

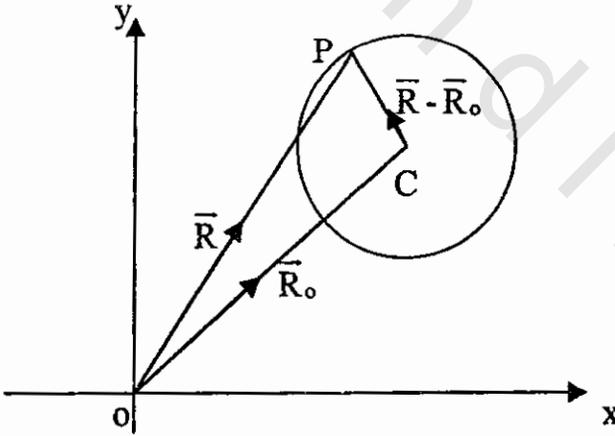
## الباب الثاني معادلات الدوائر

الدائرة هي فئة النقاط الهندسية في المستوى التي تبعد مسافة ثابتة عن نقطة ثابتة في المستوى.

النقطة الثابتة تسمى المركز **Center** والمسافة الثابتة تسمى نصف القطر **radius**. ومن هذا التعريف يمكن استنباط العلاقة (المعادلة) التي تربط نقاط الدائرة أي معادلة الدائرة في أشكال مختلفة كالآتي:-

### المعادلة الإتجاهية للدائرة Vector equation

نعتبر دائرة مركزها  $C$  له متجه الموضع  $\vec{R}_0 = (x_0, y_0)$  ونصف قطرها  $a$  نقطة عامة  $P$  نقطة لها متجه الموضع  $\vec{R} = (x, y)$  على محيطها



فيكون المتجه  $\vec{R} - \vec{R}_0$  على امتداد نصف القطر أي أن

$$\langle \vec{R} - \vec{R}_0, \vec{R} - \vec{R}_0 \rangle = a^2 \quad (1)$$

المعادلة (1) تسمى المعادلة الإتجاهية للدائرة أو

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + a \vec{e}$$

حيث  $e$  متجه الوحدة في اتجاه نصف القطر.  
من (1) نجد أن (خواص الضرب القياسي).

$$\langle R, R \rangle - 2\langle R, R_0 \rangle + \langle R_0, R_0 \rangle = a^2$$

أو

$$\overline{R}^2 - 2\langle \overline{R}, \overline{R}_0 \rangle + R_0^2 = a^2$$

أو

$$\overline{R}^2 - 2\langle \overline{R}, \overline{R}_0 \rangle = a^2 - R_0^2 \quad (2)$$

بالعويض عن  $\overline{R} = (x, y), \overline{R}_0 = (x_0, y_0)$  نجد أن

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = a^2 - x_0^2 - y_0^2$$

أو

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + C = 0 \quad (3)$$

حيث  $a^2 = x_0^2 + y_0^2 - C$

ياكتمال المربع في (3) نحصل على

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \quad (4)$$

وهي المعادلة الكرتيزية للدائرة التي مركزها  $(x_0, y_0)$  ونصف قطرها  $a$  ومن المعادلة

(3) يمكننا تعميم معادلة الدائرة لتأخذ شكل معادلة من الدرجة الثانية على الصورة

$$x^2 + y^2 + 2xx_0 + 2yy_0 + C = 0 \quad (5)$$

فهي تمثل دائرة مركزها  $(-x_0, -y_0)$

ونصف قطرها  $a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - C}, x_0^2 + y_0^2 > C$

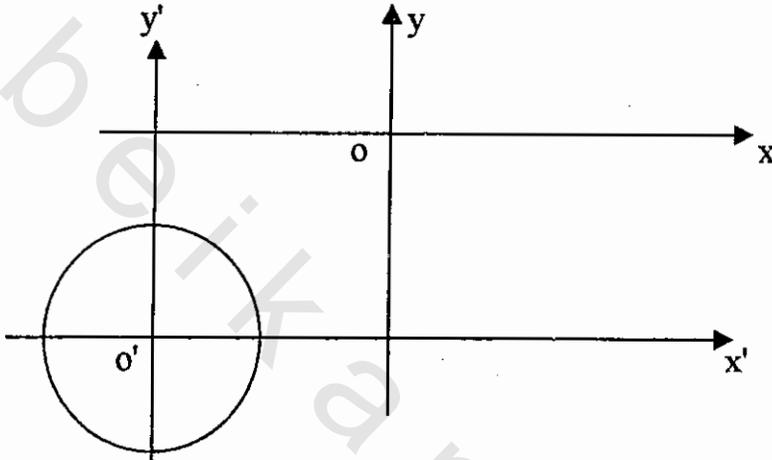
المعادلة (5) هي صورة للمعادلة (4) وذلك بنقل المحاور إلى النقطة  $O'(-x_0, -y_0)$

(نقطة أصل الإحداثيات الجديدة) أي أن

$$x' = x + x_0, y' = y + y_0$$

تتحول المعادلة (5) إلى

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$



وعموما نقول أن الدائرة مركزها نقطة أصل الإحداثيات إذا حققت

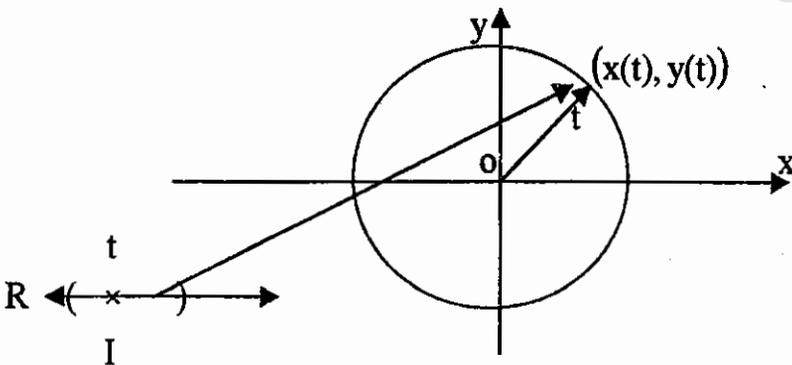
$$x^2 + y^2 = a^2$$

### المعادلات البارامتريّة للدائرة Parametric equations

نعتبر الدائرة

$$x^2 + y^2 = a^2$$

(6)



من هندسة الشكل نجد أن

$$y = a \sin t, x = a \cos t, 0 \leq t < 2\pi \quad (7)$$

المعادلات (7) تحقق (6) وتسمى المعادلات (7) المعادلات البارامترية للدائرة وأن أي نقطة على الدائرة لها متجه الموضع

$$\bar{R}(t) = (a \cos t, a \sin t)$$

وإذا كانت الدائرة لها الموضع (4) فإن المعادلات البارامترية لها هي

$$x = x_0 + a \cos t, y = y_0 + a \sin t, 0 \leq t < 2\pi$$

الشروط العامة لتحديد دائرة في المستوى:-

المعادلة (4) أو (5) تحتوي على ثلاثة بارامترات  $a, x_0, y_0$  ولتحديد دائرة يلزم معرفة الثلاث بارامترات هذه ولذلك نحتاج ثلاث شروط مثلاً، نصف القطر وإحداثيات المركز أو ثلاث نقط على محيطها وهكذا وبالتعويض في المعادلة العامة للدائرة

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + C = 0 \quad (8)$$

نحصل على ثلاث معادلات في ثلاث مجاهيل نقوم بحلها بأي طريقة جبرية (طريقة كرامر أو الحذف لجاوس).

