الباب التاسع
الفراغات المترية المركبة
Complex inner product spaces

الضرب الداخلي المعرف على $V_n(R)$ لا يمكن تعميمه مباشرة على الفراغ $V_n(C)$ لأن مربع عدد مركب ليست بالضرورة أن يكون حقيقي مثلاً $(1-i)^2=-2i, i=\sqrt{-1}$. على أي حال يمكن تعريف دالة موجبة بالتحديد على $V_n(C)$ باستخدام $\bar{z}=x-iy$، z=x+iy،

$$z\bar{z}=x^2+y^2\geq 0$$

$\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z في مجال الأعداد المركبة C

تعريف (١.٩): نفرض أن $u=(u_1,\ldots,u_n), w=(w_1,\ldots,w_n)$ عناصر في $V_n(C)$ ونعرف

$$u\circ w=u_1\bar{w}_1+\ldots+u_n\bar{w}_n$$

هذه العملية تسمى الضرب الداخلي المعتاد (الضرب القياسي) على $V_n(C)$ ويرمز للفراغ $V_n(C)$ المعرف على عملية الضرب القياسي بالرمز C^n.

نظرية (١.٩): نفرض $u,v,w\in C^n$ إذن

(i) $u\circ v\in C$ (ii) $u\circ v=\overline{v\circ w}$

(iii) $u\circ(v+w)=u\circ v+u\circ w,\ (u+v)\circ w=u\circ w+v\circ w$

(iv) $(au)\circ v=a(u\circ v),\ u\circ(av)=\bar{a}(u\circ v),\ \forall a\in C$

(v) $u\circ u\in R,\ u\circ u>0$ if $u\neq 0$

البرهان :

بالنسبة للخاصية (2) نفرض أن :

$$u=(u_1,\dots,u_n)\ ,\ w=(w_1,\dots,w_n)$$

إذن

$$u\circ w=\sum_{i=1}^{n}u_i\,\overline{w}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i\,u_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i\,\overline{\overline{u}}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\overline{w_i\,\overline{u}_i}=\overline{\sum_{i=1}^{n}w_i\,\overline{u}_i}=\overline{w\circ u}$$

في هذه النظرية الخصائص (2)، (3)، (4) تناظر الخصائص في الفراغ الاتجاهي المعرف على R والتي تسمى التماثل وثنائية الخطية، هذه الخصائص في حقل الأعداد المركبة تسمى بالخصائص الهيرميتية Hermitian

تعريف (٢.٩): نفرض أن V(C) فراغ اتجاهي على الحقل C، $\langle\,,\rangle$ دالة بحيث $\langle u,v\rangle\in C,\ u,v\in V(c)$ والتي تحقق

(i) $\langle u,v\rangle=\langle\overline{v,u}\rangle$

(ii) $\langle u,av+bw\rangle=\overline{a}\langle u,v\rangle+\overline{b}\langle u,w\rangle,$
$\forall\, a,b\in C,\ u,v,w\in V(c)$

(iii) $\langle u,u\rangle>0$ if $u\neq 0$

إذن $\langle\,,\rangle$ تسمى الضرب الداخلي المركب على V(C)، $(V(C),\langle\,,\rangle)$ فراغ الضرب الداخلي المركب وأيضاً يسمى فراغ الضرب الداخلي الهرميتي. الشرط الثاني في هذا التعريف يبين أن الضرب الداخلي المركب ليس خطي في كل متغيراته، أي أن

$$\langle a u + b v , w \rangle = a \langle u , w \rangle + b \langle v , w \rangle$$
$$\forall a, b \in C , u , v , w \in V$$

مثال (١): نفرض أن F(C) مجموعة كل الدوال المتصلة ذات القيم المركبة والمعرفة على الفترة [0, 1]. المجموعة F(C) هي فراغ اتجاهي مركب تحت تأثير العمليات المعرفة على كل الدوال سابقاً.

نعرف الدالة $\langle \, , \rangle$ على F(C) بالآتي

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx \qquad , \ f , g \in F(C)$$

ولهذا

$$\langle i x^2 , 3 + i x \rangle = \int_0^1 i x^2 (3 - i x) \, dx \ = 1 + \frac{1}{4}$$

ومن السهل أن نتبين أن الدالة $\langle \, , \rangle$ هي ضرب داخلي مركب على فراغ الدوال المركبة F(C).

