

الفصل الثاني

٢

أنظمة العد

Numbering Systems

obeikandi.com

٢-١ مقدمة

نحن نعيش في عالم من الأرقام العشرية التي تتكون من العشرة أرقام الشهيرة صفر حتى تسعة . فلماذا ارتبطنا بهذا النظام ؟ ولماذا توقفت صورة الأرقام عند تسعة ؟ هل هذا له علاقة بأن أصابع الأيدي عشرة ؟ لا أحد يدري ! السؤال الآن هو: هل من الممكن أن نستخدم نظام للعد غير النظام العشري ؟ تخيل أننا افترضنا وجود نظام ثنائي لا يحتوي إلا الرقم صفر والرقم واحد ، أى أن أصابع اليد كانت اثنين بدلا من عشرة ! . كيف سيكون العد في ظل هذا النظام ، وكيف سنجمع أو نطرح في هذه الحالة ؟ ولماذا النظام الثنائي فقط ؟ ماذا لو فرضنا نظام عد آخر يتكون من ثمانية أرقام ، الصفر حتى سبعة (النظام الثماني) ! أو النظام الستعشري الذى يتكون من ستة عشرة رقما ، صفر حتى ١٥ ، أو حتى أى نظام عد آخر . سنرى بالتفصيل فى هذا الفصل كيفية استخدام أى نظام عد يختلف عن النظام العشري . المفاجأة كما سنرى هى أن بعض هذه الأنظمة تكون مفيدة جدا فى بعض المواقف ، فالنظام الثنائي مثلا هو النظام المستخدم بكثرة فى أنظمة الحاسبات ، وشاع استخدام النظام الثماني والنظام الستعشري كذلك .

٢-٢ النظام العشري Decimal system

لابد من المرور على نظام العد العشري وحقائق استخدامه حتى نستخدم هذه الحقائق ونعممها للحصول على أنظمة العد الأخرى . إننا فى النظام العشري نستخدم عشرة أرقام من صفر حتى تسعة للتعبير عن الكميات من صفر حتى تسعة . عندما نعبر عن كميات أكبر من التسعة نستخدم عددا مركبا من نفس الأرقام من صفر حتى تسعة ولكن فى هذه الحالة فإن موضع الرقم داخل العدد يكون له وزنا معينة . فمثلا العدد ٥١ الكمية ٥١ تتكون من رقمين الواحد والخمسة ولكن الخمسة هنا موجودة فى موقع أو فى خانة العشرات التى يوزن كل واحد فيها بعشرة ، لذلك فإن الخمسة فى هذه الخانة تمثل خمسين . بينما الواحد يوجد فى خانة الأحاد التى يمثل كل واحد فيها بنفس قيمته أى بواحد . لذلك فإن الرقم ٥١ يمكن أن نكتبه على هذه الصورة :

$$51 = 5 \times 10 + 1 \times 1$$

وهكذا تم استحداث خانات جديدة مثل خانات المآت التى يمثل كل واحد فيها بمائة وخانة الآلاف التى يمثل كل واحد فيها بألف ، وهكذا نرى أن هذه الخانات عبارة عن قوى أو أسس الرقم عشرة التى نقول عنها أنها قاعدة هذا النظام . الكمية ٤٩٩ مثلا يمكن كتابتها كما يلي :

$$499 = 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

وكذلك الكمية 87535 يمكن كتابتها على الصورة :

$$87535 = 8 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

إذا كانت الكمية العشرية تحتوى كسر فإن الأرقام الكسرية التى على يمين العلامة العشرية تكتب منسوبة إلى قوى سالبة من الرقم ١٠ كما يلي :

$$535.25 = 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

وهكذا يمكن التعبير عن أى كمية بالأرقام من صفر حتى تسعة عن طريق فرض قيمة معينة لموضع الرقم داخل الكمية أو داخل العدد . قبل أن نترك النظام العشري إلى النظام الثنائي نؤكد على أن هذا النظام به عشرة أرقام صفر حتى تسعة ، وقاعدة هذا النظام هى العشرة .

٢-٣ نظام العد الثنائي Binary system

في النظام الثنائي يوجد رقمان فقط وهما الصفر (٠) والواحد (١) . معنى ذلك أن أى كمية أكبر من الواحد سنعتبر عنها بعدد مركب من الأصفار والواحد ولكن موضع كل صفر أو واحد سيكون له قيمة معينة هنا . أى أننا سنعتبر كل خانة يوجد فيها أى صفر أو واحد بقيمة معينة أخرى ، هذه القيم ستكون قوى الرقم (٢) مثل قوى الرقم ١٠ فى النظام العشري كما سبق . يتضح ذلك من الأمثلة التالية :

$$10 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2 \quad (2-1)$$

$$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5 \quad (2-2)$$

$$101011 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 43 \quad (2-3)$$

الأرقام العشرية	الأرقام الثنائية
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

جدول ١-٢

وهكذا أمكن التعبير عن أى كمية فى النظام الثنائي بفرض قيمة للموضع أو الخانة التى يوجد بها الرقم الثنائي مضروباً فى أحد قوى الرقم 2 .

