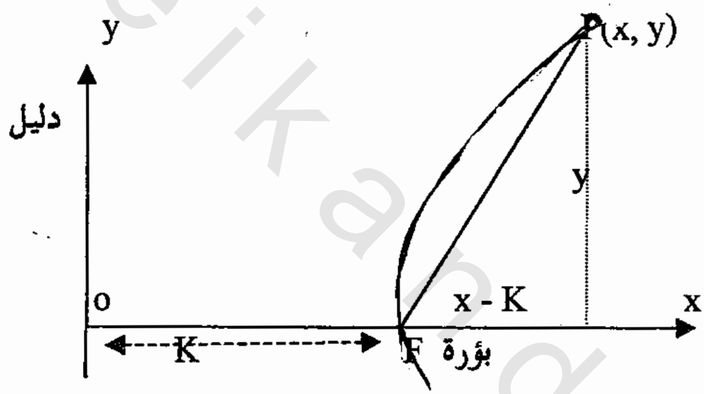
الباب السابع

المعادلة العامة للقطاعات المخروطية

General equation of conic section

١ـ المعادلة العامة للقطاعات المخروطية في الإحداثيات الكرتيزية:ـ

هنا نحاول إيجاد معادلة القطع في الإحداثيات الكرتيزية، لذلك نأخذ محـــور y كدليل للقطع ومحور x يمر خلال البؤرة. إذن



$$\sqrt{(x-K)^2+y^2}=\varepsilon\,|x| \quad \text{or}$$

$$\left(1-\varepsilon^2\right)x^2+y^2-2Kx+K^2=0 \qquad (*)$$

وهذه المعادلة تمثل قطع عام.

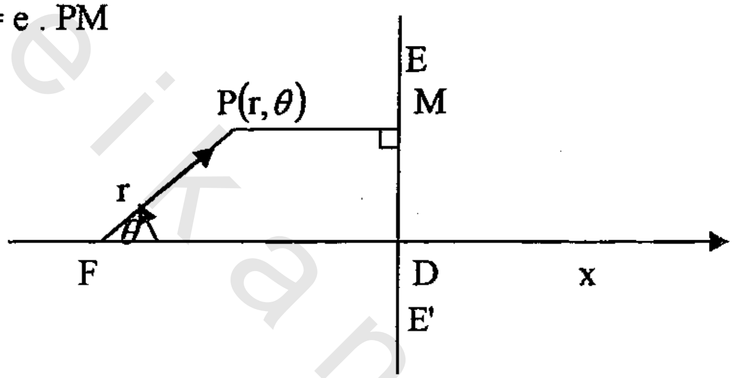
لاحظ أن المعادلة (*) من الدرجة الثانية. إذا كانت $\varepsilon<1$ فإن المعادلة تمثل قطع ناقص (معاملات x^2 , y^2 لها نفس الإشارة). المعادلة (*) تمثل قطع مكافئ إذا كانت $\varepsilon=1$ (ومعامل x^2 يساوي صفر). إذا كانت $\varepsilon>1$ فإن المعادلة (*) تمثـــل قطـــع زائـــد (معاملات x^2 , y^2 مختلفة الإشارة).

٢ـ المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية في الحالة العامة:ـ

نفرض أن F هي البؤرة، E E' هو الدليل المناظر لقطع مخروطي اختلافه المركزي e . ونأخذ F كقطب والمستقيم المرسوم منها عمودي على الدليل كخط ابتدائي Fx.

نفرض أن $P(r,\theta)$ أي نقطة على القطع. نرسم PM عمودياً على الدليل ينتج أن

$FP = e \,.\, PM$



$\therefore r = e\left(FD - r\cos\theta\right)$ or

$r\left(1 + e\cos\theta\right) = e \,.\, FD = \text{Const.}$

ولإيجاد قيمة هذه الكمية الثابتة نعلم أنه إذا كانت $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ فإن FP يساوي نصف الوتر البؤري العمودي L وينتج أن

