الجزء الأول : مفاهيم أولية

الباب الأول

مقدمة في الجبر المجرد

(١.١) مقدمة في المجموعات والدوال

(١.١.١) العلاقات والرواسم (الدوال)

الضرب الكارتيزي لمجموعتين: The cartesian product of two sets

تعريف (١): الثنائي المرتب (the ordered pairs) (a,b) يتكون من عنصرين a, b مرتبين يظهر a كمركب أولي، b كمركبه ثانية ـ وقد يسمى a **بالإحداثي الأول**، b **بالإحداثي الثاني** للثنائي المرتب (المركبة الأولى والمركبة الثانية على الترتيب).

تعريف (٢): لأي مجموعتين A, B المجموعة المتكونة من جميع الثنائيات (a, b) حيث $b \in B, a \in A$ تسمى مجموعة الضرب **الكارتيزي للمجموعتين** A,B ويرمز لها بالرمز $A \times B$ (لهذا الترتيب). أي أن

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

تعريف (٣): العنصرين $(a, b) , (c, d) \in A \times B$ يقال أنهما متساويين إذا وإذا فقط كان $a = c$، $b = d$ أي أن $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$

ملاحظات:

(i) إذا كانت A أو B مجموعة خالية فإن $A \times B = \phi = B \times A$

(ii) إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الحقيقية ـ فإن مجموعة الضرب $R \times R$ (غالباً تكتب R^2) تسمى المستوى الإقليدي.

(iii) العدد الرئيسي n لحاصل الضرب الكارتيزي $A\times B$ يساوي حاصل ضرب العدد الرئيسي للمجموعة A في العدد الرئيسي للمجموعة B (بشرط أن A, B فئات محدودة)

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$$

مثال (١): إذا كان $(2-u, 3+v)=(2v+1, 2-2u)$ فإن

$$2-u=2v+1;\ \ 3+v=2-2u$$

أي أن

$$u+2v=1;\ 2u+v=-1$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $u=-1, v=1$

مثال (٢): نفرض أن $A=\{a, b, c\}$، $B=\{x, y\}$

$$\therefore\ A\times B=\{(a, x, (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\},$$
$$B\times A=\{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$
$$B^2=\{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}=B\times B$$

العلاقات : Relation

تعريف (٤): نقول أن R علاقة بين المجموعتين A, B إذا كانت $R\subseteq A\times B$ ونقول أن المجموعة A معرف عليها علاقة ثنائية Binary relation R إذا كانت $R\subseteq A\times A$ ويمكن كتابة $(a, b)\in R$ بالصورة $a\,R\,b$

مثال (٣): واضح أن R المعرفة كما يلي $R=\{(1, b), (2, b), (2, c)\}$ هي علاقة بين المجموعتين $A=\{1, 2\}, B=\{a, b, c\}$.

مثال (٤): إذا كانت $A=\{a, b, c\}$ فإن R المعرفة كما يلي

$$R=\{(a, a), (a, c), (b, c), (c, a)\}\subset A^2$$

هي علاقة ثنائية على A^2 أو $R \subset A \times A = A^2$.

مثال (٥): إذا كانت N هي مجموعة الأعداد الطبيعية فإن $N \times N$ هي كل الأزواج التي على الصورة (n, m) حيث $n, m \in N$. المجموعة الجزئية منها والمعرفة كما يلي :

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), \dots\}$$

هي علاقة ثنائية على N ويلاحظ أن المركبة الأولى تكون أصغر من المركبة الثانية أي أن $n < m$, $(n, m) \in R$ والعلاقة R في هذه الحالة تسمى علاقة أصغر من.

تعريف (٥): نفرض R علاقة ثنائية على مجموعة A إذن R تسمى علاقة

(i) **عاكسة** Reflexive إذا كانت $(a, a) \in R, \ \forall a \in A$

(ii) **متماثلة** Symmetric إذا كانت $(a, b) \in R$ فإن: $(b, a) \in R$

(iii) **ناقلة** Transitive إذا كانت $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ تستلزم أن يكون $(a, c) \in R$ أي أن $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

إذا كانت R عاكسة ومتماثلة وناقلة فإن R **تسمى علاقة تكافؤ** Equivalence relation.

مثال (٦): إذا كانت A هي مجموعة كل المستقيمات الواقعة في مستوى فإن العلاقة الثنائية $R = \{(a, b) : a, b \in A, a \uparrow\uparrow b\}$ علاقة عاكسة لأن الخط المستقيم يوازي نفسه وهي متماثلة لأنه إذا كان المستقيم a يوازي المستقيم b فإن المستقيم b يوازي المستقيم a أيضا. كذلك فإن R ناقلة لأنه إذا كان $a \uparrow\uparrow b, b \uparrow\uparrow c$ واضح أن $a \uparrow\uparrow c$ ومن ثم R علاقة تكافؤ.

مثال (٧): العلاقة الثنائية $R=\{(a,\ b)\ :\ a,b\in A, a\perp b\ \}$ حيث A هي المجموعة المعرفة في المثال السابق والعلاقة $\perp$ (عمودي على) ليست عاكسة ولكنها متماثلة وغير ناقلة (تحقق من ذلك).

