c^2 r}[(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}})(1) - 0] = \frac{1}{c^2 r}(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) \qquad \_\_\_\_(2)$$

ملحوظة(١):

$$curl\,\vec{A}(t') = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(t') = \vec{\nabla}(t') \wedge \frac{d\vec{A}}{dt'} = \vec{\nabla}(t') \wedge \dot{\vec{A}}$$

ملحوظة(٢): بمقارنة مجالات إشعاع المزدوج المغنطيسي:

$$\vec{E}_M = \frac{1}{c^2 r}(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) = -\frac{1}{c^2 r}(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})$$

$$\vec{H}_M = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]$$

مع مجالات إشعاع المزدوج الكهربي:

$$\vec{E}_d = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad , \qquad \vec{H}_d = \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})$$

نجد أن: معادلة $\vec{H}_M$ بدلالة $\ddot{\vec{M}}$ تماثل معادلة $\vec{E}_d$ بدلالة $\ddot{\vec{d}}$، بينما معادلة $\vec{E}_M$ بدلالة $\ddot{\vec{M}}$ تماثل معادلة $\vec{H}_d$ ولكن بإشارة مخالفة.

مثال(٢): إذا كان الجهد $\vec{A}_Q$ الخاص برباعي الأقطاب المغنطيسي لمنظومة الإشعاع يعطي بالعلاقة:

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{6c^2 r}\ddot{\vec{Q}}$$

حيث $\vec{Q}$ هو متجه عزم رباعي الأقطاب للمنظومة

$$\vec{Q} = \sum e[3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - r'^2 \vec{n}]$$

أثبت أن المجالين $\vec{E}_Q, \vec{H}_Q$ يعطيان بالعلاقتين:

$$\vec{H}_Q = \frac{1}{6c^2 r}(\dddot{\vec{Q}} \wedge \hat{n}) \quad , \quad \vec{E}_Q = \frac{1}{6c^2 r}[(\dddot{\vec{Q}} \wedge \hat{n}) \wedge \hat{n}]$$

الحل: نوجد أولاً $\vec{H}_Q$:

$$\vec{H}_Q = curl\,\vec{A}_Q = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_Q$$

$$= \vec{\nabla}(t') \wedge \dot{\vec{A}}_Q = (-\frac{\vec{n}}{c}) \wedge [\frac{1}{6c^2 r}\dddot{\vec{Q}}]$$

$$= -\frac{1}{6c^3 r}(\vec{n} \wedge \dddot{\vec{Q}}) = \frac{1}{6c^3 r}(\dddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

نوجد ثانياً $\vec{E}_Q$: حيث أن $\vec{E}_Q = \vec{H}_Q \wedge \vec{n}$ ، فبالتعويض من (1):

$$\therefore \vec{E}_Q = \frac{1}{6c^3 r}[(\dddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

ملخص: من مثالي (2) ,(1) نجد أن:

الصورة العامة لمجال الإشعاع المشتملة على الأنواع الثلاثة (المزدوج أو ثنائي القطب الكهربي، المزدوج أو ثنائي القطب المغنطيسي، رباعي الأقطاب المغنطيسي)، يمكن كتابتها كالتالي:

$$\vec{E} = \vec{E}_d + \vec{E}_M + \vec{E}_Q = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n} + (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) + \frac{1}{6c}\{(\dddot{\vec{D}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}\}]$$

$$\vec{H} = \vec{H}_d + \vec{H}_M + \vec{H}_Q = \frac{1}{c^2 r}[(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) + \{(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}\} + \frac{1}{6c}(\dddot{\vec{D}} \wedge \vec{n})]$$

مثال(٣): أوجد شدة الإشعاع الكلي لمنظومة الإشعاع بالصورة:

$$I = I_d + I_M + I_Q$$

حيث $I_d = \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\vec{d}}\right|^2$, $I_M = \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\vec{M}}\right|^2$, $I_Q = \frac{2}{180c^5}(\dddot{Q}_{\alpha\beta})^2$

هي الشدة الكلية للإشعاع ثنائي القطب الكهربي وثنائي القطب المغنطيسي ورباعي الأقطاب المغنطيسي على التوالي، $Q_{\alpha\beta}$ هو ممتد العزم رباعي الأقطاب.

الحل:

نبدأ أولاً بتعريف ممتد العزم رباعي الأقطاب(quadrupole moment tensor) $Q_{\alpha\beta}$ الذي يمكن كتابته بالصورة:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

حيث $\delta_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta$ ، ويكون المتجه Q_α بالصورة:

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n_\beta = \sum e[3x_\alpha (x_\alpha n_\alpha) - n_\alpha r^2]$$

والذي يمكن كتابته بالصورة الاتجاهية: $\vec{Q} = \sum e[3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - \vec{n} r^2]$

وهي العلاقة التي سبق استخدامها لمتجه عزم رباعي القطب المغنطيسي.

ولإيجاد شدة الإشعاع: تعرف شدة الإشعاع في الزاوية المجسمة $d\Omega$ بالعلاقة:

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 \, d\Omega = \frac{1}{4\pi c} (\dot{\vec{A}} \wedge \vec{n})^2 r^2 \, d\Omega \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

حيث:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(t') = \vec{\nabla}(t') \wedge \frac{d\vec{A}}{dt'}$$

$$= (-\frac{\vec{n}}{c}) \wedge \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c}(\vec{n} \wedge \dot{\vec{A}}) = \frac{1}{c}(\dot{\vec{A}} \wedge \vec{n}) \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

وفي حالة الإشعاع ثنائي القطب الكهربي فإن: $\vec{A}_d = \frac{1}{cr}\dot{\vec{d}}$

$$\therefore \; dI_d = \frac{1}{4\pi c^3} (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{d}})^2 \, d\Omega \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

وفي حالة الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي فإن: $\vec{A}_M = \frac{1}{cr}(\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n})$

$$\therefore \; dI_M = \frac{1}{4\pi c^3} [(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]^2 \; d\Omega \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

وفي حالة الإشعاع رباعي القطب المغنطيسي فإن:

$$A_Q = \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}}$$

$$\therefore \; dI_Q = \frac{1}{4\pi c^3} [\frac{1}{36c^2} (\dddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2] \, d\Omega \qquad \text{\_\_\_\_(7)}$$

<u>أما شدة الإشعاع الكلي للمنظومة:</u>

فيمكن حسابها بإعتبارها الطاقة المنبعثة في وحدة الزمن في كل الإتجاهات وذلك بأخذ القيمة المتوسطة للكمية dI على كل الإتجاهات $\vec{n}$ وضرب هذا المتوسط في (4π) وإعتبار أن: $d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$

وقد سبق حساب شدة الإشعاع الكلي في حالة ثنائي القطب الكهربي (مثال سابق) وكانت النتيجة:

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب شدة الإشعاع الكلي في حالة ثنائي القطب المغنطيسي والنتيجة هي:

$$I_M = \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\vec{M}}\right|^2$$

أما شدة الإشعاع الكلي في حالة رباعي الأقطاب المغنطيسية فيمكن حسابه كالآتي:

$$dI_Q = \frac{1}{4\pi c^3}[\frac{1}{36c^2}(\dddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2]\, d\Omega \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(8)}$$

