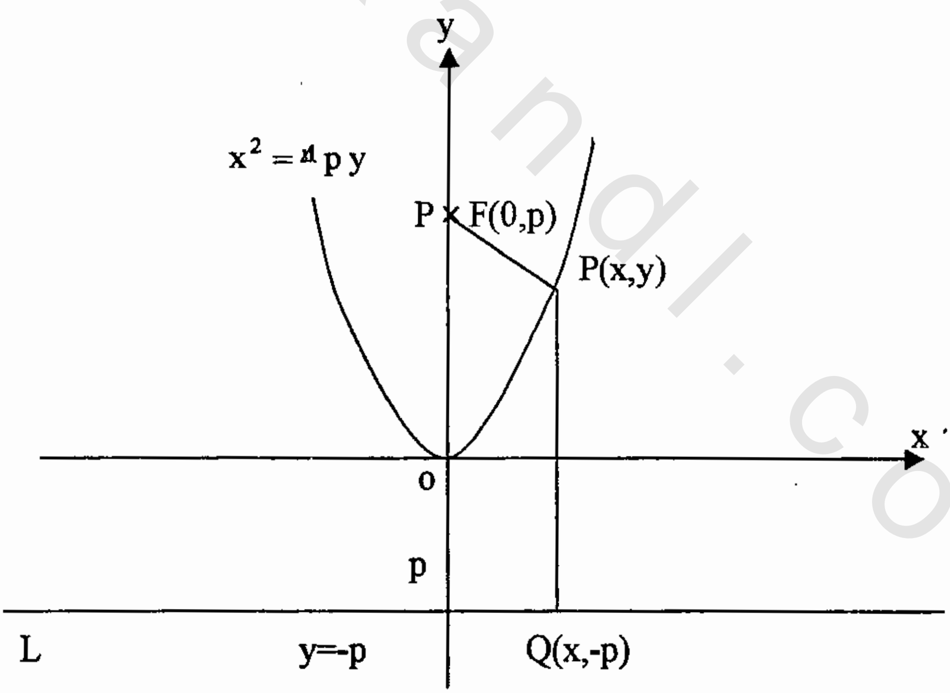
الباب الثالث

القطع المكافئ Parabola

يعرف القطع المكافئ على أنه فئة النقاط في المستوى التي تكون على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة وخط ثابت في المستوى.

النقطة الثابتة تسمى البؤرة **Focus** ، الخط الثابت يسمى الدليل **directrix**.

لإيجاد معادلة القطع المكافئ نختار نظام الإحداثيات في شكل مبسط بأن نختار الدليل L يوازي محور x، البؤرة F تقع على العمودي على محور x عند نقطة الأصل.



شكل (١)

من التعريف $PF = PQ$

أي أن

$$\sqrt{x^2 + (y-P)^2} = \sqrt{(y+P)^2}$$

بعد التبسيط للحدود يكون لدينا

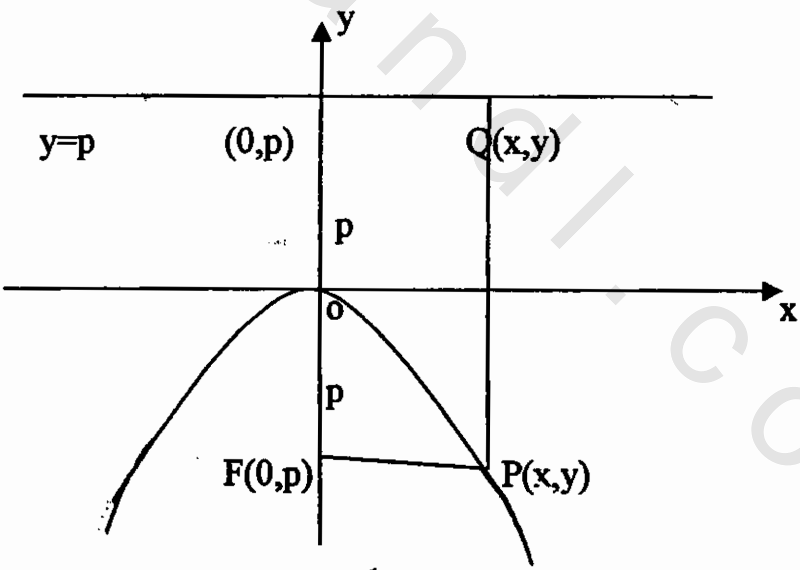
$$x^2 = 4Py$$

وهي معادلة قطع مكافئ مفتوح إلى أعلى **Opens upward** ومتماثل حول محور y ورأسه نقطة الأصل. محور y يسمى المحور القطع.

