

الباب الثامن

فراغات الضرب الداخلي (الفراغات القياسية) Inner Product Spaces (Metric Spaces)

(١.٨) الضرب الداخلي Inner Product

نفرض أن V فراغ حقيقي (معرف على R) ونفرض الدالة

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$$(a, b) \rightarrow \langle a, b \rangle \in R$$

التي تحدد لكل زوج من متجهات V عدد حقيقي. الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle$ تسمى ضرب داخلي إذا حققت الشروط الآتية :

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ التماثل

(ii) $\langle r u + s v, w \rangle = r \langle u, w \rangle + s \langle v, w \rangle$ التجميع والخطية Associative

(iii) $\langle u, u \rangle > 0 ; \langle 0, 0 \rangle = 0, \forall u \neq 0$

إيجابية بالتحديد positive definite

الفراغ V المعرف عليه الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle$ يسمى فراغ الضرب الداخلي ويرمز له بالرمز $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

بما أن الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle$ تحدد لكل متجهين من V عدد قياسي في R ، أحياناً تسمى الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle$ الضرب القياسي، وغالباً فراغات الضرب الداخلي محدودة البعد تسمى الفراغات الاقليدية.

باستخدام خاصية التماثل والخاصية الخطية يمكنك أن تثبت أن الضرب الداخلي خطي في كل متغيراته. ولهذا يقال أن الضرب الداخلي خطي

بالنسبة لكل متغيراته bilinear.

مثال (١): الضرب القياسي $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ المعرفة بالشكل

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n a_i b_i, u = (a_i), b = (b_i)$$

تحقق خواص الضرب الداخلي.

مثال (٢): نفرض أن $B = \{(1, 3), (4, 2)\}$ أساس للفراغ V_2 وتعرف

$\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ بالآتي :

$$\langle u, v \rangle_B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

حيث $u: (a_1, a_2)_B, v: (b_1, b_2)_B$ ، أثبت أن الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ ضرب داخلي.

الحل: نتحقق من أن $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ موجبة بالتحديد $u \neq 0$ إذا كان وكان فقط

الإحداثيات تحقق $(a_1)^2 + (a_2)^2 > 0$ بمعنى أن $u \neq 0$ إذا كان وكان فقط

$$\langle u, u \rangle_B > 0$$

مثال (٣):

فراغ الضرب الداخلي $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ ليست هو الفراغ $E_2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$

حيث E هو الأساس القياسي $\{e_1, e_2\}$ ونرمز هنا $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ بالرمز o ليصبح

$$E_n = (\mathbb{R}^n, 0), o = \langle \cdot, \cdot \rangle_E$$

الحل: نوضح ذلك بمثال

$$\langle (1, 3), (1, 3) \rangle_B = 1$$

لأن

$$(1, 3) : (1, 0)_B$$

لكن

$$(1, 3) \circ (1, 3) = 1 + 9 = 10$$

كذلك

$$(-2, 4) : (2, -1)_B$$

$$(1, -7) : (-3, 1)_B$$

إذن

$$\langle (-2, 4), (1, -7) \rangle_B = 2(-3) + (-1)1 = -7$$

استخدام الأساس كتعريف للضرب الداخلي يمكن تطبيقه بسهولة

لأي فراغ محدود البعد والمثال على ذلك فراغات كثيرات الحدود

مسألة (٤): المجموعة $B = \{1, t, t^2\}$ هي أساس للفراغ $R_3[t]$ وتعرف

الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ كالآتي :

$$\langle a_1 + a_2 t + a_3 t^2, b_1 + b_2 t + b_3 t^2 \rangle_B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

من السهل أن نبين أن $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ يحقق شروط الضرب الداخلي ولهذا

$R_3[t]$ مع $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ تعرف فراغ ضرب داخلي من كثيرات الحدود.

فراغ الضرب الداخلي ليس بالضرورة أن يكون محدود البعد

ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

مسألة (٥): نعتبر الفراغ $F[0, 1]$ ونعرف

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \forall f, g \in F$$

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{3}, \quad \langle 6x, \sqrt{1-x^2} \rangle = 2 \quad \text{إن}$$

$$\langle \sin \pi x, \cos \pi x \rangle = \int_0^1 \sin \pi x \cos \pi x \, dx = 0$$

ومن خواص التكامل يمكن التحقق من أن شروط الضرب الداخلي محققة.