تعريف المعيار $\| \ \|$ والتعامد والأساس المعياري المتعامد في الفراغ المركب كما هو في الفراغ الحقيقي ولذلك فإن طريقة جرام شميدت مازالت صالحة لفراغات الضرب الداخلي المركب.

مثال (٢): نفرض أن

$$P\,L\,\{ (1+i, 3i , 2 - i) , (2 - 3i, 10+ 2 i , 5- i)\}$$

فراغ جزئي من C^3 أوجد أساس عياري متعامد للفراغ P.

الحل: بما أن $\| (1+i , 3i , 2 - i) \| = 4$

ولهذا $\frac{1}{4}(1+i, 3i, 2-i)$ متجه وحدة.

المسقط العمودي للمتجه $(2-3i, 10+2i, 5-i)$ على هذا المتجه هو

$$\left[(2-3i, 10+2i, 5-i) \circ \frac{1}{4}(1+i, 3i, 2-i)\right]\frac{1}{4}(1+i, 3i, 2-i)$$
$$= (3-i, 6+3i, -5i)$$

وبطرح هذا المسقط من $(2-3i, 10+2i, 5-i)$ نحصل على $(-1-2i, 4-i, 5+4i)$ والذي طوله $\sqrt{63}$ ولهذا فإن الأساس العيـــاري المتعامد المطلوب هو

$$\left\{\frac{1}{4}(1+i, 3i, 2-i), \frac{1}{\sqrt{63}}(-1-2i, 4-i, 5+4i)\right\}$$

تعريف (٣.٩): نفرض أن $(V, \langle , \rangle)$ فراغ ضرب داخلـــي مركـــب ، $T: V \to V$ تحويل خطي يقال أن التحويل الخطي T هرميتي إذا كان

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle, \ \forall u, v \in V$$

مثال (٣): التحويل الصفري وتحويل التطابق تحويلات هرميتية.

نظرية (٢.٩): القيم المميزة لتحويل هرميتي تكون حقيقية.

البرهان: نفرض أن T تحويل هرميتي معرف على فراغ ضرب داخلـــي مركب $(V(C), \langle , \rangle)$. إذن القيمة المميزة z للتحويل T يجب أن تكـــون مركبة. عموماً إذا كان w متجه مميز للقيمة z فإن :

$$z\|w\|^2 = z\langle w, w\rangle = \langle zw, w\rangle = \langle Tw, w\rangle, Tw = zw$$
$$= \langle w, Tw\rangle = \langle w, zw\rangle = \bar{z}\langle w, w\rangle$$
$$= \bar{z}\|w\|^2$$

وحيث أن w متجه غير صفري فإن $z=\bar{z}$ أي أن $z\in R$.

من هذه النظرية نرى أنه إذا كان $T:C^n \to C^n$ تحويل هرميتي فإن مصفوفة T بالنسبة لأي أساس يكون لها قيم مميزة حقيقية فقط. هذا معناه أنه يوجد مجموعة من المصفوفات المركبة ذات القيم المميزة الحقيقية.

نحاول معرفة طبيعة هذه المصفوفة، نفرض $A=(a_{ij})$ هي مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساس المعتاد $\{e_i\}$. إذن

$$T(e_j)=(a_{1j},\dots,{}_{nj})$$

وبما أن T هرميتي،

$$\begin{aligned}\bar{a}_{ij} &= E_i \circ (a_{1j},\dots,a_{nj}) = E_i \circ T(e_j) \\ &= T(e_i)\circ e_j = (a_{1i},\dots,a_{ni})\circ e_j = a_{ji}\end{aligned}$$

ولهذا فإن $\overline{A}^t = (\bar{a}_{ij})^t = A$

أي أن A مصفوفة هرميتيه.

نظرية (٣.٩): نفرض أن $T\in Hom(C^n)$ ومصفوفة T بالنسبة للأساس المعتاد هي A. إذن T تكون هرميتية إذا كان وفقط إذا كان A هرميتية.

البرهان : الاتجاه الأول $(\Rightarrow)$ حصلنا عليه سابقاً.