مثال: عين معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث

$$(1, 5), (-2, 3), (2, -1)$$

الحل: بالتعويض بالنقاط الثلاث في المعادلة (8) نحصل على

$$2f + 10y + C = -26$$

$$-4f + 6y + C = -13$$

$$4f - 2y + C = -5$$

$$.f = -\frac{9}{10}, g = -\frac{19}{10}, C = -\frac{26}{5} \text{ وحلها هو}$$

وتصبح الدائرة المطلوبة في الصورة

$$x^2 + y^2 - \frac{9}{5}x - \frac{19}{5}y - \frac{16}{5} = 0$$

وعموما يمكن إعطاء النظرية الآتية:—

نظرية (١): الدائرة التي تمر بالنقاط  $(x_i, y_i), i=1, 2, 3$  غير الواقعة على إستقامة

واحدة تعطى من

$$(x^2 + y^2) - \frac{\Delta_1}{\Delta}x + \frac{\Delta_2}{\Delta}y - \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0$$

حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} L_1 & y_1 & 1 \\ L_2 & y_2 & 1 \\ L_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & x_1 & 1 \\ L_2 & x_2 & 1 \\ L_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} L_1 & x_1 & y_1 \\ L_2 & x_2 & y_2 \\ L_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

حيث  $L_i = x_i^2 + y_i^2, i=1, 2, 3$

البرهان: بالتعويض بالنقاط الثلاث في المعادلة العامة للدائرة نحصل على ثلاث معادلات

في ثلاث مجاهيل نقوم بحلها بطريقة كرامر لتعيين المجاهيل  $f, y, C$ .

مثال: عين معادلة الدائرة التي تمر بالنقط

$$(1, -2), (5, 4), (10, 5)$$

الحل: من النظرية السابقة وحساب  $\Delta, \Delta_i$  يكون

$$\Delta = -26, \Delta_1 = -468, \Delta_2 = -156, \Delta_3 = 650$$

إذن معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0$$

أو بإكمال المربع

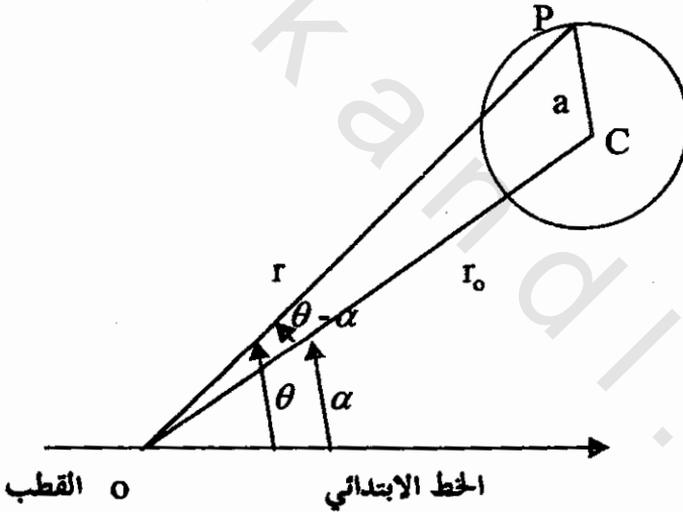
$$(x-9)^2 + (y+3)^2 = 65$$

وهي دائرة مركزها  $C(9, -3)$  ونصف قطرها  $a = \sqrt{65}$

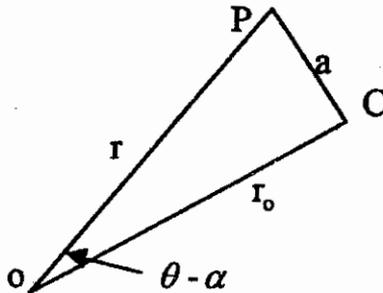
معادلة الدائرة في الصورة القطبية Polar equation

نفرض أن لدينا دائرة مركزها  $C$  له الإحداثيات القطبية  $(r_0, \alpha)$  ونصف

قطرها  $a$ ، نأخذ نقطة عامة  $(r, \theta)$  على محيط الدائرة ومن الشكل



من هندسة الشكل يكون

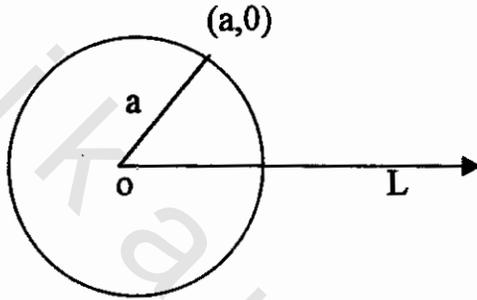


$$a^2 = r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos(\theta - \alpha) \quad (1)$$

حالات خاصة: بأخذ قيم خاصة للمقادير  $\alpha, r_0$  في المعادلة (1) نحصل على :-  
المركز عند القطب

(i)  $r_0 = 0, r^2 = a^2$

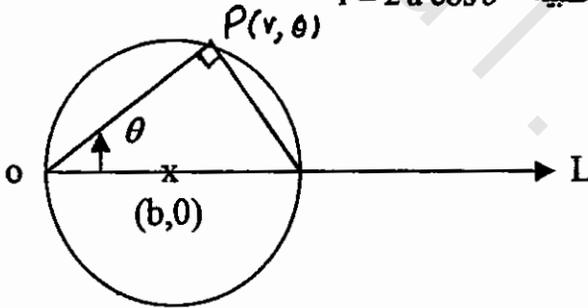
وتكون المعادلة القطبية  $r = a$



مركز الدائرة على الخط القطبي

(ii)  $r_0 = a, \alpha = 0$

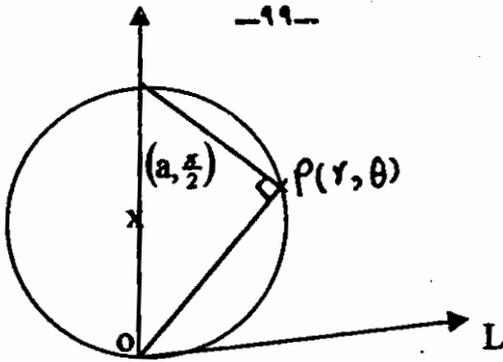
وتكون المعادلة القطبية  $r = 2a \cos \theta$



