

الباب الرابع

القطع الناقص Ellipse

تعريف: يعرف القطع الناقص على أنه المحل الهندسي لنقطة في المستوى بحيث تكون دائماً مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين مقدار ثابت. النقطتين الثابتتين تسمى البؤر والمقدار الثابت طول المحور الأكبر.

معادلة القطع الناقص:

نفرض أن البؤرتين $F_1(-C, 0), F_2(C, 0)$ ، $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ ،

حيث $P(x, y)$ إذن إحداثيات النقطة P تحقق

$$\sqrt{(x+C)^2 + y^2} + \sqrt{(x-C)^2 + y^2} = 2a$$

بعد تبسيط هذه المعادلة نحصل على

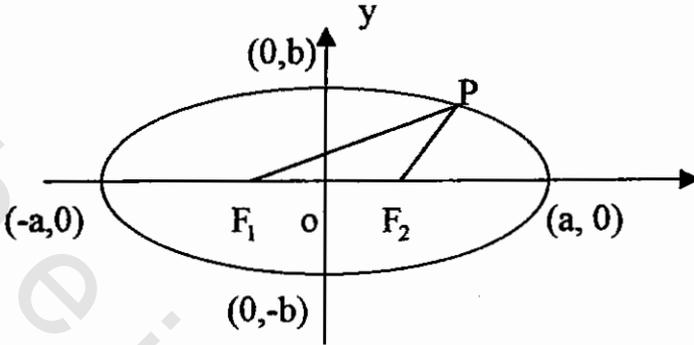
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - C^2} = 1 \quad (1)$$

ملحوظة: من خواص المثلث $F_1 F_2 P$ فإن $2a > 2C$ أي أن $a^2 - C^2 > 0$ وليكن

b^2 ، إذن المعادلة تأخذ الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - C^2 \quad (2)$$

انظر الشكل التالي:—



من الخواص الجبرية للمعادلة (2) يمكن أن نلاحظ أن القطع الناقص متمائل حول محوري الإحداثيات والمعادلة (2) دالة زوجية في y, x معا حيث أنها دالة ضمنية implicit function.

المحور الأكبر major axis للقطع الناقص طوله $2a$ وهو القطعة المستقيمة بين النقطتين $(\pm a, 0)$.
المحور الأصغر minor axis طوله $2b$ وهو القطعة المستقيمة بين النقطتين $(0, \pm b)$.

a, b تسمى أنصاف المحور الأصغر، الأكبر semi major , semi minor axis على الترتيب للقطع الناقص. المقدار $2c$ هو طول المسافة بين البؤرتين. القطع الناقص (2) يسمى قطع ناقص أفقي لأن محوره الأكبر على امتداد محور السينات.

وإذا دارت المحاور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ فإن

$$R_{\circ(\frac{\pi}{2})}: (x, y) \longrightarrow (-y, x)$$

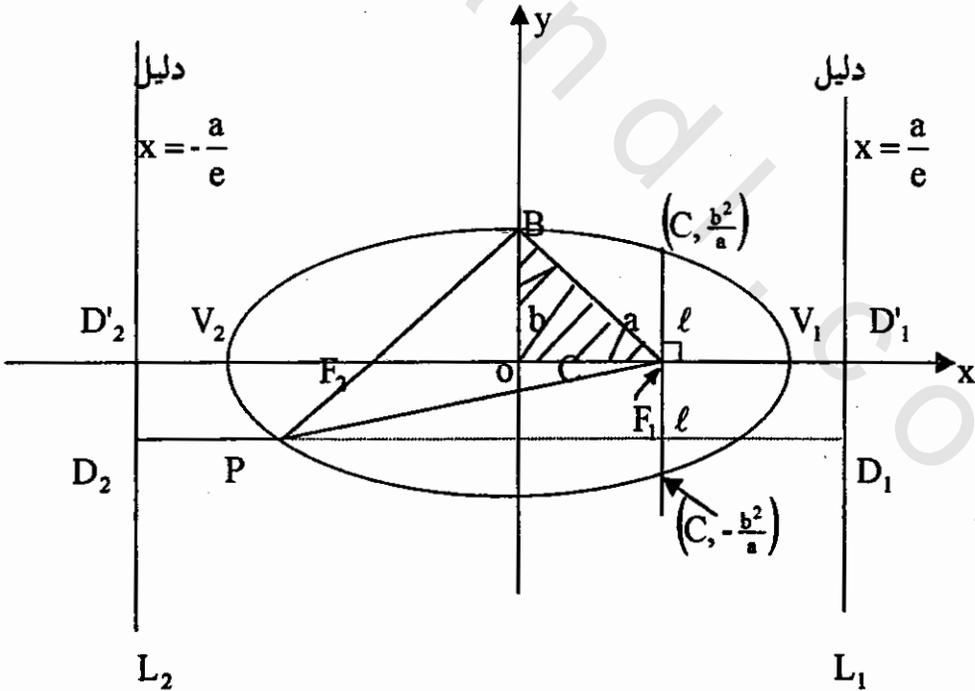
وتصبح المعادلة (2) في الصورة:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