$(\Leftarrow)$ نفرض أن $A=(a_{ij})$ هرميتية والمطلوب أن نبين

$$T(u)\circ v = u\circ T(v) \ , \forall u,v\in C^n$$

نفرض $u=(u_1,\dots,u_n), v=(v_1,\dots,v_n)\in C^n$.إذن

$$T(u)\circ v = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,u_j,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,u_j\right)\circ(v_1,\dots,v_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{1j}\, u_j \,.\, \bar{v}_1 + a_{2j}\, u_j \,.\, \bar{v}_2 + \dots + a_{nj}\, u_j \,.\, \bar{v}_n \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_j\, \bar{v}_i \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_{ji}\, u_j\, \bar{v}_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji}\, \bar{v}_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ji}\, v_i} = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, v_i \right)} \\
&= (u_1, \dots, u_n) \circ \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\, v_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\, v_i \right) \\
&= u \circ T(v)
\end{aligned}
$$

إذن T تحوي هرميتي وهذا يكمل البرهان.

ولهذا، كل مصفوفة هرميتية يتبعها تحويل هرميتي على C^n. وبما أن التحويل الهرميتي له فقط قيم مميزة (جذور مميزة) حقيقية، وبذلك نكون قد توصلنا إلى النظريات الآتية :

نظرية (٤.٩): القيم المميزة لمصفوفة هرميتية تكون حقيقية.

نظرية (٥.٩): التحويل الهرميتي $T : C^n \to C^n$ يتبعه مصفوفة هرميتية قابلة للتحويل لمصفوفة قطرية diagonalizable

تمارين (٩)

(١) احسب كل من

(i) $(2,1+i,3i)\circ(2-i,4i,2-3i)$ في C^3

(ii) $(1-i,3,i+2,3i)\circ(5,2i-4,0,i)$ في C^4

(٢) أوجد المكمل $P^{\perp}$ في C^3 للفراغات الآتية

(i) $P = L\{(i, 2, 1+i)\}$

(ii) $P = L\{(2i, i, 4), (1+i, 0, 1-i)\}$

(٣) بين أن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ لا يمكن أن تشابه مصفوفة قطرية على حقل الأعداد الحقيقية ومن ثم أوجد مصفوفة مركبـــة P تحقـــق $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية.

(٤) نفرض أن $T: C^2 \to C^2$ معرف بالقاعدة

$$T(z, w) = (2z + (1+i)w, (1-i)z + 3w)$$

(i) أوجد المصفوفة A للتحويل T بالنسبة للأساس المعتاد واســتنتج أن T تحويل هرميتي.

(ii) أوجد القيم المميزة للمصفوفة A وأوجد المصفوفة P التـــي تحقـــق $P^{-1}AP$ قطرية.

الباب العاشر
الصيغ التربيعية والتحويلات الخطية
Quadratic forms

المقدار التربيعي في المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ يكتب على الصورة

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \;; a_{ij} = a_{ji}$$

ويسمى صيغة تربيعية quadratic form

فمثلاً المقدار التربيعي في حالة $n = 2$

$$L(x_1, x_2) = x_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + x_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2)$$

فإذا فرضنا أن : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, X = (x_1 \quad x_2)$

يمكن كتابة المقدار التربيعي على الصورة المصفوفية

$$L(x_1, x_2) = X A X^t$$

وبصفة عامة يكون :

$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X A X^t$, A مصفوفة متماثلة

حيث :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n), X^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تأثير التحويلات الخطية على المقادير التربيعية :

نفرض T تحويلة خطية عمودية بحيث :

$$X^t = T\,Y^t \;,\; Y^t = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore\; X = Y\,T^t$$

$$\therefore\; L(x_1,\dots,x_n) = X\,A\,X^t = Y\,T^t\,A\,T\,Y^t$$

$$= Y\left(T^t\,A\,T\right)Y^T$$

نفرض أن

$$B = T^t\,A\,T$$

$$\therefore\; L = Y\,B\,Y^t$$

واضح أن

$$B^t = \left(T^t\,A\,T\right)^t = T^t\,A^t\left(T^t\right)^t$$

$$= T^t\,A^t\,T = T^t\,A\,T = B$$

أي أن B مصفوفة متماثلة لأن A مصفوفة متماثلة.