مركز الدائرة على الخط العمودي على الخط الابتدائي عند القطب

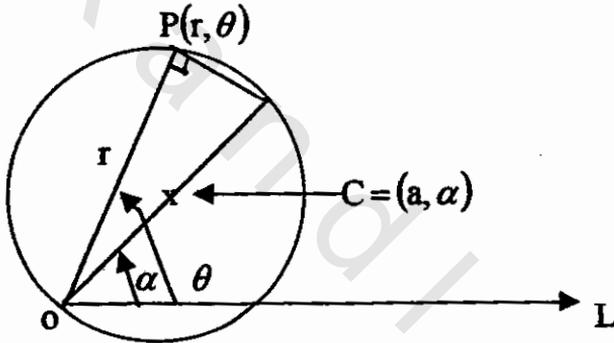
(iii)  $r_0 = a, \alpha = \frac{\pi}{2}$

وتكون المعادلة  $r = 2a \sin \theta$



القطب على المحور

(v)  $r = 2a \cos(\theta - \alpha)$



بالنسبة للمعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة

$$r^2 - 2r r_0 \cos(\theta - \alpha) + k = 0$$

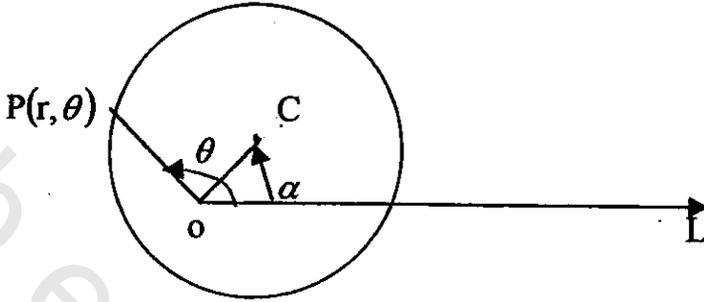
$$k = r_0^2 - a^2$$

القطب يقع خارج الدائرة

(vi)  $k > 0, r_0 > a$

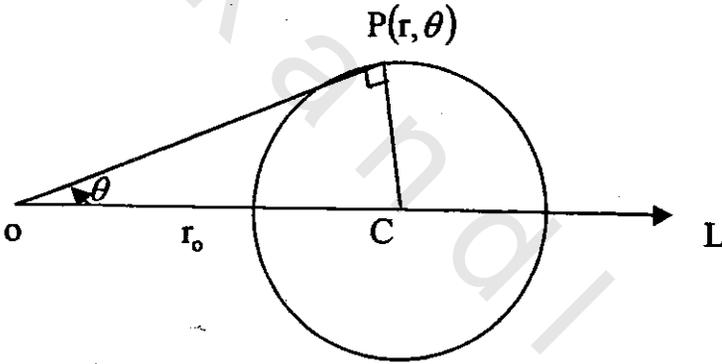
القطب يقع داخل الدائرة

(vii)  $k < 0, r_0 < a$



الخط الابتدائي يمر بمركز الدائرة

(viii)  $\alpha = 0$



وتؤول معادلة الدائرة إلى الصورة

$$r^2 - 2r r_0 \cos \theta + k = 0$$

مثال (١) : أثبت أن المعادلة

$$r = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta$$

تمثل دائرة وأوجد مركزها ونصف قطرها.

الحل: نحاول جعل المعادلة (1) في صورة معادلة الدائرة (١) وذلك بضرب والقسمة على  $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  في الطرف الأيمن تتحول المعادلة إلى (استخدام متطابقات حساب المثلثات).

$$r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\theta - \alpha)$$

حيث  $\alpha = \tan^{-1} \frac{C_2}{C_1}$  ، ونصف قطرها  $a = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{2}$  والقطب يقع على المحيط أي أن المركز هو  $(a, \alpha)$  .

مثال (٢): رسم من نقطة  $O$  مستقيم يقطع دائرة معلومة في  $P_1, P_2$  إوجد المحل الهندسي للنقطة  $P$  على  $P_1P_2$  بحيث يكون

$$\frac{2}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2}$$

الحل: نأخذ  $O$  القطب والقطر المار بالنقطة  $O$  خطا ابتدائيا وبالتالي فإن معادلة الدائرة تأخذ الصورة

$$r^2 - 2 a r \cos \theta + k = 0 \quad (*)$$

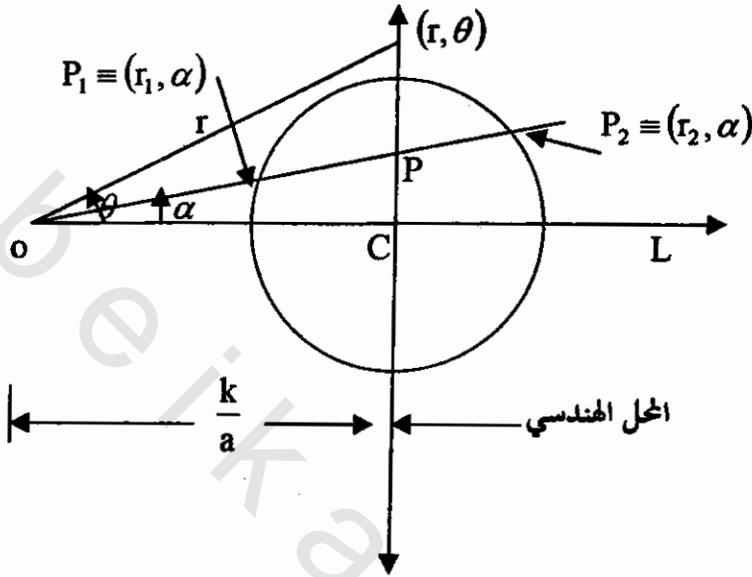
نفرض أن موضعا متغير للمستقيم الذي يمر بالنقطة  $O$  يعطى من  $\theta = \alpha$  ، لذلك يمكن إيجاد النقطتين  $P_1P_2$  اللتين يقطع فيهما المستقيم الدائرة (\*).

في المعادلة (\*) (معادلة من الدرجة الثانية في  $r$ ) يكون

$$r_1 + r_2 = 2 a \cos \alpha , r_1 r_2 = k \quad (\text{من نظرية المعادلات})$$

حيث  $r_2 = OP_2 , r_1 = OP_1$  ولكن

$$\frac{2}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}$$



$$\therefore \frac{2}{OP} = \frac{2a \cos \alpha}{k}$$

$$\therefore OP \cos \alpha = \frac{k}{a}$$

وبذلك يكون المحل الهندسي للنقطة P هو المستقيم :

$$r \cos \theta = \frac{k}{a}, P \equiv (r, \theta)$$

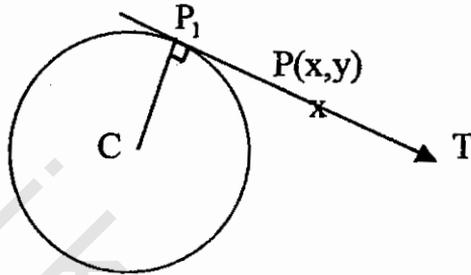
ويكون عموديا على القطر الذي يمر بالنقطة O ويبعد مسافة  $\frac{k}{a}$  عن القطب.