الآن يمكننا العد بالنظام الثنائي باتباع نفس نظام العد العشري حيث كنا نعد من صفر حتى تسعة ثم نبدأ خانة جديدة خانة العشرات ونضع بها واحد ونستمر فى العد ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ... ، حتى ١٩ بعدها نزيد واحد فى خانة العشرات ونستمر فى العد ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ... ، وهكذا حتى ٩٩ بعدها نفتح خانة جديدة (المئات) ونستمر فى العد ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ... ، وهكذا حتى ٩٩٩ ثم نبدأ خانة جديدة وهكذا . بنفس الطريقة سنعد فى النظام الثنائي ٠ ، ١ ثم نبدأ خانة جديدة ١٠ ، ١١ ، ثم نبدأ خانة جديدة ١٠٠ ، ١٠١ ، ... ، ١١١ ثم نبدأ خانة جديدة ، وهكذا نستمر فى العد . جدول ٢-١ يبين الأعداد من صفر حتى ١٥ ، والقيمة العشرية المقابلة لكل عدد . لاحظ فى هذا الجدول أننا لى عدد من صفر حتى ١٥ يلزمنا أربع خانات ثنائية . الآن يمكن كتابة القاعدة التالية :

أكبر قيمة عشرية يمكن أن نصل إليها لعدد معين من الخانات الثنائية تساوى (1 - 2ⁿ) حيث n هى عدد الخانات الثنائية . فإذا كانت n = 4 فأكبر عدد يمكن أن نصل إليه هو ١٥ وإذا كانت n = 5 فأكبر قيمة هى ٣١ وإذا كانت n = 6 فأكبر قيمة هى ٦٣ وهكذا .

طريقة التحويل من النظام الثنائي إلى النظام العشري

طريقة التحويل من النظام الثنائي إلى العشري سهلة ومباشرة ولقد رأيناها فى المعادلات ١-٢ و ٢-٢ و ٢-٣ ونسوق مثال آخر نوضح به هذه الطريقة :

$$11011_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 27_{10}$$

الرقم الجانبي بعد أى عدد يدل على نوع هذا العدد ، فالرقم ٢ الجانبي يعنى أن هذا العدد ممثل فى النظام الثنائي والرقم ١٠ يعنى أن هذا العدد ممثل فى النظام العشري . الخانة فى النظام الثنائي التى تأخذ صفر أو واحد تسمى بت . أول خانة من ناحية اليمين تسمى الخانة ذات القيمة الصغرى Least Significant Bit, LSB وآخر خانة من ناحية اليسار تسمى الخانة ذات

القيمة العظمى Most significant bit, MSB .

في حالة احتواء الرقم على كسر مثل 11011.1101 فإن المكافئ العشري في هذه الحالة يمكن حسابه كالتالي :

$$\begin{aligned} 11011.1101 &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\ &= 16 + 8 + 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.0625 \\ &= 27.8125 \end{aligned}$$

حيث النقطة في الرقم الثنائي سنطلق عليها العلامة الثنائية بدلا من العلامة العشرية في حالة النظام العشري .

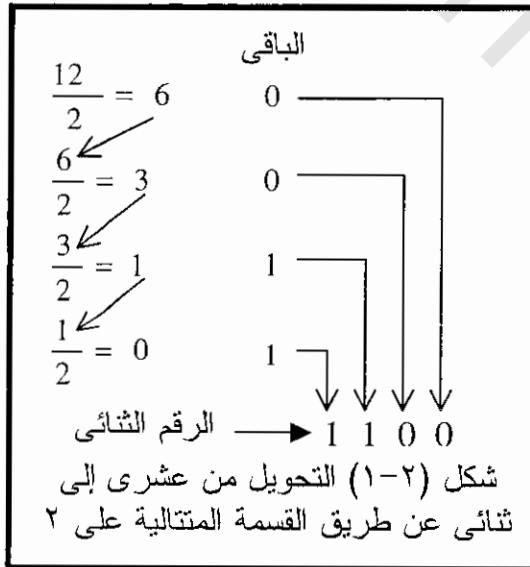
التحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي

الطريقة الأولى للتحويل من نظام عشري إلى نظام ثنائي هي عن طريق تحويل الرقم العشري إلى مجموعة من أوزان الرقم 2 ابتداء من 2^0 ثم 2^1 ثم 2^2 وهكذا . إن وجد رقم مقابل لواحد من هذه الأوزان توضع الخانة المقابلة بواحد وإن لم يوجد توضع الخانة المقابلة بصفر فالرقم 9 مثلا عبارة عن $8 + 1$ حيث الثمانية هي 2^3 ، و الواحد هو 2^0 و على ذلك فالرقم 9 يمكن وضعه على الصورة :

$$\begin{array}{cccc} 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

وهذه هي بعض الأمثلة الإضافية لذلك :

$$\begin{aligned} 12 &= 8 + 4 = 2^3 + 2^2 = 1100 \\ 25 &= 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11001 \\ 58 &= 32 + 16 + 8 + 2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = 111010 \\ 82 &= 64 + 16 + 2 = 2^6 + 2^4 + 2^1 = 1010010 \end{aligned}$$



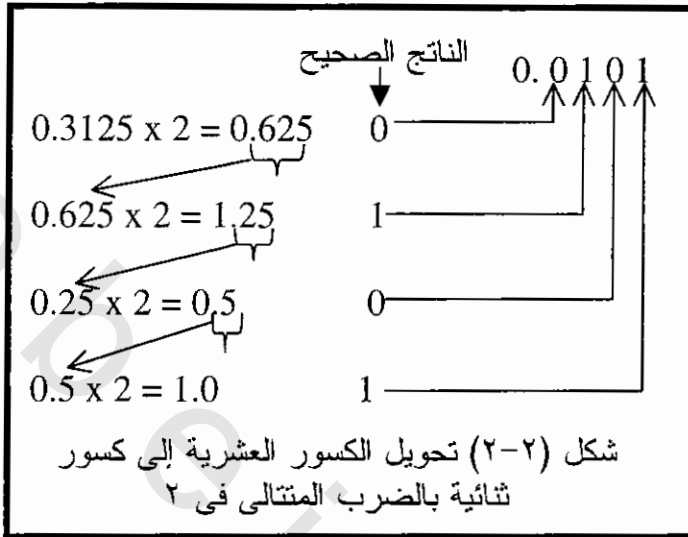
هذه الطريقة في العادة تستخدم مع الأرقام الصغيرة ، أما مع الأرقام الكبيرة فطريقة القسمة المتتالية على 2 هي الأنسب للتحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي . في هذه الطريقة نقسم الرقم العشري على 2 على مرات متتالية . في كل مرة سيتبقى إما واحد أو صفر هذا الباقي يمثل بتات الرقم الثنائي من اليمين إلى اليسار ، أما ناتج القسمة فنأخذه ونقسمه على 2 مرة أخرى إلى أن يؤول ناتج القسمة إلى صفر . شكل (١-٢) يوضح هذه العملية . نلاحظ من هذا الشكل أنه تم قسمة الرقم 12 على 2 فكانت النتيجة تساوي ستة والباقي صفر يمثل أول بت في العدد الثنائي من اليمين ، بعد ذلك أخذنا الرقم 6 وقسمناه