وبالتالي المقدار التربيعي $L = X\,A\,X^t$ تحول إلى المقدار التربيعي $L = Y\,B\,Y^t$ حيث $B = T^t\,A\,T$، فإذا كانت T مصفوفة عمودية فإن $T^t = T^{-1}$ ويكون $B = T^{-1}\,A\,T$ أي أن B تشابه A.

حيث أن المصفوفة A متماثلة فإنه توجد تحويله عمودية تحول هذه المصفوفة إلى مصفوفة قطرية B تشابه A أي أن :

$$B = T^{-1}\,A\,T = \left(\lambda_i\,\delta_{ij}\right)$$

حيث λ_i هي القيم الذاتية (الحقيقية) ومن ثم نحصل على :

$$L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\,\delta_{ij}\,y_i\,y_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,y_i^2$$

حيث عدد المعاملات المختلفة عن الصفر تساوي رتبة المصفوفة A وتسمى هذه الصورة بالصورة القياسية للمقدار التربيعي.

مثال (١): أوجد الصورة القياسية للمقدار التربيعي :

$$L=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3=0$$

الحل: مصفوفة المقدار التربيعي هي $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$

المعادلة المميزة هي :

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 2 & -2-2\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+3)^2=0$$

ومنها $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=-3$ أي أن الصورة القياسية هي

$$6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2=0$$

وهذه المعادلة تمثل مخروط رأسه نقطة الأصل ومحورة $o\,y_1$ وزاوية رأس المخروط 2α تعطى من $\alpha=\tan^{-1}\sqrt{2}$ حيث

$$y_2^2+y_3^2-2y_1^2=0$$

وهي حالة خاصة من

$$y_2^2+y_3^2-c\,y_1^2=0\quad,\ c=\tan^2\alpha$$

مثال (٢) : حول كثيرة الحدود

$$P_2(x_1,x_2,x_3)\equiv x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+5=0$$

إلى الصورة القياسية ومن ثم حدد نوع السطح الذي تمثلة وأوجد التحويل المستخدم لذلك.

الحل: بنفس الأسلوب المستخدم في المثال السابق نجد أن

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}=0$$

وهذه المعادلة تأخذ الصورة $-\lambda(1-\lambda)^2+3\lambda=0$

ومن السهل أن نتبين أن الجذور المميزة وهي

$$\lambda_1=1+\sqrt{3},\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=1-\sqrt{3}$$

والمتجهات المميزة (اتجاه المحاور الجديدة) التي تناظر القيم المميزة هي على الترتيب

$$\xi^1=\begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \dfrac{2}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{bmatrix},\ \xi^2=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},\ \xi^3=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

وبالتالي مصفوفة التحويل هي $x=Ty$, $T=(\xi^1\ \xi^2\ \xi^3)$ واضح أنها مصفوفة عمودية.

كثيرة الحدود المعطاة تأخذ الصورة

$$(1+\sqrt{3})y_1^2+(1-\sqrt{3})y_3^2+5=0$$

أو

$$\frac{(\sqrt{3}-1)y_3^2}{5}-\frac{(1+\sqrt{3})y_1^2}{5}=1$$

وهي تمثل أسطوانة زائدية دليلها قطع زائد موجود في المستوى $y_2=0$ ومحورة الحقيقي على امتداد محور y_3 ومحوره المرافق على امتداد محور y_1 ومركزه في المستوى $y_2=0$ وأنصاف المحاور هي

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}},\left(\frac{\sqrt{3}-1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

واتجاه المحاور تعطى بدلالة الإحداثيات الأصلية باستخدام التحويل (الدوراني) العكسي.

مثال (٣): حدد نوع السطح الممثل بالمعادلة

$$36x^2+9y^2-4z^2+18y+16z-43=0$$

الحل : بإكمال المربع للحدود التي تحتوي على z, y نحصل على (أو نقل المحاور)

$$36x^2+9(y+1)^2-4(z-2)^2=36$$

نفرض أن

$x=x',\ y'=y+1,\ z'=z-2$ (تحويل الإنتقال)

إذن المعادلة المعطاة تأخذ الصورة القياسية

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}-\frac{z'^2}{9}=1$$

وهذه هي معادلة سطح زائدي ذو طية واحدة، إحداثيات مركــــزه هــي $(x', y', z') = (0,0,0)$ ولهذا بمــــا أن $x = x',\ y = y'-1,\ z = z'+2$ فــإن إحداثيات المركز في الإحداثيات xyz هي $(0, -1, 2)$. في هذا المثال لــم نلجأ إلى دوران المحاور لأن المثال لا يحتوي على الحدود المختلطة.