بإنعكاس في محور السينات أي

$$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

نحصل على قطع مفتوح إلى أسفل **Opens downward**



شكل (٢)

$$x^2 = -4py$$

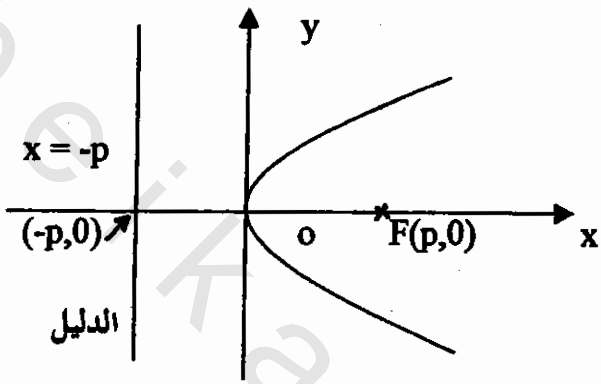
بدوران الشكل (١) بزاوية $\frac{\pi}{2}$ أي

$$(x,y) \longrightarrow (y,x)$$

وتكون معادلة القطع المكافئ هي

$$y^2 = 4px$$

والقطع مفتوح ناحية الجهة اليمنى open to the right



شكل (٣)

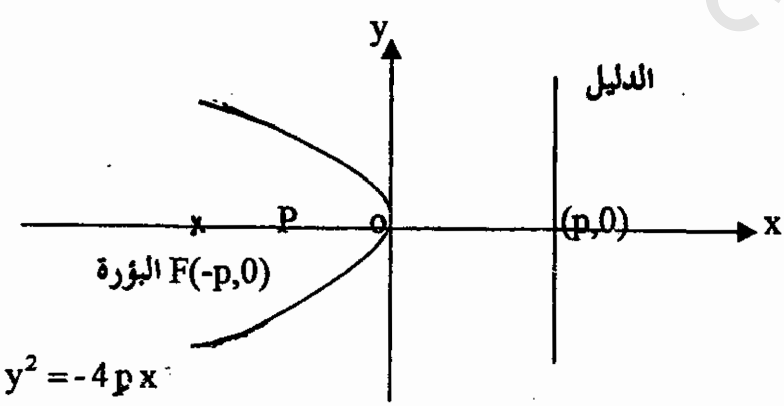
وبانعكاس الشكل (٣) في محور الصادات أي

$$(x, y) \longrightarrow (-x,y)$$

وبالتالي نحصل على

$$y^2 = 4Px \longrightarrow y^2 = -4Px$$

أي قطع مكافئ أفقي مفتوح ناحية الجهة اليسرى



بإجراء تحويل الانتقال

$$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$$

أي بنقل المحاور إلى نقطة أصل جديدة $o'(a, b)$ فمثلاً بالنسبة للقطاعات المكافئة الرأسية شكل (١)، (٢) تصبح

$$(x+a)^2 = 4p(y+b)$$

بعد التبسيط تأخذ الصورة

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

وهي المعادلة العامة للقطاعات المكافئة الرأسية ومحورها يوازي محور y ورأسها نقطة بخلاف نقطة الأصل.

وكذلك يمكن أن نبين أن معادلة الدرجة الثانية

$$y^2 + Ay + Bx + C = 0 \qquad (2)$$

تمثل قطاعات مكافئة أفقية محورها يوازي محور x ورأسها نقطة بخلاف نقطة الأصل.