### المماس للدائرة Tangent to a circle

نعتبر الدائرة

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$$

المماس T للدائرة عند النقطة  $P_1(x_1, y_1)$  للدائرة التي مركزها  $C(-g, -f)$  هو خط مستقيم عمودي على اتجاه نصف القطر عند النقطة  $P_1$  وذلك من الهندسة المسستوية للدائرة.



ميل المماس  $m$  هو سالب مقلوب ميل متجه على أمتداد نصف القطر  $CP_1$  وبذلك تكون معادلة المماس هي

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{g + x_1}{f + y_1} \quad \text{(أو بحساب } m = \frac{dy}{dx} \text{ من معادلة الدائرة)}$$

ومنها تكون معادلة المماس

$$x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + C = 0$$

أو

$$(x_1 + g)x + (y_1 + f)y + g x_1 + f y_1 + C = 0$$

أو

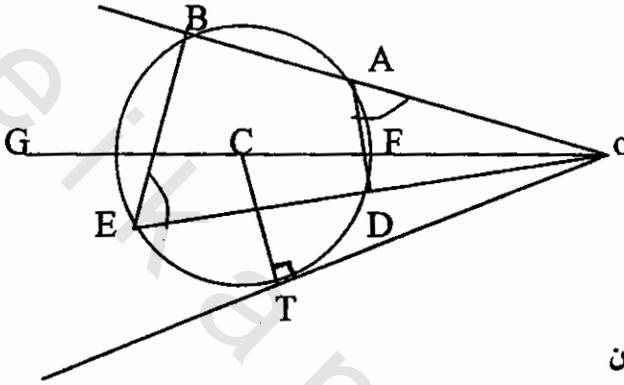
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{P_1} x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{P_1} y + g x_1 + f y_1 + C = 0$$

مثال (٣) : أوجد معادلة العمودي على المماس للدائرة عند  $P_1(x_1, y_1)$ .

الحل: متروك للقارئ.

### قدرة النقطة: Power of a point

نعتبر الدائرة التي مركزها  $C$  ونصف قطرها  $R$  ونقطة خارجها  $O$ ، نرسم مستقيمتان اختيارية تقطع الدائرة عند  $E, D, B, A$  وبالتالي يكون لدينا شكل رباعي  $ABED$  مرسوم داخل الدائرة ولذلك يكون



ولذلك يكون

$$\triangle OAD \sim \triangle OEB$$

والمثلث  $OAD$  يشابه المثلث  $OEB$ .

إذن

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OE}{OB}, \text{ or } (OA)(OB) = (OD)(OE)$$

∴ لأي نقطة في مستوى الدائرة، يكون حاصل ضرب القواطع التي على خط مستقيم واحد للدائرة ثابت. نسمى هذا الثابت قدرة النقطة  $O$  بالنسبة للدائرة ونرمز له بالرمز  $P$ .

لحساب  $P$ ، نرسم القاطع  $OC$  الذي يمر بمركز الدائرة وتكون قواطعها لها الأطوال

$$OF = OC - R, \quad OG = OC + R$$

$$P = (OC)^2 - R^2$$

يكون حاصل ضربهم هو  $P$  حيث

ملاحظة: يجب أن نلاحظ أن P يكون موجب إذا كانت O خارج الدائرة ويكون

سالبا إذا كانت O داخل الدائرة وينعدم إذا كانت O على محيط الدائرة.

وإذا رسم المماس من O للدائرة عند T فإن

$$P = (oC)^2 - (CT)^2 = t^2$$

حيث t طول المماس للدائرة عند T أي  $t = oT$ .

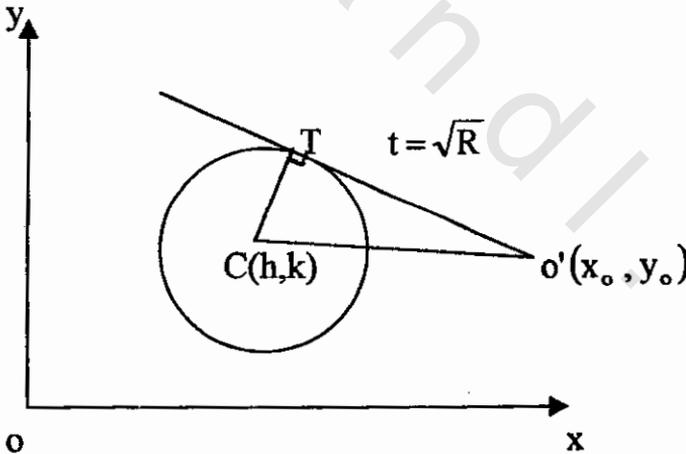
وبأسلوب الهندسة التحليلية تكون قدرة النقطة  $(x_0, y_0)$  بالنسبة للدائرة هي مربع

طول المماس للدائرة المرسوم من النقطة.

للمناقشة التحليلية في الإحداثيات الكرتيزية، نعتبر الدائرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

$$\therefore P = (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - R^2$$



حيث  $(x_0, y_0)$  هي أي نقطة في المستوى.

بالنسبة للمعادلة العامة للدائرة

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (*)$$

$$P = x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C \quad \text{يكون}$$

كمثال، مربع المماس من نقطة الأصل  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  للدائرة (\*) يكون C. ومن ثم لاحظ أنه إذا كانت C سالبة فإن الدائرة تحتوي نقطة الأصل.

### تمارين

- ١- أثبت أن المسافة d بين النقطتين  $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$  تعطى من
- $$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
- ومن ثم إيجاد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة  $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  ومركزها  $C(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$  موضحاً ذلك بالرسم.
- ٢- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها  $(4, \frac{\pi}{6})$  ونصف قطرها يساوي 5.
- ٣- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة  $(8, \frac{2\pi}{3})$  وتمر بالنقطة  $(4, \frac{\pi}{4})$ .
- ٤- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها  $(8, \frac{\pi}{4})$  وتمس المحور القطبي.
- ٥- أوجد مركز ونصف قطر الدوائر الآتية:-

(i)  $r^2 - 4r \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 0$

(ii)  $r = 5 \cos \theta - 5\sqrt{3} \sin \theta$

(iii)  $r^2 + 3r \cos \theta + 3r \sqrt{3} \sin \theta = 0$

٦- حدد فيما إذا كانت النقطة 'o' تقع داخل أو خارج أو على محيط الدائرة في الحالات الآتية:-

(i)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, o'(1, -1)$

(ii)  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 9 = 0, o'(0, 2)$

### عائلات الدوائر Family of Circles

نفرض أن لدينا دائرتين  $\Phi_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$  حيث

(i)  $\Phi_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + C_1 = 0$

(ii)  $\Phi_2(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + C_2 = 0$

والتي يمكن أن نرمز لها بالرمز  $\Phi_2 = 0, \Phi_1 = 0$  ونفرض أنهما يتقاطعان فإن المعادلة

(iii)  $\Phi_1 + \lambda \Phi_2 = 0 \ (\lambda \neq -1)$

تمثل أيضاً دائرة كذلك المعادلة

(iv)  $\mu \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \ (\mu \neq -1)$

تمثل دائرة (تتحقق من هذا).