مثال (٨): R علاقة قابلية القسمة في المجموعة N_+ هي علاقة غير متماثلة لأنه إذا كان $(a,b)\in R$ فإن هذا يعني أن a تقبل القسمة على b بدون باق وتكتب $(a\,|\,b)$ وهذا لا يعني أن $(b\ |\ a)$ أي $(b,a)\notin R$ فمثلاً $(10,2)\in R$ بينما $(2,10)\notin R$

تعريف (٦): لتكن R هي علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإننا نعرف نطاق R $(\text{Dom } R)$ ومدى R $(\text{Range } R)$ كما يلي :

نطاق R $= \text{Dom } R = \{a : a\in A, (a,b)\in R, b\in B\}$

مدى R $= \text{Range } R = \{b : b\in B, a\in A, (a,b)\in R\ \}$

يلاحظ أن $\text{Dom } R\subset A, \text{Range } R\subset B$

فصول التكافؤ Equivalence Class

نفرض R علاقة تكافؤ على المجموعة $A\neq\phi$، $x\in A$. مجموعة كل عناصر A التي ترتبط بالعنصر a تسمى فصل تكافؤ للعنصر a ويرمز له بالرمز $[a]$ أي أن :

$$[a]=\{\,b\in A : a\,R\,b\,\}$$

فصول التكافؤ تحقق الخواص الآتية :

(i) $a\in[a]$ (ii) $a\in[b]\Leftrightarrow[a]=[b]$

(iii) $[a]\cap[b]=\phi$ or $[a]=[b]$

مثال (٩): نفرض أن m عدد صحيح موجب، لأي عنصرين $a, b \in Z$ نعرف علاقة التآلف مقياس Congruence, modulo m كالآتي :

$$a \equiv b \pmod m \Rightarrow a - b = x\,m,\ x \in Z$$

ويقال أن m تقسيم a - b أو a - b تقبل القسمة على divisible m

واضح أن

$$a \equiv a \pmod m,\ a \equiv b \pmod m \Rightarrow b \equiv a \pmod m$$

$$a \equiv b \pmod m,\ b \equiv c \pmod m \Rightarrow a \equiv c \pmod m$$

أي R علاقة تكافؤ على Z

إذا كانت $m = 3$ أي أن

$$R = \{\, (a, b) : a \equiv b \pmod 3 \,\}$$

فصول التكافؤ للأعداد 1, 2, 3 هي

$$[1] = \{\, \dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots \,\}$$
$$[2] = \{\, \dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots \,\}$$
$$[3] = \{\, \dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots \,\}$$

واضح أن

$$Z = [1] \cup [2] \cup [3]$$

حيث أن [1]، [2]، [3] غير متقاطعة، في هذه الحالة يقال أن فصول التكافؤ [1], [2], [3] تكون تجزئ Partition للمجموعة Z.

تعريف (٧): إذا كانت $R \subseteq A \times B$ علاقة من A إلى B فإن معكوس العلاقة R يرمز له بالرمز R^{-1} هو علاقة من B إلى A معرفة بالآتي :

$$R^{-1} = \{\, (b, a) : (a, b) \in R \,\}$$

واضح أن

$$\operatorname{dom} R^{-1} = \operatorname{Rang} R$$

$$\operatorname{Rang} R^{-1} = \operatorname{dom} R$$

الرواسم (الدوال) The Mappings (functions)

تعريف (٨): أي علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجموعة A بعنصر واحد من عناصر المجموعة B تسمى راسما (دالة) من A إلى B.

فإذا كان f راسما من A إلى B فإننا نكتب $f: A \longrightarrow B \quad \text{or} \quad A \xrightarrow{f} B$

إذا كانت $a \in A$ فإن العنصر b في B المرتبط بالعنصر a يسمى صورة a بالنسبة للراسم f ويعبر عنه بالصورة f(a). العنصر a يسمى المتغير المستقل والعنصر b يسمى المتغير التابع.

تعريف (٩): نفرض أن $f: A \longrightarrow B$، المجموعة A تسمى **نطاق** (domain) الراسم f، المجموعة B تسمى **النطاق المصاحب** (codomain) للراسم f. المجموعة $f(A) = \{b \in B : \exists a \in A \ \& \ f(a) = b\}$ تسمى مدى (range) الراسم (الدالة).

مثال (١٠): نفرض أن $A = R \, , B = \{-1, 1\}$ ونفرض أن $f: R \longrightarrow B$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x \text{ عدد قياسي} \\ -1 & \text{إذا كانت } x \text{ عدد غير قياسي} \end{cases}$$

واضح أن f راسما من R إلى B

تعريف (١٠): إذا كانت $f: A \longrightarrow B \, , g: X \longrightarrow Y$ فإن الراسمين g, f يقال أنهما متساويين (وتكتب $f = g$) إذا تحققت الشروط الآتية

(i) نطاق f = نطاق g أي $A = X$

(ii) النطاق المصاحب للراسم f = النطاق المصاحب للراسم g أي $B = Y$

(iii) $f(a) = g(a)$ لكل عنصر a في النطاق.

ملاحظات:

طبقا لتعريف تساوي راسمين ــ لا يمكن أن يتساوى راسمين إلا إذا كان لهما نفس النطاق ونفس النطاق المصاحب ــ فمثلا نعتبر الراسمين ؟ (A مجموعة الأعداد الحقيقية) $f : A \longrightarrow A$ ومعرف كما يأتي

$$f(a) = a^2 \,, \forall a \in A$$

(A^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة) $g : A \longrightarrow A^+$ ومعرف

$$g(a) = a^2, \forall a \in A$$

واضح أن g, f لهما نفس النطاق وأن صورة كل عنصر تحت تأثير f يساوي صورة نفس العنصر تحت تأثير g. ولكن النطاق المصاحب للراسم $f \neq$ النطاق المصاحب للراسم g. إذن لا يمكن أن نقول أن f تساوي g.

