الباب السادس

أقطار منحنيات الرتبة الثانية

نعطي الآن نظرية هامة تختص بها منحنيات الرتبة الثانيـــة (القطـــع المكـــافئ، الناقص ، الزائد)

نظرية: تقع منتصفات الأوتار المتوازية لمنحنى من الرتبة الثانية على استقامة واحدة

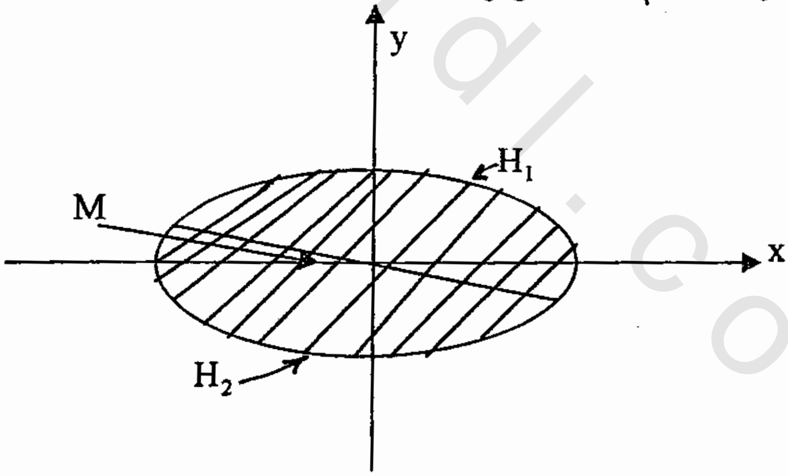
الإثبات: ١ـــ نفرض أن المنحنى المعطى هو قطع ناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ونرمز إلى ميل الأوتار المتوازية بالرمز K. وعندئذ تكون معادلة كل من هذه الأوتار:

$$y=Kx+h \qquad (2)$$

وللمقدار h هنا قيم مختلفة للأوتار المختلفة.



نعين نهايتي الوتر المعرف بالمعادلة (2) عند قيمة ما للمقدار h. بحل المعادلتين (1) ,(2) معا نحذف منهما y فنحصل على :

obeikandl.com

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(Kx+h)^2}{b^2}=1$$

أو

$$\left(b^2+a^2K^2\right)x^2+2a^2Khx+a^2\left(b^2-h^2\right)=0$$

وجذرا هذه المعادلة التربيعية x_1, x_2 هما الإحداثيان الأفقيان للنهايات H_1, H_2 للوتر. نفرض أن $M(x_o, y_o)$ هو منتصف الوتر نفسه، عندئذ فإن $x_o=\frac{x_1+x_2}{2}$ ولكن وفقاً للنظرية المعروفة عن مجموع جذري المعادلة التربيعية يكون

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2Kh}{b^2+a^2K^2}$$

وبالتالي فإن:

$$x_o=-\frac{a^2Kh}{b^2+a^2K^2}$$

ومن (2) نحصل على

$$y_o=Kx_o+h=-\frac{a^2Kh}{b^2+a^2K^2}+h=\frac{b^2h}{b^2+a^2K^2}$$

وهكذا فإن:

$$x_o=\frac{-a^2Kh}{b^2+a^2K^2},\quad y_o=\frac{b^2h}{b^2+a^2K^2} \qquad (4)$$

وبتغير h في هاتين العلاقتين نحصل على إحداثيات منتصفات الأوتار المتوازية المختلفة للقطع الناقص، ولكن يتضح عند ذلك من العلاقتين (4) أن x_o, y_o يرتبطان معاً دائماً بالمعادلة:

$$y_o=K'x_o \quad \text{or} \quad \frac{y_o}{x_o}=-\frac{b^2}{a^2K}$$

$$K' = -\frac{b^2}{a^2 K} \tag{5}$$

وهكذا فإن منتصفات كل الأوتار المتوازية للقطع الناقص تقع على المستقيم

$$y = K' x \tag{6}$$

بالمثل فإن منتصفات كل الأوتار المتوازية للقطع الزائد

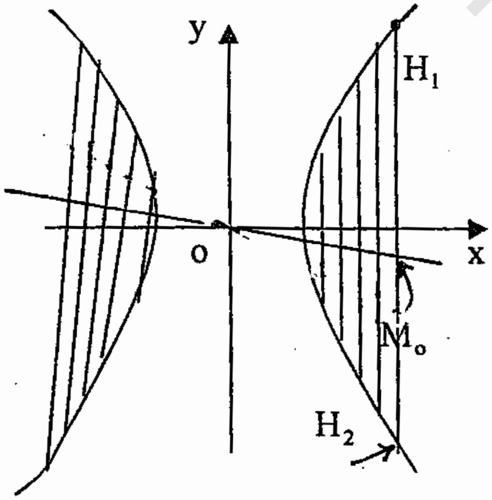
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

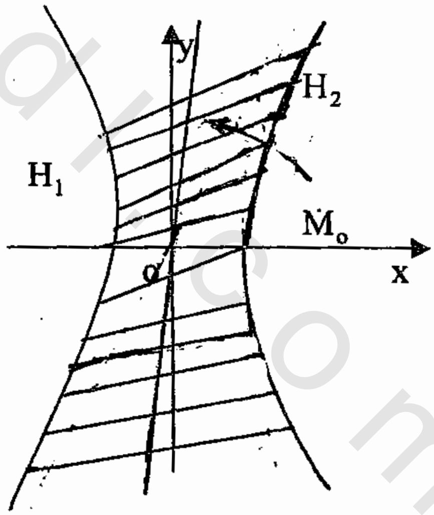
تقع على المستقيم

$$y = K' x, \quad K' = \frac{b^2}{a^2 K}$$

ونشير هنا إلى أن أوتار القطع الزائد لا يمكن أن تكون موازية لخطوط تقاربيـــة لأن أي مستقيم مواز لخط التقارب يقطع القطع الزائد في نقطة واحدة ولذا فإن

$$K \neq \frac{b}{a}, K \neq -\frac{b}{a}$$





وأخيرا نفرض أن المنحنى المعطى هو قطع مكافئ

$$y^2 = 4 a x = 2 L x \tag{1}$$

حيث $L = 2a$ وهو بعد البؤرة عن الدليل. نفرض أن معادلة كل وتر من الأوتار المتوازية هي

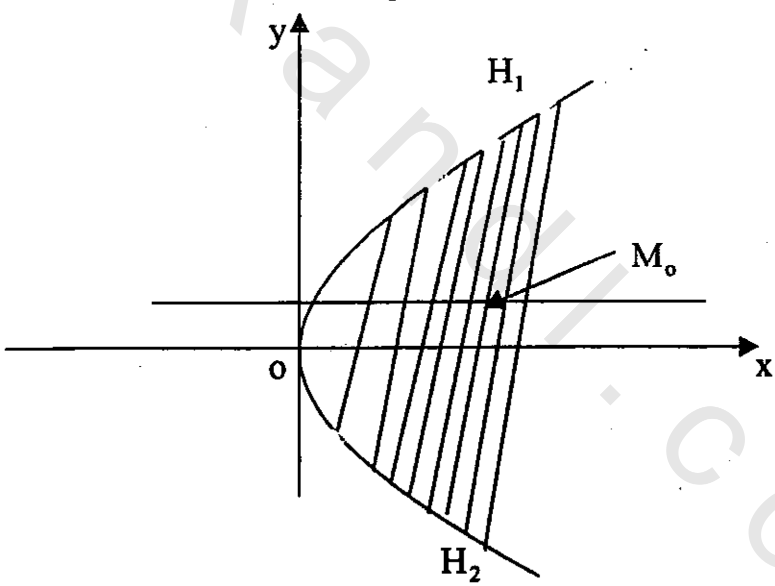
$$y = Kx + h$$

ونشير هنا إلى أن أوتار القطع المكافئ لا يمكن أن تكون موازية لمحوره لأن أي مستقيم موازي لمحور القطع المكافئ يقطعه في نقطة واحدة فقط ولذا فإن $K \neq 0$.