أي القطع الناقص يصبح رأسي ومحورة الأكبر منطبق على محور الصادات. بينما نجد أن القطع المكافئ له بؤرة واحدة ودليل واحد، القطع الناقص يكون له بؤرتين ودليلين كل دليل يرتبط بالبؤرة القريبة منه ومن التعريف العام للقطاعات المخروطية

$$PF_1 = e \cdot PD_1, PF_2 = e \cdot PD_2$$

حيث $e < 1$ (الاختلاف المركزي)، P أي نقطة على القطع، F_1, F_2 البؤر، D_1, D_2 نقاط تقاطع العمودي من P على كل من الدليلين L_1, L_2 على الترتيب.



من الشكل يمكن أن نلاحظ

$$F_1 V_1 = e V_1 D'_1 \quad (1)$$

$$F_1 V_2 = e V_2 D'_1 \quad (2)$$

بالجمع

$$2a = e(V_1 D'_1 + V_2 D'_1)$$

$$2a = e(o D'_1 - a + o D'_1 + a)$$

$$o D'_1 = \frac{a}{e} > a$$

ب طرح (1) و (2) نحصل على $o F = a e < a$.

إذن معادلة الدليل $x = \pm \frac{a}{e}$ وإحداثيات البؤر $C = a e, F(\pm a e, 0)$.

الوتر البؤري العمودي:

الوتر البؤري العمودي هو وتر (خط مستقيم يقطع القطع الناقص في نقطتين)

يمر بالبؤرة وعمودي على المحور الأكبر.

نصف طول الوتر البؤري العمودي ℓ يعطى من

$$\ell = d(F_1, P)$$

$$\ell = y = b \sqrt{-\frac{x^2}{a^2} + 1} = b \sqrt{-e^2 + 1}, \ell = y, x = a e$$

$$C^2 = a^2 - b^2, a^2(-e^2 + 1) = b^2$$

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$l = \frac{b^2}{a} \quad \text{إذن} \quad \text{وطول الوتر البؤري العمودي} \quad \frac{2b^2}{a}$$

$$\cdot \left(\pm C, \pm \frac{b^2}{a} \right) \quad \text{هي نهايات الوتر البؤري العمودي}$$

معادلة القطع الناقص (2) يمكن كتابتها في شكل أعم حيث محاور التماثل توازي محاور الإحداثيات ومركز القطع نقطة خلاف نقطة الأصل وذلك بإجراء تحويل الإنتقال

$$(x, y) \longrightarrow (x-h, y-k) \quad \text{فإن المعادلة (2) تأخذ الصورة}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad a > b \quad (3)$$

أو في الحالة العامة

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

$$C^2 + D^2 > 4ABE, \quad A, B > 0$$

تحقق من ذلك ؟ (بإكمال المربع).

القطع الناقص (3) مركزه (h, k) ورؤوسه $(\pm a + h, k)$ و $(h, k \pm b)$.