تعريف (١١) : الراسم $f : A \longrightarrow B$ يقال أنه راسما أحاديا (1-1 mapping or injective) إذا كان لأي عنصرين $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \,, a_1, a_2 \in A$

أي أن f تكون أحادية إذا كان كل عنصرين مختلفين في النطاق لهما صورتين مختلفتين في النطاق المصاحب.

تعريف (١٢) : نفرض الراسم $f : A \longrightarrow B$، يقال أن f راسما من A فوق B إذا كان مدى f يساوي النطاق المصاحب. أي أن f تكون فوقية surjective إذا كان لكل عنصر $b \in B$ يوجد (على الأقل) عنصرا واحدا $a \in A$ بحيث يكون $b = f(a)$.

تعريف (١٣) : الراسم $f: A \longrightarrow B$ يقال أنه تناظر أحادي (1-1 correspondence or bijective) إذا كان أحاديا وفوقيا. أي أن bijection = surjection + injection تناظر أحادي = فوقي + أحادي.

مثال (١١): نفرض الراسم $f: Z \longrightarrow Z$ معرفا بما يأتي $f(x) = -x, \forall x \in Z$

عين نوع هذا الراسم.

الحل: (i) هذا الراسم أحادي لأنه لأي عنصرين (النطاق) $x, y \in Z$ نفرض

$$f(x) = f(y) \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$$

(ii) الراسم فوقي لأن: لأي عنصر (النطاق المصاحب) $-x \in Z$ يوجد العنصر (النطاق) $x \in Z$ بحيث $f(-x) = -(-x) = x$ أي أن $f(Z) = Z$

(iii) حيث أن f أحاد وفوقي، إذن f تناظر أحادي.

مثال (١٢): نفرض الراسم $g: Z \longrightarrow Z$ ومعرف $g(x) = 2x, \forall x \in Z$ عين نوع هذا الراسم.

الحل: (i) g راسم أحادي لأن: لأي عنصرين (النطاق =) $x, y \in Z$ نفرض

$$g(x) = g(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

(ii) g ليست راسما فوقيا لأن: نأخذ (النطاق المصاحب =) $3 \in Z$، لا يوجد عدد صحيح ضعفه يساوي 3 أي لا يوجد (النطاق =) $x \in Z$ بحيث يكون $g(x) = 2x = 3$

(iii) بما أن g ليست راسما فوقيا، إذن g ليست تناظرا أحاديا.

مثال (١٣): نفرض الراسم $h : Z \longrightarrow Z$ بحيث $h(x) = x^2, \forall x \in Z$ عين نوع الراسم.

الحل: (i) هذا الراسم ليس أحاديا لأن $x, y \in Z$ بحيث

$$h(x) = h(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

$\therefore$ ليست بالضروري أن تكون x تساوي y.

(ii) الراسم h ليس فوقيا لأن: نأخذ (النطاق المصاحب) $2 \in Z$ إذن لا يوجد عدد صحيح مربعه يساوي 2 أي لا يوجد (النطاق =) $x \in Z$ بحيث يكون $h(x) = x^2 = 2$

(iii) بما أن الراسم ليس أحاديا وليس فوقيا، إذن h ليس تناظرا أحاديا.

مثال (١٤): نفرض أن $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{x, y\}$ ونفرض أن $R = \{(a, x), (b, y), (c, y), (d, x)\}$ هل R راسما؟ إذا كان كذلك عين نوع الراسم.

الحل: (i) واضح أن R راسما (لماذا؟). (ii) الراسم ليس أحاديا (لماذا؟).

(iii) الراسم فوقي (لماذا؟). (v) إذن ليس تناظرا أحاديا.

تعريف (١٤) : إذا كانت $A_1 \subset A, f : A \longrightarrow B$ فإنه يمكن تكوين راسما جديدا $f / A_1 : A_1 \longrightarrow B$ بحيث $(f / A_1)(a) = f(a), \forall a \in A_1$. الراسم f/A_1 يسمى **تقييد** f (restriction f) على A_1.

تعريف (١٥) : إذا كان $A_1 \subset A$، فإن الراسم $f : A_1 \longrightarrow A$ المعرف بالقاعدة $f(a) = a, \forall a \in A_1$ يسمى راسما **احتوائيا** (inclusion mapping)

وقد نستخدم الرمز : $i : A_1 = A$ فإن الراسم الاحتوائي $i : A \longrightarrow A$ يسمى راسم **تطابق** (identity) للمجموعة.

تعريف (١٦) : نفرض $f : A \longrightarrow B$ الصورة العكسية للعنصر $b \in B$ يرمز لها $f^{-1}(b)$ وتحتوي عناصر من A تكون b صورة كل منهم. أي أن

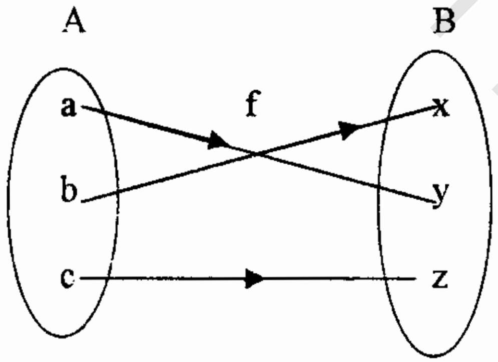
$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$$

وعلى وجه العموم $f^{-1}(b)$ قد تتكون من أكثر من عنصر وقد تكون ϕ.