فإذا كانت إحدى نقطتي التقاطع إحداثياتها هي  $(x_1, y_1)$  فإن

$$\Phi_1(x_1, y_1) = 0, \Phi_2(x_1, y_1) = 0$$

وعليه فإنه من (iii), (iv) نجد أن

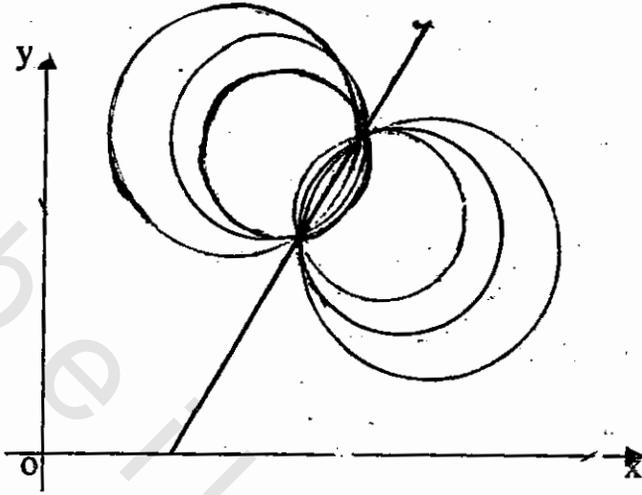
$$\Phi_1(x_1, y_1) + \lambda \Phi_2(x_1, y_1) = 0$$

$$\mu \Phi_1(x_1, y_1) + \Phi_2(x_1, y_1) = 0$$

وهذا يعني أن أي دائرة تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين (i), (ii) تكون على الصورة (iii)

أو الصورة (iv). بمعنى آخر نستنتج أن المعادلة (iii) أو المعادلة (iv) تمثل كل منهما

ما يسمى بعائلة الدوائر Family of circles والموضحة بالشكل التالي



مثال (١):

أوجد الدائرة التي تمر بالنقطة (1,5) ، ونقطتي تقاطع الدائرتين

$$\Phi_1(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0,$$

$$\Phi_2(x,y) \equiv (x-6)^2 + y^2 - 9 = 0$$

الحل: المعادلة

$$\lambda \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

تمثل عائلة الدوائر المتقاطعة ولإيجاد أحد دوائر هذه العائلة والتي تمر بالنقطة (1,5)

نعوض في هذه المعادلة  $\Phi_1$  عن النقطة (1, 5) نحصل على

$$\lambda (1^2 + 5^2 - 25) + (1-5)^2 + 5^2 - 9 = 0$$

$$\therefore \lambda = -41$$

وبذلك تكون الدائرة المطلوبة هي :

$$10x^2 + 10y^2 + 3x = 253$$

(\*)

ملحوظة: يمكن أيضا إيجاد قيمة  $\mu$  من المعادلة  $\Phi_1 + \mu \Phi_2 = 0$  بالتعويض

بالنقطة (1,5) فنحصل على  $\mu = -\frac{1}{41}$  وهذه القيمة نحصل على نفس المعادلة (\*)

## Radical axis المحور الأساسي لدائرتين

المحور الأساسي لدائرتين هو المحل الهندسي للنقطة التي لها قدرات متساوية بالنسبة لدائرتين.

إذا كان لدينا دائرتين  $\Phi_1, \Phi_2$  فإن المحور الأساسي يعطى من المعادلة

$$P_1(x, y) = P_2(x, y)$$

حيث  $P_\alpha$  قدرة النقطة بالنسبة للدائرة  $\Phi_\alpha, \alpha = 1, 2$ .

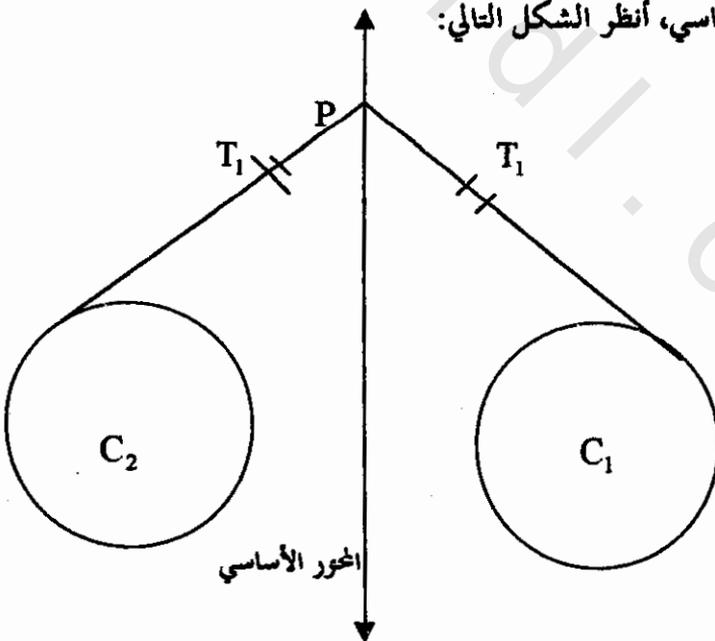
أو

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + C_1 - C_2 = 0$$

أو

$$2\langle R_o^1 - R_o^2, R \rangle + C_1 - C_2 = 0$$

على المحور الأساسي، أنظر الشكل التالي:  $R_o^\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$  إحداثيات المراكز للدائرتين  $\Phi_\alpha, \alpha = 1, 2$  ،  $R$  نقطة عامة



ويعرف المحور الأساسي لدائرتين بأنه المحل الهندسي للنقطة التي لها قدرات متساوية للدائرتين.

نعتبر عائلة الدوائر

$$\Phi_1 + k \Phi_2 = 0$$

ونفرض أن الدائرتين يتقاطعان عند  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ .

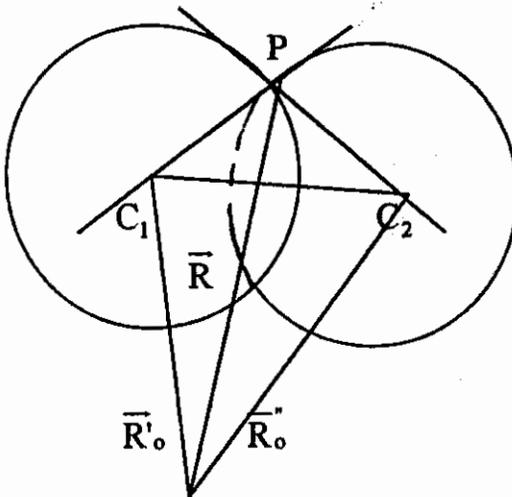
$$\therefore \Phi_1(a, b) = 0, \Phi_2(a, b) = 0, \Phi_1(c, d) = 0, \Phi_2(c, d) = 0$$

وطبقاً لذلك، لجميع قيم  $k \in \mathbb{R}$  المعادلة  $\Phi_1 + k \Phi_2 = 0$  تتحقق بالنقط  $(c, d)$ ,  $(a, b)$ . إذن كل أعضاء العائلة يمر خلال نقط التقاطع هذه.