على 2 مرة أخرى فكان الناتج 3 والباقي صفر الذي يمثل البت الثانية في العدد الثنائي ، بعد ذلك قسمنا 3 على 2 فكان الناتج واحد والباقي واحد يمثل الخانة الثالثة في العدد الثنائي . وأخيرا أخذنا الرقم 1 وقسمناه على 2 فكان الناتج صفر والباقي واحد وهذا يمثل الخانة رقم 4 والأخيرة في العدد الثنائي .

لتحويل الأرقام الكسرية من النظام العشري إلى النظام الثنائي يمكن اتباع طريقة الأوزان للرقم 2 عن طريق وضع الرقم العشري في صورة مجموعة من الكسور كل منها أحد قوى

الرقم ٢ السالبة ولكن هذه الطريقة تكون في العادة أصعب . لذلك نفضل استخدام الطريقة الثانية وهي طريقة الضرب المتتالي في ٢. في هذه الطريقة نضرب الكسر في ٢ فإذا ظهر واحد صحيح في نتيجة الضرب ، نضع هذا الواحد في الرقم الثنائي ، وإذا لم يظهر واحد صحيح نضع صفر في الرقم

الثنائي ، بعد ذلك نأخذ الكسر الناتج ونجرب عليه نفس العملية ، وهكذا إلى أن يتلاشى الكسر أو نكتفي بعدد معين من الخانات بعد العلامة الثنائية . شكل (٢-٢) يبين هذه الطريقة بوضوح . في هذا الشكل نريد تحويل الكسر 0.3125 إلى ثنائي لذلك تم ضرب هذا الكسر في ٢ فكان الناتج هو 0.625 أي صفر صحيح ، لذلك فإن أول خانة في الكسر الثنائي ستكون صفر كما



في الشكل . بعد ذلك نأخذ الكسر 0.625 ونضربه في ٢ فيكون الناتج هو 1.25 وهو عبارة عن واحد صحيح يوضع في الخانة الثانية للرقم الثنائي ، ونأخذ الكسر 0.25 ونضربه في ٢ مرة أخرى فيكون الناتج هو 0.5 فنضع صفر في الرقم الثنائي ونضرب الكسر 0.5 في ٢ ، فيكون الناتج هو 1.0 فنضع واحد في الرقم الثنائي ونوقف عملية الضرب طالما أن الكسر الناتج أصبح صفراً . وعلى ذلك فالكسر الثنائي سيكون 0.0101 .

العمليات الحسابية في النظام الثنائي

سنرى في هذا الجزء كيفية إجراء العمليات الحسابية الأساسية ، الجمع والطرح والضرب والقسمة في النظام الثنائي لما في ذلك من أهمية في التعامل مع الإشارات الثنائية داخل الحاسب كما سنرى في الفصول القادمة .

أولاً: الجمع الثنائي

القوانين الأساسية لجمع خانتين ثنائيتين موضحة في شكل (٢-٢) . نلاحظ من هذا الشكل أن جميع هذه العمليات تعطي صفراً في الحمل ما عدا العملية الأخيرة وهي جمع 1+1 التي تعطي مجموع أو ناتج صفر وحمل واحد . بتطبيق هذه القوانين يمكن إجراء عمليات الجمع على أي عددين كما في شكل (٢-٤) الذي يبين عملية جمع الرقمين 011 و 011 والتي تعطي ناتج 110 . القاعدة هي كلما تم جمع واحد زائد واحد فإن الناتج يكون صفر في نفس العمود ويتم حمل واحد إلى الخانة أو العمود التالي كما في الشكل . في شكل (٢-٤) حاصل جمع العمود الأول يعطي ناتج صفر وحمل واحد يجمع مع العمود الثاني . حاصل جمع العمود الثاني 1+1 يعطي واحد وحمل واحد للخانة الثالثة ، وحاصل جمع العمود الثالث

الحمل	الناتج
0	0 + 0 = 0
0	0 + 1 = 1
0	1 + 0 = 1
1	1 + 1 = 0

شكل (٢-٣) القوانين الأساسية لعملية الجمع الثنائي

الحمل	1	1
0	1	1
+	0	1
1	1	0

شكل (٢-٤) مثال لعمليات الجمع الثنائي

٠+٠+١ يعطى واحد وحمل صفر حيث تنتهى العملية . فى وجود الحمل من أى عمود للعمود التالى فإنك ستجمع ثلاث بتات وناتج الجمع لثلاث بتات موضح فى شكل (٢-٥) .