(٢.٨) التعمد والمعيار The norm and orthogonality

نعلم أن طول المتجه u في المستوى E_2 يعطى من $\sqrt{u \cdot u}$ وهذه

الفكرة يمكن تعميمها في فراغات الضرب الداخلي.

تعريف (١.٨): نفرض أن $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فراغ ضرب داخلي، يعرف معيار

المتجه $u \in V$ بالقيمة $\sqrt{\langle u, u \rangle}$ ويرمز له بالرمز $\|u\|$ ويقال أن u متجه

وحدة إذا تحقق $\|u\| = 1$.

نوجد علاقة هامة بين الضرب الداخلي لمتجهين ومعيار كل منهم

تعطى من خلال متباينة شفارتز Schwartz Inequality

نظرية (١.٨): نفرض أن u, v متجهات في فراغ الضرب الداخلي إن

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

أو

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

البرهان: نعتبر المتجه $xu + v$ لأي عدد $x \in \mathbb{R}$ وبما أن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ موجب

بالتحديد

$$0 \leq \langle xu + v, xu + v \rangle$$

وباستخدام خصائص الضرب الداخلي نجد أن :

$$0 \leq x^2 \langle u, u \rangle + 2x \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$= \|u\|^2 x^2 + 2 \langle u, v \rangle x + \|v\|^2$$

لجميع قيم x الحقيقية. وهذا يعني أن القطع المكافئ

$$y = \|u\|^2 x^2 + 2 \langle u, v \rangle x + \|v\|^2$$

بالكامل يقع فوق محور x أو يمسه ولهذا توجد على الأكثر قيمة حقيقية

للعدد x بحيث $y = 0$ والمميز discriminant

$$(2 \langle u, v \rangle)^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2$$

يجب أن يكون غير موجب ومنها

$$(2 \langle u, v \rangle)^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

بالقسمة على 4 نحصل على المطلوب.

متباينة المثلث Triangle Inequality

نظرية (٢.٨): نفرض أن u, v متجهات في فراغ الضرب الداخلي

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{إن}$$

البرهان:

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + \|u\| \|v\| + \|v\|^2$$

$$\leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

من التماثل والتوزيع

(من متباينة شفارتز)

وفي الفراغ الاقليدي يتضح أن هذه المتباينة تعميم لخواص المثلث وهي مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث.

متباينة شفارتز تعمم قياس الزاوية في المستوى الاقليدي E_2 لأي فراغ ضرب داخلي، أي أنه لأي متجهين غير صفرين يكون

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

وهذه المتباينة تؤدي إلى

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

وبالتالي توجد بالتحديد زاوية $0 \leq \theta \leq \pi$ تحقق

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

قانون جيب التمام Law of Cosines

لأي فراغ ضرب داخلي، قانون جيب التمام ينتج تبعاً لتعريف الزاوية نظرية (٣.٨): إذا كان u, v متجهات في فراغ ضرب داخلي و θ الزاوية بينهم، إذن

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \|v\| \cos \theta$$

البرهان: البرهان يتضح من أن

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

ومن تعريف المعيار والزاوية نصل إلى نهاية البرهان.

ملاحظة: الزاوية بين أي متجهين في فراغ ضرب داخلي عام ليس بالضرورة أن تفسر هندسياً.

مثال (٦): إذا كان $u, v \in V_n$ حيث V_n معرف عليه الضرب الداخلي \langle , \rangle

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

أثبت أن:

الحل: باستخدام النظرية السابقة نحصل على المطلوب.
تعريف (٢.٨): نفرض أن (V, \langle , \rangle) فراغ ضرب داخلي، المتجهان $u, v \in V$ يقال أنهم متعامدين إذا تحقق $\langle u, v \rangle = 0$.

نظرية فيثاغورث: Pythagorean theorem

يمكن صياغتها في أي فراغ ضرب داخلي ويمكن برهنتها

بإستبدال v بالمتجه $-v$

في قانون جيب التمام يتضح

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

لأي متجهين متعامدين u, v

تعريف (٣.٨): الأساس $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ للفراغ V يقال أنه أساس

عيارى متعامد orthogonal basis لفراغ الضرب الداخلي (V, \langle , \rangle) إذا تحقق

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j$$

مثال (٧): المجموعات $B_1 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$$B_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

أساسات عيارية متعامدة للفراغات E_3, E_2 على الترتيب.