السؤال الآن كيف يمكننا معرفة الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومحور التماثل لقطع مكافئ معطى في الصورة العامة (١) أو (٢). الإجابة على هذا السؤال تكون بنقل المحاور (بإكمال المربع) إلى نقطة أصل جديدة لتختفي حدود الدرجة الأولى بحيث تتحول المعادلات (١)، (٢) إلى الصورة

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$

أو

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$

على الترتيب.

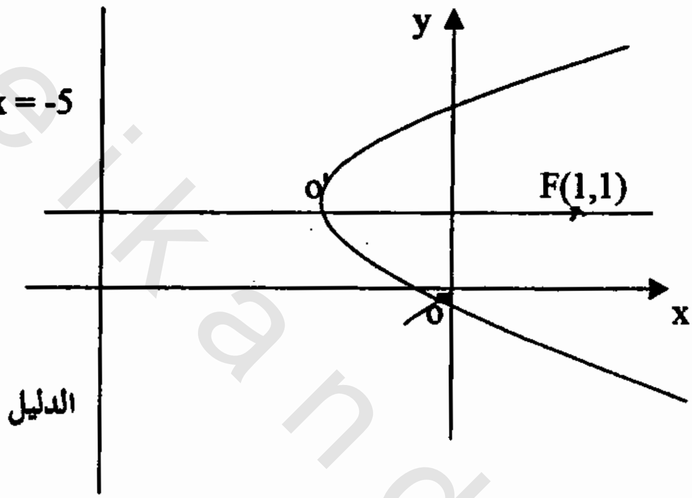
مثال: أوجد الرأس والمحور والبؤرة والدليل للقطع المكافئ

$$y^2 - 2y - 12x - 23 = 0$$

<u>الحل:</u> بإكمال المربع نحصل على

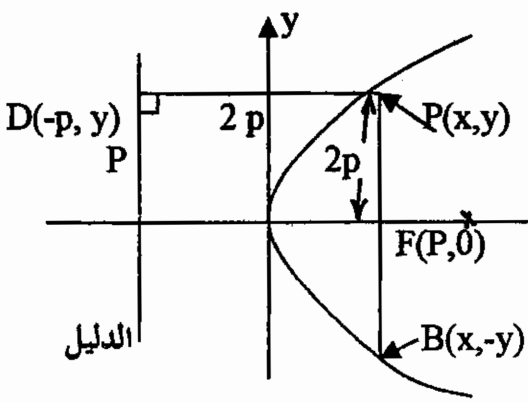
$$(y-1)^2 = 12(x+2)$$

أي بنقل المحاور إلى النقطة $o'(-2,1)$، $4P=12$ إذن $p=3$ والمحور يكـــون $y=k=1$ كما هو موضح بالرسم



أوتار القطع المكافئ:

الوتر هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على القطع المكافئ وإذا مر الوتـــر بالبؤرة يسمى وتر بؤري وإذا كان عمودي على المحور عند البؤرة يسمى الوتر البؤري العمودي.



طول الوتر البؤري العمودي pB يساوي 2 P F = 2 PD (من التمـــاثل)، PD=2P وبالتالي يكون طول الوتر البؤري العمودي يساوي 4p

المعادلات البارامترية للقطع المكافئ:

نفرض أن لدينا قطع رأسي $x^2 = 4Py$ فإنه بإدخال بارامتر (وسيط) يربـط المتغير x بالمتغير y عن طريق غير مباشر بحيث تتحقق معادلة القطع المكافئ بالمعادلات

