الجزء الأول

الإحداثيات والتحويلات في المستوى

الباب الأول

الإحداثيات في المستوى

نوضح هنا طرق تعيين نقط المستوى عن طريق أعداد حقيقية والتي تسمى مجموعة الإحداثيات. كما نعلم أن المستوى يتكون من عدد لانهائي من النقاط الهندسية. وكذلك R (مجموعة الأعداد الحقيقية) مكون من عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية والتي تناظر عدد لانهائي من النقاط الهندسية على الخط المستقيم المنطبق على خط الأعداد. وبالتالي فإن فئة حاصل الضرب الديكارتي $R \times R$ تتكون من عدد لانهائي من الأزواج المرتبة (x,y) أي أن

$$R \times R = \{(x, y): x, y \in R\}$$

وإذا عرفنا تناظر احادي **(1-1 and onto)** بين النقاط الهندسية للمستوى P، نقاط $R \times R$ كالآتي

$$\begin{aligned} R \times R &\longrightarrow P \\ (x,y) &\longrightarrow A \in P \end{aligned}$$

أي أن كل نقطة هندسية A تتحدد من خلال زوج من الأعداد $x,\ y$ ويسمى x الإحداثي الأول، y الإحداثي الثاني.

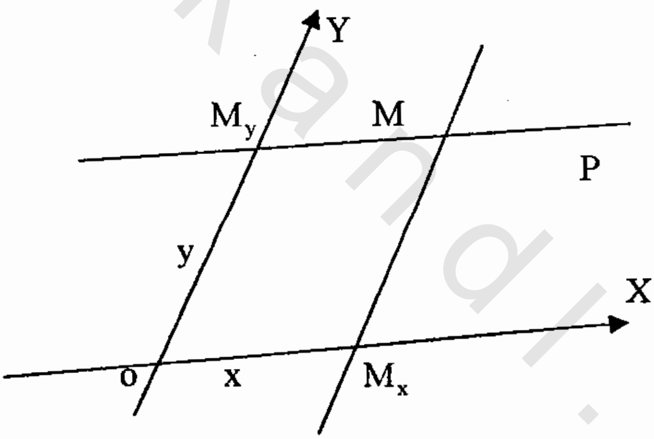
وكل زوج مرتب (x,y) يحدد نقطة هندسية في المستوى ومجموعة الإحداثيات (x,y) تختلف من مسألة إلى أخرى على حسب الطريقة الهندسية المعرفة بها.

١ـ الإحداثيات الكرتيزية

١ . ١ الإحداثيات الكرتيزية المائلة **Affine Coordinates**

تتحدد مجموعة الإحداثيات هذه بإعطاء محورين oX, oY يتقاطعان في نقطة o بأية زاوية (فيما عدا الزاويتين $0, \pi$).

نفرض أن M نقطة في المستوى P، نرسم من M مستقيمين موازيين للمحورين oX, oY ونرمز لنقطتي تقاطعهما مع هذين المحورين بالرمزين M_x, M_y على الترتيب.

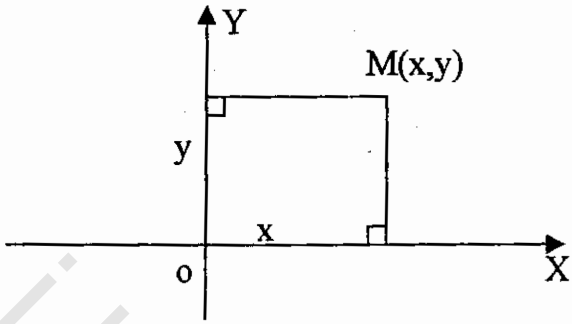


العددان x,y يسميان بالإحداثيات الكرتيزية المائلة للنقطة M حيث الزاوية بين المحورين غير قائمة.

١ . ٢ الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة : **Orthogonal Coordinates**

إذا كانت الزاوية بين المحورين oX, oY قائمة فإن مجموعة الإحداثيات تسمى مجموعة الإحداثيات الكريتزية المتعامدة وهي أبسط مجموعة للإحداثيات وأكثرها

شيوعاً ولذا نسمي الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة في غالب الأحيان بالإحداثيات الكرتيزية فقط.



ويمكن إعطاء وصف تفصيلي للإحداثيات الكرتيزية كالآتي:

المحور oX نأخذه افقي ويسمى **axis of abscissae** والمحور oY نأخذه رأسي ويسمى **axis of ordinates** أو المحور الأفقي والمحور الرأسي على الترتيب والنقطة o تسمى نقطة الأصل. كل محور من المحاور يقسم المستوى إلى نصفين والمحوران يقسمان معاً المستوى إلى أربعة أقسام تسمى بالأرباع الإحداثية **quadrants** وتعرف دالة القياس بين نقاط المستوى كالأتي:

المسافة بين النقاط $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ وتعطى من $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

٢ ـ المتجهات :ـ

يعرف المتجه $\overline{A} = (a, b)$ بإتجاه وطول $|\overline{A}|$ حيث إتجاه $\overline{A}$ هو ظل الزاوية التي يصنعها مع محور السينات و a, b تسمى مركبات المتجه $\overline{A}$ في اتجاه محور Y ومحور X على الترتيب وكذلك $|\overline{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

راجع ما درسته سابقا في المتجهات.

يعرف حاصل الضرب القياسي بين متجهين على أنه دالة $\langle\, ,\, \rangle$

$$\langle\, ,\, \rangle : P \times P \longrightarrow R$$
$$\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) \longrightarrow \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle \in R$$

معرفة كالأتي:

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left|\overrightarrow{A}\right| \left|\overrightarrow{B}\right| \cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$.

أو

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = a_1\, a_2 + b_1\, b_2$$

حيث $\overrightarrow{B} = (a_2, b_2), \overrightarrow{A} = (a_1, b_1)$.

ويقال أن المتجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متعامدان إذا تحقق $\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = 0$ أو $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

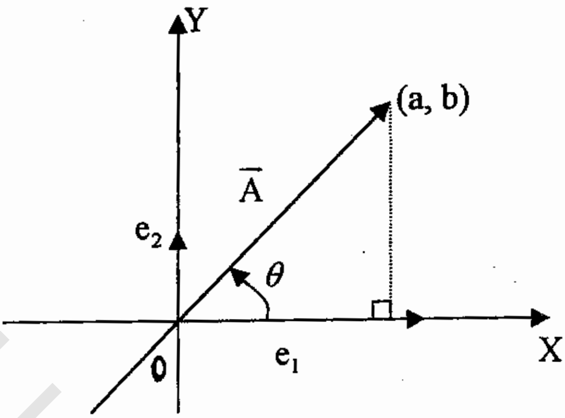
ويقال أنهما متوازيان إذا تحقق

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

ويقال أن المتجه $\overrightarrow{A}$ متجه وحده إذا تحقق $\left|\overrightarrow{A}\right| = 1$ حيث $\left|\overrightarrow{A}\right|^2 = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A} \right\rangle$.

