الباب السابع
القيم الذاتية والمتجهات الذاتية
Eigen values and eigen vectors

تعريف (١.٧): إذا كان $T:V \to V$ تحويل خطي من الفراغ V إلى نفسه فإنه يسمى مؤثر خطي Linear Operator.

نفرض أن T مؤثر خطي على الفراغ الاتجاهي V، $0 \neq X \in V$ يقال أن X متجه ذاتي eigen vector للمؤثر T إذا وجد العدد $\lambda \in R$ بحيث يكون $T X = \lambda X$ ويقال للعنصر λ أنه قيمة ذاتية eigen value للمؤثر T.

نظرية (١.٧): مجموعة المتجهات الذاتية المناظرة لقيمة ذاتية λ بالإضافة إلى المتجه الصفري تكون فراغ اتجاهي جزئي من V.

البرهان: نفرض أن مجموعة المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية λ هي V_λ ومعها المتجه الصفري. ونفرض أن $X, Y \in V_\lambda$، إذن

$$T X = \lambda X \;, T Y = \lambda Y$$
$$T(\alpha X) = \alpha T X = \alpha \lambda X = \lambda (\alpha X)$$

إذن $\alpha X \in V_\lambda$، لكل $\alpha \in R$

كذلك

$$T(X+Y) = T X + T Y = \lambda X + \lambda Y$$
$$= \lambda (X+Y)$$

إذن $X+Y \in V_\lambda$ وحيث أن $V_\lambda \subset V$. إذن V_λ فراغ جزئي من V.

ولأهمية القيم الذاتية والمتجهات الذاتية في الحياة العملية نقوم بعرضها بالتفصيل. أي كيفية حسابها ودراسة خواصها.

تعريف (٢.٧): المتجه $X \neq 0$ يسمى بالمتجه المميز للمصفوفة A إذا وجد العدد λ بحيث يكون :

$$A\,X = \lambda\, X \qquad (1)$$

ويسمى λ بالقيمة المميزة للمصفوفة A المناظر للمتجه $X \neq 0$.

وعلى القارئ أن يتذكر أن المتجه X يمكن أن يكتب في الصورة

$$X = [\, x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \,]^t$$

حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ تسمى بمركبات المتجه.ومعنى أن $X \neq 0$ هو أنه يوجد $x_i \neq 0$ لبعض قيم $i = 1, 2, \dots, n$.

ملاحظة (١): على القارئ أن يلاحظ أنه لا يوجد متجه مميز X للمصفوفة A يكون مناظراً لقيمتين مميزتين ولتوضيح ذلك نفرض أنه توجد قيمتين مميزتين λ_1, λ_2 وتناظران المتجه المميز X للمصفوفة A أي أن :

$$A\,X = \lambda_1\, X,\ A\,X = \lambda_2\, X,\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1\, X = \lambda_2\, X$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\,X = 0 \Rightarrow X = 0$$ (وهذا مستحيل)

لأن $X \neq 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ أي أن $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)X \neq 0$

ملاحظة (٢): قد يكون هناك قيمة مميز واحدة λ بحيث تناظر أكثر من متجه مميز لأنه إذا كانت X متجه مميز فإن k X يكون أيضاً متجهاً مناظراً لنفس القيمة λ وذلك يمكن استنتاجه من المعادلة

$$A\,X = \lambda\, X\ ,\ \therefore\ A\,k\,X = \lambda\, k\, X$$

وهذا يوضح أن $k\,X$ يكون أيضا متجها مميزا منــــاظرا لنفـــس القيمـــة المميزة λ .

المعادلة المميزة : Characteristic equation

من المعادلة (1) نعلم أن: $A\,X=\lambda\;X=\lambda\,I_n\;X$. وبفرض أن $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة من رتبة $n\times n$، I_n هي مصفوفة الوحدة فإننا نحصل على :

$$(A-\lambda\,I_n)X=0$$

أو على الصورة :

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=0 \qquad (2)$$

ونلاحظ أن النظام (2) عبارة عن مجموعة من المعـــــادلات المتجانســـة ونعلم أن النظام (2) له حل غير الحل الصفري إذا كان وكان فقط.

$$\operatorname{Det}\left(A-\lambda\,I_n\right)=\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}=0 \qquad (3)$$

ويجب ملاحظة أن مفكوك المحدد (3) هو دالة في λ أي كثيرة حدود في λ من درجة n وبوضع

$$f(\lambda)=\operatorname{Det}\left(A-\lambda\,I_n\right)$$

نحصل على

$$f(\lambda) = \text{Det}\left(A - \lambda I_n\right) = \text{Det}\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

أي أن :

$$f(\lambda) = \left| A - \lambda I_n \right| = \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_n \lambda + C_n \qquad (5)$$

حيث $C_1, C_2, \dots, C_n$ تكون كل منها كثيرة حدود في العناصر a_{ij}.