ولكن: $(\vec{A} \wedge \vec{B})^2 = A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$

$$\therefore\ (\dddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2 = (\dddot{\vec{Q}})^2 - (\vec{n}\cdot\dddot{\vec{Q}})^2$$
$$= \ddot{Q}_{\alpha\beta}\,\ddot{Q}_{\alpha\gamma}\, n_\beta\, n_\gamma - \ddot{Q}_{\alpha\beta}\,\ddot{Q}_{\lambda\mu}\; n_\alpha\, n_\beta\, n_\lambda\, n_\mu$$

وبالتعويض في (7) والتكامل على $d\Omega$:

$$I_Q = \frac{1}{4\pi c^3}(\frac{1}{36c^2})\int(\dddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2\, d\Omega$$
$$= \frac{1}{4\pi c^3}(\frac{1}{36c^2})[\ddot{Q}_{\alpha\beta}\,\ddot{Q}_{\alpha\gamma}\int n_\beta\, n_\gamma\, d\Omega - \ddot{Q}_{\alpha\beta}\,\ddot{Q}_{\lambda\mu}\int n_\alpha\, n_\beta\, n_\lambda\, n_\mu\, d\Omega]$$

وباستخدام العلاقات الآتية (يمكن إثباتها):

$$\int n_\beta\, n_\gamma\, d\Omega = \frac{3}{3}\pi\,\delta_{\beta\gamma}$$

$$\int n_\alpha\, n_\beta\, n_\lambda\, n_\mu\, d\Omega = \frac{4}{15}\pi(\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha\lambda}\,\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\lambda})$$

$$\therefore\ I_Q = \frac{1}{4\pi c^3}(\frac{1}{36c^2})[\frac{4\pi}{3}\delta_{\beta\gamma}\,\ddot{Q}_{\alpha\beta}\,\ddot{Q}_{\alpha\gamma}$$
$$-\frac{4\pi}{15}(\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha\lambda}\,\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\lambda})\ddot{Q}_{\alpha\beta}\,\ddot{Q}_{\lambda\mu}]$$
$$= \frac{1}{36c^5}[\frac{1}{3}(\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{15}\{\ddot{Q}_{\alpha\alpha}\,\ddot{Q}_{\beta\beta} + 2(\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2\}]$$
$$= \frac{1}{36c^5}[\frac{1}{5}(\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2] = \frac{1}{180c^5}(\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2$$

أي أن شدة الإشعاع رباعي الأقطاب يتناسب مع مربع المشتقة الثالثة للعزم رباعي الأقطاب $Q_{\alpha\beta}$ للمنظومة.

وقد استخدمنا في إثبات العلاقة السابقة العلاقات الآتية:

$$\delta_{\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\gamma} = Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$$

$$\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} Q_{\alpha\beta} Q_{\lambda\mu} = \delta_{\beta\mu} Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\mu} = Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$$

$$\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} Q_{\alpha\beta} Q_{\lambda\mu} = \delta_{\alpha\mu} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\mu} = Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$$

أيضاً: فمن خواص الممتد $Q_{\alpha\beta}$ أن عناصره القطرية تساوي صفراً أي أن $Q_{\alpha\alpha} = 0$.

<u>مثال(٤):</u> أحسب بصورة تقريبية الشدة النسبية لأنواع الإشعاع الثلاثة (ثنائي قطب كهربي، ثنائي قطب مغنطيسي، رباعي قطب مغنطيسي)، وأثبت أن النسبة بين الأنواع الثلاثة هي كنسبة:

$$I_d : I_M : I_Q = 1 : \beta^2 : \beta^2 \text{ ، حيث } \beta = \frac{v}{c}$$

<u>الحل:</u> للتبسيط نعتبر أن شحنات المنظومة تتحرك حركة دورية بحيث أن:

$r' \simeq \ell \cos wt$، حيث ℓ كمية من رتبة أبعاد المنظومة

وتكون سرعة الشحنة: $v \simeq \ell w \sin wt$.

وباعتبار أن القيمة المتوسطة لكل من $|\sin wt|$, $|\cos wt|$ من رتبة الواحد فإن $\sin wt \simeq 1$, $\cos wt \simeq 1$، $\therefore\ v \simeq \ell w$

ويكون عزم ثنائي القطب بالتقريب:

$$d \simeq er' = e\ell \cos wt$$

$$\dot{d} \simeq e\ell w \sin wt$$

$$\ddot{d} \simeq e\ell w^2 \cos wt \simeq e\ell w^2$$

شدة الإشعاع ثنائي القطب الكهربي يكون من رتبة:

$$I_d \simeq \frac{(\ddot{d})^2}{c^3} \simeq \frac{e^2 \ell^2 w^4}{c^3} \simeq \frac{e^2 v^2 w^2}{c^3} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

وبإعتبار الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي: وحيث أن $\vec{M}=\frac{1}{2c}\sum e(\vec{r}'\wedge\vec{v})$

$$\therefore\ M\simeq\frac{er'v}{c}\simeq\frac{e}{c}v\,\ell\cos wt\simeq\frac{e}{c}\ell^2 w\cos wt\sin wt\ \simeq\frac{e}{c}\ell^2 w\sin 2wt$$

$$\therefore\ \dot{M}\simeq\frac{e}{c}\ell^2 w^2\cos 2wt\qquad,\qquad \ddot{M}\simeq\frac{e}{c}\ell^2 w^3\sin 2wt\simeq\frac{e}{c}\ell^2 w^3$$

وبإعتبار شدة الإشعاع لثنائي القطب المغنطيسي:

$$I_M\simeq\frac{(\ddot{M})^2}{c^3}\simeq\frac{e^2\,\ell^4 w^6}{c^5}\simeq\frac{e^2 v^4 w^2}{c^5}\qquad\text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

من (2) ,(1) نجد أن:

$$\frac{I_M}{I_d}=\frac{(v/c)^2}{1}\ \rightarrow\ I_M:I_d=(\frac{v}{c})^2:1=\beta^2:1\qquad\text{\_\_\_\_\_\_(3)}$$

أي أن شدة الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي يكون أقل من شدة الإشعاع ثنائي القطب الكهربي بنسبة β^2 .

<u>في حالة العزم رباعي الأقطاب المغنطيسي:</u>

يمكن اعتبار أن: Q من رتبة er'^2

$$Q\simeq er'^2\simeq e\ell^2\cos^2 wt$$

$$\dot{Q}\simeq e\ell^2\,w\cos wt\sin wt\simeq e\ell^2 w\sin 2wt$$

$$\ddot{Q}\simeq e\ell^2\,w^2\cos 2wt$$

$$\dddot{Q}\simeq e\ell^2\,w^3\sin 2wt$$

وتكون شدة الإشعاع رباعي الأقطاب المغنطيسي:

$$I_Q\simeq\frac{\dddot{Q}^2}{c^5}\simeq\frac{e^2\,\ell^4 w^6}{c^5}\simeq\frac{e^2 v^4 w^2}{c^5}\qquad\text{\_\_\_\_\_\_(4)}$$

من (4) ,(2) نجد أن: $I_Q\simeq I_M$ أي أن شدة الإشعاع رباعي الأقطاب المغنطيسي من نفس رتبة شدة الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي.

وباستخدام (3) نجد أن: $I_d:I_M:I_Q\simeq 1:\beta^2:\beta^2$

وهو المطلوب.