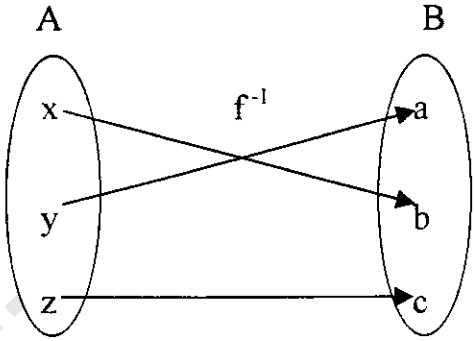
إذا كان $f : A \longrightarrow B$ راسما أحاديا وفوقيا. فإن لكل $b \in B$ المجموعة $f^{-1}(b)$ تتكون من عنصر واحدا فقط في A.

إذن f^{-1} تكون راسما من B إلى A ونكتب $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ويسمى هذا الراسم المعكوس للراسم f Inverse map.

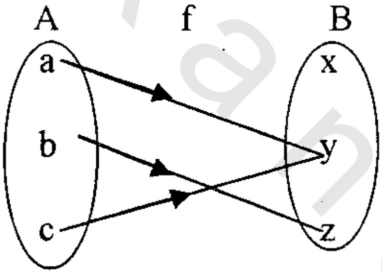
مثال (١٥): نفرض الراسم الموضح بالشكل التالي :



$\because$ الراسم f تناظر أحادي. إذن الراسم المعكوس f^{-1} للراسم f موجود وهو كما موضح بالشكل



مثال (١٦): نفرض الراسم $f: A \longrightarrow B$ الموضح بالشكل



$\therefore \quad f(c) = y, \ f(a) = y$

$\therefore$ f ليس راسما أحاديا وبذلك لا يمكن تكوين الراسم f^{-1}.

(١.١.٢) العمليات الثنائية Binary Operators

تعريف (١) : أي راسم $\tau: X \times X \longrightarrow X$ معرف كما يلي :

$$(x, y) \longrightarrow x \,\tau\, y, \forall (x, y) \in X \times X$$

يسمى **عملية ثنائية على المجموعة** X، أي أن العملية الثنائية على X هــي راسم من مجموعة حاصل الضرب الكارتيزي $X \times X$ إلى المجموعة نفسها.

مثال (١): الراسم $+ : Z \times Z \longrightarrow Z, (x, y) \longrightarrow x + y$ عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z (أي أن عملية الجمع هي عملية ثنائية على المجموعة Z).

مثال (٢): الراسم $. : Z \times Z \longrightarrow Z ; (x, y) \longrightarrow x\, y$ عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z (أي أن عملية الضرب هي عملبة ثنائية على Z).

مثال (٣): الراسمان

$$\text{(i)} \quad \bigcap : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X), (A, B) \longrightarrow A \bigcap B, \forall A, B \in P(X)$$
$$\text{(ii)} \quad \bigcup : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X), (A, B) \longrightarrow A \bigcup B, \forall A, B \in P(X)$$

يمثلان عمليتين على المجموعة $P(X)$ (مجموعة كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة X).

مثال (٤): واضح أن "عملية القسمة" ليست عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة.

تعريف (٢): نفرض عملية ثنائية $\tau : X \times X \longrightarrow X$

(i) العملية τ يقال أنها عملية **إبدالية** (Commutative) إذا تحقق

$$x \,\tau\, y = y \,\tau\, x, \forall x, y \in X$$

(ii) العملية τ يقال أنها عملية **دامجة** (associative) إذا تحقق

$$x \,\tau\, (y \,\tau\, z) = (x \,\tau\, y) \,\tau\, z, \forall x, y, z \in X$$

مثال (٥): (١) عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الصحيحة هما عمليتين دامجتين وإبداليتين.

(٢) العمليتين $\cap, \cup$ على $P(X)$ هما عمليتين دامجتين وإبداليتين.

(٣) العملية الثنائية $\tau : R \times R \longrightarrow R, (x, y) \longrightarrow x + 2y, \forall x, y \in R$

ليست إبدالية وليست دامجة (لماذا؟).

تعريف (٣): نفرض $e \in X$، العنصر e يسمى عنصرا محايدا Identity element للعملية الثنائية $\tau : X \times X \longrightarrow X$

إذا تحقق $x \tau e = e \tau x = x, \forall x \in X$ أما إذا كان العنصر e يحقق فقط $e \tau x = x, \forall x \in X$ فإنه يسمى عنصرا محايدا يساري (left unit) للعملية τ ويسمى عنصرا محايدا يمينيا (right unit) للعملية τ إذا تحقق

$x \tau e = x, \forall x \in X$

مثال (٦): نفرض Q هي مجموعة الأعداد القياسية ــ العنصر $0 \in Q$ هو عنصرا محايدا بالنسبة لعملية الجمع، $1 \in Q$ عنصرا محايدا بالنسبة لعملية الضرب.

مثال (٧): مجموعة الأعداد الطبيعية N ليس لها عنصر محايد لعملية الجمع، $1 \in N$ هو عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب.