واتجاه الوحدة $\bar{e}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{A}$ يعطى من $\bar{e} = \dfrac{\overline{A}}{|A|}$ والمتجه $\overrightarrow{A}$ يمكن التعبير عنه بدلالة متجهات الوحدة في إتجاه محاور الإحداثيات كالآتي:

$$\overrightarrow{A} = (a, b) = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2$$



حيث

$$a = \left|\overrightarrow{A}\right| \cos\theta \,,\; b = \left|\overrightarrow{A}\right| \sin\theta \quad,\; \frac{b}{a} = \tan\theta$$

مثال (١) : أكتب الصيغة الاتجاهية لكل من المتجهات الواصلة من النقطة A إلى النقطة B وأوجد أطوالها إذا كان :

(i) $A \equiv (2,5) ; B \equiv (6,8)$

(ii) $A \equiv (-1,-8) ; B \equiv (4,4)$

(iii) $A \equiv (-11,0) ; B \equiv (13,7)$

الحل:

(i) $\overrightarrow{AB} = (6-2)\underline{e}_1 + (8-5)\underline{e}_2 = 4\,\underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$

(ii) $\overrightarrow{AB} = 5\,\underline{e}_1 + 12\,\underline{e}_2 : \left|\overrightarrow{AB}\right| = 13$

(iii) $\overrightarrow{AB} = 24\,\underline{e}_1 + 7\,\underline{e}_2 : \left|\overrightarrow{AB}\right| = 25$

مثال (٢) : أوجد $\underline{u}+\underline{v}, \underline{u}-\underline{v}, \underline{u}.\underline{v}$ والزاوية بين $\underline{u}, \underline{v}$ إذا كان :

(i) $\underline{u}=2\underline{e}_1+3\underline{e}_2 \; ; \; \underline{v}=5\underline{e}_1-\underline{e}_2$

(ii) $\underline{u}=(-5,11) \; ; \; \underline{v}=(3,-4)$

(iii) وإذا كان متجها الموضوع للنقطتين P, Q هما:

$$\vec{r}_P=2\underline{e}_1+3\underline{e}_2-3\underline{e}_3 \; , \; \vec{r}_Q=4\underline{e}_1-3\underline{e}_2+2\underline{e}_3$$

عين كل من المتجه $\overline{PQ}, \overline{QP}$، ومقدار كل منهما ومتجه الوحدة لكل منها.

الحل:

(i)
$$\underline{u}+\underline{v}=7\underline{e}_1+2\underline{e}_2$$
$$\underline{u}-\underline{v}=-3\underline{e}_1+4\underline{e}_2$$
$$\underline{u}.\underline{v}=7$$
$$\cos\theta=\frac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|\;|\underline{v}|}=\frac{7}{\sqrt{2^2+3^2}\;\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{338}}$$

(ii)
$$\underline{u}+\underline{v}=(-5+3)\underline{e}_1+(11-4)\underline{e}_2$$
$$\underline{u}+\underline{v}=-2\underline{e}_1+7\underline{e}_2$$
$$\underline{u}-\underline{v}=(-5-3)\underline{e}_1+(11+4)\underline{e}_2$$
$$=-8\underline{e}_1+15\underline{e}_2$$
$$\underline{u}.\underline{v}=(-5)(3)+(11)(-4)=-59$$
$$\cos\theta=\frac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|\;|\underline{v}|}=-\frac{59}{\sqrt{25+121}\;\sqrt{9+16}}-\frac{59}{5\sqrt{146}}$$

(iii) الحل متروك للطالب كتمرين.

مثال (٣): عين قيمة λ بحيث يتعامد المتجهان

$$\overline{A}=2\underline{e}_1+\lambda\;\underline{e}_2+\underline{e}_3 \; , \; \overline{B}=4\underline{e}_1-2\underline{e}_2-2\underline{e}_3$$

الحل: متروك للطالب كتمرين.

مثال (٤): اثبت أن $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1 = 0 \;,\; \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 = 1$

الحل:

$\because$ $\underline{e}_2 \,, \underline{e}_1$ هما متجهات الوحدة في اتجاه محاور الإحداثيات.

فهما متعامدان أي أن $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ وعليه فإن حاصل ضربهما القياسي لابد أن يكـون مساويا للصفر أي أن

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1 = 0$$

أيضا:

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = |\underline{e}_1||\underline{e}_1| \cos\theta \,, \; (\theta = 0)$$
$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

بالمثل:

$$\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 = 1$$

مسقط متجه على متجه أخر: **Projection**

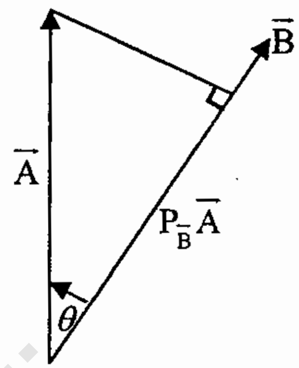
تعرف: نعرف مسقط متجه $\overline{A}$ على متجه $\overline{B}$ بالأتي :

$\left\langle \overline{A}, \overline{B} \right\rangle / |\overline{B}|$ ويرمز له بالرمز $P_{\overline{B}} \overline{A}$ أو في الصورة

$$P_{\overline{B}} \overline{A} = \frac{\left\langle \overline{A}, \overline{B} \right\rangle}{\left\langle \overline{B}, \overline{B} \right\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

وكذلك مسقط $\overline{B}$ على $\overline{A}$ بالأتي:

$$P_{\overline{A}} \overline{B} = \frac{\left\langle \overline{A}, \overline{B} \right\rangle}{\left\langle \overline{A}, \overline{A} \right\rangle^{\frac{1}{2}}}$$



أو بأسلوب أخر $P_{\overline{B}}\overline{A}=\langle \overline{A}, e_{\overline{B}}\rangle$ ، $P_{\overline{A}}\overline{B}=\langle \overline{B}, e_{\overline{A}}\rangle$ حيث $e_{\overline{B}}, e_{\overline{A}}$ وحدات المتجهات في اتجاه $\overline{B}, \overline{A}$ على الترتيب.

أو

$$P_{\overline{B}}\overline{A}=|\overline{A}|\cos\theta \ , P_{\overline{A}}\overline{B}=|\overline{B}|\cos\theta$$

حيث θ الزاوية بين المتجهين $\overline{B}, \overline{A}$.

كثير من الخواص المفيدة والممتعة للمتجهات يمكن تجميعها ووصفها كالآتي :ـ

ولذلك نفرض أن

$$V_2=\{x\,\underline{e}_1+y\,\underline{e}_2 , x, y\in R\}$$

هي فئة كل المتجهات التي تقع في المستوى $R\times R$.

المستوى V_2 الذي له الخواص الآتية:ـ

(i) $\underline{u}+\underline{v}\in V_2 , \forall\ \underline{u}, \underline{v}\in V_2$ (الجمع عملية ثنائية)

(ii) $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}, (\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$ (الجمع دامج)

(iii) يوجد متجه $\underline{0}=(0,0)$ يحقق $\underline{u}+0=\underline{u}$ (العنصر المحايد)

(iv) $a\,\underline{u}\in V_2 , \forall\ a\in R$

(v) $\underline{u}+(-\underline{u})=\underline{u}-\underline{u}=\underline{0}$ (المعكوس)

يسمى فراغ متجه ذو البعدين ويرمز له بالرمز $E^2 = R^2$
الفئة $\{\underline{e}_1 , \underline{e}_2\}$ المكونة من متجهات الوحدة $\underline{e}_1 , \underline{e}_2$ والمتعامدة أي التي تحقق الشرط $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ حيث

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad , i, j = 1, 2$$

تسمى أساس المستوى $E^2 = V_2 = R^2$، بمعنى أن أي متجه $\underline{u}$ ينتمي للمستوى E^2 يمكن كتابته في صورة تركيبة خطية من المتجهات $\underline{e}_1 , \underline{e}_2$ أي أن

$$\underline{u} = x_1 \, \underline{e}_1 + x_2 \, \underline{e}_2$$

وتسمى x_1 , x_2 مركبات المتجه $\underline{u}$ بالنسبة لمحاور الإحداثيات المتعامدة.