1	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
11	10	10	01

الحمل

شكل (٢-٥) الحمل وناتج الجمع لثلاث بتات

ثانيا: الطرح الثنائى

القوانين الأساسية للطرح موضحة فى شكل (٢-٦) . نلاحظ من هذا الشكل أن الاستلاف دائما صفر ما عدا الحالة التى يتم فيها طرح واحد من صفر حيث أنه فى هذه الحالة يكون الناتج واحد والاستلاف borrow واحد أيضا . لاحظ أنه عند استلاف واحد من عمود إلى العمود الذى على يمينه فإن هذا الواحد يكون باثنين (يكافئ عملية استلاف

الاستلاف	الناتج
0 - 0 = 0	0
1 - 1 = 0	0
1 - 0 = 1	0
0 - 1 = 1	1

شكل (٢-٦) القوانين الأساسية لعملية الطرح الثنائى

10 ← الاستلاف
1 0 1
- 0 1 1
0 1 0

شكل (٢-٧) مثال لعمليات الطرح الثنائى

الواحد بعشرة فى النظام العشرى) . شكل (٢-٧) يوضح مثال لطرح الرقم ١١ من الرقم ١٠١ حيث كان الناتج هو ٠١٠ فى العمود الأول من اليمين تم طرح واحد من واحد فكان الناتج صفرا . فى العمود الثانى تم طرح واحد من صفر لذلك لزم استلاف واحد باثنين (١٠) كما فى الشكل حيث تم طرح واحد من اثنين

فكان الناتج واحد . فى العمود الثالث تم طرح صفر من صفر فكان الناتج صفرا وعلى ذلك كانت النتيجة النهائية هي ٠١٠ كما فى الشكل .

ثالثا: الضرب الثنائى

شكل (٢-٨) يبين العمليات الأساسية للضرب الثنائى . نلاحظ أن ناتج الضرب دائما صفر إلا عندما يكون الطرفين وحيد . عند ضرب أى رقمين نتبع نفس طريقة

الناتج
0 x 0 = 0
0 x 1 = 0
1 x 0 = 0
1 x 1 = 1

شكل (٢-٨) القوانين الأساسية لعملية الضرب الثنائى

1011
x 1001
1011
0000
0000
1011
1100011

شكل (٢-٩) مثال للضرب الثنائى

الضرب فى النظام العشرى حيث نضرب خانات المضروب فى المضروب فيه خانة بعد خانة مع الإزاحة ناحية اليمين بمقدار خانة ثم نقوم بالجمع كما فى شكل (٢-٩) الذى يبين عملية ضرب الرقمين ١٠١١ و ١٠٠١ حيث كان الناتج هو ١١٠٠١١ .

رابعا: القسمة الثنائية

القسمة فى النظام الثنائى تتم بنفس طريقة النظام العشرى . شكل (٢-١٠) يبين مثالا لذلك حيث تم قسمة الرقم ١١١٠ على الرقم ١٠ حيث كانت النتيجة تساوى ١١١ .

٢-٤ المتمم الأحادى والمتمم الثنائى

Ones and twos complement

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 10 \overline{) 1110} \\
 \underline{10} \\
 011 \\
 \underline{10} \\
 010 \\
 \underline{10} \\
 00
 \end{array}$$

شكل (٢-١٠) مثال
للقسمة الثنائية

المتممات الأحادية والثنائية مفيدة جدا فى تمثيل الأرقام السالبة وفى إجراء العمليات الحسابية التى تتم داخل الحاسب . المتمم الأحادى لأى رقم نحصل عليه ببساطة عن طريق عكس كل واحد إلى صفر ، وكل صفر إلى واحد كما فى المثال التالى :

الرقم الثنائى 1101001
المتمم الأحادى 0010110

المتمم الثنائى لأى رقم ثنائى يمكن الحصول عليه بإضافة واحد للمتمم الأحادى لهذا الرقم كما فى المثال التالى :

$$\begin{array}{r}
 1101001 \\
 0010110 \\
 \hline
 1 + \\
 0010111
 \end{array}$$

الرقم الثنائى
المتمم الأحادى
إجمع مع المتمم الأحادى
المتمم الثنائى

هناك طريقة بسيطة وسهلة للحصول على المتمم الثنائى فى خطوتين كما يلى :

١- ابدأ من ناحية اليمين للرقم المطلوب إيجاد المتمم الثنائى له و اكتب بتاتته كما هى حتى أول واحد تقابله اكتبه كما هو أيضا .

٢- كل البتات بعد أول واحد عكسها فتحصل على المتمم الثنائى .

كمثال على ذلك الرقم 10111000 :

١- من أقصى اليمين هناك ٣ أصفار مع أول واحد نكتبها كما هى كالتالى : 1000 .

٢- ثم كل البتات بعد ذلك يتم عكسها فنحصل على 01001000 وهو المتمم الثنائى للرقم المعطى .

كمثال آخر على ذلك نفترض الرقم 011 :

١- نبدأ من ناحية اليمين أول بت واحد نكتبها كما هى .

٣- ثم نعكس كل البتات بعد ذلك فنحصل على الرقم 101 الذى يمثل المتمم الثنائى للرقم المعطى .

٢-٥ الأرقام السالبة والأرقام الموجبة فى النظام الثنائى

لا تخلو العمليات الحسابية فى الحاسبات من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة أرقام قد تكون سالبة وقد تكون موجبة . فمثلا ما هى نتيجة جمع الرقمين (-3) + (-9) ، وهكذا فإن هناك حاجة ضرورية للتعبير عن الإشارة فى الأرقام الثنائية . بالطبع فإن العلامة (+) و (-) غير معروفة فى النظام الثنائى فما هو العمل ؟

فى النظام الثنائى تعتبر آخر بت فى الرقم من ناحية الشمال هى بت الإشارة . فإذا كانت هذه البت تساوى صفر فالرقم موجب وإذا كانت هذه البت تساوى واحد فالرقم سالب . بعد ذلك هناك ثلاث طرق للتعبير عن الرقم كما يلى :

النظام الأول: نظام مقدار الإشارة Sign magnitude

في هذا النظام تعتبر خانة الإشارة هي الخانة التي في أقصى يسار الرقم وباقي البتات تمثل مقدار هذا العدد . فمثلا الرقم 0101 ، فيه خانة الإشارة تساوي 0 فالرقم موجب وباقي الرقم هو 101 الذي يمثل القيمة 5 ، إذن فهذا الرقم عبارة عن +5 . بينما الرقم 1101 فيه خانة الإشارة بواحد والأرقام 101 تمثل 5 ، إذن فالرقم 1101 يمثل الرقم (-5) أى أن الفرق الوحيد بين الرقمين +5 ، -5 هو الواحد أو الصفر في الخانة الموجودة في أقصى اليسار . أى أنه في نظام مقدار الإشارة للتعبير عن الأرقام السالبة والموجبة ، فإن كل من الرقمين السالب والموجب يكون لهما نفس شكل البتات و يختلفان فقط في بت الإشارة .