٤- **الإشعاع رباعي الأقطاب الكهربي Electric quadrupole Radiation**

مقدمة: وجدنا أنه إذا كانت نقطة الرصد p لمنظومة الإشعاع تقع على مسافة كبيرة من المنظومة أي إذا كان $|\vec{r}|>>|\vec{r}'|$ فإن الجهد القياسي للمجال يكتب بالصورة: $\phi=\phi_0+\phi_1+\phi_2+\phi_3+\cdots$

حيث ϕ_0 تمثل جهد الشحنة المنفردة (النقطية)، ϕ_1 تمثل جهد ثنائي القطب الكهربي، ϕ_2 تمثل جهد رباعي الأقطاب الكهربية، وهكذا...

وقد قمنا بحساب ϕ_0,ϕ_1 ووجدنا أن

$$\phi_0=\frac{e}{r}\,,\ \phi_1=\frac{1}{rc}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}) \quad \text{حيث} \quad e=\int\rho' dV'\ ,\ \vec{d}=\int\rho'\vec{r}'dV'$$

هما قيمة لشحنة الكلية (e) وعزم ثنائي القطب الكهربي $(\vec{d})$.

ولإيجاد ϕ_0,ϕ_1 قمنا بكتابة:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}+\cdots$$

واكتفينا بالحدين الأولين فقط.

أما إذا أردنا إيجاد ϕ_2 والجهود الأعلى فيلزمنا كتابة الحدود التالية في $\frac{1}{R}$ كالتالي:

$$\frac{1}{R}=|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}=(r^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'+r'^2)^{-1/2}$$

حيث $|\vec{r}-\vec{r}'|=\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')^2}=(r^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'+r'^2)^{1/2}$

$$\therefore\ \frac{1}{R}=\frac{1}{r}[1-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}]^{-1/2}=\frac{1}{r}[1-\frac{2rr'\cos\theta}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}]^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{r}[1-\frac{2r'}{r}\cos\theta+\frac{r'^2}{r^2}]^{-1/2}=\frac{1}{r}[1-2z\cos\theta+z^2]^{-1/2}$$

حيث $z=\frac{r'}{r}$, $\vec{r}\cdot\vec{r}'=rr'\cos\theta$

وحيث أن $(1-2z\cos\theta+z^2)^{-1/2}$ تمثل الدالة المولدة (generating function) لكثيرة حدود ليجندر والمعرفة بالعلاقة:

$$(1-2z\cos\theta+z^2)^{-1/2}=\sum p_n(\cos\theta)\cdot z^n$$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r}\sum p_n(\cos\theta)\cdot z^n = \frac{1}{r}\sum p_n(\cos\theta)(\frac{r'}{r})^n$$

$$= \frac{1}{r}[p_0(\cos\theta) + p_1(\cos\theta)(\frac{r'}{r}) + p_2(\cos\theta)(\frac{r'}{r})^2 + \cdots]$$

ولما كان:

$$p_0(\cos\theta) = 1\ ,\ \ p_1(\cos\theta) = \cos\theta\ \ ,\ \ p_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}[1 + (\frac{r'}{r})\cos\theta + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)(\frac{r'}{r})^2 + \cdots]$$

$$= \frac{1}{r} + (\frac{r'}{r^2})\cos\theta + \frac{1}{2}(\frac{r'^2}{r^3})(3\cos^2\theta - 1) + \cdots \qquad \_\_\_\_(1)$$

<u>مثال</u>: باستخدام مفكوك $\frac{1}{R}$ بدلالة كثيرات حدود ليجندر (المعادلة (1))، أوجد الجهد القياسي لإشعاع ثنائي القطب ورباعي الأقطاب الكهربية بالصورة:

$$\phi_1 = \frac{1}{rc}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}})\ \ ,\ \ \phi_2 = \frac{1}{2r^5}|\vec{D}|$$

حيث $\vec{d}, \vec{D}$ هما عزماً ثنائي القطب ورباعي الأقطاب الكهربية على التوالي.

<u>الحل</u>: بكتابة

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 = \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV'$$

والتعويض عن $\frac{1}{R}$ من (1):

$$\therefore \phi = \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} dV' + \int \frac{r'\rho(\vec{r}', t')}{r^2}\cos\theta\, dV'$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{r'^2}{r^3}\rho(\vec{r}', t')(3\cos^2\theta - 1)\, dV'$$

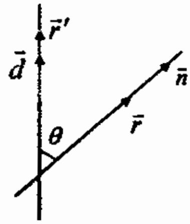
حيث:

$$\phi_0 = \frac{1}{r}\int \rho'\, dV' = \frac{e}{r} \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\therefore \phi_1 = \int \rho' \frac{r' \cos\theta}{r^2}\, dV' = \int \rho' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}\, dV'$$

$$= -\int \rho' (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})(\frac{1}{r}) dV' \qquad \left| \vec{r} \cdot \vec{r}' = r\, r' \cos\theta \right.$$

حيث $\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$



$$\therefore \phi_1 = -\int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\rho'}{r} dV' = -\frac{1}{r} \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \rho' dV'$$

$$= -\frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \vec{\nabla}(t') dV' = -\frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t'} (-\frac{\vec{n}}{c})$$

حيث $\vec{\nabla}(t') = \vec{\nabla}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{n}}{c}$

$$\therefore \phi_1 = \frac{1}{rc}[\vec{n} \cdot \int \vec{r}' \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dV'] = \frac{1}{rc}[\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \int \vec{r}' \rho' dV']$$

$$= \frac{1}{rc}(\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{d}}{\partial t'}) = \frac{1}{rc}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

حيث $\vec{d} = \int \vec{r}' \rho' dV'$ هي عزم ثنائي القطب الكهربي.

<u>والآن لإيجاد</u> ϕ_2:

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \int \frac{r'^2}{r^3} \rho' (3\cos^2\theta - 1) dV'$$

ولكن $\vec{r} \cdot \vec{r}' = r\, r' \cos\theta \leftarrow (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 = r^2 r'^2 \cos^2\theta$

$$\therefore \phi_2 = \frac{1}{2r^5} \int \rho' [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2] dV' \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

وبتعريف متجه عزم رباعي الأقطاب الكهربي بالعلاقة:

$$|\vec{D}| = D = \int \rho' [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2] dV'$$

$$\therefore \phi_2 = \frac{1}{2r^5} D = \frac{1}{2r^5} |\vec{D}| \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

ممتد عزم رباعي الأقطاب الكهربي

(Electric quadrupole moment tensor)

باعتبار الكمية $[3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2 r'^2]$:

$$3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2 r'^2 = 3(xx'+yy'+zz')^2 - (x^2+y^2+z^2)r'^2$$
$$= 3x^2x'^2 + 3y^2y'^2 + 3z^2z'^2$$
$$+ 6xx'\,yy' + 6yy'\,zz' + 6zz'\,xx' - (x^2+y^2+z^2)r'^2$$
$$= x^2(3x'^2 - r'^2) + y^2(3y'^2 - r'^2) + z^2(3z'^2 - r'^2)$$
$$+ 6xx'\,yy' + 6yy'\,zz' + 6zz'\,xx'$$

وبوضع

$$x = x_1\ ,\ y = x_2\ \ ,\ z = x_3\ \ ,\ x' = x_1'\ ,\ y' = x_2'\ \ ,\ z' = x_3'$$

$$\therefore 3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2 r'^2 = x_1^2(3x_1'^2 - r'^2) + x_2^2(3x_2'^2 - r'^2) + x_3^2(3x_3'^2 - r'^2)$$
$$+ 6x_1x_1'\,x_2\,x_2' + 6x_2x_2'\,x_3\,x_3' + 6x_3x_3'\,x_1\,x_1'$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} x_\alpha\, x_\beta\,(3x_\alpha'\,x_\beta' - \delta_{\alpha\beta}\,r'^2)$$

حيث

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

وبالتعويض في العلاقة (3):

$$\phi_2 = \frac{1}{2r^5}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} x_\alpha\, x_\beta \int \rho'(3x_\alpha'\,x_\beta' - \delta_{\alpha\beta}\,r'^2)\,dV'$$

ويعرف ممتد عزم رباعي الأقطاب الكهربي بالعلاقة:

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho'(3x_\alpha'\,x_\beta' - \delta_{\alpha\beta}\,r'^2)\,dV'$$

وتصبح العلاقة الخاصة بالجهد ϕ_2 بالصورة:

$$\phi_2 = \frac{1}{2r^5}\,x_\alpha\,x_\beta\,D_{\alpha\beta}$$

حيث استخدمنا قاعدة الجميع (summation Convention).