مثال (٨): نفرض U مجموعة شاملة، نعلم أن

$$A \cup \phi = \phi \cup A = A, \forall A \in P(U) \;\&\; A \cap U = U \cap A, \forall A \in P(U)$$

إذن ϕ عنصر محايد للعملية $\cup$ & U عنصر محايد للعملية $\cap$

نظرية (١): إذا كانت τ عملية ثنائية على مجموعة X فإن X تحتوي على عنصر محايد واحد على الأكثر.

البرهان: نفرض أن $e, e' \in X$ هما عنصرين محايدين للعملية τ

$\therefore e = e\,\tau\, e' = e'\,\tau\, e$ (لأن e' عنصر محايد)

$= e'$ (لأن e عنصر محايد)

تعريف (٤): إذا احتوت المجموعة X على عنصر محايد e بالنسبة للعملية الثنائية $\tau : X \times X \longrightarrow X$ فإن العنصر $x' \in X$ يسمى معكوس Inverse element العنصر $x \in X$ إذا تحقق $x\,\tau\, x' = x'\,\tau\, x = e$

مثال (٩) : معكوس العنصر $x \in Z$ هو $-x \in Z$ بالنسبة لعملية الجمع وذلك لأن $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ولكن ليس كل عنصر $x \in Z$ له معكوس بالنسبة لعملية الضرب.

نظرية (٢): نفرض τ عملية ثنائية دامجة على المجموعة X فإن لكل عنصر في X له على الأكثر معكوس واحد.

البرهان: نفرض $x, x'' \in X$ هما معكوسين للعنصر $x \in X$ بالنسبة للعملية τ

$\therefore x'' = x''\,\tau\, e = x''\,\tau\,(x\,\tau\, x') = (x''\,\tau\, x)\,\tau\, x'$ (لأن τ دامجة)

$x'' = e\,\tau\, x' = x'$

تعريف (٥) : نفرض X معرف عليها عمليتين ثنائيتين $\circ, \tau$ يقال أن

(١) τ عملية **توزيع يساري** (left distribution) بالنسبة للعملية $\circ$ إذا تحقق

$$x\,\tau\,(y \circ z) = (x\,\tau\, y) \circ (x\,\tau\, z), \quad \forall x, y, z \in X$$

(٢) τ عملية **توزيع يميني** (right distribution) بالنسبة للعملية $\circ$ إذا تحقق

$$(y \circ z)\, \tau\, x = (y\, \tau\, x) \circ (z\, \tau\, x) \quad , \forall\, x, y, z \in X$$

(٣) τ عملية توزيع بالنسبة للعملية $\circ$ إذا كانت τ عملية توزيـــع يســاري ويميني بالنسبة للعملية $\circ$.

مثال (١٠): نفرض $P(x)$ مع العمليتين $\cup, \cap$ نعلم أن $\cap$ عملية توزيع بالنسبة للعملية $\cup$ والعكس أيضاً صحيح.

مثال (١١): نفرض Z مع العمليتين $\tau ;\circ$ المعرفتين كما يلي :

τ عملية الجمع، $x \circ y = x^2\, y, x, y \in Z$

$$\therefore \; x \circ (y+z) = x^2\,(y+z) = x^2\, y + x^2\, z$$
$$= (x \circ y) + (x \circ z), \forall\, x, y, z \in Z$$

أي أن $\circ$ عملية توزيع يساري بالنسبة للعملية +.

ولكن: $(y+z) \circ x = (y+z)^2\, x \neq \left(y^2 + z^2\right) x = y^2\, x + z^2\, x$

$$\therefore (y+z) \circ x \neq (y \circ x) + (z \circ x)$$

إذن $\circ$ ليست عملية توزيع يميني بالنسبة للعملية $+ = \tau$

مثال (١٢): نفــرض أن $e \in A$ عنصـــر محــايد يســـــاري للعمليـــــة e
$A \longrightarrow A \times A : e$ برهن أن العناصر المحايدة اليسارية ليست بـــالضرورة وحيدة، ومن ثم فقد لا تكون عناصر محايدة.

الحل: نفرض $A=\{a, b\}$ ونعرف العملية الثنائية $\tau : A \times A \longrightarrow A$ كما يلي:

$$a\, \tau\, a = b\, \tau\, a = a\,, \quad a\, \tau\, b = b\, \tau\, b = b$$

واضح أن $b \in A$ عنصر محايد يساري وأن $a \in A$ عنصر محايد يســـاري وأن أي منهما ليس عنصراً محايداً.

(٣.١) قدرة المجموعات Potency of Sets

تعريف (١): لتكن A, B مجموعتين يقال أن A, B متقادرتـان Equipotent (متساوية القدرة) إذا وفقط إذا وجد بينـهما تنـاظر أحـادي $f: A \longrightarrow B$ ونعبر عن ذلك بالرمز $A \sim B$. إذا كان لا يوجد أي تنـاظر أحـادي بيـن المجموعتين A, B نكتب $A \nsim B$ وتقرأ A غير متقادرة مع B.

ملاحظة (١): العلاقة ~ بين المجموعات هي علاقة تكافؤ أي أن

(١) $A \sim A$ لأي مجموعة A.

(٢) $(A \sim B) \longrightarrow (B \sim A)$ لأي مجموعتين A, B.

(٣) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \longrightarrow (A \sim C)$ لأي ثلاث مجموعات A, B, C.