$$L\left(1 + e\cos\frac{\pi}{2}\right) = \text{Const.}$$

وينتج أن الكمية الثابتة تساوي L وبذلك تؤول المعادلة القطبية إلى

$r\left(1 + e\cos\theta\right) = L \quad , \; L = e\;K$

$\therefore \dfrac{L}{r} = 1 + e\cos\theta$

وفي حالة القطع المكافئ $L = 2a,\ e = 1$ وينتج أن

$$\frac{2a}{r}=1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$$

لإيجاد المعادلة القطبية لدليل القطع $\frac{L}{r}=1+e\cos\theta$ ، نأخذ أي نقطة $Q(r,\theta)$ على الدليل EE'

$$FD=FQ\cos\theta=r\cos\theta$$

ولكن الكمية الثابتة FD . e تساوي L وينتج أن $FD=\frac{L}{e}$.

$$\frac{L}{e}=r\cos\theta$$

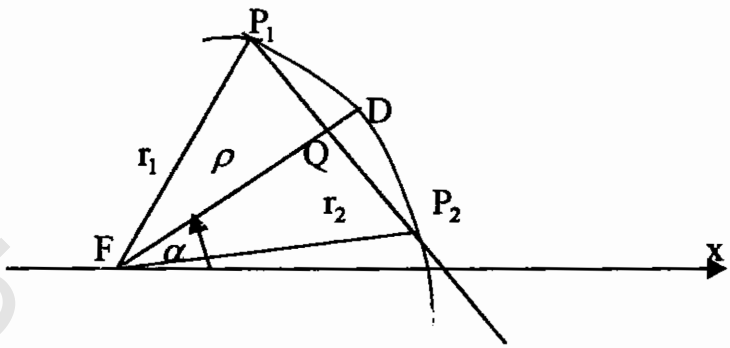
وهي معادلة الدليل

$$\frac{L}{r}=e\cos\theta$$

المعادلة القطبية لوتر القطع المخروطي:.

لإيجاد المعادلة القطبية لوتر القطع المخروطي $\frac{L}{r}=1+e\cos\theta$ الواصل بين النقطتين $P_1(r_1,\phi_1+\phi_2), P_2(r_2,\phi_1-\phi_2)$ نرسم FD عمودياً على الوتر P_1P_2 ونفرض أن Q هي النقطة (ρ,α) فتكون معادلة P_1P_2 هي $r\cos(\theta-\alpha)=\rho$.

راجع معادلة الخط المستقيم في الإحداثيات القطبية.



ونظراً لأن كلا من P_1, P_2 تقع على المستقيم السابق ينتج أن

$$r_1 \cos(\phi_1 + \phi_2 - \alpha) = \rho \quad (1)$$

$$r_2 \cos(\phi_1 - \phi_2 - \alpha) = \rho \quad (2)$$

كذلك تقع النقطتان P_1, P_2 على القطع المخروطي

$$\frac{L}{r} = 1 + e\cos\theta$$

$$\therefore \frac{L}{r_1} = 1 + e\cos(\phi_1 + \phi_2) \quad (3)$$

$$\frac{L}{r_2} = 1 + e\cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (4)$$

من المعادلتين (1), (3) ينتج أن

$$\frac{L}{\rho}\cos(\phi_1 + \phi_2 - \alpha) = 1 + e\cos(\phi_1 + \phi_2) \quad (5)$$

ومن المعادلتين (2), (4) ينتج أن

$$\frac{L}{\rho}\cos(\phi_1 - \phi_2 - \alpha) = 1 + e\cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (6)$$

بجمع المعادلتين (5), (6) ينتج أن

$$\frac{L}{\rho}\cos(\phi_1 - \alpha)\cos\phi_2 = 1 + e\cos\phi_1\cos\phi_2 \quad (7)$$

وبطرح المعادلتين (5) من المعادلة (6) ينتج أن

$$\frac{L}{\rho}\sin(\phi_1-\alpha)\sin\phi_2 = e\sin\phi_1\sin\phi_2 \quad \text{or}$$

$$\frac{L}{\rho}\sin(\phi_1-\alpha)=e\sin\phi_1 \tag{8}$$

معادلة الوتر P_1P_2 هي $r\cos(\theta-\alpha)=\rho$ ويمكن كتابتها على الصورة

$$r\cos[(\theta-\phi_1)+(\phi_1-\alpha)]=\rho$$

$$\cos(\theta-\phi_1)\cos(\phi_1-\alpha)-\sin(\theta-\phi_1)\sin(\phi_1-\alpha)=\frac{\rho}{r} \tag{9}$$