تمارين

١ـ أوجد متجه الوحدة الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور x الزوايا الآتية:

(i) 30° **(ii)** 150° **(iii)** -25°

٢ـ أوجد القيمة العددية لطول ومقدار الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور x في الحالات الآتية:ـ

(i) $\sqrt{3}\,\underline{e}_1 + \underline{e}_2$ **(ii)** $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$

(iii) $3\,\underline{e}_1 + 4\,\underline{e}_2$ **(iv)** $-5\,\underline{e}_1 - 12\,\underline{e}_2$

٣ـ أوجد الزاوية بين كل متجهين من المتجهات الآتية:

(i) $4\,\underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2 \,;\, 7\,\underline{e}_1$,

(ii) $3\,\underline{e}_1 + 4\,\underline{e}_2 \,;\, 12\,\underline{e}_1 + 5\,\underline{e}_2$,

(iii) $7\,\underline{e}_1 + 5\,\underline{e}_2 \,;\, 5\,\underline{e}_1 - 4\,\underline{e}_2$,

(iv) $3\,\underline{e}_1 - 2\,\underline{e}_2 \,;\, 5\,\underline{e}_1 + 3\,\underline{e}_2$

٤- أثبت أنه لأي متجهات $\underline{w}, \underline{v}, \underline{u}$

(خاصية التوزيع) $\underline{u}.(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}.\underline{v}+\underline{u}.\underline{w}$

٥- أوجد شرط توازي متجهين معلومين ثم بين ما إذا كانت أزواج المتجهات الآتية متوازية أو متعامدة:

(i) $3\underline{e}_1 - 4\underline{e}_2 ; 6\underline{e}_1 + 8\underline{e}_2$,

(ii) $5\underline{e}_1 + 7\underline{e}_2 ; -2.5\underline{e}_1 - 3.5\underline{e}_2$,

(iii) $2\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2 ; 15\underline{e}_1 - 6\underline{e}_2$,

(iv) $3\underline{e}_1 - 6\underline{e}_2 ; 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2$

٦- إذا كان $\underline{v}, \underline{u}$ متجهات غير صفرية (أي أطوالها لا تساوي الصفر) فأثبت أن

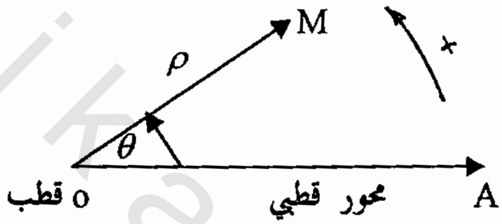
$$\left[\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|^2} - \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right].\left[\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|^2} - \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right] = \frac{(\underline{u}-\underline{v}).(\underline{u}-\underline{v})}{|\underline{u}|^2 . |\underline{v}|^2}$$

٧- إذا كان $\underline{u} = \underline{A} + \underline{v}$ حيث $\underline{A}$ متجه يوازي متجها ما $\underline{v}, \underline{B}$ عمودي على $\underline{B}$ فأثبت أن :

$$\underline{A} = (\underline{u}.\underline{B})\underline{B}/|\underline{B}|^2 , \underline{v} = \underline{u} - \underline{A}$$

٣ـ الإحداثيات القطبية : Polar Coardinates

تتحدد مجموعة الإحداثيات القطبية بإعطاء نقطة ما o تسمى بالقطب وشعاع (متجه) $\overline{oA}$ يسمى بالمحور القطبي ونعتبر عادة الدورانات موجبة إذا كانت تتم في اتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة **anti clock wise**



نفرض نقطة اختيارية M حيث $\rho = |\overline{oM}|$ و θ , هي الزاوية $\overline{AoM}$ ويسمى العددان ρ,θ بالإحداثيات القطبية للنقطة M، ρ يسمى الإحداثي الأول أو البعد القطبي والعدد θ بالإحداثي الثاني أو الزاوية القطبية.

من ضمن قيم الزاوية θ نميز قيمة معينة تحقق المتباينة

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

وتسمى بالقيمة الرئيسية ويمكن القول أنها تؤخذ بمثابة الزاوية القطبية الرئيسية التي يجب أن يدور بها الشعاع $\overline{oA}$ حتى ينطبق على الشعاع $\overline{oM}$ محدثا بذلك دورانا لا يزيد عن 180° في أي من الناحيتين. وفي الحالة الخاصة عندما يكون الشعاع $\overline{oM}$ متجها من الناحية المضادة تماما للشعاع $\overline{oA}$ ، يكون هناك دورانان محتملان بزاوية قدرها 180° وعندئذ يختار الدوران الموجب أي تؤخذ $\theta = \pi$ بمثابة القيمة الرئيسية للزاوية القطبية.

ملاحظة:

١) إذا انطبقت النقطة M على القطب فإن $\rho = 0$ ولا توجد قيمة محددة للزاوية θ.

٢) تحدد (ρ, θ) نقطة وحيدة في المستوى ولكن العكس غير صحيح بمعنى إذا أخذنا النقطة التي إحداثياتها الكرتيزية (0, 5) فإنه يمكن التعبير عنها بعدد لانهائي من الإحداثيات القطبية.

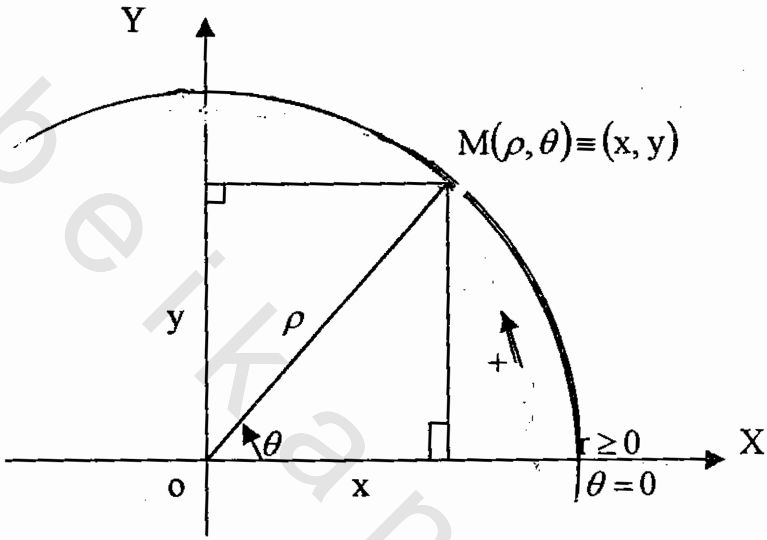
$$\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(5, \frac{-3\pi}{2}\right), \left(5, \frac{5\pi}{2}\right)$$

وبالاستعانة $-\pi < \theta \leq \pi$ يمكن تجنب عدم التحديد هنا.

٣. ١ العلاقة بين مجموعتي الإحداثيات الكرتيزية والقطبية:

في بعض الحالات يلزم استخدام مجموعتي الإحداثيات الكرتيزية والقطبية معا، أي أنه يلزم التحويل من الإحداثيات الكرتيزية إلى القطبية والعكس.