نعتبر المعادلة :

$$f(\lambda) = \left| A - \lambda I_n \right| = 0 \qquad (6)$$

وهذه المعادلة من الدرجة n في λ وتسمى بالمعادلة المميزة للمصفوفة A وتسمى $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ بالجذور المميزة characteristic roots (latent root) للمصفوفة وهي المناظرة للمتجهات المميزة (الجذور الكامنة).

نظرية (٢.٧) (نظرية كيلي هاملتون) : كل مصفوفة مربعة A تحقق معادلتها الذاتية.

أي أن :

$$A^n + C_1 A^{n-1} + C_2 A^{n-2} + \dots + C_{n-1} A + C_n I_n = 0$$

البرهان: نفرض أن B هي المصفوفة المترافقة للمصفوفة $(A - \lambda I_n)$ فتكون عناصرها كثيرات حدود من الدرجة (n-1) أو أقل ومعاملات λ في كثيرات الحدود هذه كل منها كثيرة حدود في العناصر a_{ij} ولذلك يمكن كتابة

$$B = B_o + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1} \qquad (7)$$

حيث $B_o, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ كل منها مصفوفة مربعة من رتبة (n-1) وعناصرها كثيرات حدود في a_{ij}.

نعتبر المعادلة :
$$(A-\lambda I_n)\frac{B}{|A-\lambda I_n|} = I$$

وباستخدام (5)، (7) تصبح هذه المعادلة على الصورة :

$$(A-\lambda I_n)(B_o + \lambda B_1 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1}) = (\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n) I_n$$

وبمساواة معاملات λ في هذه المتطابقة نحصل على :

الحد المطلق : $A B_o = C_o I_n$

معامل λ : $-B_o + A B_1 = C_{n-1} I_n$

.... : ....

معامل λ^{n-1} : $-B_{n-2} + A B_{n-1} = C_1 I_n$

معامل λ^n : $-B_{n-1} = I_n$

وبضرب هذه المعادلات في $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, A^n$ على الترتيب والجمع نحصل على :

$$A^n + C_1 A^{n-1} + C_2 A^{n-2} + \ldots + C_{n-1} A + C_n I_n = 0$$

وهو المطلوب إثباته.

ملاحظة (٣): من أهم استخدامات نظرية كيلي هاملتون حساب معكوس مصفوفة مربعة غير شاذة.

نفرض أن لدينا مصفوفة A مربعة غير شاذة ومن نظرية كيلي هاملتون نحصل على :

$$A^n + C_1 A^{n-1} + C_2 A^{n-2} + \dots + C_{n-1} A + C_n I_n = 0$$

وبضرب طرفي المعادلة في A^{-1} يمكن الحصول على :

$$\therefore\ A^{-1} = -\frac{1}{C_n}\left(A^{n-1} + C_1 A^{n-2} + \dots + C_{n-1} I_n\right)$$

حيث $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -C_1\ ,\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n C_n \neq 0$

كيفية تعيين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المميزة لمصفوفة مربعة A

نفرض أن λ هي إحدى القيم المميزة، X هو المتجه المميز المناظر لها فإن : $AX = \lambda X = \lambda I_n X$

وبفرض أن المصفوفة A من الرتبة $n \times n$ إذن

$$(A - \lambda I_n)X = 0 \qquad (8)$$

وبالعكس إذا كان λ هو أحد جذور المعادلة (8) فإن المعادلة المصفوفية :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

بالضرورة لابد أن يكون لها حل غير صفري X يحقق العلاقة :

$$AX = \lambda X$$

وهذا يعني أن أي جذر من جذور المعادلة المميزة (8) هو أيضاً قيمة مميزة للمصفوفة A.

نظرية (٣.٨): المصفوفة الصفرية قيمها الذاتية منعدمة.

البرهان: نفرض أن

$$A = 0 \Rightarrow |0 - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow \lambda^n = 0, \lambda_i = 0,\ \forall 1, 2, 3, \dots, n$$

نظرية (٤.٧): القيم الذاتية لمصفوفة الوحدة متساوية وتساوي الواحد الصحيح.