نعطى الآن مثال وطريقة حله تشابه الطرق السابقة ولكن بإسلوب أســهل لأن المثال بسيط:

مثال (٤): حدد نوع السطح الممثل بالمعادلة $x^2 - yz - y + 1 = 0$

الحل: لحذف الحد yz نفرض أن

$$\begin{aligned} y &= y'\cos\phi - z'\sin\phi \\ z &= y'\sin\phi + z'\cos\phi \qquad (1) \\ x &= x' \end{aligned}$$

أي بدوران المحاور في المستوى yz بزاوية ϕ مع ثبوت نقطة الأصــل وكذلك محور x ثابت (العمودي على المستوى yz) أي أن

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (2)$$

إذن المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$\begin{aligned} x'^2 - (y'\cos\phi - z'\sin\phi)(y'\sin\phi + z'\cos\phi) \\ - (y'\sin\phi - z'\sin\phi) + 1 = 0 \end{aligned}$$

المعامل a'_{23} للحد $y'z'$ يعطى من خلال

$$a'_{23} = \sin^2\phi - \cos^2\phi$$

لحذف الحد $y'z'$ يجب وضع $a'_{23}=0$ أي أن

$$\phi=\frac{\pi}{4}\ ,\sin\phi=\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن مصفوفة الدوران هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ومن ثم المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$x'^2-\frac{y'^2}{2}+\frac{z'^2}{2}-\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{2}}+1=0$$

بإكمال المربع نحصل على

$$x'^2-\frac{1}{2}\left(y'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(z'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1=0$$

بوضع $x'=x'',y'+\frac{1}{\sqrt{2}}=y'',z'+\frac{1}{\sqrt{2}}=z''$ (تحويل الإنتقال).

وبالتالي المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$\frac{y''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{z''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{x''^2}{1^2}=1$$

هي معادلة مجسم زائدي ذو طيتين مركزه $(x'',y'',z'')=(0,0,0)$ في الإحداثيات $x''y''z''$ وبالتالي إحداثيات مركزه في الإحداثيات $x'\ y'\ z'$ هي $(x',y',z')=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ وبالتعويض في التحويل (1) عن

x', y', z'، $\phi = \frac{\pi}{4}$ نحصل على إحداثيات المركز في الإحداثيات xyz وهي $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ولإيجاد اتجاه المحاور نستخدم التحويل العكسي للتحويل (2). أعمدة مصفوفة التحويل (2) تمثل اتجاه المحاول الجديدة.

هذا المثال يمكن دراسته باستخدام القيم الذاتية لمصفوفة الجزء التربيعي من معادلة السطح.

وإليك صياغة أخرى لبعض أمثلة من السطوح في شكل مجموعات نقطية.

مثال (٥): بنقل ودوران المحاور حدد نوع المحل الهندسي Q المعرف بالمجموعة

$$Q = \{X : X = (x_1\ x_2)^t \in R^2 \wedge 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 + 2 = 0\}$$

وأوجد اتجاه المحاور الجديدة ووضع المحل الهندسي في الفراغ.

الحل: نفرض أن

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ d = 2$$

أي أن Q تعطى من $X^t A X + 2B^t X + d = 0$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي 5,1 والمتجهات الذاتية المناظرة هي على الترتيب

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة العمودية P التي تحقق

$$P^t A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نحصل عليها كالآتي

اتجاه المحاور الجديدة نحصل عليه من L_2, L_1 بجعل كل منهما طولــــه الوحدة أي أن

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{-\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ومنها يكون

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

باستخدام التحويل $x = P y$ نحصل على

$$Q' : 5 y_1^2 + y_2^2 + \frac{10}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{6}{\sqrt{2}} y_2 + 2 = 0$$

باستخدام تحويل الانتقال $(y_1, y_2) \rightarrow \left(\overline{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \overline{x}_2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$

نحصل على الصيغة القياسية Q'' حيث

$$Q'' : \overline{x}_1^2 + \frac{\overline{x}_2^2}{5} = 1$$ (قطع ناقص كما في الشكل)