النظام الثاني: نظام المتمم الأحادي

في هذا النظام يمثل الرقم السالب بالمتمم الأحادي لنظيره الموجب فمثلا الرقم 0101 يمثل (+5) وعلى ذلك فالرقم 1010 يمثل الرقم (-5) .

النظام الثالث: نظام المتمم الثنائي

في هذا النظام يمثل الرقم السالب بالمتمم الثنائي لنظيره الموجب . فمثلا الرقم 0101 يمثل الرقم (+5) والمتمم الثنائي له هو 1011 يمثل الرقم (-5) . نظام المتمم الثنائي هو الأكثر استخداما في الأنظمة الرقمية .

مثال

ما هي قيمة الرقم 11000 والرقم 01011 في كل نظام من الأنظمة السابقة ؟
في النظام الأول نظام مقدار الإشارة: الرقم 11000 هو رقم سالب لأن آخر بت تساوى واحد مقداره $8 = 2^3 * 1$ وعلى ذلك فهذا الرقم هو (-8) بينما الرقم 01011 هو رقم موجب لأن آخر بت صفر و قيمته هي +11 .

في نظام المتمم الأحادي: الرقم 11000 هو رقم سالب لأن آخر بت تساوى واحد وعلى ذلك فقيمة هذا الرقم هي المتمم الأحادي له وهي 00111 ، وعلى ذلك فإن الرقم 11000 يمثل الرقم (-7) . بينما الرقم 01011 فهو رقم موجب و قيمته هي (+11) .

في نظام المتمم الثنائي: الرقم 11000 سالب لأن آخر بت تساوى واحد وقيمة الرقم هي المتمم الثنائي له 01000 وهي (-8) . أما الرقم 01011 فهو موجب و قيمته هي (+11) .
في نظام المتمم الثنائي الرقم 11000 يمكن كتابته على الصورة :

$$11000 = -1 * 2^4 + 1 * 2^3 \\ = -16 + 8 = -8$$

و الرقم 01011 يمكن كتابته على الصورة :

$$01011 = -0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 11$$

أى أن قيمة الرقم هي التمثيل الحقيقى للوحدات الموجودة فيه بما في ذلك بت الإشارة سوى أن قيمة بت الإشارة تكتب سالبة . وهذه ميزة من مميزات استخدام المتمم الثنائي . إيجاد قيمة الرقم العشرية تحسب مباشرة بطريقة التحويل من ثنائي إلى عشري العادية سوى أن بت الإشارة تكتب سالبة . أيضا من عيوب طريقة المتمم الأحادي أن الصفر (0000) متمم الأحادي (1111) أى أن هناك فرق بين (+0) و (-0) . بينما في المتمم الثنائي فإن (0000) متمم الثنائي هو أيضا (0000) .

عندما يمثل رقم ثنائي بأربع خانات مثلاً فإنه إذا كان هذا الرقم بدون إشارة فإن قيمة هذا الرقم ستتراوح بين الصفر و $1-2^3 = 15$. بينما إذا كان هذا الرقم بإشارة فإن قيمته تتراوح بين $(2^{n-1}-1)$ حتى (2^n-1) أى $(-8 = -2^3)$ حتى $(7 = 2^3-1)$. لاحظ أن المدى لم يتغير سوى أنه فى حالة اعتبار الإشارة فإن الرقم يتراوح بين -8 حتى $+7$. فى حالة ٨ خانات تتراوح قيمة الرقم بين صفر و ٢٥٥ فى حالة عدم اعتبار لإشارة ، وبين -128 حتى ١٢٧ فى حالة اعتبار الإشارة .

٢-٦ العمليات الحسابية على الأعداد ذات الإشارة

سنرى فى هذا الجزء كيف نجرى العمليات الحسابية المختلفة على الأعداد ذات الإشارة وسنقتصر على نظام المتمم الثنائى فقط لأنه النظام الشائع كما قلنا فى الأنظمة الرقمية عامة وأنظمة الحاسبات و المعالجات بصفة خاصة .

أولاً: عملية الجمع

سنجرى العمليات فى هذا الجزء على أعداد من ٨ بت (بايت) . هناك أربع احتمالات لطبيعة الأعداد التى سنجرى عليها عملية الجمع وهى كالتالى :

- ١- كلا العددين موجب .
 - ٢- عدد موجب والآخر سالب و الموجب هو الأكبر .
 - ٣- عدد موجب و الآخر سالب و السالب هو الأكبر .
 - ٤- كلا العددين سالب .
- سنأخذ كل حالة على حدة وسنسوق مثال لكل منها .

جمع عددين كل منهما موجب :

00001001	9	
00000101+	5+	
00001110	14	

النتيجة موجبة كما نرى .

جمع عددين أحدهما موجب والآخر سالب والموجب أكبر :

00001001	9	
11111011+	+(-5)	
1 00000100	+ 4	

النتيجة + 4 وهى كما نرى موجبة مع إهمال الحمل الأخير .

جمع عددين أحدهما موجب والآخر سالب والسالب أكبر :

11110111	(-9)	
00000101+	+5	
11111100	- 4	

النتيجة سالبة و بأخذ المتمم الثنائى له يعطى 00000100 (-4) .