البرهان: نفرض أن

$$A = I_n \Rightarrow | I_n - \lambda I_n | = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^n I_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 1, \ \forall 1, 2, 3, \ldots, n$$

نظرية (٥.٧): المصفوفة القطرية $D = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ لها :

$$\lambda_i = a_i \ , \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

نظرية (٦.٧): المصفوفة A تكون شاذة إذا كان وكان فقط إحدى قيمها الذاتية يساوي صفرا.

البرهان: من نظرية المعادلات نجد أن حاصل ضرب الجذور المميزة يساوي $(-1)^n C_n$ ، $C_n = \mathrm{Det}(A)$ فإذا كان أحد الجذور يساوي صفر فإن $C_n = 0$ أي أن $\mathrm{Det}\,(A) = 0$ وبالتالي تكون A مصفوفة شاذة.

نظرية (٧.٧): المصفوفتان A, A^T لهما نفس القيم الذاتية.

البرهان : نعلم أن $|A| = |A^t| \Rightarrow \left| \left(A^t - \lambda I_n\right)^t \right| = | A - \lambda I_n |$

أي أن المصفوفتين A, A^T لهما نفس المعادلة المميزة وهذا يؤدي بدوره إلى أن لهما نفس القيم الذاتية.

نظرية (٨.٧): إذا كانت λ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $\dfrac{1}{\lambda}$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1}.

نظرية (٩.٧): المتجهات الذاتية المناظرة لقيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة خطياً.

البرهان: نفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A وأن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هي المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية على الترتيب.

∴ لجميع قيم i نحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} A\,X_1 = \lambda_i\, X_i \\ A^2\, X_i = \lambda_i^2\, X_i \\ A^3\, X_i = \lambda_i^3\, X_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^n\, X_i = \lambda_i^n\, X_i \end{array}\right\} ,\ \forall\ i = 1, , \ldots, n \qquad (*)$$

ونفرض أن هناك علاقة بين هذه المتجهات على الصورة :

$$C_1\, X_1 + C_2\, X_2 + \ldots + C_n\, X_n = 0 \qquad (9)$$

وبضرب العلاقة (9) من اليسار في $A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ على الترتيب واستخدام (*) نحصل على :

$$C_1\, \lambda_1\, X_1 + C_2\, \lambda_2 X_2 + C_3 \lambda_3 X_3 + \ldots + C_n\, \lambda_n X_n = 0 \qquad (10)$$

$$C_1\, \lambda_1^2\, X_1 + C_2 \lambda_2^2 X_2 + C_3 \lambda_3^2 X_3 + \ldots + C_n \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad (11)$$

$$\vdots$$

$$C_1\, \lambda_1^{n-1}\, X_1 + C_2 \lambda_2^{n-1} X_2 + C_3 \lambda_3^{n-1} X_3 + \ldots + C_n \lambda_n^{n-1} X_n = 0 \qquad (12)$$

والمعادلات (12) – (9) يمكن كتابتها على الصورة المصفوفية :

$$[C_1 X_1, C_2 X_2, C_3 X_3, \dots, C_n X_n]\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & & \lambda_{13}^{n-1} \\ & & & & \lambda_n^{n-1} \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & & \end{bmatrix} = 0$$

أو $C\Psi = 0$ حيث $\operatorname{Det}\Psi = \prod_{1 \le q < p \le n} (\lambda_p - \lambda_q) \neq 0$

$\operatorname{Det}\Psi$ يسمى محدد فاندرموند وبالتالي تكون المصفوفة Ψ ($\lambda_i \neq \lambda_j$) غير شاذة وبالتالي $C = 0$ وهذا لا يحدث إلا إذا كان : $C_i = 0, \forall\, i$، أي المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة خطياً (أي لا توجد علاقة بينهما).

عكس هذه النظرية غير صحيح والمثال على ذلك مصفوفة الوحدة I_n هي مصفوفة قطرية وجذورها المميزة تساوي الواحد ومكررة n من المرات في نفس الوقت المتجهات الذاتية مستقلة خطياً.

مثال (١): أوجد المعادلة المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

وأثبت أن هذه المصفوفة تحقق معادلتها الذاتية ومن ثم أوجد A^{-1}.

الحل: $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$\therefore$ المعادلة المميزة هي : $f(\lambda) = |A - \lambda I_3|$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0 \qquad (1)$$

ولإثبات أن المصفوفة A تحقق معادلتها الذاتية نبرهن أن :

$$-A^3+6A^2-9A+4I=0 \qquad (2)$$

وبحسابات بسيطة يمكن حساب A^2 ، A^3 على الصورة

$$A^2=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن A, A^2, A^3, I في (2) نجد أنها محققة.