والبؤر $(\pm a e + h, k)$ ومعادلة الأدلة $x = \pm \frac{a}{e} + h$.

$$\cdot \left(\pm C + h, \pm \frac{b^2}{a} + k \right) \quad \text{نهايات الوتر البؤري العمودي}$$

مثال (١) : أوجد المركز والرؤوس والبؤر للقطع الناقص

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$$

الحل: بإكمال المربع نحصل على

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

بما أن $9 > 4$ ، إذن المحور الأكبر يوازي محور y وينقل المحاور إلى النقطة $(-2, 1)$ و

لتصبح مركز القطع نحصل على

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 0$$

أنصاف المحاور $a = 3, b = 2$ ومنها تكون الرؤوس $(-2, 4), (-2, -2)$

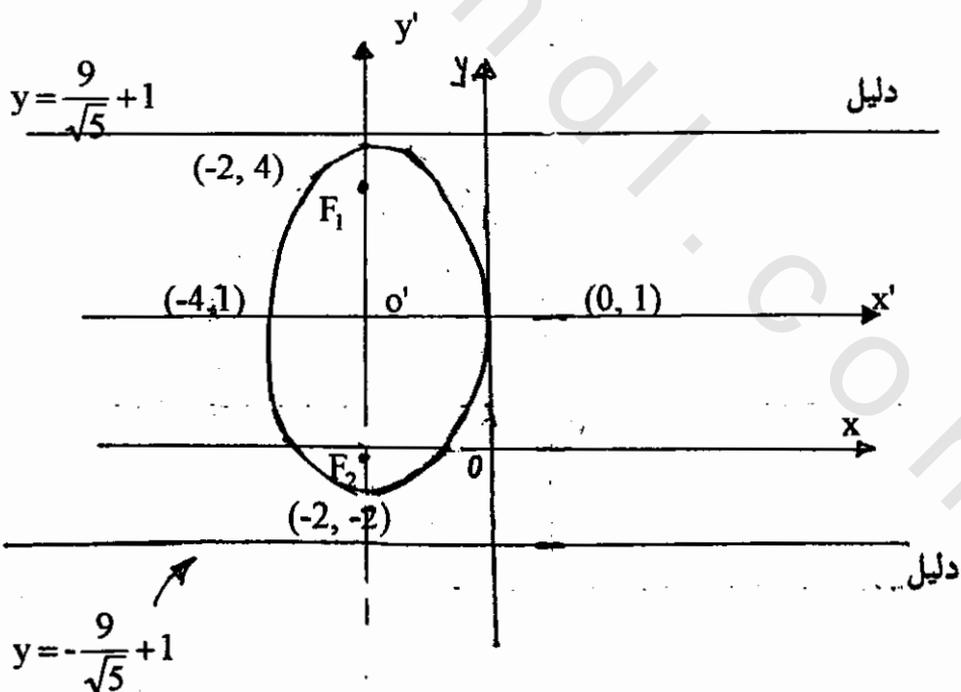
$$a^2 - b^2 = e^2 a^2 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$$

وبالتالي إحداثيات البؤر $(-2, 1 \pm \sqrt{5})$

ومعادلة الأدلة

$$y = \pm \frac{a}{e} + 1 = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} + 1$$

وطول الوتر البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$ كما هو موضح بالرسم.



الإختلاف المركزي وشكل القطع الناقص:

$$a > b > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{تغير}$$

$$0 \leq C = ae \leq a, \quad C = \sqrt{a^2 - b^2}$$

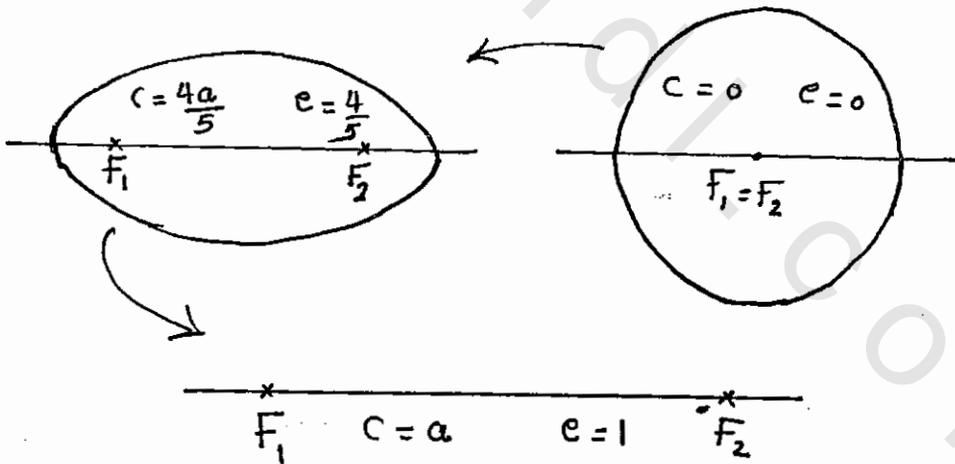
القطع الناتج يختلف في شكله على حسب قيمة C .

يكون دائري إذا كانت $C = 0$ ($a = b$) ويكون مسحوبا (مطاولا) في إتجاه المحور

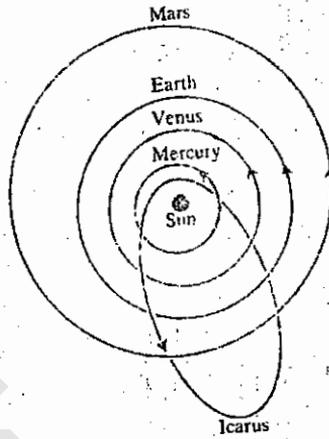
الأكبر **flatter** كلما زادت C حتى تصل إلى قيمتها العظمى $C = a$ والقطع في هذه

الحالة يصبح القطعة المستقيمة $F_1 F_2$ أي أن النسبة (الاختلاف المركزي) $e = \frac{C}{a}$ تتغير

من 0 إلى 1 لتوضيح درجة بعد القطع الناقص من كونه دائرة.



والمثال على ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس في المجموعة الشمسية في مدارات ناقصه حيث الشمس في بؤرتها ومعظم المسارات بما فيها الأرض تقريبا دائرية.



للقطع الناقص تطبيقات عديدة مثل حركة الكواكب وتصميم الطائرات وكذلك الأصوات الناتجة عن حركة الضوضاء وتأثيرها على ما بداخل الطائرة.

المعادلات البارامتريّة للقطع الناقص:-

المعادلات البارامتريّة للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

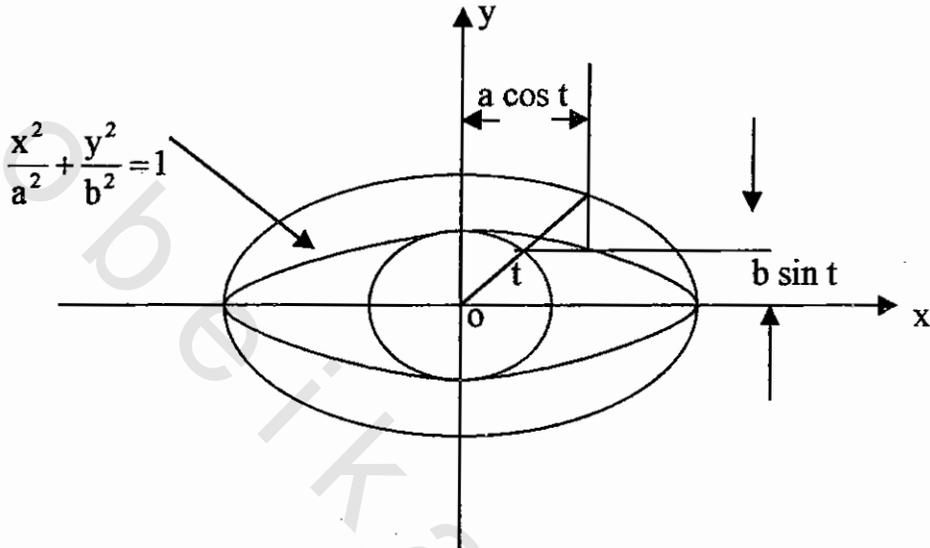
تعطى من

$$x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2)$$

المعادلات (2) تحقق (1) وتفسيرها الهندسي يتضح من خلال حركة نقطة مادية من

النقطة (a, 0) ذات البارامتر (الزمن) $t=0$ في إتجاه ضد عقارب الساعة Counter

clock wise حول القطع الناقص ليرسمه مره واحده عندما تتغير t من 0 إلى 2π .