الحل: باستخدام التعريف (٢) لكل مجموعة نصل إلى المطلوب.

مثال (٨): المجموعات

$$B_1 = \{ (\cos \phi, \sin \phi), (-\sin \phi, \cos \phi) \},$$

$$B_2 = \{ (\cos \phi, \sin \phi), (\sin \phi, \cos \phi) \},$$

أساسات عيارية متعامدة للمستوى E_2 .

الحل: باستخدام المتطابقة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ نحصل على المطلوب.

مثال (٩): نفرض أن $T: E_2 \rightarrow E_2$ حيث الأساس القياسي (المعتاد)

$\{e_1, e_2\}$ للمستوى E_2 تغيير إلى الأساس B_1 في المثال السابق، إذن

$$T e_1 = T(1, 0) = (\cos \phi, \sin \phi)$$

$$T e_2 = T(0, 1) = (-\sin \phi, \cos \phi)$$

إذن مصفوفة التحويل الخطي هي :

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

ولهذا T تعطى بالآتي :

$$T(x, y) = T(x e_1 + y e_2)$$

أو

$$T(x, y) = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi, y \cos \phi)$$

بمعنى أن التغير في الأساس يكافئ دوران المحاور بزواوية ϕ .

مثال (١٠): نفرض أن $B = \{ (2, 5), (1, 4) \}$ أساس للفراغ V_2 ، $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$

ضرب داخلي للفراغ V_2 معرف باستخدام الإحداثيات بالنسبة إلى B إذن

$$\langle (2, 5), (2, 5) \rangle_B = 1 = \langle (1, 4), (1, 4) \rangle_B$$

$$\langle (2, 5), (1, 4) \rangle_B = 0$$

ولهذا B أساس عياري متعامد لفراغ الضرب الداخلي $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$. لاحظ

أن الأساس القياسي $\{e_1, e_2\}$ للفراغ V_2 ليست متعامدة بالنسبة لفراغ

الضرب الداخلي $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ ، على سبيل المثال معيار المتجه $(1, 0)$ هو

$$\sqrt{41/3} \text{ ولهذا } (1, 0) \text{ ليست متجه وحدة في هذا الفراغ.}$$

نتيجة هذا المثال يمكن تعميمها لأي فراغ ضرب داخلي اختياري ذو بعد

محدود.

نظرية (٤.٨): المجموعة B أساس عياري متعامد للفراغ $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ إذا

كان وكان فقط $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ تساوي $\langle \cdot, \cdot \rangle$. بمعنى أنه إذا كان

$$u: (a_1, a_2, \dots, a_n)_B$$

$$v: (b_1, b_2, \dots, b_n)_B$$

إذن B عيارية متعامدة إذا كان وكان فقط $\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

وهذه النظرية تعني أن إحداثيات المتجه بالنسبة لأساس عياري متعامد

يمكن التعبير عنها من خلال الضرب الداخلي.

نتيجة: إذا كان $B = \{r_1, \dots, r_n\}$ أساس عياري متعامد للفراغ $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$

إذن الإحداثي i للمتجه u بالنسبة للأساس B هو $\langle u, v_i \rangle$ بمعنى أن :

$$u: (\langle u, v_1 \rangle, \dots, \langle u, v_n \rangle)$$

في بعض الحالات لا نتمكن من الحصول على أساس عياري متعامد لفراغ الضرب الداخلي ولذلك نلجأ إلى التعريف التالي :

تعريف (٤.٨): نفرض أن S مجموعة جزئية من متجهات غير صفيرية من فراغ ضرب داخلي $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. المجموعة S تكون متعامدة إذا كان

$$\langle u, v \rangle = 0, \forall u, v \in S, u \neq v$$

المجموعة المتعامدة S تكون عيارية متعامدة إذا كان

$$\|u\| = 1, \forall u \in S$$

ملاحظة: الأساس العياري المتعامد هو عبارة عن مجموعة عيارية متعامدة وكذلك مجموعة متعامدة وعلى العكس أي مجموعة جزئية عيارية متعامدة في فراغ ضرب داخلي ليست بالضرورة أن تكون أساس للفراغ، مثال لذلك المجموعة $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ عيارية متعامدة في E_2 ولكن ليست أساس له. المجموعة العيارية المتعامدة يمكن الحصول عليها من المجموعة المتعامدة (لماذا؟).