٥- المجال الناتج عن حركة إختيارية لجسيم مشحون (جهود لينارد- فيخيرت)

The Field due to arbitrary motion of charged Particle (Lienard-Wiechert Potentials)

بإعتبار شحنة مقدارها e تتحرك إختيارياً بسرعة $\vec{v}_0$ على المسار: $\vec{r} = \vec{r}_0(t) = \int \vec{v}_0\, dt$، فإيجاد جهد مجال الشحنة المتحركة نكتب كثافتي الشحنة والتيار بدلالة دالة دلتا لديراك كالتالي:

$$\rho = e\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \quad , \quad \vec{j} = \rho \vec{v}_0 = e\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)\vec{v}_0(t)$$

وتأخذ جهود التأخير الصورة الآتية:

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}',t')}{R} dV' \quad , \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{R} dV'$$

حيث:
$$t' = t - \frac{R}{c} \quad , \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$\therefore \phi(\vec{r},t) = e\int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$A(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

وبأخذ المتغير الجديد $\vec{\ell} = \vec{r}' - \vec{r}_0(t')$

والاقتصار على المركبة في إتجاه محور x للتبسيط (أي إعتبار الحركة في إتجاه محور x).

$$\therefore \vec{\ell} \to \ell_x = x' - x_0(t) \quad , \quad \vec{v}_0 \to v_x = \frac{\partial x_0}{\partial t'}$$

$$\therefore \frac{\partial \ell_x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x'} = 1 - \vec{v}_0 \frac{\partial}{\partial x'}[t - \frac{R}{c}]$$

$$= 1 - \vec{v}_0 \frac{\partial}{\partial x'}[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}] = 1 - \frac{\vec{v}_0}{c}\frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= 1 - \frac{\vec{\beta}}{R}(x - x') \quad , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_0}{c}$$

$$\therefore \frac{\partial(\ell_x, \ell_y, \ell_z)}{\partial(x', y', z')} = 1 - \frac{\vec{\beta}}{R}\cdot(\vec{r} - \vec{r}') = 1 - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R}$$

وبذلك يمكن كتابة:

$$\therefore dV' = d^3r' = dx'\,dy'\,dz' = \frac{\partial(x',y',z')}{\partial(\ell_x,\ell_y,\ell_z)}d\ell_x\,d\ell_y\,d\ell_z$$

$$= \frac{d\ell_x\,d\ell_y\,d\ell_z}{1-\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R}} = \frac{d^3\ell}{1-\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R}}$$

وبالتعويض في (1):

$$\phi(\vec{r},t) = e\int\frac{\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = e\int\frac{\delta(\vec{\ell})}{R}dV'$$

$$= e\int\frac{\delta(\vec{\ell})}{R[1-\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R}]}d^3\ell = e\int\frac{\delta(\vec{\ell})\,d\vec{\ell}}{R[1-\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R}]}$$

ولكن: $\vec{r}' = \vec{\ell}+\vec{r}_0$، وعندما $\vec{\ell}\to 0$ فإن:

$$R = |\vec{r}-\vec{r}'| = |\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{\ell}| = |\vec{r}-\vec{r}_0|$$

ومن خواص دالة دلتا ديراك: $\int\delta(\vec{\ell})\,d\vec{\ell} = 1$

$$\therefore \phi(r',t) = e[\frac{1}{R(1-\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R})}] = \frac{e}{R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(3)}$$

حيث $R(t') = |\vec{r}-\vec{r}_0|$ هو المتجه الواصل من الشحنة إلى نقطة الرصد

$$t' = t-\frac{R}{c}$$

وبالمثل فإن الجهد الإتجاهي $\vec{A}$ يمكن كتابته بالصورة:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\int\frac{\delta(\vec{r}'-r_0)}{R}\vec{v}_0(t')\,dV'$$

$$= \frac{e}{c}\int\frac{\delta(\vec{\ell})\,\vec{v}_0(t')}{R}[\frac{d^3\ell}{1-\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R}}] = \frac{e}{c}\,\vec{v}_0[\frac{1}{R(1-\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R})}]$$

$$= e\frac{\vec{v}_0}{c}[\frac{1}{R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}}] = e\beta(\frac{1}{R-\beta\cdot\vec{R}}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(4)}$$

حيث $R=\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|$ ، $\int \delta(\vec{\ell})\,d\vec{\ell}=1$ عندما $\ell \to 0$

العلاقتان (4) ,(3) والتي تكتبان بالصورة:

$$\phi=\frac{e}{R-\beta\cdot\vec{R}} \quad , \quad \vec{A}=\frac{e\vec{\beta}}{R-\beta\cdot\vec{R}}$$

يعرفان بجهدي لينارد- فيخيرت (Lienard-Wiechert pot.) لحركة شحنه إختيارية السرعة $\vec{v}_0$.

ومن هاتين العلاقتين نجد أن:

$$\vec{A}=\vec{\beta}\phi=\frac{\vec{v}_0}{c}\phi \qquad (5)$$

مثال: أوجد متجهي المجالين الكهربي $(\vec{E})$ والمغنطيسي $(\vec{H})$ لشحنة إختيارية متحركة بعجلة وجهداها يعطيان بالعلاقتين:

$$\phi=\frac{e}{R-\beta\cdot\vec{R}} \quad , \quad \vec{A}=\frac{e\vec{\beta}}{R-\beta\cdot\vec{R}}$$

(وتعرفان بجهدي لينارد- فيخيرت)

وكذلك العلاقة بين هذين المجالين مع دراسة الحالات الخاصة الممكنة.