$$x = 2pt \ , y = pt^2 \ , t \in R \qquad (1)$$

أو في الصورة الإتجاهية

$$\vec{R} = (2pt, pt^2), t \in R$$

أو في الحالة العامة

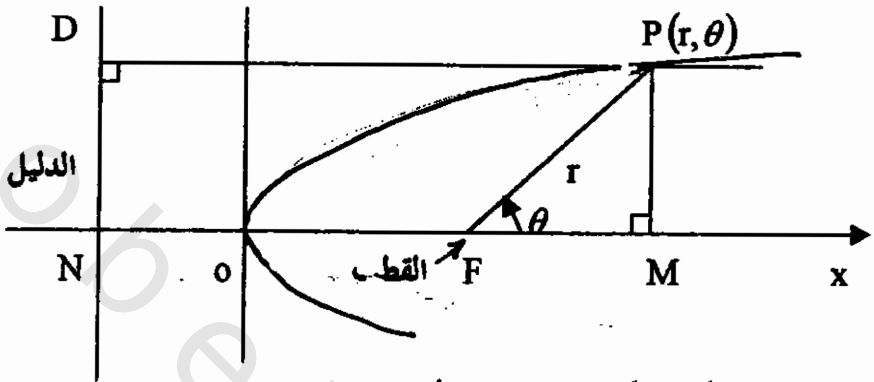
$$\vec{R} = (At, Bt^2), A = 2B, t \in R$$

تمثل قطع مكافئ رأسي.

المعادلات (1) تسمى المعادلات البارامترية للقطع المكافئ الرأسي. بالمثل يمكن استنتاج المعادلات البارامترية في حالة القطع المكافئ الأفقي.

المعادلة القطبية للقطع المكافئ Polar equation of parabola

نفرض أن لدينا قطع مكافئ أفقي معادلتـــه $x^2 = 4py$ ، نـأخذ قطـــب الإحداثيات القطبية منطبق على البؤرة ومحور القطع منطبـــق علـــى الخـــط القطـــبي (الإبتدائي) بهذا الوصف يكون لدينا الرسم



من التعريف للقطع المكافئ يكون $PF = PD$ أو $PF = NM$

أو $r = 2p + r\cos\theta$

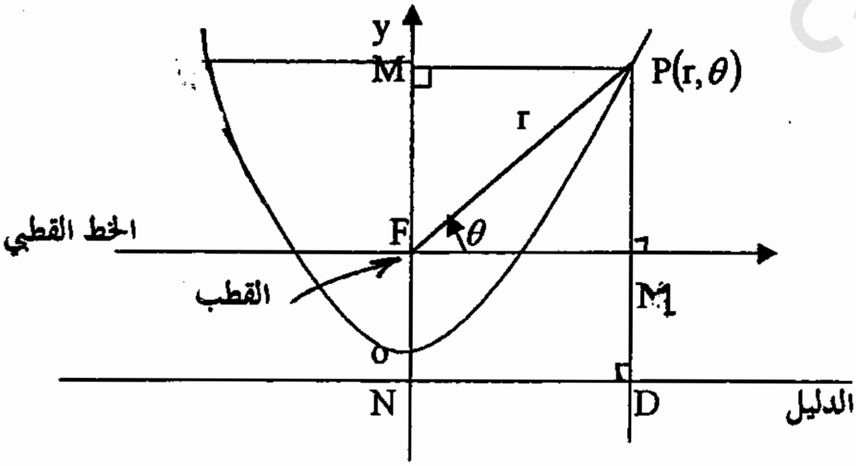
أو

$$r = \frac{2p}{1-\cos\theta} \qquad (1)$$

بدوران المحاور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ نحصل على القطع المكافئ $x^2 = 4py$ والمعادلة (1) تأخذ الصورة