نعتبر الحالة الخاصة التي ينطبق فيها القطب (في الإحداثيات القطبية) على نقطة الأصل في الإحداثيات الكرتيزية والخط القطبي (الإبتدائي) على الاتجاه الموجب لمحور X



ومن هندسة الشكل نجد أن

$$x=\rho\ \cos\theta\ , y=\rho\sin\theta \qquad (1)$$

أي أن

$$(x, y) \xrightarrow{\text{تناظر احادي}} (\rho,\theta)$$

ويمكن إيجاد التحويل العكسي

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ \ ,\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\arctan\frac{y}{x} \qquad (2)$$

أي أن

$$(\rho,\theta)\longrightarrow(x, y)$$

<u>ملاحظة:</u> العلاقة $\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ لا تحدد القيمة الرئيسية للزاوية القطبية تحديدا تاما، فلابد من معرفة ما إذا كانت θ موجبة أم سالبة.

مثال (١) : أوجد الإحداثيات القطبية للنقطة (-2,2).

الحل: بالتعويض في (2) نحصل على

$$\rho = 2\sqrt{2}\,, \tan\theta = -1$$

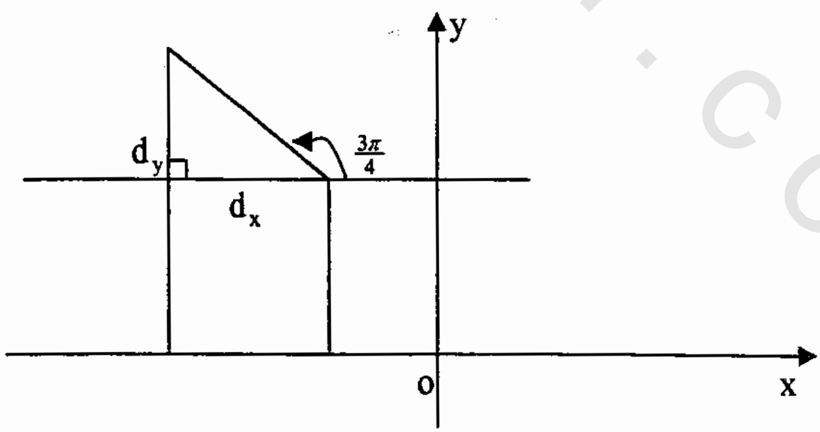
وبالتالي فإن $\theta = \frac{3\pi}{4}$ أو $\theta = -\frac{\pi}{4}$ وحيث أن النقطة تقع في الربع الثاني، فيجب أن نختار $\theta = \frac{3\pi}{4}$ بمثابة القيمة الرئيسية للزاوية القطبية أي أن

$$(x,y) = (-2,2) \longleftrightarrow (\rho,\theta) = \left(2\sqrt{2}\,, \frac{3\pi}{4}\right)$$

مثال (٢) : عين مسقطي القطعة المستقيمة التي طولها $d = 2\sqrt{2}$ على محوري الإحداثيات إذا علم أن زاويتها القطبية $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

الحل: المسقط الأفقي $d_x = 2\sqrt{2}\cos\theta$ ، المسقط الرأسي $d_y = 2\sqrt{2}\sin\theta$

ومنها يكون $x = -2, y = 2$.



مثال (٣) : عين الزاوية القطبية للقطع المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ حيث $M_1=\left(5,\sqrt{3}\right), M_2\left(6,2\sqrt{3}\right)$.

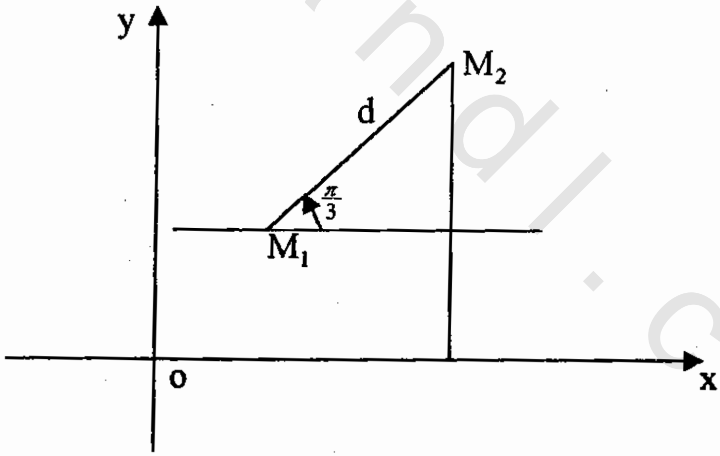
الحل:

$$d=M_1\,M_2=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=2$$
$$x_2-x_1=1, y_2-y_1=\sqrt{3}$$

فإن

$$\cos\theta=\frac{x_2-x_1}{d}=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{y_2-y_1}{d}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعليه فإن $\tan\theta=\sqrt{3}$ أي أن $\theta=\frac{\pi}{3}$.



مثال (٤) : وضح المعاني الهندسية

(i) $\rho=\text{const}$

(ii) $\theta=\text{const}$

في الإحداثيات القطبية.

الحل: (i) $\rho = \text{const} = C_1 > 0$ تعني أن $\sqrt{x^2+y^2} = C_1$ أو

$$x^2 + y^2 = C_1^2$$

وهي معادلة دائرة مركزها القطب (نقطة الأصل) ونصف قطرها $\rho = C_1$.

(ii) $\theta = \text{const} = C_2 \Rightarrow \tan\theta = \text{const.} = C_3$

أو $\frac{y}{x} = C_3$ أو ما يكافئ $y = C_3\, x$.

وهي معادلة خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (القطب) ميله $C_3 = \tan\theta$.

٢.٣ المتباينات في نظام الإحداثيات القطبية:

من مثال (٤) يتضح أن المعادلات التي لها الشكل $\rho = C_1$, $\theta = C_2$ إذا ما اتخذتا كزوج من المعادلات فإنها تعرف مناطق أو قطع مستقيمة أو أشعة في المستوى.

مثال (٥): ارسم فئة النقاط التي إحداثياتها القطبية تحقق الشروط الآتية:

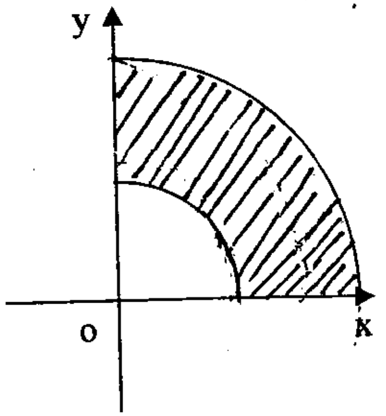
(a) $1 \le \rho \le 2$ and $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(b) $-3 \le \rho \le 2$ and $\theta = \frac{\pi}{4}$

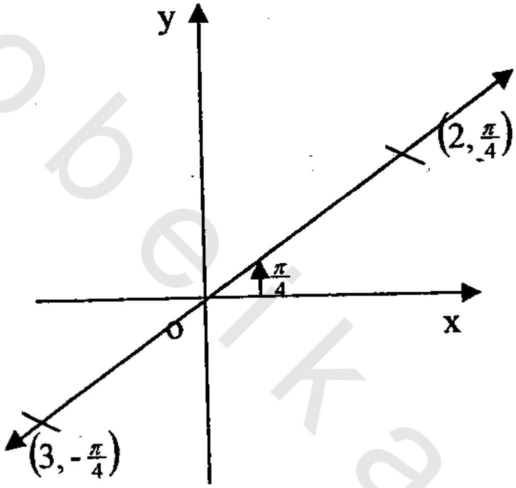
(c) $\rho \le 0$ and $\theta = \frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$ (لا يوجد قيد على r)