الحل: لإيجاد $\vec{E},\vec{H}$ نستخدم العلاقتين:

$$\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\vec{H}=curl\,\vec{A} \qquad (2)$$

حيث:

$$\phi=\frac{e}{R-\beta\cdot\vec{R}} \qquad (3)$$

$$\vec{A}=\frac{e\vec{\beta}}{R-\beta\cdot\vec{R}} \qquad (4)$$

فبوضع $S=R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}$

$$\therefore \boxed{\phi = \frac{e}{S}} \quad , \quad \boxed{\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{S} = \frac{e}{c}\frac{\vec{v}_0}{S}}$$

حيث $S = S(R, t')$

أولاً: إيجاد المجال الكهربي:

$$\therefore \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -e\vec{\nabla}(\frac{1}{S}) - \frac{e}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\vec{v}_0}{S})$$

$$= \frac{e}{S^2}\vec{\nabla}(S) - \frac{e}{c^2}[\frac{1}{S}\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} - \frac{\vec{v}_0}{S^2}\frac{\partial S}{\partial t}]$$

ولحساب كل من $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial t}, \nabla(S)$:

(i) حساب $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t}$:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0(t') \quad , \quad t' = t - \frac{R}{c}$$

$$\therefore \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

بالضرب في $\frac{\partial t}{\partial t'}$:

$$\therefore 1 = \frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}}} \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

ولكن:

$$R\frac{\partial R}{\partial t} = \vec{R}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} = (\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\frac{\partial(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\partial t'}$$

$$= -\vec{R}\cdot\vec{v}_0 \quad , \quad \vec{v}_0 = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t'} \qquad \Big| \vec{r}_0 = \vec{r}_0(t')$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_0}{R}} \qquad \text{\_\_\_\_(7)}$$

بالتعويض من (7) في (6):

$$\therefore \frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_0}{cR}}=\frac{1}{1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{R}}{R}}=\frac{R}{R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}}=\frac{R}{S} \qquad (8)$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t}=\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{R}{S}\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t'}=\frac{R}{S}\dot{\vec{v}}_0 \qquad (9)$$

(ii) حساب $\frac{\partial S}{\partial t}$: حيث أن $S=R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}$

$$\therefore \frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{R}{S}\frac{\partial}{\partial t}(R-\vec{\beta}\cdot\vec{R})=\frac{R}{S}[\frac{\partial R}{\partial t'}-\vec{\beta}\cdot\frac{\partial R}{\partial t'}-\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}}]$$

حيث $\dot{\vec{\beta}}=\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t}=\frac{\dot{\vec{v}}_0}{c}$ ، وحيث أن $\frac{\partial R}{\partial t'}=-\frac{\vec{v}_0\cdot\vec{R}}{R}$ ، فإن

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{R}{S}[\frac{\vec{v}_0\cdot\vec{R}}{R}-\vec{\beta}\cdot\vec{v}_0+\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}}] \qquad (10)$$

(iii) حساب $\vec{\nabla}(S)$: حيث أن $S=S(R,t')$ ، فإن:

$$\vec{\nabla}(S)=(\vec{\nabla}S)_{t'}+\frac{\partial S}{\partial t'}\vec{\nabla}(t') \qquad (11)$$

ولكن:

$$(\vec{\nabla}S)_{t'}=\vec{\nabla}_R(R-\vec{\beta}\cdot\vec{R})=\frac{\vec{R}}{R}-\vec{\beta} \qquad (12)$$

$$\vec{\nabla}(t')=\vec{\nabla}(t-\frac{R}{c})=-\frac{1}{c}\vec{\nabla}(R)$$

$$=-\frac{1}{c}(\vec{\nabla}R)_{t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}(\frac{R}{S})=\frac{-\vec{R}}{cS} \qquad (13)$$

أيضاً فإن:

$$\frac{\partial S}{\partial t'}=\frac{\partial S}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial t'}=-\frac{R}{S}(\frac{\vec{v}_0\cdot\vec{R}}{R}-\vec{\beta}\cdot\vec{v}_0+\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}})(\frac{R}{S})$$

$$=-(\frac{\vec{v}_0\cdot\vec{R}}{R}-\vec{\beta}\cdot\vec{v}_0+\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}}) \qquad (14)$$

بالتعويض من (14) ,(13) ,(12) في (11) نحصل على:

$$\vec{\nabla}(S) = (\frac{\vec{R}}{R} - \vec{\beta}) + (\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{v}_0 + \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\frac{\vec{R}}{cS})$$

$$= \frac{1}{R}(\vec{R} - \vec{\beta} R) + \frac{\vec{R}}{cS}[\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{v}_0}{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} R)] \qquad \_\_\_\_(15)$$

وأخيراً بالتعويض من (15) ,(10) ,(9) في (5) نحصل على:

$$\vec{E} = \frac{e}{S^2}[\frac{1}{R}(\vec{R} - \vec{\beta} R) + \frac{\vec{R}}{cS}\{\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{v}_0}{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} R)\}]$$

$$= -\frac{e}{c^2}[\frac{1}{S}\frac{R}{S}\dot{\vec{v}}_0 + \frac{\vec{v}_0}{S}\ \frac{R}{S}\{\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{v}_0}{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} R)\}]$$

$$= \frac{e}{S^3}(\vec{R} - \vec{\beta} R)(1 - \beta^2) + \frac{e}{cS^3}[(\vec{R} - \vec{\beta} R)(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - RS\dot{\vec{\beta}}]$$

$$= \frac{e}{S^3}(1 - \beta^2)\vec{S} + \frac{e}{cS^3}[\vec{S}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - RS\dot{\vec{\beta}}] \qquad \_\_\_\_(16)$$

حيث

$$\vec{S} = \vec{R} - \vec{\beta}R \ ,\ S = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R} \ ,\ \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_0}{c} \ ,\ \dot{\vec{\beta}} = \frac{\dot{\vec{v}}_0}{c}$$

ويمكن كتابة العلاقة (16) بصورة أخرى وذلك بإعادة كتابة الحد الثاني بالصورة:

$$\vec{S}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - RS\,\dot{\vec{\beta}} = (\vec{R} - \vec{\beta}R)(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - R(\vec{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{R})\,\dot{\vec{\beta}}$$

$$= \vec{R} \wedge (\vec{R} - \vec{\beta} R) \wedge \dot{\vec{\beta}} = \vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}}$$

$$\therefore\ \vec{E} = \frac{e}{S^3}(1 - \beta^2)\vec{S} + \frac{e}{cS^3}[\vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}}] = \vec{E}_i + \vec{E}_r \qquad \_\_\_\_(17)$$

من هذه العلاقة نرى أن المجال الكهربي $\vec{E}$ للشحنة المتحركة يتكون من جزئين:

(i) الجزء $\vec{E}_i$ ويعتمد على سرعة الشحنة $\vec{v}_0$ ويسمى بالمجال التأثيري (Inductive field) أو مجال السرعة (Velocity field).

(ii) الجزء $\vec{E}_r$ ويعتمد على العجلة $\dot{\vec{v}}_0$ ويسمى بالمجال الإشعاعي (Radiative field) أو مجال العجلة (Acceleration field).

ملاحظات:

(١) يمكن إعتبار الحركة الإختيارية كأنها مجموع الحركة المنتظمة (المعتمدة على السرعة) مضافاً إليها الحركة المعجلة (التي تصدر إشعاعاً).

(٢) في حالة الحركة المنتظمة فإن $\dot{\vec{v}}_0 = 0$ ويتلاشى الحد الثاني $\vec{E}_r$ (لتلاشي العجلة) وهذا يعني أن المجال الإشعاعي يوجد فقط للأجسام المعجلة (ذات العجلة).

(٣) في حالة الشحنات الساكنة $(v_0 = 0)$ فإن $\beta = 0$ وتصبح $\vec{S} = \vec{R}$ وتكون شدة المجال: $\vec{E} = \vec{E}_i = \frac{e}{R^3}\vec{R}$.

(٤) في حالة السرعات $v_0 << c$ فإن $\beta \to 0$ وتصبح $\vec{S} = \vec{R}$ ويصبح المجال التأثيري (الناتج عن الحركة المنتظمة للشحنات) بالصورة: $\vec{E} = \vec{E}_i = \frac{e}{R^3}\vec{R}$.