العنصر المتحلل Degenerate من العائلة هو ذلك الذي له  $k = -1$  أي أنه هو المحور الأساسي. وهو أيضاً يحتوي نقط التقاطع. ولهذا إذا تقاطع دائرتين فإن المحور الأساسي لهما ينطبق على الوتر المشترك بينهما.

### الدوائر المتعامدة Orthogonal circles

نفرض أن لدينا دائرتين  $\Phi_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$  يقال أنهما متعامدان أي تقاطعان على العماد إذا كان المماس لكل منهما يحصران بينهما زاوية قائمة كما هو موضح بالشكل



واضح أن  $\overline{PC}_2 \perp \overline{PC}_1$  وباستخدام جبر المتجهات

$$\langle R - R'_o, R - R''_o \rangle = 0$$

$$R^2 + \langle R'_o, R''_o \rangle - \langle R, R'_o \rangle - \langle R, R''_o \rangle = 0 \quad (1)$$

و  $\bar{R}$  متجه الموضع للنقطة P الواقعة على كل من الدائرتين  $\Phi_1, \Phi_2$ .  
إذن

$$R^2 - \langle R, R'_o \rangle = -\frac{C_1}{2}$$

$$R^2 - \langle R, R''_o \rangle = -\frac{C_2}{2}$$

وبالتعويض في (1) يكون

$$\langle R'_o, R''_o \rangle = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

وهو شرط تقاطع دائرتين على التعامد أو يكافئ

$$2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 = C_1 + C_2$$

حيث

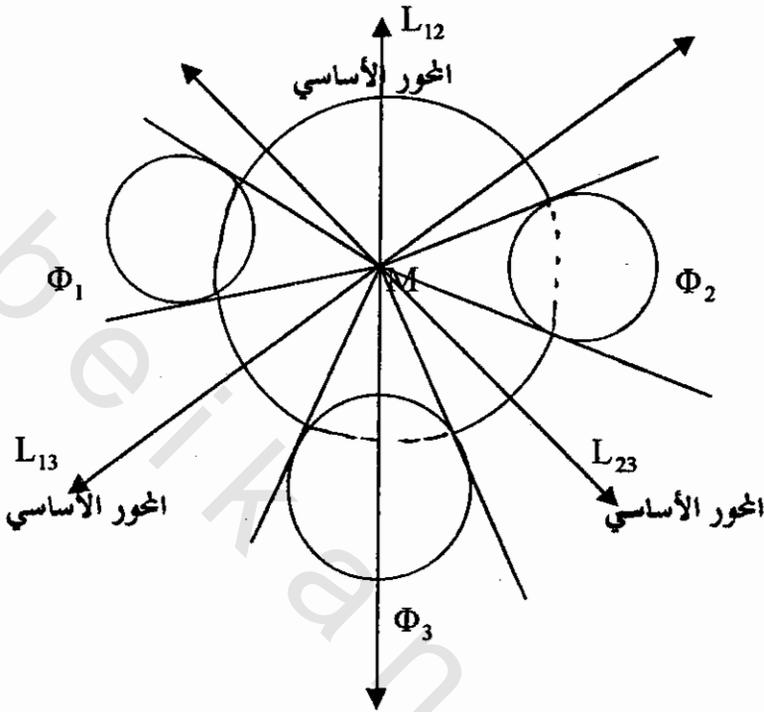
$$R'_o = (-a_1, -b_1), R''_o = (-a_2, -b_2)$$

$C_\alpha$  هو الحد المطلق في الدائرة  $\Phi_\alpha$ .

لثلاث دوائر ليست متحدة المركز **non-concentric**

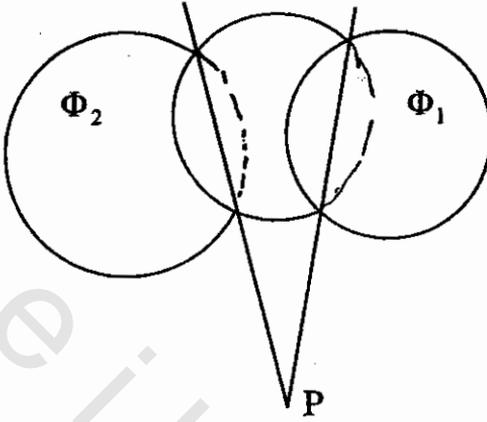
$$\Phi_i(x, y) = 0, i = 1, 2, 3$$

يوجد ثلاث محاور أساسية تلتقي في نقطة تسمى المركز الأساسي. وإذا كانت هذه النقطة خارجة عن الدوائر الثلاث فإن أطوال المماسات لهذه الدوائر تكون متساوية.



ويكون هذا المركز هو مركز للدائرة التي تقطع الثلاث دوائر على التمام (تتقاطع في زوايا قائمة) كما هو موضح بالشكل السابق.

المناقشة الأخيرة تقودنا إلى بناء بسيط للمحور الأساسي لدائرتين  $\Phi_i = 0, i=1, 2$  نرسم دائرة اختيارية تقاطع مع  $\Phi_2, \Phi_1$ . الأوتار المشتركة بين دائرتين متقاطعتين تلتقي عند نقطة P وهي المركز الأساسي للدوائر الثلاث وهذه النقطة تقع على المحور الأساسي المطلوب كما هو موضح بالشكل التالي:



مسأل (١) : أوجد الدائرة التي تمر بالنقطة (0,6) وتمس القطع المكافئ  $y = x^2$  عند النقطة (2,4).

الحل: إحداثيات النقطة (0,6), (2,4) يجب أن تحقق المعادلة العامة للدائرة ولتكن هي:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$\therefore 2A + 2B + C = -20$$

$$6B + C = -36$$

ومن هذه المعادلات يكون

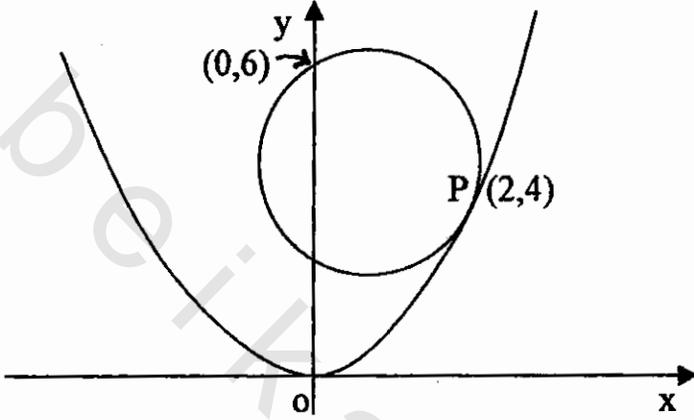
$$\therefore C = -36 - 6B, A = B + B$$

ومعادلة الدائرة تكتب في الصورة

$$x^2 + y^2 + (B+B)x + By - 6(6+B) = 0$$

وهي تمثل عائلة من الدوائر التي تمر بالنقطة المعطاه. ونحن نعي دائرة بعينها من هذه العائلة لها الميل عند النقطة  $P(2,4)$  هو نفسه للقطع المكافئ. الميل من معادلة العائلة هو (انظر الشكل التالي).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8+B+2x}{2y+B}$$