ولإيجاد معكوس المصفوفة A^{-1} نجد من (2) (بضرب المعادلة (2) في A^{-1}) أن

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A^2-\frac{3}{2}A+\frac{9}{4}I_3=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

أي يكون :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

مثال (٢): أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل: المعادلة الذاتية هي :

$$|A-\lambda I_3| = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore\ -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 45\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-3)(\lambda-15) = 0$$

$\therefore$ القيم الذاتية للمصفوفة A هي : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 15$

ولنفرض أن x, y, z هي مركبات المتجه المميز X أي أن :

$[x \quad y \quad z]^t$

عندما يكون $\lambda_1 = 0$ يكون : $(A - 0\,I_3) = 0$ فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي يكون :

$$\left.\begin{aligned} 8x - 6y + 2z &= 0 \\ -6x + 7y - 4z &= 0 \\ 2x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

وهذه المعادلات متجانسة في المجاهيل x, y, z وكما سبق رأينا أن لهذه المعادلات حلاً غير صفري إذا كان $\mathrm{rank}(A) < n$ حيث n عدد المجاهيل أي تكون مرتبة المصفوفة A هي 2 أو $r = 1$ أي أن هذه المعادلات لها عدد لانهائي من الحلول ويمكن في هذه الحالة إعطاء قيم اختيارية لعدد n-r من المتغيرات x, y, z بالنسبة للنظام (3) .

بإجراء العمليات الأولية على صفوفه نجـــد أن$r=2$ ولذلـــك نفــرض أن المتغيرات بقيمة اختياريةk وليكنz مثلاً ثم نحل باقي المعادلات بدلالة z.

(بضرب المعادلة الأولى في 2 والجمع على المعادلة الثانية)

$$\therefore\ 10x - 5y = 0 \Rightarrow 2x = y$$

وبالتعويض من المعادلة الأخيرة في (3) نحصل على :

$$-3x + 3z = 0 \ \Rightarrow x = z$$

وبوضع $z = k$ (عدد ثابت لا يساوي صفر).

$\therefore$ حلول المعادلات (3) هي : $x = \frac{1}{2}k, y = k, z = k$

أي يوجد عدد لانهائي من الحلول غير الصفرية لمجموعة المعادلات (3)

وبأخذ $k=2$ مثلاً نحصل على : $x = 1, y = 2, z = 2$

أي أن المتجه المناظر للقيمة $\lambda_1 = 0$ هو : $X_1 = [1 \quad 2 \quad 3]^t$

وبالطبع إذا أخذنا أي قيمة للثابت k فإننا نحصل على المتجه المميز $k\,X$ أي له نفس اتجاه المتجه X ولكن يختلف في الطول وكما رأينا ســابقا إذا كان X متجه مميز للقيمة λ فإن $k\,X$ يكون متجها مميزا آخــر منــاظرا لنفس القيمة λ .

عندما $\lambda_2 = 3$ يكون المتجه المناظر هو متجهX الذي يحقق المعادلة :

$$(A - 3I_3)X = 0$$

وبنفس الطريقة السابقة نحصل على المتجه الذي له المركبات :

$$X_2 = [2 \quad 1 \quad -1]^t$$

وبالمثل عندما $\lambda_3 = 15$ نحصل على المتجه المميز :

$$X_3 = [2 \quad -2 \quad 1]^t$$

وعلى ذلك فإن المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 15$ هي المتجهات التي لها المركبات الآتية حسب الترتيب :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

يمكنك التأكد من أن هذه المتجهات مستقلة خطياً.

المصفوفة $P = (X_1 \quad X_2 \quad X_3)$ تحقق أن :

$$P^{-1} A P = \operatorname{diag}(0, 3, 15)$$

أي أن المصفوفة P هي مصفوفة التغير من الأساس القديم $\{e_1, e_2, e_3\}$ إلى الأساس الجديد $\{X_1, X_2, X_3\}$ المكون من المتجهات الذاتية.

ومن هذا المثال يمكن صياغة النتيجة الآتية :

نتيجة (١): إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ وكانت كثيرة الحدود المميزة لها n من الجذور المختلفة فإن A تشابه مصفوفة قطرية عناصر قطرها الأساسي هي الجذور المميزة.