$$r = \frac{2p}{1-\sin\theta} \qquad (2)$$

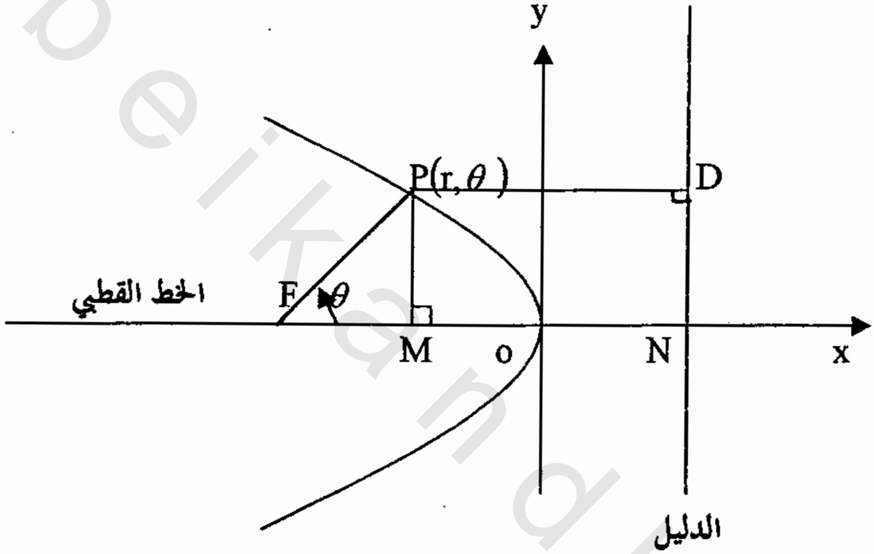
كما هو موضح بالرسم



بدوران المحاور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ للقطع المكافئ (2) نحصل على

$$r=\frac{2p}{1+\cos\theta} \qquad (3)$$

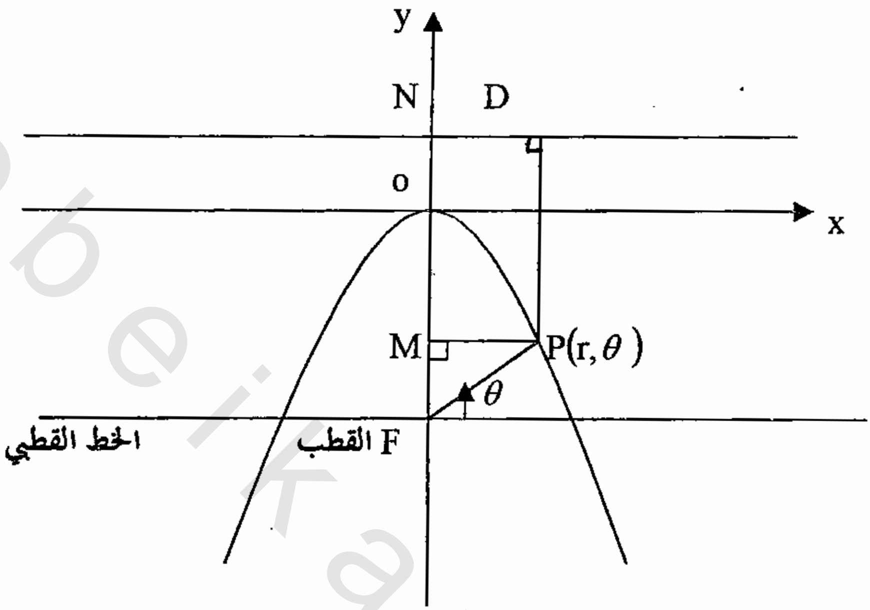
كما هو موضح بالرسم



بدوران المحاور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ للقطع المكافئ (3) نحصل على

$$r=\frac{2p}{1+\sin\theta}$$

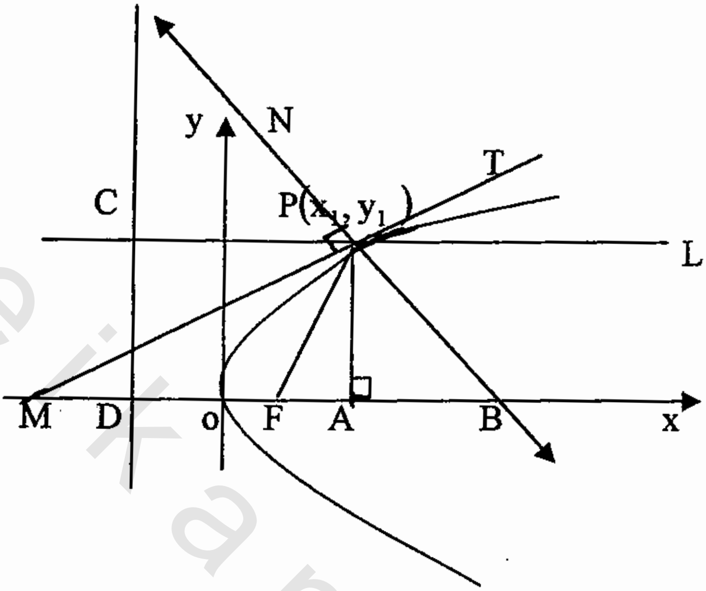
كما هو واضح على الرسم



الخواص الهندسية للقطع المكافئ Geometric properties of parabola

تحت المماس والعمودي

نفرض نقطة مثل P إحداثياتها (x_1, y_1) على القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ ونفرض أن المماس T عند هذه النقطة يقطع محور القطع في نقطة M وأن العمودي N عند هذه النقطة يقطع المحور في نقطة B فيكون MA هو تحت المماس، AB هو تحت العمودي.