وبالمثل كما في القطع الناقص يمكن أن نثبت أن منصفات كل الأوتار المتوازية للقطع المكافئ تقع على المستقيم

$$y = \frac{L}{K} = \frac{2a}{K}$$

وهو يوازي المحور الأفقي وهو محور القطع المكافئ أيضا. أنظر الشكل (*)



شكل (*)

obeikandl.com

وكان من الممكن الآن القول بأن النظرية قد أثبتت تماماً لو لم يحدث نقص واحـــد في حساباتنا.

إذ أننا قد عبرنا عن أوتار المنحنى من الرتبة الثانية بمعادلة المستقيم بدلالة ميلـــه علـــى الصورة $y = K x + h$، وبالتالي يفقد إثباتنا معناه إذا كانت الأوتار الـــتي ندرســـها موازية oy لأنه ليس للمستقيمات الموازية للمحور oy أي ميل.

غير أن فرض النظرية ينتج مباشرة لهذه الأوتار من خواص تماثل القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافئ. فبالفعل تكون المنحنيات التي درسناها متماثلة بالنسبة إلى المحور oy.

وبالتالي وفي هذه الحالة أيضاً عندما تكون أوتار هذه الخطوط موازية للمحور oy، تقـع منتصفاها على مستقيم واحد (على المحور ox).

يسمى المستقيم المار بمنتصفات الأوتار المتوازية لمنحنى من الرتبة الثانيـــة بقطـــر هـــذا المنحنى.

وتمر كل أقطار القطع الناقص والقطع الزائد بالمركز وهذا واضح هندسياً لأن المركـــز هو منتصف أي وتر يمر به. ويمكن بسهولة أن نرى أن كل أقطار القطع المكافئ موازية لمحوره.

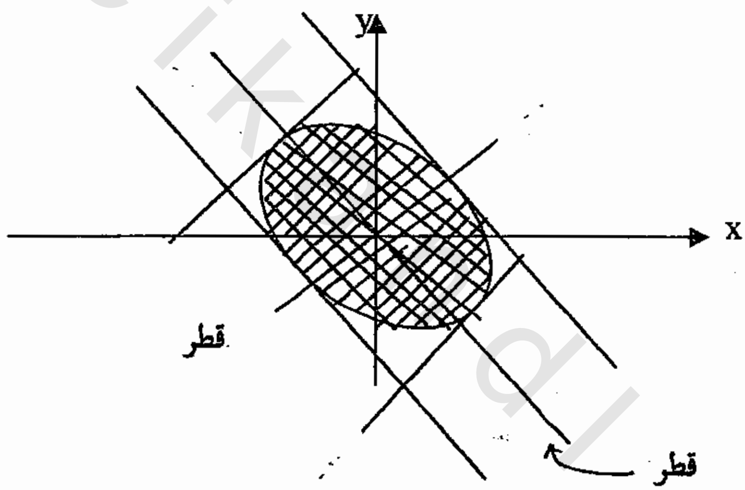
نشير هنا إلى بعض <u>خواص أقطار القطع الناقص مثلاً:</u> نفرض أن K هو ميـــل قطر ما من أقطاره، نرسم أوتار القطع الناقص الموازية لهذا القطر. والمحـــل الهندســـي لمنتصفاها هو قطر آخر يسمى بالقطر المرافق للأول **Conjugate** وليكن ميلـــه K' يعطى من المعادلة (5) أو

$$K K' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad (*)$$

نعين الأن القطر المرافق لذلك القطر الذي ميله هو K'. وبمثل ما سبق فإن K'' ميل هذا القطر الجديد يعطى بالمتساوية

$$K'K'' = -\frac{b^2}{a^2} \xrightarrow{\text{من } (*)} K = K''$$

وبذلك فإذا كان أحد قطري القطع الناقص مرافقا للآخر فإن هذا الأخير يكون أيضا مرافقا للأول. ولذا يسمى هذان القطران بالقطرين المترافقين، وتسمى العلاقة (*) بشرط ترافق قطري القطع الناقص اللذين ميلاهما K', K.