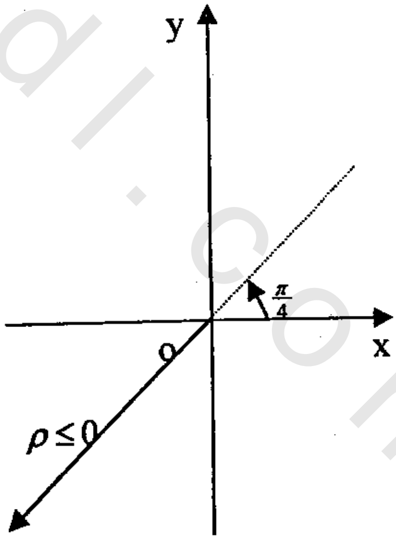
الحل: الأشكال موضحة



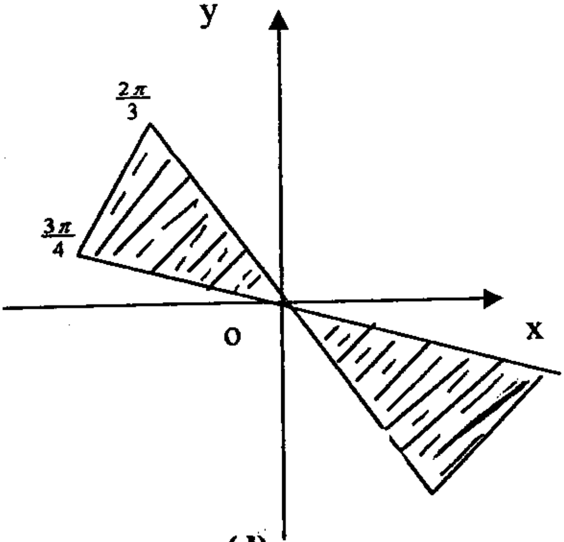
(a)



(b)



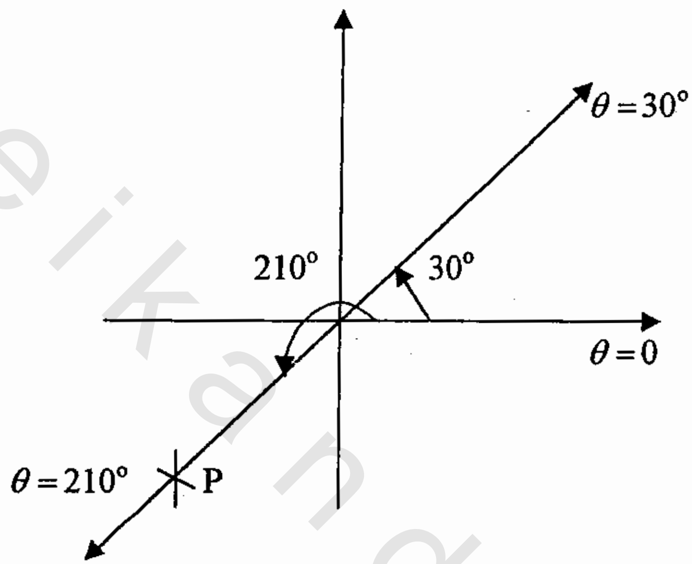
(c)



(d)

هنا نوضح كيف يمكن تحديد ρ السالبة من خلال الأمثلة:

مثال (٦): إتحاد الشعاع $\theta = 30^\circ$ والشعاع $\theta = 210^\circ$ يعطي الخط المستقيم المـــار بالقطب.



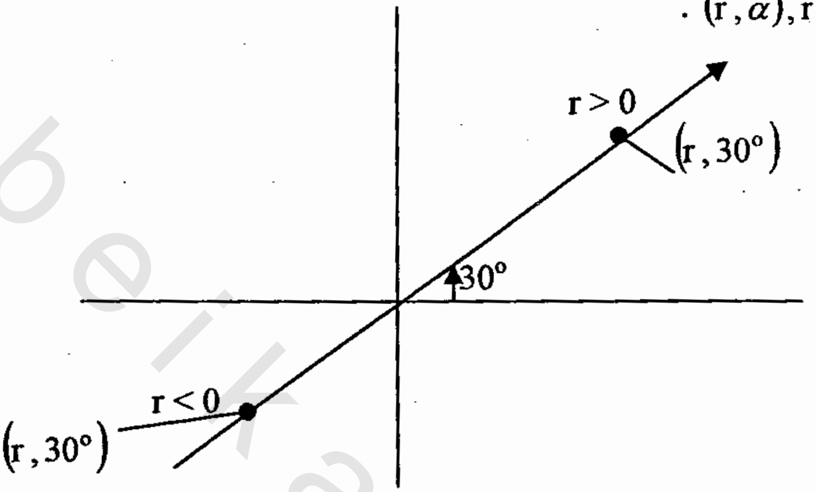
النقطة $P(2, 210^\circ)$ على الشعاع $\theta = 210^\circ$ لها الإحداثيات القطبيـــة $(2, 210)$ يمكن الوصول إليها عن طريق الدوران بزاوية 210° ضد عقارب الساعة إبتداء مـــن الخط القطبي ولتحديد $\rho = 2$.

أيضا يمكن الوصول إليها بالدوران بزاوية 30° ضد عقارب الساعة إبتداء من الخـــط الإبتدائي وتحدد $\rho = 2$ بالرجوع إلى الخلف عكس إتجاه الشعاع وتحدد $\rho = 2$.

عندما تكون ا لزاوية بين شعاعين 180° ، الأشعة تكون خط مستقيم ونقول أن كـــل شعاع في إتجاه ضد الأخر.

إذن النقاط التي على الشعاع $\theta = \alpha$ لها الإحداثيات القطبية $(r, \alpha), r \geq 0$.

والنقاط التي على الشعاع المضاد $\theta=\alpha+180^\circ$ لهــا الإحداثيــات القطبيــة $(r,\alpha), r\le 0$.



الشعاع $\theta=3^\circ$ والشعاع المضاد له.

<u>مثال (٧):</u> أوجد معادلة المنحنى $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=3$ في الإحداثيات الكرتيزية.