معادلة المماس عند P هي:

$$y\,y_1 = 2a\left(x + x_1\right)$$

(تحقق من ذلك وذلك بحساب المشتقة التفاضلية $\dfrac{dy}{dx}$ من معادلة المنحنى)

ولإيجاد إحداثيات النقطة M نضع y=0 في معادلة المماس

$$\therefore 0 = 2a\left(x + x_1\right)$$

$$\therefore x = -x_1 \quad , oM = x_1$$

ولكن

$$oA = x_1 \, , oM = oA$$

أي أن رأس القطع تنصف تحت المماس.

الآن من الرسم نجد أن:

$$(PA)^2 = BA.MA$$

$$\therefore\ y_1^2 = AB \cdot 2x_1 \ ,\ \therefore AB = \frac{y_1^2}{2x_1}$$

ولكن $y_1^2 = 4ax_1$

$$\therefore \overline{AB} = 2a$$

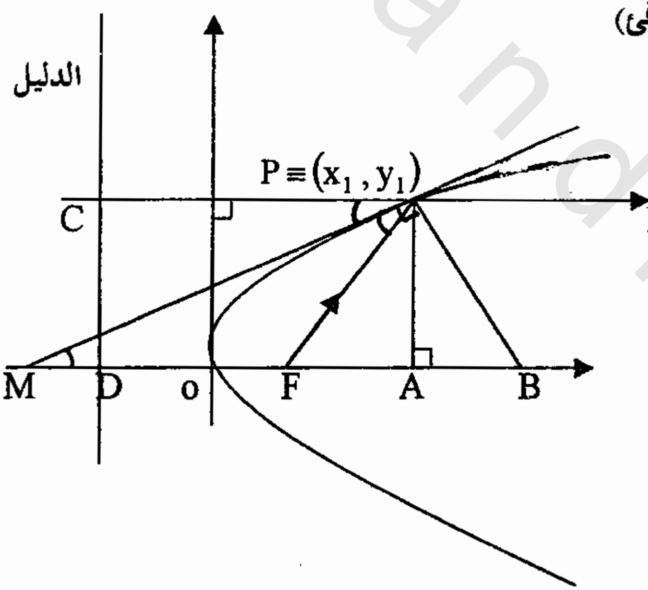
∴ تحت العمودي عند أي نقطة يكون دائماً مساوياً لطول نصف الوتر البؤري العمودي.

<u>الخواص البصرية:</u>

نفرض النقطة $P \equiv (x_1, y_1)$ على القطع $y^2 = 4ax$ فيكون

$\overline{oA} = \overline{oM} = x_1$

(من خواص القطع المكافئ)



ولكن

$$\overline{FB} = \overline{PC} = \overline{AD} = x_1 + a$$

$$\therefore \overline{FM} = \overline{FB} \Rightarrow \overline{FM} = \overline{PC}$$

ينتج من ذلك أن

$$\measuredangle FMP = \measuredangle MPF$$

ولكن

$$\measuredangle FMP = \measuredangle MPC$$

أي أن **المماس عند أي نقطة ينصف الزاوية بين البعد البؤري للنقطة والمستقيم العمودي على الدليل مارا بنقطة التماس.**

الآن $\overline{PB}$ هو العمودي عند P.

$$\therefore \measuredangle MPF + \measuredangle FPB = \pi/2 \qquad (1)$$

$$\measuredangle MPC + \measuredangle LPA = \pi/2 \qquad (2)$$

ولكن $\measuredangle MPF = \measuredangle MPC$ (المماس ينصف الزاوية FPM خاصية).