مثال (٣): أثبت أن المصفوفة A تماثل مصفوفة قطرية B ثم أوجد المصفوفة B التي تحقق العلاقة $B = P^{-1} A P$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$$

الحل: المعادلة المميزة تعطى بالآتي :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

إذن الجذور المميزة هي :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \ , \lambda_3 = -1$$

لإيجاد المتجهات الذاتية (المميزة) $(A-\lambda I)X^t = 0$

في حالة $\lambda = 1$ (جذر مكرر): بالتعويض عن $\lambda = 1$ في النظام

$$(A-\lambda I)X = 0$$

نحصل على :

$$6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0$$
$$10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0$$
$$12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0$$

واضح أن المعادلات الثلاث هي معادلة واحدة مكررة

$$\therefore \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

أو

$$x_1 = 2x_2 - x_3$$

بوضع $x_3 = -1, x_2 = 0$ نحصل على المتجه الذاتي :

$$A_1 = (1,0,-1)$$

بوضع $x_3 = 0, x_2 = 1$ نحصل على المتجه الذاتي :

$$A_2 = (2,1,0)$$

واضح أن A_1, A_2 مستقلين خطياً حيث أن حلول مجموعة المعادلات السابقة تكون فراغاً اتجاهياً بعده 2.

بالمثل في حالة $\lambda = -1$ نحصل على نظام المعادلات الخطية :

$$8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0$$
$$10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0$$
$$12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0$$

أو

$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0$$
$$5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0$$
$$6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

أو

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0$$
$$6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0$$

واضح أن فراغ حلول هذه المعادلات بعده الوحدة.

بوضع $x_3 = t$ نحصل على :

$$\therefore \left.\begin{aligned} 5x_1 - 9x_2 &= -5t \\ 6x_1 - 12x_2 &= -7t \end{aligned}\right\}$$

وبضرب المعادلة الثانية في $\frac{5}{6}$ نحصل على

$$\therefore \left.\begin{aligned} 5x_1 - 9x_2 &= -5t \\ 5x_1 - 10x_2 &= \frac{-35t}{6} \end{aligned}\right\}$$

وبالطرح نحصل على :

$$x_2 = \frac{35}{6}t - 5t$$

بوضع $t = 6$ ومن المعادلة الثانية يكون

$$x_2 = 35 - 30 = 5$$
$$x_1 = 10 - 7 = 3$$

المصفوفة القطرية التي تماثل A تكون على الصورة :

$$\operatorname{diag}(1, 1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وبكتابة المتجهات A_1, A_2, A_3 كمتجهات أعمدة في المصفوفة P وبنفس الترتيب نحصل على :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

ومنها نتحقق من أن :

$$P^{-1} A P = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$$

مثال (٤): هل المصفوفة A تشابه مصفوفة قطرية ؟ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل: $|A - \lambda I| = -(\lambda + 1)^3$ إذن $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

أي أن كثيرة الحدود المميزة لها جذر مكرر ثلاث مرات.

المعادلة $(A - \lambda\ I_3)X^t = 0$ تعطي

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad \lambda = -1$$

واضح أن رتبة مصفوفة المعاملات، لهذه المعادلات هي الواحد(المعادلات الثلاث عبارة عن معادلة واحدة هي $x_1 + x_3 = 0$) لذلك فإن متجـــهات الحلول تكون فراغاً خطياً بعده الوحدة وليكن أساس هــــذا الفــراغ هــو المتجه $A=(1,1,-1)$ (بفرض أن x_2 اختياري) وحيث أن الجذور الثلاثـة متساوية وجميعها تناظر متجهاً واحداً ذاتياً فإن المصفوفـــة A لا تشـــابه مصفوفة قطرية.

تمارين (٧)

(١) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للتحويلات الممثلة بالمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

(٢) وضح أن المصفوفات الآتية تشابه مصفوفة قطرية

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

(٣) أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفات الآتية

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $D = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(vi) $F = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -6 & -6 \\ 4 & -1 & -4 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ (v) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(٤) أوجد المعادلة المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ وأثبت أن هـذه المصفوفة تحقق معادلتها الذاتية ومن ثم أوجد معكوسها.

(٥) أوجد قيم a, b التي تجعل للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ 1 & 4 & b \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي ثم احسب القيم والمتجهات الذاتية الأخرى.

(٦) أوجد شرط أن يكون للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ قيمة ذاتية مساوية للواحد الصحيح.

(٧) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A التي تحقق

$$6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}+18\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}+6\,I_3=0$$

حيث I_3 مصفوفة الوحدة.

(٨) برهن أنه إذا كانت A، B مصفوفتين مربعتين من درجة $n\times n$ وكانت A غير شاذة فإن المصفوفات $B\,A^{-1}, A^{-1}B$ لهما نفس القيم الذاتية.

(٩) برهن أن المصفوفات $A^{-1}B\,A, B$ لهما نفس القيم المميزة.

(١٠) بين أي من المصفوفات الآتية تشابه مصفوفة قطرية

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$