<u>الحل:</u> باستخدام المتطابقة

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

والتحويل من (ρ,θ) إلى (x,y) نحصل على $x+\sqrt{3}\,y=6$

وهي معادلة خط مستقيم ميله $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ويقطع من محور الصادات مقدار $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

تمارين

(١) أوجد الإحداثيات القطبية (ρ,θ) للنقاط (x,y) حيث

$$(x, y) : (2,0), (2,0), (1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3}), (-1,1)$$

(٢) أوجد الإحداثيات الكريتيزية (x,y) للنقاط (ρ,θ) حيث

$$(\rho,\theta): \left(2, \frac{\pi}{3}\right), \left(-3, \frac{\pi}{3}\right), \left(-5, \frac{2\pi}{3}\right), \left(-4, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$$

(٣) حدد وأرسم المناطق التي تحقق إحداثياها القطبية الشروط في الحالات الآتية:ـــ

(1) $0 \le r \le 2,$ **(2)** $\theta = \frac{\pi}{2}\ ,\ r \ge 0$

(3) $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}\ , 0 \le r \le 1$ **(4)** $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ , 1 \le |r| \le 2$

(5) $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\ , -1 \le r \le 1$ **(6)** $0 \le \theta \le \pi\ ,\ r = -1$

(٤) حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكرتيزية ومن ثم إرسمها

(1) $r^2 + 2r^2 \cos\theta\ \sin\theta = 1$ **(2)** $r + \sin\theta = 2\cos\theta$

(3) $r = 4\tan\theta\ \sec\theta$ **(4)** $r\sin\theta = e^{r\cos\theta}$

(5) $r\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{2}$ **(6)** $r\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 0$

(7) $r\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 4$

(٥) أوجد صيغة للمســـافة بـــين النقطتـــين $P_2(\rho_2,\theta_2), P_1(\rho_1,\theta_1)$ بدلالـــة ρ_1, ρ_2 .

٤. تحليل المحل الهندسي القطبي Analysis of a polar locus

توجد طريقة واحدة لدراسة المحل الهندسي لمعادلة قطبية وهي تحويلها إلى إحداثيات كرتيزية. ولكن هذه الطريقة لا تكون عملية في بعض الأحيان ولذلك تستخدم بعض المفاهيم الهندسية مثل نقط التقاطع والتماثل.

نقط التقاطع: Intercept points

تعرف نقط التقاطع لمحل هندسي مع محاور الإحداثيات بأنها كل النقط (r,θ) حيث $\theta = k.\dfrac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ التي تحقق معادلة المحل الهندسي (المقصود بمحاور الإحداثيات هي الخط القطبي والخط العمودي عليه عند القطب).

التماثل: Symmetry

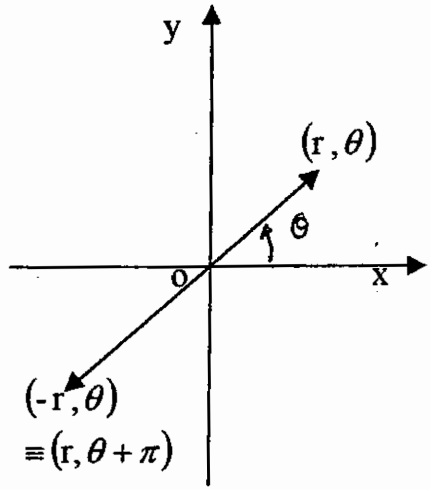
إذا كانت المعادلة $f(r,\theta)$ لا تتغير عندما :ـــ

(أ) نضع r - مكان r أو نضع θ- مكان θ فإن المحل الهندسي يكون متماثل بالنسبة للقطب.

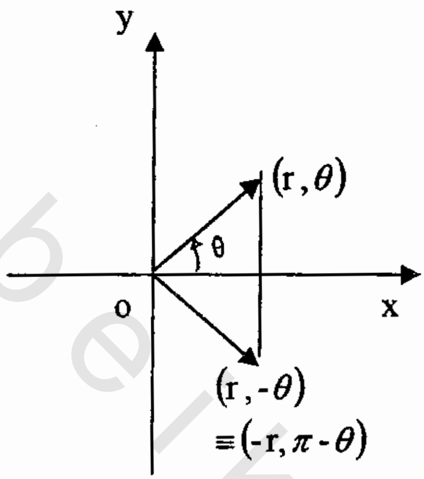
(أأ) نضع θ- مكان θ أو r– مكان r و π-θ مكان θ فإن المحل الهندسي يكون متماثل بالنسبة للخط القطبي.

(أأأ) نضع π-θ مكان θ أو r– مكان r و θ- مكان θ فإن المحل الهندسي يكون متماثل بالنسبة للخط العمودي على الخط القطبي عند القطب.

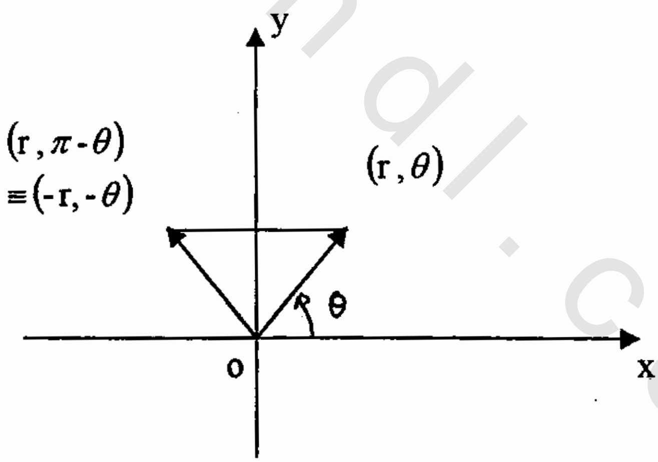
(٧) نضع $\dfrac{\pi}{2}$-θ مكان θ فإن المحل الهندسي يكون متماثل بالنسبة للخط المستقيم $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ أو $y = x$.



تماثل حول القطب (نقطة ا لأصل)



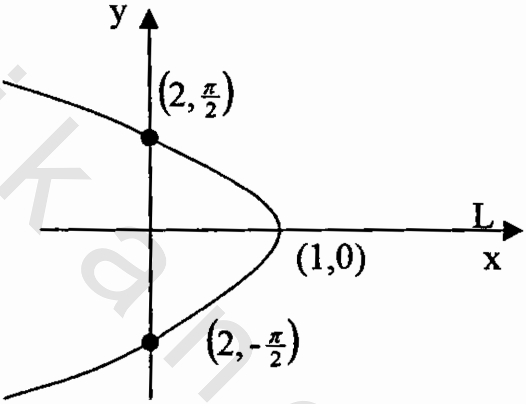
تماثل حول الخط الأبتدائي (محور x)



تماثل حول محور y

<u>مثال (١):</u> المحل الهندسي $\{(r,\theta) : r=2/(1+\cos\theta)\}$ لـــه نقـــط تقـــاطع $(1,0), \left(2,\frac{\pi}{2}\right), \left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$ مع الخط القطبي والخط العمودي.

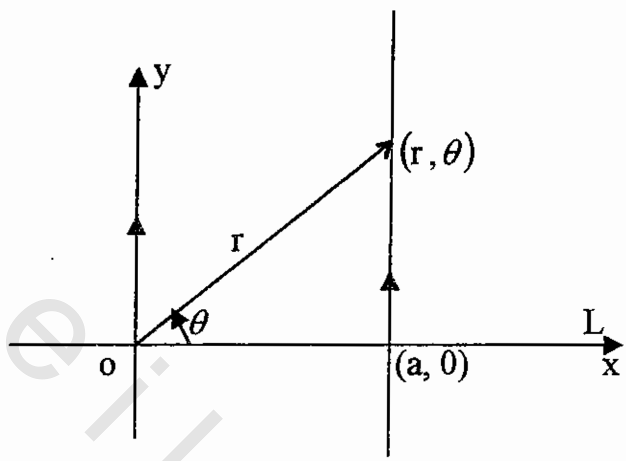
كذلك بما أن $\cos\theta=\cos(-\theta)$ فإن المحل الهندسي متماثل بالنسبة للخط القطبي



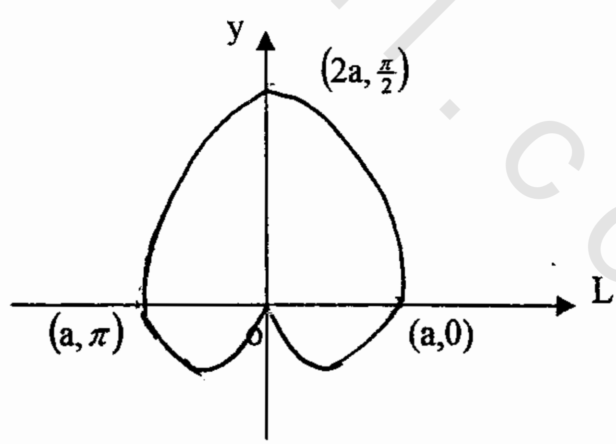
حيث $\theta=0$ فإن $r=1$ (أصغر قيمة) وعندما $\theta=\pi$ لا توجد قيمة حقيقية للمتغير r.

