الباب العاشر

تمارين عامة

(١) ـــ اوجد معادلة القطع المخروطي في الحالات الآتية ومن ثم أرسمه

١ـــ قطع مكافئ بؤرته $(-3, 4)$ ودليله $x=5$.

٢ـــ قطع مكافئ بؤرته $(0, 4)$ ورأسه $(0, 2)$.

٣ـــ قطع مكافئ دليله $y=-10$ ومحوره $x=-2$ ويمر بالنقطة $(4, -2)$.

٤ـــ قطع ناقص بؤرتيه $\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$ ويمر بالنقطة $\left(\sqrt{3}, 2\right)$.

٥ـــ قطع ناقص له رأسان $\left(0, \pm 2\sqrt{2}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(1, \sqrt{6}\right)$.

٦ـــ قطع ناقص مركزه $(-1, -3)$ وبؤرته $(-1, -2)$ وله رأس عند $(-1, -5)$.

٧ـــ قطع ناقص بؤرتيه $(1, -3)$ و $(1, 1)$ والمحور الأكبر طوله 8.

٨ـــ قطع زائد في الوضع القياسي ويمر بالنقطة $(1, 1)$ و $\left(2, \sqrt{11/2}\right)$ ومحوره القاطع على امتداد محور x.

٩ـــ قطع زائد رؤوسه $(-3, 2)$ و $(1, 2)$ وخطوطه التقاربية متعامدة.

١٠ـــ قطع زائد بؤرتية $(-8, -3), (12, -3)$ وله خط تقاربي $y+3=\frac{4}{3}(x-2)$.

١١ـــ قطع مخروطي اختلافه المركزي $e=2$ ودليله $x=-4$ الذي ينـــاظر الـــرأس $(-2, 0)$.

١٢ـــ قطع مخروطي اختلافه المركزي $e=\frac{1}{3}$ وبؤرتية $(0, 0), (0, -2)$.

(٢) ـــ أرسم القطاعات المخروطية الآتية:ـــ

(i) $49x^2 - 9y^2 + 98x - 36y = 428$

(ii) $4x^2 - 16x + y^2 - 6y = 0$

(iii) $9x^2 - 36x + 5y + 21 = 0$

(iv) $x^2 - 2x - 4y^2 - 12y = 0$

(v) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 40x + 30y - 45 = 0$

(vi) $73x^2 + 72xy + 52y^2 = 25$

(٣) اوجد المحل الهندسي للنقاط (x, y) التي تبعد مسافة عن النقطة $(2, 4)$ e مــن المرات للمسافة عن محور x في الحالات الآتية:-

$e = 3$, $e = ½$, $e = 1$

(٤) بين نوع القطع المخروطي الذي تمثلة المعادلات القطبية الآتية:-

(i) $r = \dfrac{3}{1 + 4\sin\theta}$

(ii) $r = \dfrac{3}{4 - 4\sin\theta}$

(iii) $r = \dfrac{3}{4 - \cos\theta}$

وارسم القطاعات

$$r = \frac{3}{2 + \cos\theta} \ , \ r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

وأوجد نقاط تقاطعهما.

(٥) أوجد معادلة مسار الأرض حول الشمس إذا كان المسار بيضــــاوي (قطــع ناقص) $e=0.017$ و طول المحور الأكبر 299 مليون كيلو متر. وأوجد أصغــر مسافة للأرض عن الشمس.

(٦) أدرس المحال الهندسية التي تمثلها المعادلة

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , A > 0, C > 0$$

$$r = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

لجميع قيم r $(r<0, r>0, r=0)$.

(٧) بين أنه إذا كانت ρ هي المسافة بين بؤرة ودليلها المناظر للقطع الناقص (قطع زائد) فإن طول المحور الأكبر (المحور القاطع)

$$\frac{2e\rho\varepsilon}{1-e^2}\ (\varepsilon=-1)\,\varepsilon=1$$

(٨) بين أن القطاعات الناقصة (الزائدة) التي لها نفس الإختلاف المركزي فإنها تكون مشابهة في الشكل.

(إرشاد: $e=\bar{e}\Rightarrow(\bar{a},\bar{b})=k\,(a,b), k\neq 0, (\bar{x},\bar{y})=(k\,x, ky)$).

(٩) أوجد معادلة القطع الزائد الذي دليله $x=1$ وخطوطه التقاربية $y=\pm\frac{2}{3}x$.

(١٠) بين أنه إذا وقعت النقطة (x, y) على القطع المكافئ $y^2=4\,P_1\,x$ فإن النقطة (kx,ky) تقع على $y^2=4\,P_2\,x$ حيث $k=\frac{P_2}{P_1}$ ومن ثم بين أن كل القطاعات المكافئة متشابهة.