ومن معادلة القطع المكافئ يكون الميل

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

وعند النقطة (2, 4) يكون

$$-\frac{8+B+4}{8+B} = 4, \text{ or } B = -\frac{44}{5}$$

وطبقا لذلك تكون معادلة الدائرة المطلوبة هي:

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{5}x - \frac{44}{5}y + \frac{84}{5} = 0$$

مثال (٢): أوجد معادلة المحور الأساسي للدائرتين

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 ; x^2 + y^2 = 16$$

الحل: معادلة المحور الأساسي هي:

$$2(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

حيث هنا:

$$a_1 = -2, b_1 = 3, c_1 = -12$$

$$a_2 = 0, b_2 = 0, c_2 = -16$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على:

$$2x - 3y = 2$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة.

مثال (٣): أوجد المعادلة العامة للدوائر المتحدة المحور مع كل من الدائرتين

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 8x + 11 = 0$$

وأوجد معادلة الدوائر في هذه المجموعة التي تمر بالنقط (8,3).

الحل: المعادلة العامة للدوائر المتحدة المحور مع الدائرتين المعلومتين هي

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 + \lambda (x^2 + y^2 - 8x + 11) = 0$$

أي

$$x^2 (1 + \lambda) + y^2 (1 + \lambda) - 4x (1 + 2\lambda) - (1 - 11\lambda) = 0$$

إذا مرت إحدى الدوائر بالنقطة (8,3) ينتج أن

$$4 + 9 - 32 - 1 + \lambda (64 + 9 - 64 + 11) = 0$$

$$\therefore \lambda = -2$$

وتكون معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$x^2 + y^2 - 12x + 23 = 0$$

مجموعة الدوائر متحدة المحور: Co-axil circles

للسهولة نأخذ المحور الأساسي لدوائر المجموعة محور الصادات.

ونظرا لأن المستقيم الواصل بين مركزي أي دائرتين من دوائر المجموعة عمودي على

المحور الأساسي لهاتين الدائرتين لذلك مراكز الدوائر المتحدة المحور تقع جميعها على

مستقيم واحد عمودي على المحور الأساسي لمجموعة الدوائر ونأخذ هذا المستقيم محوراً للسينات.

المعادلة العامة لدائرة مركزها يقع على محور  $x$  هي:

$$x^2 + y^2 + 2ax + C = 0$$

ويمكن أن نثبت أن  $C$  ثابتة لجميع دوائر المجموعة وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة أي دائرة من دوائر المجموعة على الصورة

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + C = 0$$

حيث  $C$  مقدار ثابت لجميع دوائر المجموعة وتغير  $\lambda$  بتغير الدائرة. توجد ثلاث حالات للدوائر المتحدة المحور:

الحالة الأولى: إذا تقاطعت الدائرتين  $\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0$  كما في الشكل الأول فإن

كل دائرة من مجموعة الدوائر المتحدة المحور الممثلة بالمعادلة  $\Phi_1 + K\Phi_2 = 0$  تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين. لذلك تحتوي مجموعة الدوائر المتحدة المحور على دوائر تمر كلها بنقطتين ثابتتين وتسمى هذه المجموعة بالدوائر المتحدة المحور المتقاطعة.

نظراً لأن أي دائرتين تقاطعان على المحور الأساسي وهو محور  $y$  الذي معادلته  $x=0$ ، بوضع  $x=0$  في المعادلة

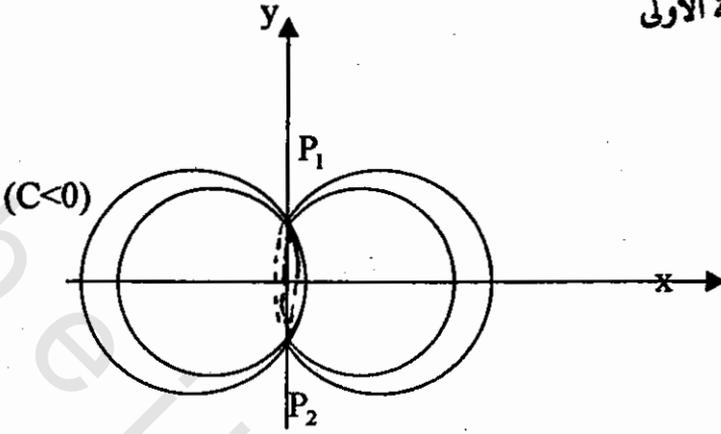
$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + C = 0$$

ينتج أن  $y^2 + C = 0$  أي  $y = \pm\sqrt{-C}$ .

وتكون نقطتي التقاطع هما  $P_1(0, \sqrt{-C}), P_2(0, -\sqrt{-C})$ .

ولذلك يجب أن تكون  $C$  سالبة حتى تقاطع دوائر المجموعة (انظر الشكل التالي)

الحالة الأولى



الحالة الثانية: إذا كانت  $C$  موجبة لا تتقاطع الدائرتان وبذلك لا تتقاطع أي دائرتين من دوائر المجموعة وتسمى هذه المجموعة بالدوائر المتحدة المحور الغير متقاطعة. معادلة أي دائرة من دوائر المجموعة هي

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + C = 0, C > 0$$

نصف قطر هذه الدائرة يساوي  $\sqrt{\lambda^2 - C}$  ومركزها  $(\lambda, 0)$  وتوول الدائرة إلى نقطة إذا كان  $\lambda^2 - C = 0$  أي  $\lambda = \pm\sqrt{C}$ .

وتنطبق الدائرة على مركزها وعلى ذلك فهناك دائرتان من دوائر المجموعة هما في الحقيقية نقطتان وإحداثياتهما هي:

$$P_1(\sqrt{C}, 0), P_2(-\sqrt{C}, 0)$$

ونسمي هاتان النقطتان بالنقطتين النهائيين لمجموعة الدوائر المتحدة المحور.

مثال: عين معادلة الدائرة (أو الدوائر) التي نصف قطرها  $r=4$  ويقع مركزها على المستقيم  $4x + 3y + 7 = 0$  وتمس المستقيم  $3x + 4y + 34 = 0$ .

الحل: متروك للطالب كتمرين.