من (1), (2) يكون

$$\therefore \measuredangle FPB = \measuredangle LPB$$

أي أنه إذا كانت هناك مرآة على شكل قطع مكافئ فإن الأشعة الساقطة من البؤرة على سطح المرآة تنعكس موازية لمحور القطع.

تمارين

الرأس

١ــ أوجد معادلة القطع المكافئ للحالات الآتية حيث F البؤرة و v أوأوجد الدليل ومن ثم إرسمها

a) v(-2, 3) , F(-2, 4),　　b) v(0,3), F(-1, 3)

c) v(-3, 1), F(0,1)　　d) v(1,3), F(1,0)

٢ــ أوجد معادلة القطع المكافئ في الحالات الآتية حيث v الرأس، L الدليل وأوجد البؤرة ومن ثم إرسمها

a) v(-3, 1), L : x = 1

b) v(-2, 2), L : y = -3

٣ــ أوجد الرأس والمحور والبؤرة والدليل للقطاعات المكافئة الآتية ثم ارسمها

$$x^2+8x-4y+4=0,\ x^2+2x+4y-3=0$$

$$y^2+6y+2x+5=0,\ y^2-4y-8x-12=0$$

٤ــ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(-2,-1)$ ووتره البؤري العمودي هو المستقيم الواصل بين النقطتين $(-2,2)$, $(-2,-4)$ وأرسمه وعين رأسه ومعادلة دليله.

٥ــ عين معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $v(-2,3)$ وبؤرته $F(1,3)$.

٦ــ عين معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور ox والذي يمر بالنقاط $(3,3)$, $(6,5)$, $(6,-3)$ وعين رأسه ومعادلة دليله وبؤرته ثم أرسمه.

٧ــ عين معادلة القطع المكافئ الذي محوره أفقي ويقع رأسه على المستقيم $2y-3x=0$ إذا كان هذا القطع يمر بالنقطتين $(3,5)$, $(6,-1)$.

٨ــ بين أن المماس للقطع المكافئ $y^2=2Px$ في النقطة (x_o, y_o) هو المستقيم $y\,y_o=P(x+x_o)$.

٩ــ بين أن مساحة المثلث الذي رؤوسه $(x_i, y_i), i=1,2,3$ تقع على القطع المكافئ $y^2=4Px$ هي

$$\frac{1}{8P}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$$

١٠ــ أوجد شرط تماس المستقيم $y=m\,x+C$ للقطع المكافئ $y^2=4Px$ وأوجد نقطة التماس.

١١ــ بين أنه إذا كان الوتر الواصل بين النقطتين التي لهما البارامترات t_1, t_2 على القطع المكافئ $y^2=4ax$ يمر خلال البؤرة فإن $t_1\,t_2=-1$.

١٢ــ إذا كان الوتر البؤري للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ يقابله في نقطتين P, Q لهما البارامترات t_1, t_2 فإن

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{a}$$

حيث S هي البؤرة.

١٣ــ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتــه $F(2, 3)$ ودليلــه هــو المســتقيم $x-4y+3=0$ وأوجد طول وتره البؤري العمودي.

١٤ــ أوجد طول الوتر البؤري العمودي وإحداثيات الــرأس للقطاعــات المكافئــة الآتية:ــ

$$r = \frac{6}{1-\cos\theta}, \quad r = \frac{4}{1+\sin\theta}$$

$$r = \frac{8}{2+2\cos\theta}, \quad r = \frac{5}{2-2\sin\theta}$$

١٥ــ أوجد قيمة C التي تجعل المستقيم $y-4x=C$ مماسا للقطع المكافئ

$$y - 2x^2 + x - 1 = 0$$

١٦ــ إذا كان وتر القطع المكافئ $y^2 = 4Px$ عموديا عليه ويقابل زاوية قائمة عند الرأس فأثبت أنه يميل بزاوية $\tan^{-1}\sqrt{2}$ على محور السينات.

١٧ــ أوجد إحداثي منتصف وتر القطع المكافئ $y^2 = 8x$ والذي معادلته

$$2x - 3y + 8 = 0$$

١٨ــ أوجد قيمة C التي تجعل المستقيم $y = Cx - 5$ مماسا للقطع المكافئ

$$y = 4 + 2x + 3x^2$$