(١١) بين أن كل الدوائر متشابهة في الشكل.

(إرشاد: استخدم تمرين ٨، ١٠).

(١٢) بين أن أطوال القطع المستقيمة التي تصل بين بؤرة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$ والنقطة (x, y) التي تقع عليه هي $a\pm e\,x$.

(١٣) بين أن أطول القطع المستقيمة التي تصل بين بؤرة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ والنقطة (x,y) التي تقع عليه هي $|e\,x\pm a|$.

(١٤) بين أنه إذا كانت ρ هي المسافة من بؤرة للقطع الناقص إلى الدليل المناظر فإن $\rho=\frac{b^2}{C}$.

(١٥) استخدم مميز الجزء التربيعي لمعادلة الدرجة الثانية لتبين نوع المحل الهندسي الذي تمثله المعادلات الآتية:ـــ

(i) $3x^2-12xy-3y^2+2x-4y+5=0$

(ii) $x^2-7xy+12y^2-3x+8y-21=0$

(iii) $2x^2+5xy-4y^2+x-2y+17=0$

(١٦) استخدم دوران المحاور بزاوية مناسبة لحذف الحد المختلط من المعادلة

$$4x^2+4xy+y^2-24x+38y-139=0$$

ثم بإنتقال المحاور (إكمال المربع) إحذف حدود الدرجة الأولى ومن ثم بين نوع المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة وارسم الشكل.

(١٧) أوجد معادلة المستقيم في الصورة القطبية الذي يمر بالنقطتين $(r_\alpha,\theta_\alpha),\ \alpha=1,2$.

(١٨) أوجد المعادلة القطبية للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(3, 0^\circ)$ ويصنع زاوية $\frac{3\pi}{4}$ مع الخط الابتدائي.

(١٩) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $\left(8,\frac{2\pi}{3}\right)$ وتمر بالنقطة $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$.

(٢٠) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $\left(8,\frac{\pi}{4}\right)$ وتمس المحور القطبي (الخط الابتدائي).

(٢١) أثبت أن معادلة مجموعة الدوائر متحدة المحور يمكن وضعها في الصورة

$$x^2+y^2+2\lambda x+d=$$

حيث d ثابت، λ بارامتر.

(٢٢) أثبت أن المعادلة $x^2+y^2+2fy-C=0$ تمثل مجموعة من الدوائر متحدة المحور وأوجد محورها الأساسي حيث C ثابت، f بارامتر.

(٢٣) أوجد دائرة متحدة المحور مع الدوائر

$$x^2+y^2-2x+2y+1=0,\ x^2+y^2+8x-6y=0$$

والتي تمر بالنقطة (-1, -2).

(٢٤) أوجد دائرة متحدة المحور مع الدوائر

$$x^2+y^2-6x+4=0,\ x^2+y^2+5x+4=0$$

والتي تمس الخط المستقيم 3x-4y-15=0.

(٢٥) أوجد المحاور الأساسية للدوائر

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2\ ,(x-b)^2+(x-a)^2=b^2$$

$$(x-a-b-C)^2+y^2=ab+C^2$$

وأثبت أنه تتلاقى في نقطة **Concurrent** وأوجد الدائرة التي تقطع على التعامد الدوائر الثلاث السابقة.

(٢٦) أوجد قيمة C التي تجعل المعادلات الآتية

(i) $2x^2+2Cxy-y^2+5x+y+2=0$

(ii) $x^2+2xy+y^2+4x+4y+C=0$

(iii) $2x^2+2xy-y^2+Cx+6y-9=0$

تمثل أزواج من الخطوط المستقيمة.

(٢٧) أثبت أنه إذا دارت المحاور بزاوية θ فإن المقادير

(i) $A+B+C$

(ii) $4\left(AB-\dfrac{h^2}{4}\right)+4BC-f^2-g^2$

(iii) $4ABC+fgh-(Ag)^2-(Bf)^2-(Ch)^2$

تظل ثابتة (لا تغيرية) Invariant حيث A, B, C, f, g, h هـــي معــاملات معادلة الدرجة الثانية.

$$Ax^2+hxy+By^2+fx+gy+C=0$$

(٢٨) بين أنه إذا كانت $B>0$ فإن المحل الهندسي $x^2+Bxy=F$ هو قطع زائــد إذا كانت $F\neq 0$ وخطين متقاطعين إذا كانت $F=0$.

(٢٩) صف المحل الهندسي للمعادلة

$$Bxy+Dx+Ey+F=0, B\neq 0$$