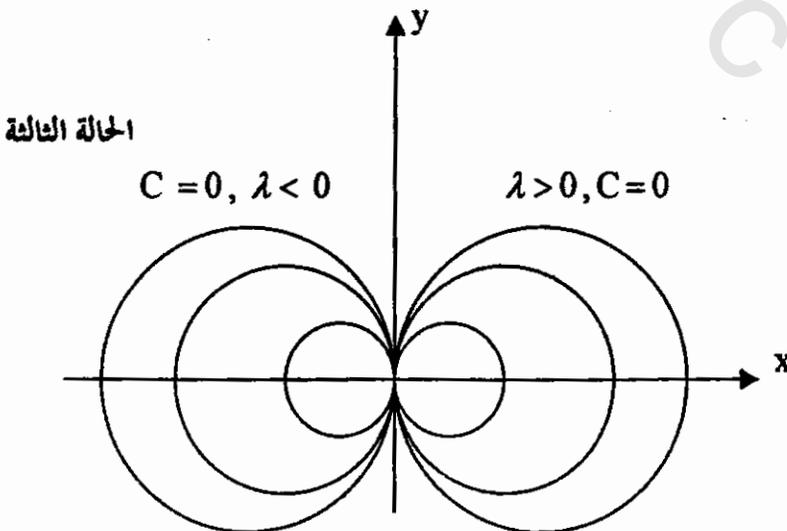
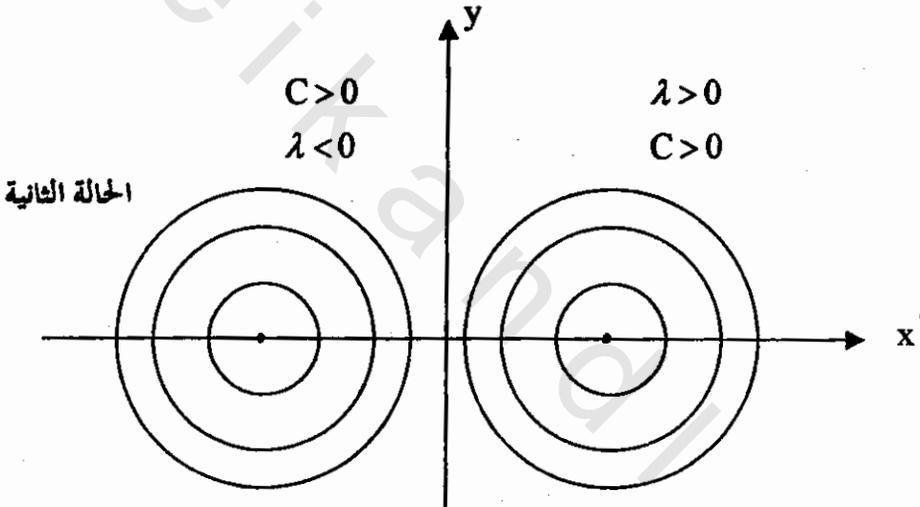
الحالة الثالثة: إذا كان  $C=0$  فإن معادلة أي دائرة من دوائر المجموعة تؤول إلى

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$$

أي

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$$

لذلك تمثل المجموعة الدوائر تمس محور  $y$  (المحور الأساسي) عند نقطة الأصل كما هو موضح بالرسم.



مثال: أثبت أن الدائرتين

$$x^2 + y^2 - 12x + 50 = 0, \quad x^2 + y^2 - 25 = 0$$

مماستان وعين معادلة الدائرة التي تمر بنقطة التماس والنقطة (3,1).

الحل: متروك للطالب كتمرين.

### تمارين

١- عين نقاط تقاطع الدائرة

$$\langle \bar{R}, \bar{R} \rangle - \langle \bar{R}, \bar{R}_0 \rangle = 6, \quad \bar{R}_0 = (1, 3)$$

$$\langle \bar{R}, \bar{R}_1 \rangle = 9, \quad \bar{R}_1 = (4, -1), \quad \bar{R} = (x, y)$$

والمستقيم

٢- عين نقاط تقاطع الدائرتين

$$\langle \bar{R}, \bar{R} \rangle + \langle \bar{R}, \bar{R}_1 \rangle = 15$$

$$\langle \bar{R}, \bar{R} \rangle + \langle \bar{R}, \bar{R}_2 \rangle = 26$$

حيث  $\bar{R}_1 = (2, -1), \bar{R}_2 = (5, 1)$

٣- أكتب معادلة الدائرة المرسومة حول المثلث الذي رؤوسه (2,3), (0,5), (1,-1)

٤- أكتب معادلة الدائرة المرسومة حول المثلث الذي أضلاعه

$$x-y=0, \quad x+2y=0, \quad 4x+y=25$$

٥- عين معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (0,4) وتمس المستقيمين

$$2x-3y-1=0, \quad 2x+3y+13=0$$

٦- عين معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين

$$L_1: x - y - 6 = 0, L_2: x + y = 0$$

ويقع مركزها على المستقيم  $L_3: 3x - y + 3 = 0$

٧- عين معادلة الدائرة التي تمس المستقيم  $x - 3y = 0$  عند نقطة الأصل ويقع مركزها

على المستقيم  $2x + y + 1 = 0$ .

٨- عين معادلة الدائرة التي تمس الدائرة

$$\bar{R}^2 - 2\langle \bar{R}, \bar{R}_0 \rangle + 112 = 0, \bar{R}_0 = (4, 11)$$

والمستقيم  $\langle \bar{R}, \bar{R}_1 \rangle + 19 = 0, \bar{R}_1 = (3, 4)$  ونصف قطرها 5.

٩- عين معادلة عائلة الدوائر التي تمر بتقاطع الدائرتين

$$\bar{R}^2 - 2\langle \bar{R}, \bar{R}_1 \rangle - 24 = 0$$

$$\bar{R}^2 - 2\langle \bar{R}, \bar{R}_2 \rangle - 2 = 0$$

$$\bar{R}_1 = (1, 0), \bar{R}_2 = (-5, -3) \quad \text{حيث}$$

ثم عين الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتنتمي لنفس العائلة.

١٠- عين معادلة الدائرة التي تمر بتقاطع الدائرتين

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0, x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

وتمر كذلك بالنقطة (1, 2).

١١- اثبت أن الدائرتين  $r = b \sin a$ ,  $r = a \cos a$  يتقاطعان على العمود.

١٢- اثبت أن المحور الأساسي للدائرتين يكون عمودياً على خط المركزين.

١٣- اوجد معادلة المحور الأساسي للدائرتين

$$\overline{R}^2 - 2\langle \overline{R}, \overline{R}_1 \rangle - 1 = 0$$

$$\overline{R}^2 - 2\langle \overline{R}, \overline{R}_2 \rangle = 3$$

$$\cdot \overline{R}_1 = \left(1, -\frac{3}{2}\right), \overline{R}_2 = \left(-1, \frac{3}{2}\right) \quad \text{حيث}$$

١٤- اوجد إحداثيات المركز الأساسي للدوائر الآتية

a)  $x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - x - y = 0, x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0, x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$

١٥- اوجد معادلة الدائرة المتعامدة على الثلاث دوائر في 14(a), 14(b)

١٦- اوجد المحل الهندسي للنقطة  $P \in \mathbb{R}^2$  بحيث أن المسافة من P إلى نقطة الأصل تساوي k مرة المسافة من P إلى (1,0).

١٧- بين أن العمودي على الدائرة  $x^2 + y^2 = a^2$  عند أي نقطة يمر خلال نقطة الأصل.