مثال (٢) : حول المعادلة $x^2 + 4y^2 + 6x + 16y + 21 = 0$ إلى الصورة القياسية وعين إحداثيات المركز والبؤرتين والرؤوس ومعادلتي الدليلين ونهايات التورين البؤريين العموديين وأرسم القطع الناقص.

الحل: بإكمال المربع تأخذ المعادلة المعطاة الصورة

$$\frac{(x - (-3))^2}{4} + \frac{(y - (-2))^2}{1} = 1$$

المركز هو $O'(-3, -2)$.

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b = 1, C = \sqrt{3}, e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

البؤرتان هما

$$F(-3 \pm \sqrt{3}, -2)$$

الرؤوس

$$A(-1, -2), A'(-5, -2), B(-3, -1), B'(-3, -3)$$

نهایتا الوترین البؤریین العمودیین

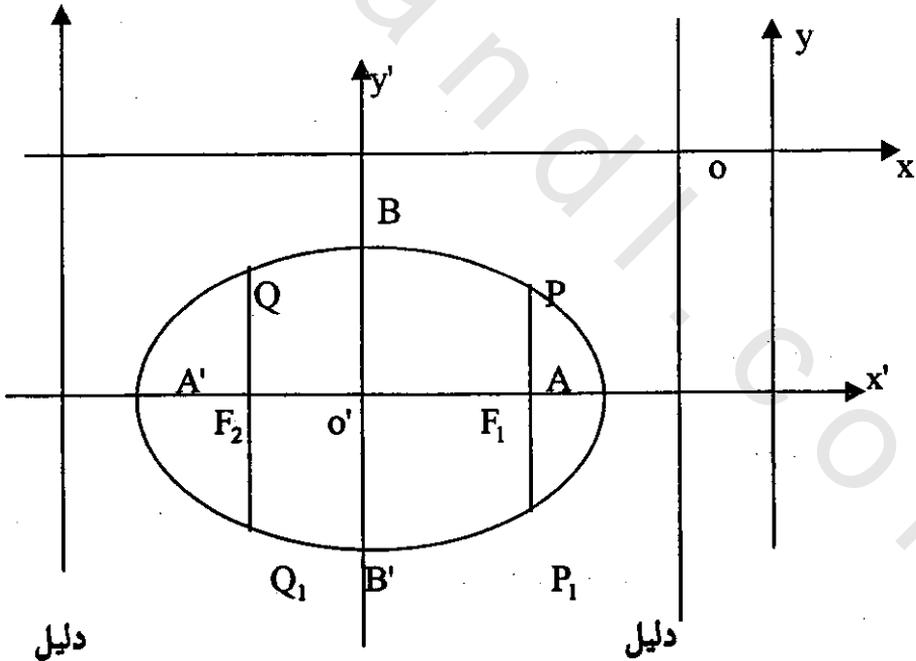
$$P\left(-3+\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\right), P_1\left(-3+\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$Q\left(-3-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\right), Q_1\left(-3-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$$