كلا العددين سالب :

$$\begin{array}{r} 11110111 \\ 11111011+ \\ \hline 111110010 \\ -14 \end{array}$$

النتيجة سالبة كما نرى (آخر بت تساوى ١) وبأخذ المتمم الثنائى للنتيجة بعد إهمال الحمل الأخير تعطى 00001110 وهى (-14) .

خطأ الفيضان Over flow error

عند جمع عددين (فى الغالب كل منهما موجب أو كل منهما سالب) فإذا زادت النتيجة عن +127 فإنه يحدث حمل على خانة الإشارة وتكون الإشارة فى هذه الحالة غير ممثلة تمثيلاً صحيحاً للنتيجة . كمثال على ذلك جمع العددين الآتيين :

$$\begin{array}{r} 01111101 \\ 00111010+ \\ \hline 10110111 \\ +125 \\ +58 \\ \hline +183 \end{array}$$

نجد أن بت الإشارة تساوى ١ مما يعنى أن النتيجة سالبة وهذا خطأ لأننا نجمع عددين موجبين لذلك يجب أن تكون النتيجة موجبة كما فى الجمع العشرى . هذا كما رأينا نتج عن جمع عددين نتيجتهما كانت أكبر من +127 لذلك حصل حمل على خانة الإشارة فأفسدها . هذا الخطأ عندما يحدث تحذر منه الحاسبات .

ثانياً: عملية الطرح

عملية الطرح هى فى الأصل عملية جمع بعد تغيير إشارة المطروح . فمثلاً (9-5) هى حاصل جمع (9) زائد (-5) . ومعروف أن الرقم (-5) هو المتمم الثنائى للرقم 5 . أيضاً (-5)-9 هى حاصل جمع الرقمين (9) زائد (-5)- و هو ما يكافئ المتمم الثنائى للمتمم الثنائى للرقم 5 ، أى الرقم 5 الأصلى . لذلك يمكننا أن نخلص أن عملية الطرح هى عملية جمع المطروح منه زائد المتمم الثنائى للمطروح . يتضح ذلك من الأمثلة التالية :

$$\begin{array}{r} 00001000 \\ 11111101+ \\ \hline 00000101 \\ +8 \\ -3 \\ \hline +5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111000 \\ 11111101+ \\ \hline 11110101 \\ -8 \\ -3 \\ \hline -11 \end{array}$$

النتيجة سالبة و تساوى 00001011 وهى (-11) .
بالنسبة للضرب والقسمة يتم اتباع نفس الخطوات السابقة .

٧-٢ النظام الثمانى Octal system

يتكون نظام العد الثمانى من ثمانية أرقام هى :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

أى رقم أكبر من 7 يكتب فى أكثر من خانة كما يلى :
 6 , 7 , 10 , 11 , 12 , ... , 15 , 16 , 17 , 20 , 21 , ... , 25 , 26 , 27 , 30 , 31 , ...

التحويل من النظام الثمانى إلى النظام العشرى

عملية التحويل هذه سهلة حيث أننا نضرب كل رقم فى وزن الخانة التى يوجد بها هذا الرقم فى النظام الثمانى . قاعدة العد فى النظام الثمانى هى ٨ ولذلك فإن أوزان الخانات ستكون كالتالى: $8^0, 8^1, 8^2, 8^3$ وهكذا . كمثال على ذلك :

$$(235)_8 = 2 * 8^2 + 3 * 8^1 + 5 * 8^0 \\ = 2 * 64 + 3 * 8 + 5 = (157)_{10}$$

التحويل من النظام العشرى إلى النظام الثمانى

هنا أيضا تتم عملية التحويل عن طريق القسمة المتتالية على الرقم ٨ كما فى المثال التالى :

$\frac{157}{8} = 19$	الباقي 5
$\frac{19}{8} = 2$	3
$\frac{2}{8} = 0$	2

وعلى ذلك فالرقم الثمانى الناتج هو 235 .

بنفس الطريقة يمكن تحويل الكسور من النظام الثمانى إلى النظام العشرى عن طريق الضرب فى قوى الرقم ٨ السالبة وتحويل الكسور العشرية إلى كسور ثمانية عن طريق الضرب المتتالى فى ٨ ونعتبر دائما الناتج الصحيح من عملية الضرب كما فعلنا مع الأعداد الثنائية وكما فى الأمثلة التالية :

$$(0.35)_8 = 3 * 8^{-1} + 5 * 8^{-2} \\ = 0.453_{10}$$

$$(0.56)_{10} = \begin{array}{c} 0.56 \\ \underline{8 \times} \\ 4.48 \end{array} \begin{array}{c} 0.48 \\ \underline{8 \times} \\ 3.84 \end{array} \begin{array}{c} 0.84 \\ \underline{8 \times} \\ 6.72 \end{array} \begin{array}{c} \dots \end{array}$$

$= 0.436..._8$

التحويل من ثمانى إلى ثنائى و العكس

كل رقم فى النظام الثمانى يمكن تمثيله بثلاث بتات فى النظام الثنائى كما فى جدول ٢-٢ . يمكن استغلال ذلك فى تحويل أى رقم فى النظام الثمانى إلى مكافئ له فى النظام الثنائى عن طريق وضع كل رقم ثمانى بما يكافئه فى النظام الثنائى كما فى المثال التالى :

$$(354)_8 = 011\ 101\ 100_2$$

النظام الثماني	النظام الثنائي
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	1 0 0 0
5	1 0 0 1
6	1 1 0 0
7	1 1 0 1

جدول ٢-٢

كما يمكن تحويل أى عدد فى النظام الثنائى إلى مكافئ له فى النظام الثماني عن طريق تقسيمه إلى مجاميع كل منها ٣ بت ونكتب الرقم الثماني المكافئ لكل مجموعة كما يلى :

$$1011100101 = 1\ 011\ 100\ 101_2 = 1345_8$$

٢-٨ نظام العد الست عشري Hexadecimal system

فى النظام الست عشري يوجد ١٦ رقما وهى كالتالى :

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

فى هذا النظام نجد أن أشكال الأرقام حتى ٩ نفذت ، لذلك تم استخدام باقى الأشكال الستة عشرة فى صورة حروف وهى الحروف A و B و C و D و E و F . بعد الرقم F يبدأ استخدام خانات إضافية لتمثيل الأعداد حيث كل خانة يكون لها وزن وهذا الوزن هو قوى العدد ١٦ وهى كالتالى 16^0 و 16^1 و 16^2 و 16^3 وهكذا . يمكن أن نعد فى النظام الست عشري كما يلى :

0,1,...,9,A,B,C,D,E,F,10,11,12,...,19,1A,1B,...,1F,20,21,...,29,2A,...,2F,30,31,...,39,3A,...,3F,40,...