نظرية (٥.٨): مجموعة المتجهات المتعامدة orthogonal مستقلة خطياً.

البرهان: نفرض S مجموعة جزئية من المتجهات المتعامدة في فراغ ضرب داخلي $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ، المجموعة S تكون مستقلة خطياً إذا لم يوجد مجموعة جزئية محدودة منها مرتبطة خطياً (لاحظ أن V ليست بالضرورة أن تكون محدودة البعد).

ولهذا نفرض أن $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ لعدد k من متجهات v_i من S .

$$0 = \langle 0, v_i \rangle = \langle a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_k v_k, v_i \rangle \quad \text{إن}$$

$$= a_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + a_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + a_k \langle v_k, v_k \rangle$$

$$= a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

بما أن $v_i \neq 0$ فإن $a_i = 0$ لبعض قيم i ، $1 \leq i \leq k$ إذن S مستقلة خطياً.

مثال (١١): مجموعة الدوال العيارية المتعامدة من الفراغ $F[0,1]$

والمعرف عليها تكامل الضرب الداخلي $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ يمكن تكوينها باستخدام الحقيقية :

$$\int_0^1 \sin 2n\pi x dx = \int_0^1 \cos 2n\pi x dx = 0, n > 0$$

مثلاً

$$\langle \sin 2n\pi x, \cos 2m\pi x \rangle = \int_0^1 \sin 2n\pi x \cos 2m\pi x dx = 0$$

ولهذا الدوال $\sin 2n\pi x$, $\cos 2m\pi x$ متعامدين لكل الأعداد الصحيحة الموجبة m, n وأكثر من ذلك بما أن

$$\int_0^1 \sin^2 2n\pi x dx = \frac{1}{2}$$

أي أن معيار الدالة $\sin 2n\pi x$ يساوي $\frac{1}{2}$ وتكون الدالة $\sqrt{2} \sin 2n\pi x$ متجه وحدة.

باتباع هذا الأسلوب يمكن أن نرى أن

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \sin 2\pi x, \sqrt{2} \cos 2\pi x, \dots, \right. \\ \left. \sqrt{2} \sin 2n\pi x, \sqrt{2} \cos 2n\pi x, \dots \right\}$$

مجموعة عيارية متعامدة للفراغ $F[0, 1]$ المعروف عليه تكامل الضرب الداخلي.

وهذا المثال غاية في الأهمية بالنسبة لتحليل فوريير Fourier analysis

(٣.٨) **طريقة جرام - شميدت : The Gram - Schmidt Process**

رأينا سابقاً أن الأساسات العيارية المتعامدة تكون أحسن وأفضل أساسات لفراغات الضرب الداخلي - طريقة جرام شميدت تمكننا من الحصول على أساس عياري متعامد من أساس معطى.

مثال (١٢): نفرض أن $S = L\{u_1, u_2\} \subset E_3$ فراغ جزئي من E_2 مولد

بالاتجاهات $u_1 = (2, 1, -2), u_2 = (0, 1, 2)$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ بوضع}$$

نكون المتجه

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

حيث $\langle u, v \rangle = u \cdot v$ معرف على E_3 بالطريقة

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ بوضع}$$

نحصل على : $\{v_1, v_2\} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$

وهي أساس عياري متعامد للفراغ الجزئي S أمكن تكوينه من u_1, u_2 .