الدلیلین هما

$$x = \pm \frac{a}{e} + h$$

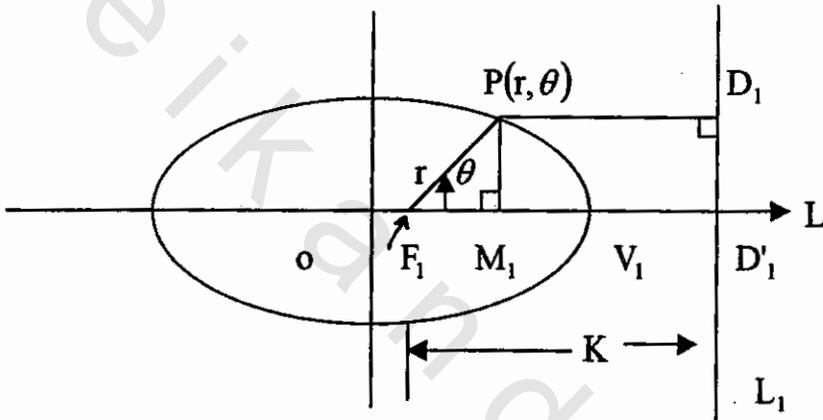
$$= \pm \frac{4}{\sqrt{2}} - 3$$



المعادلة القطبية للقطع الناقص:-

نأخذ الخط الابتدائي منطبق على محور القطع الناقص (الأفقي) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

والبؤرة اليمنى منطبقاً على قطب الإحداثيات القطبية كما هو موضح بالرسم



من تعريف القطع الناقص

$$PF_1 = ePD_1 = e(F_1D_1 - F_1M_1)$$

$$r = e(K - r \cos \theta)$$

$$r = \frac{eK}{1 - e \cos \theta}$$

حيث K بعد البؤرة عن الدليل.

لاحظ المعادلة (1) حصلنا عليها بأخذ البؤرة اليمنى والدليل القريب منها.

$$K = OD'_1 - OF_1$$

$$= \frac{a}{e} - ae$$

بعد الاختصار واستخدام العلاقة بين a, b, c نحصل على

$$K = \frac{a^2 - C^2}{ae} = \frac{b^2}{ae}$$

$$eK = \frac{b^2}{a} = \ell$$

أي أن eK هي نصف الوتر البؤري العمودي

$$r = \frac{\ell}{1 - e \cos \theta}, \quad \ell = eK$$

بدوران المحاور بزاوية π نحصل على

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

وفي هذه الحالة أخذنا البؤرة F_2 مع الدليل L_2 .
بالمثل إذا كان القطع الناقص رأسي فإننا نأخذ العمودي على محور القطع منطبق على
الخط الابتدائي والبؤرة منطبقة على القطب ويمكن أن نرى أن معادلة القطع الناقص
هي

$$r = \frac{\ell}{1 - e \cos \theta}$$

حيث البؤرة F_1 ، الدليل L_1 .

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}$$

حيث البؤرة F_2 ، الدليل L_2 .

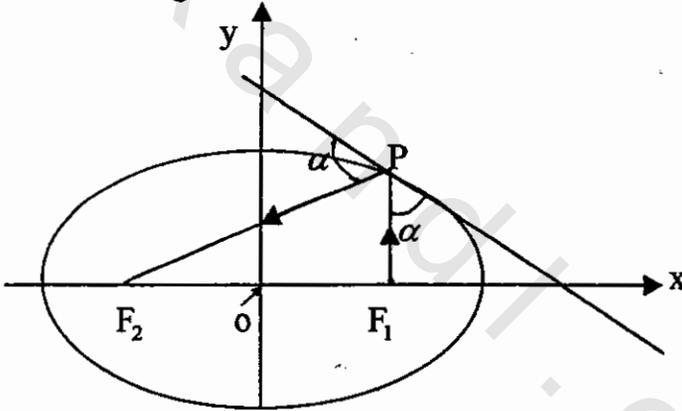
عموماً بالنسبة للقطع الناقص حيث أن معادلتها لها أوضاع مختلفة تختلف باختلاف
البؤرة والدليل يمكن أن نضع المعادلات السابقة في الصورة

$$r = \frac{\ell}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}$$

حيث α هي الزاوية التي يصنعها المحور مع الخط الابتدائي مقاسه في اتجاه ضد عقارب الساعة وتكون α إما أن تساوي 0 أو π أو $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$ على حسب أوضاع القطع الناقص (1)، (2)، (3)، (4) على الترتيب.