(*)

ويمكن أيضا التعبير عن ترافق القطرين كالآتي: إذا كان أحد قطري القطع الناقص ينصف الأوتار المتوازية للقطر الآخر، فإن هذا القطر الأخير ينصف الأوتار المتوازية للقطر الأول.

ونتيجة لذلك يكون مماسا القطع عند نهايتي أي قطر من قطرية متوازيين وموازيين للقطر المرافق.

ملاحظة: يكون محورا تماثل القطع الناقص وكذلك القطع الزائد قطرين مترافقين لأن كلا منهما ينصف الأوتار الموازية للآخر. ويتميز محورا التماثل من بين أزواج الأقطار المترافقة الأخرى بأنها ليسا مترافقين فحسب وإنما متعامدين أيضاً. أنظر الشكل (*).
ونوضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:-

مثال (١): أوجد معادلة وتر القطع الزائد $4x^2 - y^2 = 4$ والذي ينصف عند النقطة $(2, -3)$.

الحل: ميل الوتر هو $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{K}$ حيث K ميل الخط المستقيم $y = Kx$ المار بالنقطة (x_1, y_1) منتصف الوتر المطلوب أي أن $K = \frac{y_1}{x_1}$.

إذن ميل الوتر المطلوب $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$ والمعادلة المطلوبة هي

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}$$

$$a = 1, b = 2, (x_1, y_1) = (2, -3)$$

بالتعويض نحصل على

$$8x + 3y - 7 = 0$$

مثال (٢) : أوجد المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار المارة بالرأس $A(a,0)$ للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

الحل: نفرض أن P نقطة عامة على القطع الزائد وأن (x_1, y_1) هي نقطة منتصف الوتر AP. معادلة الوتر AP هي

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$$

الوتر AP يمر بالرأس (a, 0) فيحقق معادلته فنحصل على

$$\frac{(2x_1-a)^2}{a^2}-\frac{4y^2}{b^2}=1$$

أو

$$\frac{\left(x_1-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{b^2}{4}}=1$$

أو

$$\frac{X^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1 \quad \text{و} \quad X=x_1-\frac{a}{2}$$

وهي معادلة قطع زائد مركزة $\left(\frac{a}{2},0\right)$ ونصف محوره القاطع يساوي $\frac{a}{2}$ ونصف محوره التخيلي يساوي $\frac{b}{2}$.

مثال (٣): أوجد المحل الهندسي لمنصفات الأوتار للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ والتي تمر بالنقطة (h, K).

الحل: نفرض أن (x_1, y_1) منتصف الوتر الذي نهايتيه (h, K), (x, y).

معادلة الوتر الذي منتصفة (x_1, y_1) هو

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_1}{y_1}$$

ويمر بالنقطة (h, K) فتحقق معادلته.

إذن

$$\frac{h x_1}{a^2}+\frac{K y_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

بإكمال المربع واستبدال (x_1, y_1) بأي نقطة عامة (x, y) نحصل على

$$\frac{\left(x-\frac{h}{2}\right)^2}{\bar{a}^2}+\frac{\left(y-\frac{K}{2}\right)^2}{\bar{b}^2}=1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $\left(\frac{h}{2},\frac{K}{2}\right)$ حيث

$$\bar{a}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{K^2}{b^2}}$$

$$\bar{b}=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{K^2}{b^2}}$$

<u>مثال (٤):</u> أوجد المحل الهندسي لمنصفات الأوتار العمودية على القطع المكافئ

$$y^2=4ax$$

<u>الحل:</u> ميل الوتر الذي تنصفه النقطة (x_1, y_1) هو $\frac{2a}{y_1}$.