<u>مثال (٢):</u> المحل الهندسي $\{(r,\theta): r\cos\theta=a\}$ له نقطة تقاطع $(a, 0)$ مع الخـــط القطبي ومتماثل حول الخط القطبي (لماذا)؟

ويمكن أن ترى أن المحل الهندسي هو خط مستقيم يوازي الخط العمودي على الخـــط القطبي عند القطب ويبعد عنه مسافة a . وكذلـــك نلاحـــظ أن $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ فـــإن $r \longrightarrow \infty$.



مثال (٣): المحل الهندسي $\{(r,\theta): r = a\,(1+\sin\theta), a \neq 0\}$ له نقطة تقاطع مـــع محاور الإحداثيات وهي $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right), (a,\pi), \left(2a,\frac{\pi}{2}\right), (a,0)$ ومتماثل حول المحور العمودي وقيم r تعطى من $|r| \leq 2\,|a|$.



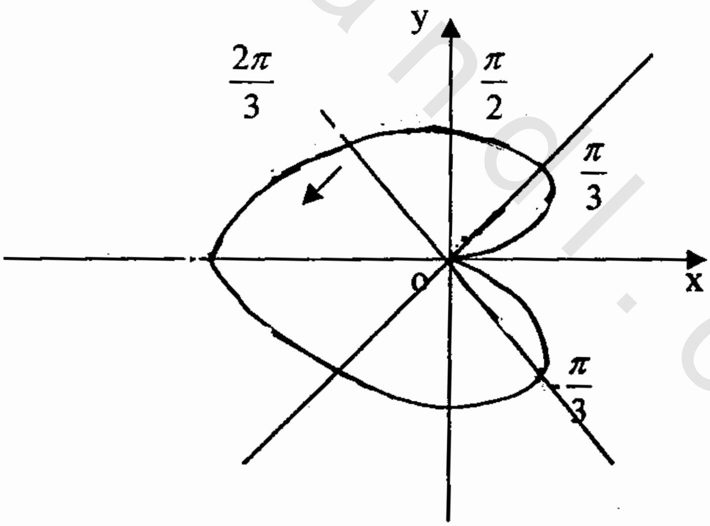
يسمى هذا المنحنى بمنحنى الكارديوئيد **Cardioid** ورأسه على المحور العمودي.

مثال (٤): ارسم منحنى الكارديوئيد $r = a(1 - \cos\theta)$.

الحل: باستخدام كل ما سبق عرضه

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{a}{3}$	a	$\frac{3a}{2}$	$2a$

يمكننا أن نرى أن المنحنى متماثل حول محور x (الخط القطبي).



السهم يشير إلى زيادة r بزيادة θ وهذا واضح لأن $\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$,, $0 < \theta < \pi$

أي أن $\frac{dr}{d\theta} > 0$.

مثال (٥): ارسم منحنى الدالة $r = \sin 2\theta$.

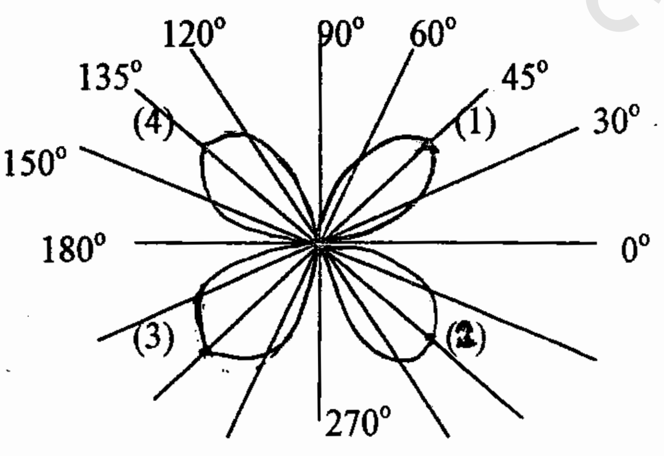
الحل: نأخذ قيم للزاوية 2θ من 0 إلى 2π ونضعها على الورقة كالآتي:

(1) (2)

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
2θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$r = \sin 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

(3) (4)

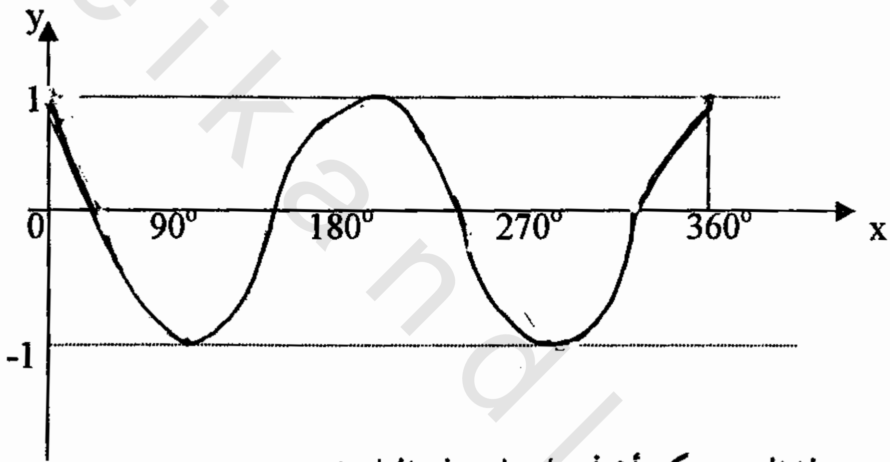
θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
2θ	360°	420°	450°	480°	540°	600°	630°	660°	720°
$r = \sin 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



$r = \sin 2\theta$

<u>مثال (٦):</u> ارسم الدالة $r = \cos 2\theta$.