هذا الأسلوب يمكن تعميمه من خلال النظرية التالية :

نظرية (٦.٨) (طريقة جرام شميدت) :

نفرض أن R^n فراغ ضرب داخلي له الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$. إذن E_n له أساس عياري متعامد $\{v_1, \dots, v_n\}$ حيث

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, v_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}, 1 < k \leq n$$

$$w_k = u_k - \langle u_k, v_1 \rangle v_1 \dots - \langle u_k, v_{k-1} \rangle v_{k-1}$$

$$L\{v_1, \dots, v_n\} = L\{u_1, \dots, u_n\} \quad \text{إذن}$$

وهذه النظرية يمكن برهنتها بالاستنتاج الرياضي Mathematical induction

تعريف (٥.٨): نفرض S فراغ اتجاها جزئي من فراغ ضرب داخلي E . المجموعة

$$S^\perp = \{v \in E \mid \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in S\}$$

تسمى المكمل العمودي للفراغ الجزئي S orthogonal complement

مثال (١٣): إذا كانت S هي الخط المستقيم

$$S = L\{(1, 3, -2)\}$$

في الفراغ E_3 ما هو المكمل العمودي للخط S .

الحل: نفرض $(x, y, z) \in S^\perp$ إذن

$$(x, y, z) \cdot (1, 3, -2) = 0$$

أو

$$x + 3y - 2z = 0$$

وهي معادلة مستوى أي أن S^\perp عمودي على الخط المستقيم S بالمفهوم الهندسي.

لاحظ أن $E_3 = S \oplus S^\perp$ أي أنه عموماً يمكن أن نقول

$$E_n = S \oplus S^\perp, E_n = (V_n, 0)$$

تعريف (٦.٨): التحويل الخطي $T: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle_v) \rightarrow (W, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$

يقال أنه عمودي orthogonal إذا تحقق

$$\langle T(u), T(v) \rangle_w = \langle u, v \rangle_v$$

بما أن المعيار لمتجه يعرف باستخدام الضرب الداخلي إذن التحويل العمودي يحافظ على المعيار (الطول). إذن صورة متجه غير صفري هي متجه غير صفري وهذا يؤدي إلى أن التحويل العمودي يكون غير شاذ non singular وفي هذه الحالة التحويل T عمودي إذا كانت

$$A^t = A^{-1}, \text{Det } A = \pm 1 \quad \text{أي } A = (a_{ij}) \text{ عمودية بمعنى أن}$$

مثال (١٤) : دوران المستوى حول نقطة الأصل بزواوية حادة هو تحويل

عمودي من المستوى إلى نفسه حيث

$$T(a, b) = (a \cos \phi - b \sin \phi, a \sin \phi + b \cos \phi)$$

والضرب الداخلي هو $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ (الضرب القياسي)

نظرية (٧.٨): إذا كان T مؤثر خطي $T: V \rightarrow V$ حيث V فراغ ضرب

داخلي (معرف عليه الدالة $\langle \cdot, \cdot \rangle$) فإن التقارير الآتية متكافئة منطقياً :

(i) T يحافظ على الضرب الداخلي.

(ii) T يحافظ على أطوال المتجهات.

(iii) T يحافظ على المسافة بين المتجهات.

البرهان:

(i) \Rightarrow (iii)

$$\begin{aligned}\|TX - TY\|^2 &= \|T(X - Y)\|^2 \\ &= \langle T(X - Y), T(X - Y) \rangle = \langle X - Y, X - Y \rangle \\ &= \|X - Y\|^2\end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (ii)

$$\|TX\|^2 = \|T(X - 0)\|^2 = \|X\|^2$$

(ii) \Rightarrow (i)

$$\begin{aligned}\langle X + Y, X + Y \rangle &= \|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2 \\ &= \|T(X + Y)\|^2 = \|TX + TY\|^2 \\ &= \|TX\|^2 + 2\langle TX, TY \rangle + \|TY\|^2\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\|TX\| &= \|X\|, \|TY\| = \|Y\| \\ \therefore \langle TX, TY \rangle &= \langle X, Y \rangle, \forall X, Y \in V\end{aligned}$$

نتيجة: المؤثرات العيارية تحافظ على الزوايا بين المتجهات وذلك لأن

$$\frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|} = \frac{\langle TX, TY \rangle}{\|TX\| \|TY\|}$$

عكس هذه النتيجة ليس صحيحا ونوضح ذلك بالمثال العكسي.

مثال (١٣): المؤثر $TX = 2X$ مؤثر يحافظ على الزوايا بين المتجهات

ولكنه لا يحافظ على أطوال المتجهات وحاصل ضربها القياسي.