وعليه أن مجموعة المجموعات من مجموعـة (عائلـة المجموعـات مـن مجموعة) تنقسم إلى (تجزأ إلى) فصول تكافؤ.

ملاحظة (٢): أننا عرفنا متى تكون مجموعتان متقادرتين ولكن لم نعرف ما نقصده بقدرة المجموعة، أن قدرة المجموعة مفهوم مجرد وخاصـة عنـد تكون المجموعة غير منتهية ويمكن أن نقول أن قدرة المجموعة ما هـي إلا كمية العناصر التي تحتويها.

ملاحظة (٣): نستخدم التعبير "عدد أساسي cardinal number" لنشير إلـى الخاصية التي تشترك بها المجموعات المتقادرة، حسب الملاحظة (١) تكون الأعداد الأساسية قياسا إلى عدد العناصر في المجموعات.

وبهذا نكون قد ربطنا مع أية مجموعة A شيئا رياضيا جديدا، أسميناه العـدد الأساسي للمجموعة A، وكما **قال كنتور** بأن العدد الأساسي لمجموعة هـو

ذلك المفهوم الذي يدرك بقوة التجريد ويرتبط مع المجموعة متجاهلين عناصرها وترتيبها.

إذا كانت A مجموعة فسوف نكتب A # لتدل على العدد الأساسي للمجموعة A، فالخاصية الأساسية للأعداد الأساسية هي: $(A \sim B) \longrightarrow \#(A) = \#(B)$

تعريف (٢): نقول أن α عدد أساسي إذا وجدت مجموعة A بحيث $\alpha = \#(A)$.

لنتفق على أن $\#(\phi) = 0, \#(\{\phi\}) = 1, \#(\{\phi, \{\phi\}\}) = 2, \#(\{0, 1, ..., n-1\}) = n$

مثال (١): لتكن $R = \{1, 2, 5, 8\}, T = \{a, b, c, d\}$

نعرف الراسم (تطبيق) $f : R \longrightarrow T$ بحيث أن $f(1)=a,\ f(2)=b,\ f(5)=d$

واضح أن $f : R \longrightarrow T$ تناظر أحادي فإذن $R \sim T$ وعليه فإن $\#(R)=\#(T)=4$

مثال (٢): لتكن $M=\{1, 2, 3\}, S=\{a, b\}$ من الواضح أنه لا يوجد تقابل (تناظر أحادي) بين M, S لذا فإن $M \nsim S$.

مثال (٣): لتكن $G = [0,1] \subset R, H = [2,5] \subset R$ وليكن $f : G \longrightarrow H$ راسم بحيث $f(x) = 3x + 2, x \in G$ واضح أن الراسم $f : G \longrightarrow H$ تناظر أحادي فإن $G \sim H$.

تعريف (٣): يقال أن A مجموعة منتهية (finite) إذا وفقط إذا كانت A متساوية القدرة مع مجموعة من الأعداد الطبيعية ذات الصورة $\{0, 1, 2, ..., n-1\} \subset N$ حيث n عدد طبيعية.

تعريف (٤): إذا كانت A مجموعة متساوية القدرة مع $\{0, 1, ..., n-1\}$ فيقال أن العدد الأساسي للمجموعة A هو n.

ملاحظة (٤): العدد الأساسي للمجموعات المنتهية هو عدد العناصر التـــي تحويها المجموعة.

ملاحظة (٥): تكون المجموعة A منتهية إذا كان لا يوجـــد أي مجموعـــة جزئية من A ومتساوية القدرة مع A سوى A نفسها فعليه يمكن أن نعـــرف المجموعة غير المنتهية كمـــا يلي: تكون المجموعة A غير منتهية إذا وفقط إذا كانت A متساوية القدرة مع مجموعة جزئية فعلية منها.

ملاحظة (٦): يسمى العدد α عدداً منتهياً إذا كان هـــو العـــدد الأساســـي لمجموعة منتهية، وما عـــدا ذلك فنسميه عدد أساسي غير منتـــه. والعـــدد الأساسي المنتهي يسمى أيضاً عدداً طبيعياً Natural number ويسمى العـــدد الأساسي غير المنتهي عدد ما فوق المنتهي Transfinite number.

ملاحظة (٧): تكون المجموعة A منتهية إذا وفقط إذا كان $\#(A) \neq \#(A)+1$ وعليه إذا كانت $A, \alpha = \#(A)$ مجموعة منتهية فإن $\alpha \neq \alpha + 1$

تعريف (٥): ليكن α, β عدداً أساسياً، يقال أن $\alpha \leq \beta$ إذا وفقط إذا وجـــدت مجموعتان A, B بحيث $\alpha = \#(A), \beta = \#(B)$ والمجموعة A متقـــادرة مـــع مجموعة جزئية من B وهذا يعني وجود راسم أحادي $f : A \longrightarrow B$.

مثال (٤): علاقة $\leq$ على قدرة المجموعات (الأعداد الأساسية) علاقة ترتيـــب جزئـــي Partially ordered لأن (i) العلاقـــــة $\leq$ تكـــون علاقـــة انعكاســـية reflexive أي أن $\alpha \leq \beta$ لكل α عدد أساسي.

(ii) العلاقة ناقلة (متعديـــة) transitive أي أن $(\alpha \le \beta) \wedge (\beta \le \gamma) \to \alpha \le \gamma$
لأي ثلاث أعداد أساسية α, β, γ.

(iii) العلاقة $\le$ علاقة ضد متناظرة antisymmetric.