مثال (٦) : بدوران وإنتقال المحاور حدد نوع السطح R^3 حيث

$$Q=\{X : X=(x_1,x_2,x_3)^t\in R^3 \wedge 3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_1x_3 + 4x_2x_3+2x_3^2-4x_1+2x_2-4x_3+2=0\}$$

الحل: نعتبر المصفوفات الآتية: $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&2\\1&2&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\ d=2$

إذن $Q=\{X\,|\,X\in R^3\wedge X^t A X+2B^t X+C=0\}$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي 5, 2, 0 والمتجهات الذاتية المقابلة هي

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

والتي تحقق من سابقاً أن

$$P^{-1}AP=P^tAP=\text{diag}(5,2,0)$$

نأخذ إتجاه دوران المحاور (محاور عيارية متعامدة) في الصورة

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t,S_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)^t,S_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^t$$

وتصبح مصفوفة الدوران هي $P\doteq(S_1\ \ S_2\ \ S_3)$

بدوران المحاور على الصورة $x=P^{-1}y$ (دوران في الاتجاه العكسي لتجنب الحسابات المعقدة) تصبح Q في الصورة

$$Q':\ 5y_1^2+2y_2^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,y_1+\frac{2}{3}\sqrt{6}y_2-\sqrt{2}y_3+2=0 \qquad (*)$$

وبنقل المحاور إلى النقطة $O'\left(\frac{\sqrt{3}}{15},\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{8\sqrt{2}}{10}\right)^t$ حيث

$$(y_1,y_2,y_3)\to(z_1,z_2,z_3)+O'$$

تصبح المعادلة (*)

$$Q'': 5\,z_1^2 + 2\,z_2^2 - \sqrt{2}\,z_3 = 0$$

وفي الصورة القياسية $5\,z_1^2 + 2\,z_2^2 = \sqrt{2}\,z_3$

مجسم مكافئ ناقص (حدد وضعه في الفراغ؟) على الصورة

$$\frac{z_1^2}{\frac{\sqrt{2}}{5}} + \frac{z_2^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = z_3$$

مقاطعه بمستويات توازي مستويات الإحداثيات عبارة عن قطع ناقص بشرط أن $z_3 = h > 0$ وقطاعات مكافئة محورها هو محور $O'z_3$.

تصنيف سطوح الدرجة الثانية بدون حساب القيم الذاتية

نفرض أن لدينا سطح درجة ثانية معطى بمعادلة من الدرجة الثانية في الفراغ على هذه الصورة

$$X^T A X + 2 B X + d = 0 \qquad (1)$$

نعطي تصنيف لمعادلة الدرجة الثانية في R^3 بنفس الأسلوب الذي درسه الطالب سابقاً في R^2 والذي يعتمد على إشارات القيم الذاتية للمصفوفة $A = (a_{ij})$ وهي مصفوفة متماثلة. هذه الإشارات تتحدد بالتأكيد إذا علمت إشارات بعض المحددات وهذه الطريقة تحدد نوع السطح المقابل لمعادلة الدرجة الثانية دون التعرض لوضعه في الفراغ ولذلك نتبع الآتي

نفرض أن $\sigma_1(A) = a_1 + a_2 + a_3 = tr(A),$

$$\sigma_2(A) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3(A) = \mathrm{Det}\, A.$$

ليس من الصعب استخدام الجبر الخطي في توضيح أن إشـــارات $\sigma_i(A)$ تحدد بطريقه وحيده، إشارات القيم الذاتية للمصفوفة A.

لدراسة سطوح الدرجة الثانية نستخدم كذلـــك المصفوفـــة الموســـعة أو المحددة A^* Agumented matrix والتي تأخذ الشكل: $A^* = \left[\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & d \end{array}\right]$

(المصفوفات المجزئة)، وطبقاً لرتبة المصفوفـــة الموســـعة A^* يمكننـــا الحصول على صور أكثر تميزاً للسطوح. ونعرض ذلك فـــي الجـــدول الآتي