ثانياً: إيجاد المجال المغنطيسي:

بنفس الطريقة السابقة يمكن الحصول على شدة المجال المغنطيسي $\vec{H}$ للجسيمات المشحونة المتحركة بعجلة، حيث:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (\frac{e\vec{v}_0}{cS}) = \vec{\nabla} \wedge (\frac{e\vec{\beta}}{S})$$

$$= e[\vec{\nabla} \wedge (\frac{1}{S})\vec{\beta} = e[curl(\frac{1}{S})\vec{\beta}]$$

$$= e[(\frac{1}{S})curl\,\vec{\beta} + grad\,(\frac{1}{S}) \wedge \vec{\beta}]$$

$$= \frac{e}{S}curl\,\vec{\beta} - \frac{e}{S^2}[(grad\,S \wedge (\vec{\beta})]$$

(وذلك لأن: $curl(\phi\vec{A}) = \phi\,curl\,\vec{A} + grad\,\phi \wedge \vec{A}$)

ولكن $$crul\,\vec{\beta} = \frac{1}{c}curl\,\vec{v}_0 = -\frac{1}{c}[\dot{\vec{v}}_0 \wedge grad\,t']$$

حيث:
$$curl\,\vec{v}_0 = -[\dot{\vec{v}}_0 \wedge grad\,t']$$

الإثبات:

$$[curl\,v_0]_x = \frac{\partial v_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial z} = \frac{\partial v_{0z}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}$$
$$= \dot{\vec{v}}_{0z}\frac{\partial t'}{\partial y} - \dot{\vec{v}}_{0y}\frac{\partial t'}{\partial z} = \dot{\vec{v}}_{0z}(grad\,t')_y - \dot{\vec{v}}_{0y}(grad\,t')_z$$
$$= -[\dot{\vec{v}}_0 \wedge grad\,t']_x \quad , \cdots$$

أيضاً حيث أن:

$$grad\,(t') = -\frac{\vec{R}}{cS}$$
$$\therefore curl\,\vec{\beta} = -\frac{1}{c^2 S}(\vec{R} \wedge \dot{\vec{v}}_0) = -\frac{1}{cS}(\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}})$$

ومن العلاقة:

$$grad\,S = \vec{\nabla}(S) = \frac{1}{R}(\vec{R} - \vec{\beta}R) + \frac{\vec{R}}{cS}[\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}} + (\frac{\vec{v}_0}{R})\cdot(\vec{R} - \vec{\beta}\,R)]$$
$$\therefore \vec{H} = -\frac{e}{cS^2}(\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}) - \frac{e}{S^2}[\frac{1}{R}(\vec{R} - \vec{\beta}R) \wedge \vec{\beta}$$
$$+ \frac{\vec{R} \wedge \vec{\beta}}{cS}\{\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}} + (\frac{\vec{v}_0}{R})\cdot(\vec{R} - R\vec{\beta})\}]$$
$$= \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)\{\vec{R} \wedge (\vec{R} - \vec{\beta}R)\}$$
$$+ \frac{e}{RcS^3}[\{\vec{R} \wedge (\vec{R} - \vec{\beta}R)\}(\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \vec{R}\cdot(\vec{R} - \vec{\beta}\cdot\vec{R})(\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}})]$$

ولكن الحد الثاني يساوي:

$$\frac{e}{RcS^3}[\vec{R} \wedge \{(\vec{R} - \vec{\beta}R)(\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \vec{R}\cdot(\vec{R} - \vec{R}\cdot\vec{\beta})\dot{\vec{\beta}}\}]$$
$$= \frac{e}{RcS^3}[\vec{R} \wedge \{\vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}}\}]$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)(\vec{R}\wedge\vec{S}) + \frac{e}{RcS^3}[\vec{R}\wedge(\vec{R}\wedge\vec{S}\wedge\dot{\vec{\beta}})]$$

$$= \vec{H}_i + H_r \qquad \text{\_\_\_\_(18)}$$

ومنها يتضح أن المجال المغنطيسي للشحنة المتحركة بعجلة تتكون أيضاً من جزئين:

(١) $\vec{H}_i$ وهو المجال التأثيري (Induction field)

(٢) $\vec{H}_r$ وهو المجال الإشعاعي (Radiation field)

ملاحظات:

(١) من العلاقتين (18), (17) نجد أن:

$$\vec{H} = \frac{1}{R}(\vec{R}\wedge\vec{E}) = \hat{n}\wedge\vec{E}$$

حيث $\hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ متجه وحدة في إتجاه المتجه $\vec{R}$.

ومن ذلك يتضح أن المجالين المغنطيسي للإشعاع الناتج عن الشحنة المتحركة بعجلة يكون عمودياً على المجال الكهربي وعلى المتجه $\vec{R}$، وينطبق ذلك على المجالين التأثيري والإشعاعي.

(٢) في حالة الشحنات الساكنة فإن $v_0 = 0$ (أي أن $\beta = 0$) وتصبح $\vec{S} = \vec{R}$ وتكون شدة المجال:

$$\vec{H} = \vec{H}_i = \frac{e}{R(R^3)}(\vec{R}\wedge\vec{R}) = 0$$

وهذا يعني إنعدام المجال المغنطيسي في هذه الحالة (قارن مع المجال الكهربي).

(٣) في حالة $v << c$ (السرعات البطيئة) فإن $\beta << 1$ وتصبح $\vec{S} = \vec{R}$ وتؤول شدة المجال الإشعاعي إلى:

$$\vec{H}_r = \frac{e}{Rc(R^3)}[\vec{R}\wedge(\vec{R}\wedge\vec{R}\wedge\dot{\vec{\beta}})]$$

$$= \frac{e}{c\,R^4}\vec{R}\wedge[(\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}})\vec{R} - (\vec{R}\cdot\vec{R})\dot{\vec{\beta}})]$$

$$= \frac{e}{cR^4}[-R^2(\vec{R}\wedge\dot{\vec{\beta}})] = \frac{e}{cR^2}(\dot{\vec{\beta}}\wedge\vec{R}) = \frac{e}{c^2R^2}(\dot{\vec{v}}\wedge\vec{R})$$

وفي حالة الحركة المنتظمة فإن: $\dot{\vec{v}} = 0$ ويصبح $\vec{H}_r = 0$ (إنعدام المجال الإشعاعي).

(٤) يمكن كتابة شدة المجال التأثيري (الناتج عن الحركة المنتظمة للشحنات) بالصورة:

$$\vec{H}_i = \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)(\vec{R}\wedge\vec{S}) = \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)[\vec{R}\wedge(\vec{R}-\vec{\beta}R)]$$

$$= \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)[-R(\vec{R}\wedge\vec{\beta})] = \frac{e}{S^3}(1-\beta^2)(\vec{\beta}\wedge\vec{R})$$

$$= \frac{e}{cS^3}(1-\beta^2)(\vec{v}\wedge\vec{R})$$

وفي حالة $v << c$ فإن $\beta \to 0$، $S \to R$، ونحصل على:

$$\vec{H}_i = \frac{e}{cR^3}(\vec{v}\wedge\vec{R})$$

وقد سبق حصولنا على المجال الكهربي التأثيري في تلك الحالة بالصورة:

$$\vec{E}_i = \frac{e}{R^3}\vec{R} \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{\vec{H}_i = \frac{1}{c}(\vec{v}\wedge\vec{E}_i)}$$

(٥) يمكن استنتاج قانون بيو-سافار من العلاقة $\vec{H}_i = \frac{e}{cR^3}(\vec{v}\wedge\vec{R})$ كالآتي:

باعتبار المجال $\vec{H}$ ناتجاً عن عنصر تيار $(I\,d\vec{\ell})$ حيث I شدة التيار المار خلال طول قدره $d\ell$ من موصل، فإذا عرفنا:

$$e\vec{v} = \int dq\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \int\frac{dq}{dt}d\vec{\ell} = \int I\,d\vec{\ell}$$

$$\therefore \boxed{\vec{H} = \frac{1}{c}\int\frac{I(d\vec{\ell}\wedge\vec{R})}{R^3}}$$

وهو قانون بيو–سافار (Biot-Savart Law) لشدة المجال الناتج عن تيار يمر خلال موصل.