وبالتعويض عن قيمة كل من $\sin(\phi_1-\alpha), \cos(\phi_1-\alpha)$ من المعادلتين (7) ,(8) في المعادلة (9) ينتج أن:

$$\frac{\rho}{L}\cos(\theta-\phi_1)(1+e\cos\phi_1\cos\phi_2)\sec\phi_2$$

$$-\frac{e\rho}{L}\sin(\theta-\phi_1)\sin\phi_1=\frac{\rho}{r}$$

$$\therefore \frac{L}{r}=\sec\phi_2\cos(\theta-\phi_1)+e[\cos(\theta-\phi_1)\cos\phi_1$$

$$-\sin(\theta-\phi_1)\sin\phi_1]$$

or

$$\frac{L}{r}=\sec\phi_2\cos(\theta-\phi_1)+e\cos\theta \tag{10}$$

وهي المعادلة القطبية للوتر.

المعادلة القطبية للمماس عند أي نقطة:

لإيجاد المعادلة القطبية للمماس عند النقطةP التي زاويتها القطبية ϕ نضع في المعادلة (10) $\phi_2=0,\ \phi_1=\phi$ ينتج أن

$$\frac{L}{r}=\cos(\theta-\phi)+e\cos\theta$$

وهي المعادلة المطلوبة.

مثال: إذا كانت $\phi_1+\phi_2$, $\phi_1-\phi_2$ هما الزاويتين القطبيتين للنقطتين P_1, P_2 علـــى القطع $\frac{L}{r}=1+\cos\theta$ فأثبت أن معادلة الوتر $P_1 P_2$ هي

$$\frac{L}{r}=2\cos\theta+\tan\phi_1\sin\theta$$

أوجد نقطتي تقاطع المستقيم

$$\frac{L}{r}=2\cos\theta+\tan\phi_1\sin\theta$$

مع القطع المكافئ $\frac{L}{r}=1+\cos\theta$ ثم أثبت أن الزاوية المحصورة بين المماسين للقطــع عند نقطتي التقاطع تساوي ϕ_1.

الحل: الجزء الأول من المسألة سبق إثباته (بوضع $e = 1$ في المعادلة (10)) وبالنســـبة للجزء الثاني من المسألة نجد أن المستقيم

$$\frac{L}{r}=2\cos\theta+\tan\phi_1\sin\theta \qquad (1)$$

يقطع القطع المكافئ

$$\frac{L}{r}=1+\cos\theta \qquad (2)$$

إذا تحقق الآتي

$$1+\cos\theta=2\cos\theta+\tan\phi_1\sin\theta$$
$$\cos\theta-1+\tan\phi_1\sin\theta=0$$
$$-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\tan\phi_1\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$$\sin\frac{\theta}{2}\left[\tan\phi_1\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right]=0$$

$$\therefore\ \sin\frac{\theta}{2}=0\ \text{ or } \tan\frac{\theta}{2}=\tan\phi_1$$

$$\therefore\ \frac{\theta}{2}=0\quad\text{or}\quad\theta=2\phi_1$$

ولكن من المعادلة (2) عند $\theta=0$ فإن $r=\frac{L}{2}$ ، وعند $\theta=2\phi_1$ فإن

$$r=\frac{L}{1+\cos 2\phi_1}$$

لذلك يقطع المستقيم القطع المكافئ في النقطتين

$$\left(\frac{L}{2},0\right),\left(\frac{L}{1+\cos\phi_1},\phi_1\right)$$

معادلة الوتر P_1P_2 تصبح معادلة المماس للقطع المكافئ عنـــد النقطـة (r,ϕ) إذا وضعنا $e=1,\phi_2=0$ في معادلة الوتر وتصبح معادلة المماس هي

$$\frac{L}{r}=\cos(\theta-\phi)+\cos\theta$$

وتكون معادلة المماس عند نقطة التقاطع الأولى التي فيها الزاوية القطبية $\phi=0$ هي

$$\frac{L}{r}=2\cos\theta$$

أي

$$L=2r\cos\theta=2x$$

$$\therefore\ x=\frac{L}{2}=\text{Const.}$$

لذلك يكون المماس عند نقطة التقاطع التي فيها $\theta=0$ عمودياً على المحور الابتدائي.