فيما يلي سنقتصر دراستنا على الفراغات الاقليدية (فراغات محددة البعد ولها أساس معياري متعامد) في هذه الحالة يسمى المؤثر المعياري بالمؤثر العمودي وتسمى المصفوفة المناظرة للمؤثر العمودي بالمصفوفة العمودية.

نظرية (٨.٨): إذا كان T مؤثر عمودي على الفراغ الاقليدي $V_n(R)$ وكانت المصفوفة المناظرة للمؤثر T بالنسبة لأساس عياري متعامد في

$$A A^t = I \quad \text{فإن } V_n(R)$$

البرهان:

نفرض أن x_1, x_2, \dots, x_n متجهات عيارية متعامدة أي أن :

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

وأن :

$$T x_1 = a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$T x_n = a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n$$

وحيث أن T يحافظ على حاصل الضرب القياسي وأطوال المتجهات

والزوايا بين المتجهات فإن :

$$\langle T x_i, T x_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$= a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \dots + a_{in} a_{jn} = \delta_{ij} \quad (*)$$

ومن ذلك نستنتج

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore A^t A = A A^t = I \Rightarrow A^t = A^{-1}$$

نتائج: في المصفوفة العمودية A يكون $|A| = \pm 1$

وذلك لأن :

$$A^t A = I \Rightarrow |I| = 1 = |A^t| |A| = |A|^2$$

$$\therefore |A| = \pm 1$$

كذلك من العلاقة (*) نستنتج أن الصفوف (الأعمدة) في المصفوفة A تكون متجهات عيارية متعامدة وأيضاً معكوس المصفوفة العمودية مصفوفة عمودية.

جميع الخصائص التي سبق دراستها واستنتاجها على المؤثرات العيارية تكون صحيحة أيضاً على المصفوفات العمودية.

تمارين (٨)

(١) نفرض أن $B = \{(0,1), (1,3)\}$ أساس للفراغ V_2 ونعرف \langle , \rangle_B بالآتي :

$$\langle u, v \rangle_B = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

حيث $v: (a_1, b_1)_B, u: (a_2, b_2)_B$

(i) أوجد $\langle (0,1), (0,1) \rangle_B, \langle (1,3), (1,3) \rangle_B, \langle (0,1), (1,3) \rangle_B$

(ii) بين أن \langle , \rangle_B دالة ضرب داخلي.

(iii) بين أنه إذا كان $v: (a, b)_B$ فإن :

$$\langle v, (0,1) \rangle_B = a, \langle v, (1,3) \rangle_B = b$$

(٢) نفرض أن $B = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ أساس للفراغ $R_3[t]$ وتعرف \langle , \rangle_B كالآتي :

$$\langle v, w \rangle_B = \sum_{i=1}^3 a_i b_i, v: (a_1, \dots, a_3)_B, w: (b_1, \dots, b_3)_B$$

احسب $\langle 1+t, 1+t \rangle_B, \langle 1, 1+t+t^2 \rangle_B$

(٣) نفرض أن x, y, z أعداد حقيقية اختيارية ليست جميعها أصفاراً

هل الدالة ثنائية الخطية bilinear

$$f((a, b), (c, d)) = (a \ b) \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

تعرف ضرب داخلي على المستوى V_2 .

(٤) بين أن $\langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ إذا كان وكان فقط u, v مرتبطين خطياً.

(٥) استخدم طريقة جرام شמידت للحصول على أساس عياري متعامد للفراغات المولدة بالمجموعات الجزئية الآتية في

الفراغ E_n

(i) $\{ (2, 0, 0), (3, 0, 5) \}$

(ii) $\{ (2, 2, 2, 2), (3, 2, 0, 3), (0, -2, 0, 6) \}$

(٦) كون أساس عياري متعامد من $\{1, t, t^2\}$ لفراغ الضرب الداخلي حيث $(R_3[t], \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

(٧) أوجد S^\perp للمجموعات الجزئية S من E_n

(i) $S = L \{ (2, 1, 4), (1, 3, 1) \}$

(ii) $S = L \{ (1, 3) \}$

(٨) بين أن محصلة تحويلات خطية عمودية هو تحويل خطي عمودي.

(٩) أن محصلة دورانيين في E_2 هو دوران.