٦- تطبيقات على الحركة الإختيارية لجسيم مشحون:

هناك العديد من التطبيقات التي يمكن دراستها بخصوص الحركة الإختيارية لجسيم مشحون ومن هذه التطبيقات:

(١) الإشعاع الناتج عن حركة جسيم مشحون معجل يتحرك بسرعات منخفضة (لا نسبية)، ويعرف بإشعاع لارمور (Larmor Radiation).

(٢) الإشعاع الناتج عن حركة جسيم مشحون معجل يتحرك بسرعات عالية (نسبية)، ويعرف بإشعاع لينارد (Lenard Radiation).

(٣) الإشعاع الناتج عن حركة الإلكترون في مداراتها الدائرية (حالة العجلة المتعامدة مع السرعة).

(٤) الإشعاع الناتج عن جسيمات مشحونة ذات عجلة تقصيرية (تقصير) مواز لسرعة الجسيمات، وتعرف بحالة أشعة الفرملة أو الأشعة الكابحة (Bremsstrah lung)، وسنتناول هذه التطبيقات في الأمثلة الآتية:

مثال(١): إذا كان الجزء الإشعاعي من المجالين $\vec{E},\vec{H}$ يعطيان بالعلاقتين:

$$\vec{E}_r = \frac{e}{cS^3}(\vec{R}\wedge\vec{S}\wedge\dot{\vec{\beta}}) \ , \ \vec{H}_r = \hat{n}\wedge\vec{E}_r$$

حيث: $\vec{S} = \vec{R} - \vec{\beta}\,R \ , \ \vec{\beta} = \dfrac{\vec{v}_0}{c} \ , \ \hat{n} = \dfrac{\vec{R}}{R}$

فأدرس الإشعاع الناتج عن حركة جميم مشحون معجل يتحرك بسرعة منخفضة (لا نسبية)، واستنتج من ذلك صيغة لارمور (Larmor Formula) التي تعطي الشدة الكلية للإشعاع الناتج عن حركة الجسيم وصورتها:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2$$

الحل: حيث أن:

$$\vec{E}_r = \frac{e}{cS^3}(\vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

$$\vec{H}_r = \vec{n} \wedge \vec{E}_r \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

ففي حالة السرعات المنخفضة فإن: $v_0 << c$ وبالتالي فإن $\beta = \frac{v_0}{c} \to 0$

$$\therefore\ \vec{S} = \vec{R} - \beta \vec{R} \to \vec{R}\ ,\ \ S = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R} \to R$$

وتؤول العلاقة (1) إلى:

$$\vec{E}_r = \frac{e}{cR^3}[\vec{R} \wedge \vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}]$$

$$= \frac{e}{cR}[\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\vec{\beta}})] \qquad ,\ \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$ (متجه الوحدة في إتجاه $\vec{R}$)

$$= \frac{e}{cR}[(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})\hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n})\dot{\vec{\beta}}]$$

$$= \frac{e}{cR}[\frac{1}{c}(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})\hat{n} - \frac{1}{c}\dot{\vec{v}}] \qquad \left| \begin{array}{l} \hat{n} \cdot \hat{n} = 1 \\ \dot{\vec{\beta}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{c} \end{array} \right.$$

$$= \frac{e}{c^2 R}[(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})\hat{n} - \dot{\vec{v}}] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

أيضاً فإن متجه بوينتنج الذي يعطي طاقة الإشعاع المنبعث في وحدة المساحات في الثانية، أو القدرة المنبعثة لوحدة المساحات، يعطى من العلاقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_r \wedge \vec{H}_r) = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}_r \wedge (\hat{n} \wedge \vec{E}_r)]$$

$$= \frac{c}{4\pi}(E_r^2\, \hat{n} - (\vec{E}_r \cdot \hat{n})\vec{E}_r]$$

وحيث أن $\vec{E}_r$ في إتجاه عمودي على $\vec{R}$ أو على $\hat{n}$ فإن $\vec{E}_r \cdot \hat{n} = 0$

$$\therefore\ \vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} E_r^2\, \hat{n}$$

وبالتعويض عن قيمة $\vec{E}_r$ من (3):

$$\vec{\gamma} = \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2}[(\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}})\hat{n} - \dot{\vec{v}}]^2\,\hat{n}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2}[(\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}})^2 - 2(\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}})(\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}}) + \dot{v}^2]\hat{n}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2}[\dot{\vec{v}}^2 - (\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}})^2]\hat{n}$$

وإذا كانت θ هي الزاوية بين $\vec{R},\dot{\vec{v}}$ أي بين $\hat{n},\dot{\vec{v}}$ فإن:

$$\hat{n}\cdot\dot{\vec{v}} = (1)(\dot{v})\cos\theta = \dot{v}\cos\theta$$

$$\therefore\ \vec{\gamma} = \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2}[\dot{v}^2 - \dot{v}^2\cos^2\theta]\hat{n} = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3 R^2}[1-\cos^2\theta]\hat{n}$$

$$= \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\theta\,\hat{n} \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

وبإعتبار الموجات المنبعثة هي موجات كرية (spherical wave) فـإن القـدرة المنبعثـة علـى الـسطح الكـروي ذي النـصف قطـر R أي علـى الزاويـة المجسمة 4π تكون:

$$dI = \vec{\gamma}\cdot d\vec{S} = \vec{\gamma}\cdot(4\pi R^2\hat{n}) = 4\pi R^2(\vec{\gamma}\cdot\hat{n})$$

وتكون القدرة الإشعاعية لوحدة الزوايا المجسمة:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4\pi R^2(\vec{\gamma}\cdot\hat{n})}{4\pi} = R^2(\vec{\gamma}\cdot\hat{n})$$

وبالتعويض عن $\vec{\gamma}$ من (4):

$$\therefore\ \frac{dI}{d\Omega} = R^2[\frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\theta(\hat{n}\cdot\hat{n})] = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

ومن ذلك نجد أن $[\frac{dI}{d\Omega} \propto \sin^2\theta]$ وهو قانون توزيع $\sin^2\theta$ للقدرة المنبعثـة من إشعاع شحنة معجلة. ونحصل على شدة الإشعاع الكلي (أو القدرة الإشـعاعية الكلية) بتكامل (5) بالنسبة للزاوية المجسمة $d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta$

$$\therefore I = \int \frac{dI}{d\Omega}\, d\Omega = \int \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta (2\pi \sin\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3}[2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta]$$

$$= \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (\sin\theta - \cos^2\theta \sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3}[\frac{4}{3}] = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2$$

وهي صيغة لارمور (Larmor Formula) والتي تعطي القدرة الكلية المنبعثة من الإشعاع الناتج عن حركة جسيم مشحون لا نسبي أي يتحرك بسرعات منخفضة.