معادلة المماس عند نقطة التقاطع الثانية التي فيها الزاوية القطبية تساوي $2\phi_1$ هي

$$\frac{L}{r} = \cos(\theta - 2\phi_1) + \cos\theta$$

$$\text{or} \quad L = r\left(\cos\theta \cos 2\phi_1 + \sin\theta \sin 2\phi_1\right) + r\cos\theta$$
$$= x\cos 2\phi_1 + y\sin 2\phi_1 + x$$
$$L = x\left(1 + \cos 2\phi_1\right) + y\sin 2\phi_1$$

ويكون ميل المماس يساوي

$$\frac{-\left(1+\cos 2\phi_1\right)}{\sin 2\phi_1} = -\frac{2\cos^2\phi_1}{2\sin\phi_1 \cos\phi_1} = -\cot\phi_1$$

لذلك يصنع المماس زاوية ϕ_1 مع المستقيم المتعامد مع المحور الابتدائي وقد أثبتنا أن المماس عند نقطة التقاطع الأولى متعامد مع المحور الابتدائي، لذلك تكون الزاوية بين المماسين للقطع المكافئ عند نقطة التقاطع تساوي ϕ_1.

٣ـ المعادلة الإتجاهية للقطاعات المخروطية:

نفرض أن P أي نقطة عامة على القطع المخروطي وأن نقطة تلاقي محور القطع مع الدليل هي D ونأخذها كنقطة أصل جديدة.

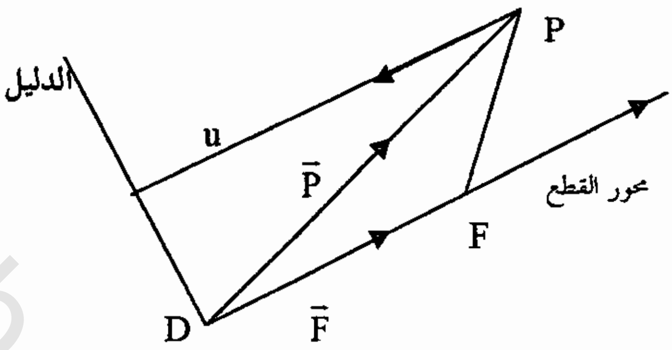
ونفرض أن P لها متجه الوضع $\vec{P}$ والبؤرة F لها متجه الوضع $\vec{F}$ وأن u متجه الوحدة في اتجاه محور القطع.

من تعريف القطع المخروطي يكون

$$\left\langle \vec{P} - \vec{F}, \vec{P} - \vec{F} \right\rangle = e^2 \left(P_{\underline{u}}\, \vec{P}\right)$$