مثال (٥): $\beta \ge \alpha$ تعني $\alpha \le \beta$ لأي عددين أساسين α, β.

مثال (٦): إذا كان n عدداً أساسياً منتهياً فإن $n \le n_o$ حيث n_o يرمز للعـــدد الأساسي لمجموعة الأعداد الطبيعية.

تمارين (١.١)

(١) هل $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(٢) هل $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(٣) هل على وجه العموم $c^{(A\times B)}=c^A\times c^B$ حيث c^A مجموعة كل الرواسم من A إلى c.

(٤) برهن أن $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(A\cap B)$

هل تظل العلاقات صحيحة إذا وضعنا $\cup$ بدلا من $\cap$.

(٥) للمجموعات والعلاقات التالية حدد نوع العلاقة من حيث كونها عاكسة ــ متماثلة ــ ناقلة

(i) $A=\text{integers}, a\,R\,b \Leftrightarrow 3\setminus(a-b)$

(ii) $A=\text{integers}, a\,R\,b \Leftrightarrow a\le b$

(iii) A= مجموعة المثلثات في المستوى، $aRb\Leftrightarrow$ المثلث a يشابه المثلث b

(٦) إذا كانت M هي مجموعة جميع نقط مستوى ما وكانت R_1, R_2 علاقتان معرفتان على M كما يلي R_1 هي العلاقة التي تعني بأنه إذا كانت $A\,R_1\,B$ فإن النقطة B والنقطة A لهما نفس الإحداثي السيني. R_2 هي العلاقة التي تعني أنه إذا كانت $A\,R_2\,B$ فإن مجموع إحداثيات النقطة B يساوي مجموع إحداثيات النقطة A. وضح فيما إذا كانت R_1, R_2 علاقات التكافؤ.

(٧) أثبت أن العلاقات الآتية المعرفة على Z هي علاقات تكافؤ

(i) $\{ (a, b) : a - b \ \text{even} \}$

(ii) $\{ (a, b) : a + b \ \text{even} \}$

(iii) $\{(a, b) :$ $a - b$ مضاعف للعدد $5\}$

(iv) $\{(a, b) : a^2 = b^2\}$

(٨) بين أي من العلاقات الآتية المعرفة على R (مجموعة الأعداد الحقيقية) تكون علاقة تكافؤ

(i) $a\,R\,b \Leftrightarrow |a| = |b|$ (ii) $a\,R\,b \Leftrightarrow b$ مضاعف للعدد a

(iii) $a\,R\,b \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$ (iv) $a\,R\,b \Leftrightarrow a - b > 0$

(v) $a\,R\,b \Leftrightarrow a / b$ (a عامل من عوامل b)

(**Hint** : الصفر ليس عامل للصفر.)

(٩) أثبت أن

(i) معكوس علاقة التكافؤ هو علاقة تكافؤ.

(ii) تقاطع علاقتين تكافؤ هو أيضا علاقة تكافؤ.

(iii) تقاطع أو اتحاد علاقتين متماثلتين هو أيضا علاقة تماثل.

(iv) اتحاد علاقات تكافؤ ليست بالضرورة أن يكون علاقة تكافؤ

(**Hint** : لبرهنة **(iv)** يكفي إعطاء مثال عكس **Counter example** لذلك نعتبر العلاقات الآتية

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$$
$$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$$

المعرفة على A، يمكن التأكد بسهولة أن $R_1 \cup R_2$ ليست ناقلة أي ليست علاقة تكافؤ بالرغم من أن R_1, R_2 علاقات تكافؤ.

(١٠) أعط مثال :

(i) لراسم $f: X \longrightarrow Y$ يحقق لمجموعتين جزئيتين A, B من X
$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) : A, B \subset X$

(ii) لراسم $f: X \longrightarrow Y$ يحقق لمجموعة جزئية A من X
$f(X - A) \neq f(X) - f(A) \;:\; A \subset X$

(١١) إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{a, b\}$ اكتب جميع عناصر A^B، كم عنصرا في A^B يكون راسما أحاديا.

(١٢) أي من الرواسم $\theta: Z \longrightarrow Z$ تكون أحادية وأيها تكون فوقية — حيث $\theta(x)$ معرفة لكل $x \in Z$ كما يلي :

(i) $\theta(x) = \frac{1}{2}x$ إذا كانت x زوجية، $\theta(x) = x$ إذا كانت x فردية.

(ii) $\theta(x) = 2x + 1$ (iii) $\theta(x) = x^3$

(١٣) نفرض R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(x \geq 0)$، الراسم $\theta: R^+ \longrightarrow R^+$

$$\theta(x) = x^2 , \forall x \in R^+$$

برهن أن θ تناظر أحادي ومن ثم أوجد θ^{-1}.

نعرف الآن : $\theta: R \longrightarrow R , \theta(x) = x^2, \forall x \in R$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية. هل θ تناظر أحادي؟.

(١٤) نفرض a, b عددين حقيقين ثابتين، ونفرض $f: R \longrightarrow R$ معرفة كما يلي $f(x) = a x + b , \forall x \in R$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

برهن أن f تناظر أحادي إذا وإذا فقط كانت $a \neq 0$ ومن ثم أوجد f^{-1} في هذه الحالة.