معادلة الوتر في هذه الحالة هي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{2a}{y_1}$$

أو

$$y y_1-2 a x=y_1^2-2 a x_1 \qquad (1)$$

معادلة العمودي على القطع المكافئ $y^2=4ax$ هي معادلة الخط المستقيم الذي ميله $-1/\frac{2a}{y}$. ومعادلة الخط العمودي هي

$$y-m x=2 a m-a m^3 \qquad (2)$$

والمطلوب معرفة m؟

بمقارنة (1) ,(2) نحصل على

$$\frac{y_1}{1}=\frac{2a}{m}=\frac{y_1^2-2ax_1}{-2am-am^3}$$

ومنها

$$2a=\frac{y_1^2-2ax_1}{-2a-am^3}\ ,\ m=\frac{2a}{y_1}$$

وبحذف m بينهما نحصل على علاقة بين x_1 , y_1 في الصورة

$$\frac{y_1^2}{2a}+\frac{4a^3}{y_1^2}=x_1-2a$$

وباستبدال (x_1, y_1) بنقطة عامة نحصل على

$$\frac{y^2}{2a}+\frac{4a^3}{y^2}=x-2a$$

مثال (٥): أثبت أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار للقطع المكافئ $y^2=4ax$ والتي تمر بالنقطة الثابتة (h, K) هي قطع مكافئ

$$\left(y-\frac{K}{2}\right)^2=2a(x-\alpha)$$

حيث $\alpha=\dfrac{4h+K^2}{8a}$

الحل: بنفس الأسلوب السابق تكون معادلة الأوتار التي منتصفاتها (x_1, y_1) للقطع المكافئ $y^2=4ax$ هي

$$yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1$$

وحيث أنها تمر بالنقطة (h, K) فتحقق معادلتها إذن

obeikandi.com

$$Ky_1 - 2ah = y_1^2 - 2ax_1$$

أو

$$y^2 - Ky = -2ah + 2ax$$

بإكمال المربع نحصل على

$$\left(y - \frac{K}{2}\right)^2 = 2a(x - \alpha)$$

حيث

$$\alpha = \frac{4h + K^2}{8a}$$

تمارين

١ــ أوجد معادلة وتر القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ والذي يُنصف بالنقطة $(-2,2)$.

٢ــ بين أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار البؤرية للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ هي قطع مكافئ $y^2 = 2a(x - a)$.

٣ــ بين أن المحل الهندسي لمنتصفات أوتار القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ يمر خلال رأس القطع المكافئ $y^2 = 2ax$.

٤ــ أوجد معادلة وتر القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ الذي تنصفه النقطة $(2, 1)$.

٥ــ أوجد المحل الهندسي لمنتصفات أوتار القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ والتي تمر خلال الطرف الموجب للمحور الأصغر.

٦ــ أوجد المحل الهندسي لمنتصفات أوتار القطع الناقص $2x^2 + 3y^2 = 4$ والتي تصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع محور ox.

٧ـ أوجد معادلة الوتر للقطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{15}=1$ والذي تنصفه النقطة $(5, 3)$.

٨ـ بين أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار البؤرية للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو قطع زائد أيضاً.

٩ـ بين أن المحل الهندسي لمنتصفات أوتار القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ والتي تمر بالنقطة الثابتة (h, K) هي قطع زائد مركزه $\left(\frac{h}{2}-\frac{K}{2}\right)$.

١٠ـ بين أن المحل الهندسي لمنتصفات الأوتار العمودية للقطع الزائد القائم $x^2 - y^2 = a^2$ هي منحنى يعطى بالمعادلة $\left(y^2 - x^2\right)^2 = 4a^2x^2y^2$.

obeikandl.com