للتحويل من النظام الست عشري للعشري نتبع الطرق السابقة وهى الضرب فى قوى العدد ١٦ كما يلى :

$$3F2_{16} = 3 * 16^2 + 15 * 16^1 + 2 * 16^0 = 1010_{10}$$

الأرقام الثنائية	الأرقام الست عشري
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	2
0 0 1 1	3
0 1 0 0	4
0 1 0 1	5
0 1 1 0	6
0 1 1 1	7
1 0 0 0	8
1 0 0 1	9
1 0 1 0	A
1 0 1 1	B
1 1 0 0	C
1 1 0 1	D
1 1 1 0	E
1 1 1 1	F

جدول ٢-٣

وللتحويل من النظام العشري إلى النظام الست عشري نتبع نظام القسمة المتتابعة على ١٦ كما يلى :

$$\begin{array}{r} \text{الباقى} \\ 323 \div 16 = 20 \quad 3 \\ 20 \div 16 = 1 \quad 4 \\ 1 \div 16 = 0 \quad 1 \end{array}$$

$$323_{10} = 143_{16}$$

بالنسبة للكسور نتبع معها نفس ما اتبعناه فى الأنظمة السابقة .

أى عدد ست عشري يمكن تمثيله فى ٤ خانات ثنائية كما فى جدول ٢-٣ . ويمكن استغلال ذلك فى عملية التحويل من ست عشري إلى ثنائي والعكس كما فى الأمثلة التالية :

$$4F2_{16} = 010011110010_2$$

$$1A49_{16} = 1101001001001_2$$

لاحظ أنه باستخدام النظام الثماني والست عشري يكون هناك

توفير في عدد الخانات المستخدمة وهذه ميزة من استخدام هذه الأنظمة . انظر مثلا إلى العدد ١٢٤١٠ في النظام العشري وتمثيله في الأنظمة المختلفة :

$$\begin{aligned} 124_{10} &= 1111100_2 \\ &= 174_8 \\ &= 7C_{16} \end{aligned}$$

نلاحظ أن العدد 124_{10} مكون من ٣ خانات وفي النظام الثنائي يحتاج إلى ٧ خانات وفي النظام الثماني احتاج إلى ٣ خانات وفي النظام الست عشري احتاج إلى خانتين فقط .

٢-٩ الأرقام العشرية المكونة ثنائيا

Binary Coded Decimal (BCD) Numbers

الأرقام العشرية المكونة ثنائيا هي طريقة لتمثيل الأرقام العشرية صفر حتى تسعة في صورة أكواد ثنائية . بالطبع لكي يتم ذلك فإننا سنحتاج لأربعة بتات حتى يمكن تمثيل هذه الأرقام . جدول ١-٢ يبين الأرقام العشرية صفر حتى ٩ والكود الثنائي لكل منها . هذه الطريقة لتمثيل الأرقام تكون مفيدة جدا بالذات في إدخال البيانات إلى الحاسب من خلال لوحة المفاتيح أو إظهار هذه الأرقام على شاشة عرض أو مظهر وذلك لأننا نعيش في عالم من الأرقام العشرية لا يكتب أو يقرأ إلا الأرقام العشرية .

التحويل من النظام العشري إلى العشري المكون ثنائيا والعكس

إن هذه تعتبر عملية سهلة جدا ، حيث يتم التعبير عن كل رقم عشري بالعدد الثنائي المقابل له من أربع بتات . فمثلا الرقم ٥٥ سيكون 0101 0101 و العدد ٩٣ سيكون 10010011 وهكذا . بنفس السهولة تتم عملية تحويل الأرقام العشرية المكونة ثنائيا إلى الصورة العشرية عن طريق تقسيم أي رقم إلى مجموعات من ناحية اليمين كل منها من ٤ بت ونكتب المكافئ العشري لكل مجموعة كما يلي :

$$\begin{aligned} 349 &= 001101001001 \\ 158 &= 101011000 \end{aligned}$$

وهكذا .

عمليات الجمع على الأرقام العشرية المكونة ثنائيا

سننفذ عمليات الجمع فقط هنا وسنترك باقي العمليات (الطرح والضرب والقسمة) لأنها كلها يمكن أن تحول إلى عمليات جمع . عند جمع رقمين من هذا النوع ، فإننا نتبع نفس قوانين الجمع على الأرقام الثنائية التي تم استخدامها من قبل . إذا كانت نتيجة الجمع أقل من ٩ فإنها ستكون نتيجة صحيحة ومحقة . المشكلة هي إذا كانت نتيجة الجمع أكبر من ٩ ، أو حصل حمل من الخانة الرابعة مثلا إلى خانة تالية ، في هذه الحالة فإن الرقم الناتج لا يمثل النتيجة الصحيحة لعملية الجمع . في هذه الحالة نضيف الرقم (٠١١٠) ٦ إلى النتيجة حتى تصبح رقما عشريا مكون ثنائيا صحيحا . الأمثلة التالية توضح ذلك :

$$\begin{array}{r} 00100011 \\ 00010101 + \\ \hline 00111000 \end{array} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{r} 23 \\ 15 + \\ \hline 38 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0011 \\ 0100 + \\ \hline 0111 \end{array} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{r} 3 \\ 4 + \\ \hline 7 \end{array}$$

$$0100\ 0101\ 0000$$

$$450$$

$$\begin{array}{r}
 0100\ 0101\ 0000 \\
 0100\ 0001\ 0111 + \\
 \hline
 1000\ 0110\ 0111
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 450 \\
 417 + \\
 \hline
 867
 \end{array}$$