<u>الحل:</u> يمكن استخدام نفس الأسلوب السابق أو استبدال θ بالزاوية $\theta + \frac{\pi}{4}$ ولكن نفرض هنا أسلوب تزايد **increase** وتناقص **decrease** الدالة $\cos 2\theta$ كما في الشكل:

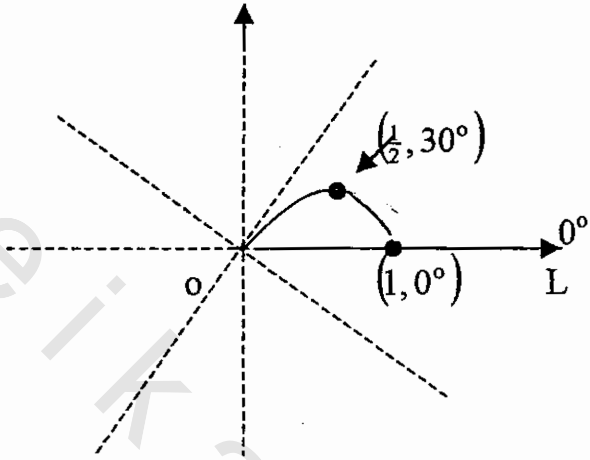


ومن هذا المنحنى يمكن أن نحصل على هذه المعلومات

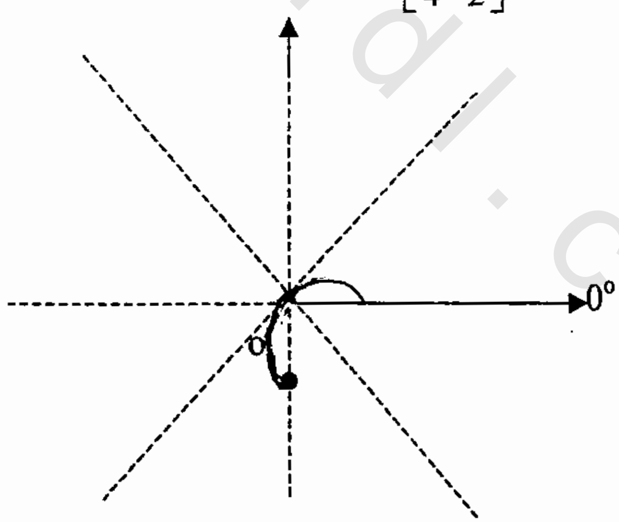
Interval for $m^2(\theta)$	0°-45°	45°-90°	90°-135°	135°-180°
Behavior of r	Decrease from 1 to 0	Decrease from 0 to –1	Increase from –1 to 0	Increase from 0 to 1

Interval for $m^2(\theta)$	180°-225°	225°-270°	270°-315°	315°-360°
Behavior of r	Decrease from 1 to 0	Decrease from 0 to –1	Increase from –1 to 0	Increase from 0 to 1

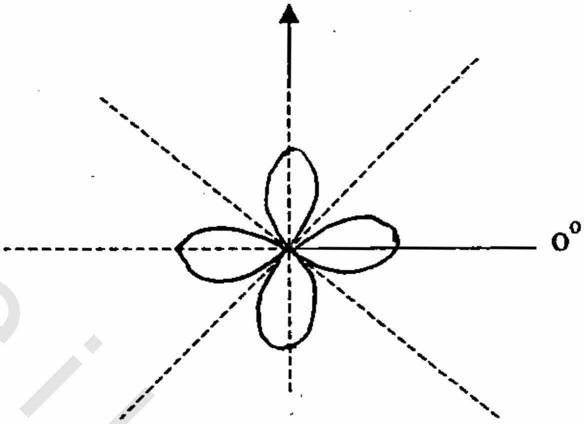
والآن نستخدم هذه المعلومات بالنسبة للمنحنى $r = \cos 2\theta$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.



ثم نستمر على الفترة $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

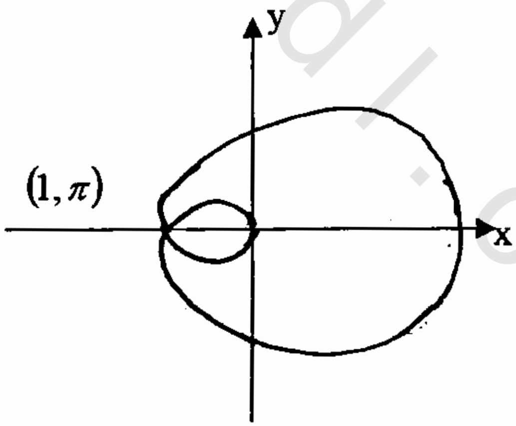


ثم نكرر هذه العملية يمكنك الحصول على المنحنى الذي يسمى الوردة ذات الأربـــع ورقات.



مثال (٧): ارسم المنحنى $r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}$.

الحل: بنفس الأسلوب السابق نرى أن



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيات:

إذا كان لدينا منحنيان $r_1 = f_1(\theta), r_2 = f_2(\theta)$ والمطلوب إيجاد (r, θ) التي تحقق المعادلات في وقت واحد أي إيجاد النقاط الهندسية المشتركة بين المنحنيات

نقوم بحل المعادلتين حيث $r_1 = r_2$ ومنها نوجد θ المناظرة كما يتضح من المثال التالي:—

مثال (٨): أوجد نقاط تقاطع المنحنيات

$$r^2 = 4a^2 \cos\theta \ , \ r = a(1 - \cos\theta)$$

الحل: بالتعويض من المعادلة الأولى في الثانية نحصل على

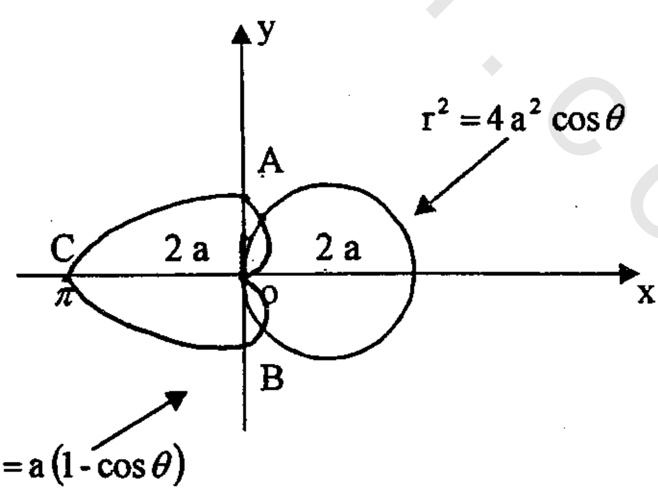
$$r^2 + 4ar - 4a^2 = 0$$

أي

$$r = -2a \pm 2a\sqrt{2}$$

النقطة $-2a - 2a\sqrt{2}$ مرفوضة لأن قيمتها الموجبة كبيرة. ونأخذ $r_1 = -2a + 2a\sqrt{2}$ ولكن بالرسم توجد نقطتين يتقاطع فيهما المنحنيات هما

$$(0,0), C(2a, \pi)$$
$$A(r_1, \theta_1), B(r_1, -\theta_1), \cos\theta_1 = 3 - 2\sqrt{2}$$



تمارين

(١) ارسم المنحنيات المناظرة للمعادلات القطبية الآتية:

1 ـ الوردة ذات الثلاث ورقات $r = \sin 3\theta$

2 ـ الوردة ذات الثلاث ورقات $r = \cos 3\theta$

3 ـ الكارديوئيد $r = 2(1 + \sin\theta)$

4 ـ الكارديوئيد $r = 3(1 - \cos\theta)$

5 ـ الليماسون $r = 4 - 2\sin\theta$

6 ـ الليمنسكات $r^2 = 2\cos\theta$

7 ـ الليمنسكات $r^2 = \cos 2\theta$

(٢) أوجد نقاط تقاطع أزواج المنحنيات الآتية:

(1) $r = a(1 + \cos\theta), r = a(1 - \sin\theta)$

(2) $r = 1 \, , \; r = 2\sin 2\theta$

(3) $r = a\cos 2a \, , r = a\sin 2\theta \; , \; a > 0$

ووضح ذلك بالرسم.