خاصية الإنعكاس في القطع الناقص Reflective property

إذا دار القطع الناقص حول محوره الأكبر فإننا نحصل على مجسم ناقص (عدسة ناقصة) يمكن إثبات أن الشعاع الصادر من أحد البؤرتين ينعكس إلى البؤرة الأخرى. هذا بالنسبة لموجات الضوء وأيضا موجات الصوت تتبع هذه الخاصية



تمارين

١- عين إحداثيات البؤرة ونهايات الوترين البؤريين العموديين ومعادلتى الدليلين ثم أرسم القطع في الحالات الآتية:-

(i) $\frac{(y+3)^2}{36} + \frac{(x-6)^2}{16} = 1$

(ii) $16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y + 400 = 0$

(iii) $16x^2 + 4y^2 + 32x - 16y - 32 = 0$

٢- عين معادلة القطع الناقص بحيث يكون

(i) المركز $O'(5,1)$ ، أحد الرؤوس $(5,4)$ نهاية المحور الأصغر $(3, 1)$.

(ii) أحد الرؤوس $(6, 3)$ ، البؤرتان $(\pm 4, 3)$.

(iii) رأسان من رؤوسه $(\pm 5, 0)$ ، طول الوتر البؤري العمودي $\frac{8}{5}$.

٣- مثلث طول محيطه 30 ، رأسان من رؤوسه $(0, -5)$ ، $(0, 5)$ ، عين المنحنى الذي يرسمه الرأس الثالث.

٤- عين الخل الهندسي للنقط $P(x, y)$ التي يكون بعدها عن النقطة $(5, 0)$ هو نصف بعدها عن المستقيم $x=20$.

٥- إذا كان مدار الأرض حول الشمس (قوانين كبلر لحركة الكواكب حول الشمس) هو قطع ناقص حيث الشمس إحدى بؤرتيه وإذا كان نصف طول المحور الأكبر لهذا المدار هو 92.9 مليون ميل والإختلاف المركزي لهذا القطع 0,0168 أوجد أكبر وأصغر بعد للأرض عن الشمس.

٦- أوجد معادلة القطع الناقص الذي له $e = \frac{1}{2}$ وأوجد بؤرتيه $F(-4, 1)$ ومعادلة الدليل القريب من البؤرة المعطاة هي $y+3=0$.

٧- أوجد القطع الناقص الذي يحقق أن $M_1(2, -1)$ تقع عليه وبؤرتيه $F(1, 0)$ والدليل المناظر للبؤرة F هو $2x - y - 10 = 0$.

٨- أوجد معادلة القطع الناقص الذي محاوره تنطبق على محاور الإحداثيات ويمس كل من المستقيمين $3x-2y-20=0$ ، $x + 6y - 20 = 0$.

٩- أوجد نقاط تقاطع الخط المستقيم $x + 2y - 7 = 0$ والقطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 25$.

١٠- أوجد قيم m التي تجعل الخط $y = -x + m$ يمس القطع الناقص

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ أو خلاف ذلك.}$$

١١- بين أن المعادلة $r = \frac{144}{13 - 5 \cos \theta}$ تمثل قطع ناقص وأوجد أنصاف محاوره.

١٢- بين أن المعادلة $r = \frac{21}{5 - 2 \cos \theta}$ تمثل قطع ناقص وأوجد المعادلات القطبية للأدلة

١٣- على القطع الناقص $r = \frac{12}{3 - \sqrt{2} \cos \theta}$ أوجد النقاط التي لها متجه الوضع

$$r = 6$$

١٤- أوجد قيم a, b, C التي تجعل القطع الناقص $4x^2 + y^2 + ax + by + C = 0$

يمس محور السينات عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(-1, 2)$.

١٥- أوجد طول وتر القطع الناقص الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الأكبر للقطع.

١٦- أثبت أن الاختلاف المركزي للقطع الناقص

$$\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ يساوي } 2abx^2 + (a^2+b^2)y^2 = (a+b)^2$$

١٧- عين نوع كل من القطاعات المخروطية الآتية:-

$$r = \frac{6}{2 - \sin \theta}, r = \frac{12}{4 + 3 \cos \theta}$$

وأوجد طول كل من محوريه.