Signs of $\sigma_1(M), \sigma_2(M), \sigma_3(M)$	Signs of $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Graph if rank $A^*=4$	Graph if rank $A^*=3$	Graph if rank $A^*=2$	Graph if rank $A^*=1$
$\sigma_2 > 0; \sigma_3 \neq 0$ σ_1, σ_2 have the same sign	All the same and nonzero	Elliposoid or Empty	Point	--	--
$\sigma_3 \neq 0$; either $\sigma_2 < 0$ or σ_1, σ_3 have opposite sign	All nonzero, not all the same	Hyperboloid of one or two sheets	Elliptic cone	--	--
$\sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$	λ_1, λ_2 nonzero and of same sign $\lambda_3 = 0$	Elliptic paraboloid	Elliptic cylinder or empty	Line	--

Signs of $\sigma_1(M), \sigma_2(M), \sigma_3(M)$	Signs of $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Graph if rank $A^*=4$	Graph if rank $A^*=3$	Graph if rank $A^*=2$	Graph if rank $A^*=1$
$\sigma_2 < 0, \sigma_3 = 0$	λ_1, λ_2 nonzero and of opposite signs; $\lambda_3 = 0$	Hyperbolic paraboloid	Hyperbolic cylinder	Two intersecting planes	--
$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$	$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$	--	Paraboic cylinder	2 parallel planes or empty	Plane

مثال (٧) : حدد نوع السطح في R^3 الذي له المعادلة

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 2x + 4y + 1 = 0$$

الحل: من المعادلة المعطاة يكون

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن

$$\sigma_1(A) = 5, \sigma_2(A) = -5, \sigma_3(A) = \text{Det } A = 0, \text{rank } A^* = 3$$

إذن السطح أسطوانة زائدية.

مثال (٨) : حدد نوع السطح في R^3 الذي له المعادلة

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - x - y = 0$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, A^*=\begin{pmatrix}2&1&1&-1/2\\1&1&0&-1/2\\1&0&1&0\\-1/2&-1/2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_3(A)=\operatorname{Det} A=0$$

$$\sigma_2(A)=\operatorname{Det}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+\operatorname{Det}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+\operatorname{Det}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}>0$$

$$\sigma_4(A^*)=\operatorname{Det} A^*=0, \sigma_3(A^*)=-\frac{3}{4}<0$$

$$\sigma_2(A^*)=(\text{مجموع محددات } 2\times 2)=\frac{5}{2}>0, \sigma_1(A^*)=4>0$$

بما أن $\sigma_4(A^*)=0, \sigma_3(A^*)\neq 0$ إذن $\operatorname{rank} A^*=3$ وبالتالي السطح يكون إما فئة خالية أو إسطوانة ناقصية. بما أن $\sigma_1(A^*), \sigma_3(A^*)$ ليس لهما نفس الإشارة وغير صفرين، $\sigma_2(A^*)>0$ إذن السطح اسطوانة ناقصية.

تمارين (١٠)

١ـ حدد أنواع السطوح الآتية وأوضاعها في الفراغ وأوجد المستويات الأساسية لها.

أثبت أن المستويات الأساسية إما توازي أو منطبقة على المستويات الإحداثية.

(i) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4x + 18y + 20 = 0$

(ii) $9x^2 - 4y^2 - 8y - 5z - 14 = 0$ (iii) $xy + z^2 - 3z + 1 = 0$

(iv) $xz + y - 4 = 0$ (v) $9x^2 - 4y^2 - 8y - 5z - 14 = 0$

(vi) $y^2 + 5z^2 - 5x - 6y + 10z - 1 = 0$

٢ـ بدوران المحاور بزوايا مناسبة حول المعادلة

$$10x^2 + 13y^2 + 13z^2 - 4xy - 4xz + 8yz - 36 = 0$$

إلى الصورة القياسية وحدد نوع السطح الذي تمثله وكذلك أوجد اتجاه المحاور الجديدة.

٣ ـ حدد أنواع المحال الهندسية الآتية (بدون حساب القيم الذاتية):

(1) $xy + z^2 = 6$ (2) $xy + z^2 = -6$

(3) $xy + z^2 = 0$ (4) $2x^2 - y^2 + 4yz + x - y + 1 = 0$

(5) $2x^2 + y^2 + z^2 + xy = 5$ (6) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = 5$

(7) $x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 4yz - x = 0$

(8) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 = 0$

٤ـ أثبت أن سطح الدرجة الثانية الممثل بالمعادلة y-yz=xz هو سطح سرج وحدد مركزة.