وهو المطلوب.

مثال(٢): أوجد الصيغة العامة للقدرة الإشعاعية المنبعثة عن حركة جسيمات بسرعات نسبية (أي سرعات تقترب من سرعة الضوء) والمعروفة بإسم صيغة لينارد الإشعاعية (Radiation Lienard Formula) والتي تشكل تعديلاً نسبياً (أو تعمياً) لصيغة لارمور السابقة.

الحل: إذا كان $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ حيث $\beta = \frac{v_0}{c}$ هو معامل فنزچيرالد، فإن صيغة لينارد تأخذ الصورة الآتية:

$$I = \frac{2e^2}{3c}\alpha^6\left[\dot{\beta}^2 - |\ \vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}\ |^2\right] \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

وإذا كانت:

$$|\ \vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}\ |^2 = (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2 - \beta^2\dot{\beta}^2$$

فإن (1) تصبح:

$$I = \frac{2e^2}{3c}\alpha^6[\dot{\beta}^2(1-\beta^2) + (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2] \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

وهي صورة أخرى لعلاقة أو صيغة لينارد.

ونلاحظ أن علاقة لينارد تشتمل على الحد $(\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})$ والذي يعبر عن الإزدواج بين متجهي السرعة $\vec{\beta}$ والعجلة $\dot{\vec{\beta}}$.

<u>وللحصول على علاقة لينارد:</u>

نستخدم منظومة إحداثيات يكون فيها الجسيم المشحون ساكناً، وفي نفس الوقت متحركاً مع المنظومة بسرعتها $\vec{v}$، وفي هذه المنظومة ينبعث من الجسيم إشعاعاً في وحدة الزمن شدته تعطي بصيغة لامور: $I = \dfrac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2$

حيث $\dot{v}$ هي عجلة الجسيم في المنظومة، فإذا رمزنا للعجلة بالرمز a فإن: $a = \dot{v}$

وباستخدام المتجه الرباعي للعجلة (a_μ) فإن تلك العلاقة تؤول إلى العلاقة النسبية:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} a_\mu^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

ومن النظرية النسبية فإن a_μ^2 تعطي بالعلاقة الآتية:

$$a_\mu^2 = \frac{\dot{v}^2 - 1/c^2\,(\vec{v} \wedge \dot{\vec{v}})^2}{(1-\beta^2)^3}$$

وهذه العلاقة يمكن تبسيطها كالآتي:

$$a_\mu^2 = \alpha^6[\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \wedge \dot{\vec{v}})^2]$$

$$= \alpha^6[\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2}\{v^2\dot{v}^2 - (\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}})^2\}]$$

$$= \alpha^6[\dot{v}^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) + \frac{1}{c^2}(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}})^2\}]$$

$$= \alpha^6 c^2[\dot{\beta}^2(1-\beta^2) + (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2] \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$I = \frac{2e^2}{3c}\alpha^6[\dot{\beta}^2(1-\beta^2) + (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2] \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

وهي الصورة الثانية لصيغة لينارد المطلوبة.

ويمكن الحصول على الصورة الأولى لها كالآتي:

من (3):

$$I = \frac{2e^2}{3c}\alpha^6 [\dot{\beta}^2 - \{\beta^2\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2\}]$$

$$= \frac{2e^2}{3c}\alpha^6 [\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\wedge\dot{\vec{\beta}})^2] \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

حيث: $(\vec{\beta}\wedge\dot{\vec{\beta}})^2 = \beta^2\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2$ وذلك لأن:

$$(\vec{\beta}\wedge\dot{\vec{\beta}})^2 = |\vec{\beta}\wedge\dot{\vec{\beta}}|^2 = \beta^2\dot{\beta}^2\sin^2\theta = \beta^2\dot{\beta}^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= \beta^2\dot{\beta}^2 - \beta^2\dot{\beta}^2\cos^2\theta = \beta^2\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2$$

تمثل العلاقة (3) أو (4) تعميماً لعلاقة لارمور، بحيث يمكن الحصول على علاقة لارمور من إحدى العلاقتين بتطبيق الشرط اللانسبي $v << c$، وفي هذه الحالة فإن:

$$\alpha \to 1 \ , \ \ \beta^2 \to 0$$

وتؤول كلتا العلاقتين (3) أو (4) إلى:

$$I = \frac{2e^2}{3c}\dot{\beta}^2 = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2 = \frac{2e^2}{3c^3}a^2$$

<u>مثال(٣):</u> باستخدام علاقة لينارد النسبية للإشعاع وصورتها:

$$I = \frac{2e^2}{3c}\alpha^6 [\dot{\beta}^2 - |\vec{\beta}\wedge\dot{\vec{\beta}}|^2]$$

حيث: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ \ \beta = \frac{\vec{v}}{c}$

أدرس الحالتين الخاصيتين الآتيتين مع ذكر مثال في كل حالة:

(i) إذا كانت السرعة والعجلة في نفس الخط

(Collinear velocity and acceleration)

(ii) إذا كانت السرعة والعجلة متعامدتان:

(Perpendicular velocity and acceleration)

الحل: الحالة الأولى: السرعة والعجلة في نفس الخط

في هذه الحالة تكون الزاوية بينهما مساوية للصفر وبذلك فإن:

$$|\ \vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}\ | = \beta\dot{\beta}\sin 0 = 0$$

وتؤول علاقة لينارد إلى:

$$I = \frac{2e^2}{3c}\alpha^2\dot{\beta}^6 = \frac{2e^2}{3c^3}\alpha^6\dot{v}^2 = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\dot{v}^2}{(1-v^2/c^2)^3} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

وكمثال لهذه الحالة: تولد نوع من الأشعة تكون فيه الإلكترونات المتحركة بالسرعات النسبية في حالة تباطؤ نتيجة تصادمها مثلاً بهدف معدني، وتعرف الأشعة الناتجة عن الحركة المتباطئة للإلكترونات بالأشعة الكابحة أو أشعة الفرملة (Bremsstrahlung Radiation) وبذلك يمكن تعريف تلك الأشعة بأنها الأشعة الناتجة عن حركة جسيم مشحون (إلكترون) بعجلة تقصيرية موازية للسرعة بحيث أن السرعة تتناقص أثناء الحركة فتسبب التباطؤ أو عملية الكبح.

أيضاً كمثال لهذه الحالة:

حالة المعجلات الخطية (Linear accelerator) حيث تكون السرعة والعجلة في نفس الخط.

الحالة الثانية: إذا كانت السرعة والعجلة متعامدتان ففي هذه الحالة تكون الزاوية بينهما 90° وبذلك فإن:

$$|\ \vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}\ | = \beta\dot{\beta}\sin 90^\circ = \beta\dot{\beta}$$

وتؤول علاقة لينارد إلى:

$$I = \frac{2e^2}{3c}\alpha^6[\dot{\beta}^2 - \beta^2\dot{\beta}^2] = \frac{2e^2}{3c}\alpha^6\dot{\beta}^2(1-\beta^2)$$

$$= \frac{2e^2}{3c}\alpha^4\dot{\beta}^2 = \frac{2e^2}{3c^3}\alpha^4\dot{v}^2 = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\dot{v}^2}{(1-v^2/c^2)^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

وكمثال لهذه الحالة: حركة الجسيمات بسرعات عالية في المعجلات الدائرية (Circular accelerators) مثل السيكلوترون والبيتاترون والسنكروترون، وغيرها.