أو

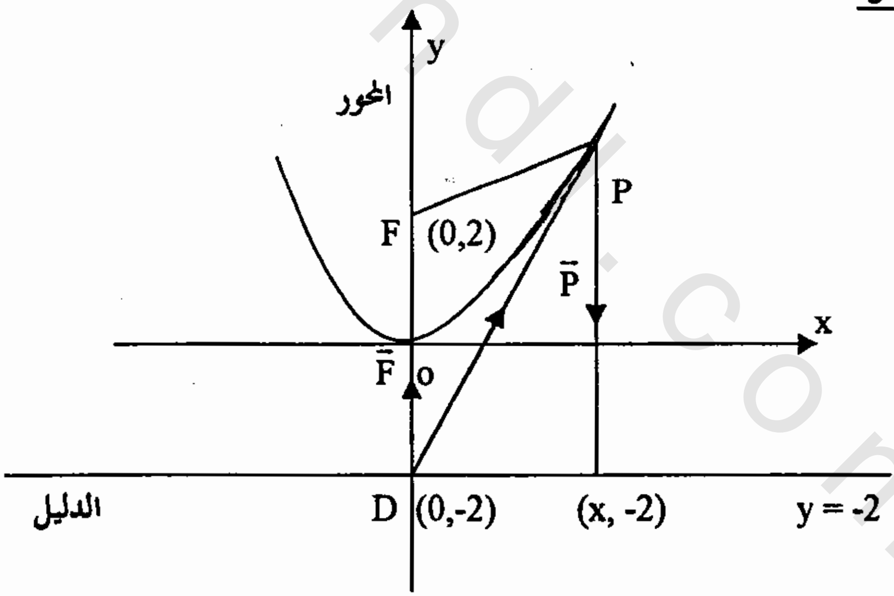
$$\left|\vec{P} - \vec{F}\right| = e\, P_{\underline{u}}\, \vec{P}$$



حيث $P_{\underline{u}}\,\vec{P}$ هو مسقط المتجه $\vec{P}$ على متجه الوحدة $\vec{u}$.

<u>مثال (١):</u> أوجد المعادلة الإتجاهية للقطع المكافئ الذي بؤرتـه $(0,\ 2)$ ودليلــه $y=-2$ ومن ثم أوجد معادلته الكرتيزية.

<u>الحل:</u>



من الرسم نجد أن

$$\vec{F}=(0,4),\ \vec{P}=(x\,,y+2)$$

$$\vec{u}=\frac{(0,-2-y)}{2+y}=(0,-1)$$

المعادلة الاتجاهية هي

(*) $$\left\langle \vec{P}-\vec{F},\vec{P}-\vec{F}\right\rangle=\left(P_{\underline{u}}\ \vec{P}\right)^2=\left\langle \vec{P},\vec{u}\right\rangle^2$$

وحيث أن

$$\vec{P}-\vec{F}=(x\,,y-2)$$

إذن

$$\left|\vec{P}-\vec{F}\right|^2=x^2+\ (y-2)^2$$

ومن

$$\left\langle \vec{P},\vec{u}\right\rangle^2=(-y-2)^2=(y+2)^2$$

وبالتعويض في (*) نحصل على المعادلة الكرتيزية

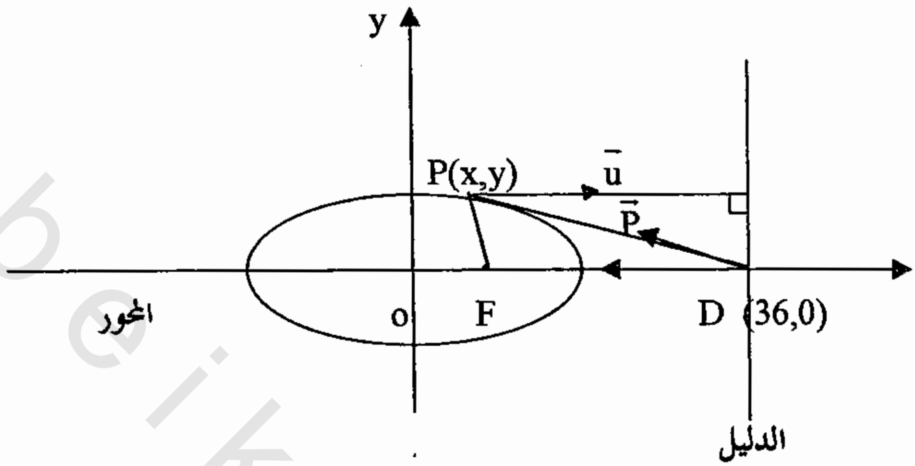
$$x^2+(y-2)^2=(y+2)^2$$

أو

$$x^2=8\,y$$

مثال (٢): أوجد المعادلة الإتجاهية للقطع الناقص الذي له $e=\frac{1}{3}$ وإحدى بؤرتيه عند النقطة (0, 4) والدليل x=36 ومن ثم أوجد المعادلة الكرتيزية.