فى هذه الأمثلة كانت نتيجة جمع أى رقمين دائما أقل من ٩ لذلك كانت نتيجة عملية الجمع دائما صحيحة . الآن انظر إلى هذه الأمثلة :

$$\begin{array}{r}
 1001 \\
 0100 + \\
 \hline
 1101 \\
 0110 + \\
 \hline
 1\ 0011
 \end{array}$$

النتيجة ليست رقم عشرى مكود صحيح
لذلك لزم إضافة الرقم ٦

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 4 + \\
 \hline
 13
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1001 \\
 1001 + \\
 \hline
 1\ 0010 \\
 0110 + \\
 \hline
 1\ 1000
 \end{array}$$

هناك حمل من الخانة الرابعة
أضف ٦ للنتيجة

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 9 + \\
 \hline
 18
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0001\ 0110 \\
 0001\ 0101 + \\
 \hline
 0010\ 1011 \\
 0110 + \\
 \hline
 0011\ 0001
 \end{array}$$

المجموعة اليمنى ليست صحيحة
لذلك لزم إضافة ٦

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 15 + \\
 \hline
 31
 \end{array}$$

والمثال الأخير على ذلك هو :

$$\begin{array}{r}
 0110\ 0111 \\
 0101\ 0011 + \\
 \hline
 1011\ 1010 \\
 0110\ 0110 + \\
 \hline
 1\ 0010\ 0000
 \end{array}$$

كل من المجموعتين ليس رقما صحيحا
لذلك لزم إضافة ٦ لكل منهما

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 53 + \\
 \hline
 120
 \end{array}$$

نخلص من ذلك أنه كلما كانت النتيجة ليست فى صورة الرقم العشرى المكود ثنائيا الصحيحة (أكبر من تسعة) أو أن هناك حمل من الخانة الرابعة ، فإنه يلزم إضافة ٦ لهذه المجموعة لضبطها ثنائيا .

٢-١٠ تمارين

- ١- ما هي قيمة الرقم ٧ في كل من الأرقام العشرية التالية :
٤٨٧ ، ١٢،٥٧٦ ، ٦٧٣،٨٤٥ ، ٦٧،٧٠٠٠
- ٢- حول الأرقام الثنائية التالية إلى مكافئها العشري :
10100, 1100.101, 01001.001, 1110.1111, 101010.11011
- ٣- ما هو أكبر رقم يمكن الحصول عليه من رقم ثنائي مكون من :
٤ خانات ، ٧ خانات ، ١٠ خانات ، ١١ خانة ، ١٦ خانة .
- ٤- حول كل من الأرقام العشرية التالية إلى الصورة الثنائية :
٥٥ ، ٧٧٧ ، ٦٥٣ ، ٤٣،٤٥ ، ١،٣٠
- ٥- نفذ عمليات الجمع والطرح والضرب على كل من أزواج الأرقام التالية :
00011 و 00111 ، 11111 و 10001 ، 100001 و 011110
- ٦- أكتب المتمم الأحادي والمتمم الثنائي لكل مما يأتي :
1100 ، 1001 ، 110111 ، 00011 ، 110110111 .
- ٧- ضع كل من الأعداد التالية في صورة ثنائية من ٨ بتات مستخدما نظام مقدار الإشارة مرة ونظام المتمم الأحادي مرة ونظام المتمم الثنائي مرة أخرى :
٢٥+ ، ٦٦- ، ١٢٣- ، ٩٩- ، ٥٥+ .
- ٨- ما هو المكافئ العشري لكل من الأرقام الثنائية التالية ، اعتبر أن هذه الأرقام ممثلة بنظام مقدار الإشارة مرة ونظام المتمم الأحادي مرة ونظام المتمم الثنائي مرة أخرى :
10111111 ، 10011001 ، 00011100 ، 01110000 ، 11110111 .
- ٩- نفذ عملية الجمع على أزواج الأرقام الموجودة في تمرين ٥ مستخدما المتمم الثنائي .
- ١٠- حول كل من الأرقام الثمانية التالية إلى النظام العشري مرة وإلى النظام الثنائي مرة أخرى :
٣٣٥ ، ٣٧٥ ، ١١ ، ١١١ ، ٧٧٧ .
- ١١- حول الأرقام العشرية الموجودة في تمرين ١ إلى الصورة الثمانية
- ١٢- حول الأرقام الثنائية في تمرين ٦ إلى الصورة الثمانية .
- ١٣- حول كل من الأرقام الست عشرية التالية إلى النظام العشري مرة وإلى النظام الثنائي مرة أخرى :
B33 ، 5A ، FF1 ، 3F4 .
- ١٤- حول الأرقام العشرية الموجودة في تمرين ١ إلى الصورة الست عشرية
- ١٥- حول الأرقام الثنائية في تمرين ٦ إلى الصورة الست عشرية .
- ١٦- حول الأرقام العشرية التالية إلى الصورة العشرية المكودة ثنائيا :
١٠ ، ٣٤٤ ، ٥٥٥ ، ١٢٤ ، ١٠٠ ، ١٥٦ ، ١٠٤٥ .
- ١٧- حول كل من الأرقام المكودة ثنائيا التالية إلى الصورة العشرية :
1001100000001000 ، 011100110001 ، 10011001 .