الحل: بوضع البيانات المعطاه على الورقة يكون لدينا الشكل التالي:ـــ



$$\overrightarrow{PF} = \vec{P} - \vec{F} = (x-4, y)$$

$$\vec{F} = (4-36, 0) = (-32, 0)$$

$$\bar{u} = (-1, 0), \vec{P} = (x-36, y)$$

$$\left\langle \vec{P} - \vec{F}, \vec{P} - \vec{F} \right\rangle = \frac{1}{9}\left(P_u \vec{P}\right)^2$$

وهي المعادلة الإتجاهية المطلوبة.

وبالتعويض عن $\vec{P}, \vec{F}$ وحساب المسقط $P_u \vec{P}$ نحصل على

$$(x-4)^2 + y^2 = \frac{1}{9}(x-36)^2$$

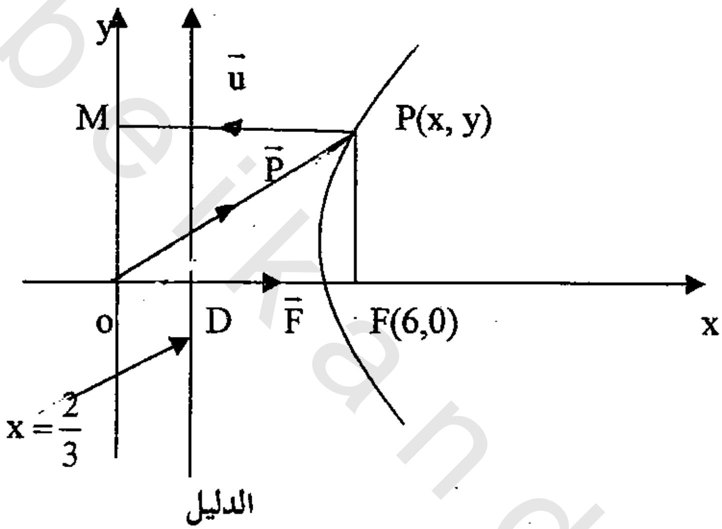
بعد الاختصار نحصل على

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$$

معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(0, 0)$ وأنصاف محاوره $a = 12, b = 8\sqrt{2}$.

مثال (٣): أوجد المعادلة الاتجاهية للقطع الزائد حيث e=3 والبؤرة F(6,0) والدليـــل $x=\frac{2}{3}$ ومن ثم أوجد معادلته الكرتيزية.

الحل: بوضع البيانات المعطاة على ورقة الرسم نحصل على



$$\vec{P}=\left(x-\frac{2}{3},y\right),\vec{F}=\left(6-\frac{2}{3},0\right)=\left(\frac{16}{3},0\right),\vec{u}=(1,0)$$

$$\vec{P}-\vec{F}=(x-6,y)$$

المعادلة الاتجاهية هي

$$\left(\vec{P}-\vec{F},\vec{P}-\vec{F}\right)=9\left(P_{\vec{u}}\,\vec{P}\right)^2$$

بالتعويض عن $\vec{u},\vec{P},\vec{F}$ والاختصار نحصل على

$$(x-6)^2+y^2=9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$$

أو

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$$

وهي معادلة قطع زائد محوره القاطع على امتداد محور x ومحوره المرافق (التخيلي) على امتداد محور y.

تمارين

١ــ أوجد المعادلة الإتجاهية للقطع الزائد حيث e=2 ، الدليل $y=\frac{5}{4}$ ومن ثم أكتب معادلته الكرتيزية وأرسمه.

٢ــ عين المعادلة الاتجاهية للقطع الناقص الذي له $e=\frac{2}{3}$، البؤرة F(0, 1) ومعادلة الدليل القريب من F هي $y=\frac{9}{4}$ ومن ثم أوجد معادلته الكرتيزية.

٣ــ أوجد المعادلة الإتجاهية للقطاعات المكافئة الآتية:ــ

(i) الدليل y=-2 والبؤرة F(0, 2)

(ii) الدليل x =3 والبؤرة F(=3, 0)

ومن ثم إرسمها.