(١٥) إذا كانت N هي مجموعة الأعداد الطبيعية. عين الحالات التي تكون فيها τ عملية ثنائية على N حيث τ معرفة كما يلي

(i) $\tau:(x,y)\longrightarrow x+y$ (ii) $\tau:(x,y)\longrightarrow x-y$

(iii) $\tau:(x,y)\longrightarrow (x-y)^2$ (iv) $\tau:(x,y)\longrightarrow \sqrt{x+y}$

(v) $\tau:(x,y)\longrightarrow x^2+y^2$

(١٦) كم عملية ثنائية يمكن تعريفها على المجموعة $\{a\}$.

(١٧) كم عملية ثنائية يمكن تعريفها على المجموعة $\{a, b\}$.

(١٨) نفرض τ عملية ثنائية معرفة على المجموعة X ويوجد عنصر محايد للعملية τ وأن τ تحقق العلاقة: $x\,\tau\,(y\,\tau\,z)=(x\,\tau\,z)\,\tau\,y$

لكل $x, y, z\in X$. برهن أن τ عملية دامجة وإبدالية.

(١٩) نعرف "الفرق المتماثل" $S\,\Delta\,T$ للمجموعتين الجزئيتين $S, T\subset U$ كما يلي : $S\,\Delta\,T=\left(S\cap T^c\right)\cup\left(S^c\cap T\right)$ حيث c المكمل.

برهن أن Δ عملية دامجة وإبدالية وأن $\cap$ عملية توزيع بالنسبة للعملية Δ.

(٢٠) نفرض $\tau:R\times R\longrightarrow R$ بحيث $x\,\tau\,y=x\,y+1, \forall x, y\in R$ برهن أن τ عملية إبدالية وليست دامجة. هل يوجد عنصر محايد؟

(٢١) نعرف العملية الثنائية $\tau:R\times R\longrightarrow R$ بالقاعدة

$x\,\tau\,y=x+y+x\,y\,, \forall (x, y)\in R\times R$ هل τ عملية دامجة؟

(٢٢) برهن أنه يمكن تعريف n^2 عملية ثنائية مختلفة على مجموعة A عدد عناصرها n.

(٢٣) نفرض $A = \{a, b, c\}$، $B = \{e, f\}$، أكتب كل الرواسم الممكنة من A إلى B.

(إرشاد : أوجد كل المجموعات الجزئية الممكنة من $A \times B$ وهي علاقات من **A** إلى **B** ثم اختار كل العلاقات التي تصلح أن تكون رواسم) .

(٢.١) مقدمة في الأنظمة الجبرية The Algebraic Systems

تعريف (١): النظام الجبري هو مجموعة غير خالية معرف عليها عملية ثنائية أو أكثر ونقتصر في دراستنا هنا على إعطاء لمحات سريعة على الأنظمة الجبرية "الزمر ــ الحلقات ــ الحقول".

تعريف (٢): نصف الزمرة Semi-group (S,τ) هو مجموعة S مع عملية ثنائية دامجة τ.

مثال (١): نفرض A أي مجموعة & $S=A^A$، $\tau:S\times S\longrightarrow S$ معرفة بالقاعدة $(f,g)\longrightarrow f\circ g, \forall f,g\in S$ إذن (S,τ) نصف زمرة (لماذا؟).

مثال (٢): (Z,τ) حيث τ هي عملية الطرح ــ ليست نصف زمرة.

تعريف (٣): شبه مجموعة manoid (S,τ) هي نصف زمرة مع عنصر محايد.

ويقال أن (S,τ) شبه زمرة إبدالية أو شبه زمرة ابيلية (abelian) إذا كانت τ عملية إبدالية commutative.

مثال (٣) : في مثال (١) (S,τ) شبه زمرة (راسم التطابق $I:A\longrightarrow A$ هو العنصر المحايد للعملية τ .

تعريف (٤): إذا كانت العملية الثنائية بصورة + والعنصر المحايد 0 فإننا نقول أنها **شبه زمرة باصطلاح الجمع** Additive manoid

مثال (٤): واضح أن $(R,+),(z,+)$ أشباه زمرات إبدالية باصطلاح الجمع.

تعريف (٥): إذا كانت العملية الثنائية في صورة ضرب (.) والعنصر المحايد بصورة I فإننا نقول أنها **شبه زمرة باصطلاح الضرب** Multiplicative manoid. واضح أن (.,N), (.,Z) أشباه زمرات إبدالية باصطلاح الضرب.

مثال (٥): نفرض R مجموعة الأعداد الحقيقية & S = R ونفرض

$$f : R \longrightarrow R\ (x \longrightarrow x+1)\ \&\ g : R \longrightarrow R\left(x \longrightarrow x^2\right)$$

واضح أن: $f, g \in S$ شبه زمرة ليست إبدالية.

تعريف (٦): نفرض $a \in S$ حيث (S, τ) شبه زمرة. يقال أن a قابل للتعاكس Invertible elements (أو a له معكوس) إذا وجد العنصر $a' \in S$ بحيث $a\,\tau\, a' = a'\,\tau\, a = e$ (e هو العنصر المحايد). العنصر a' يسمى معكوس العنصر a بالنسبة للعملية τ.

تعريف (٦): إذا كانت $(S, +)$ شبه زمرة باصطلاح الجمع فإننا نرمز لمعكوس (إذا وجد) العنصر $a \in S$ بالرمز $-a$. وإذا كانت $(S, .)$ شبه زمرة باصطلاح الضرب فإن معكوس $a \in S$ يرمز له بالرمز a^{-1}.

نظرية (١): (١) في أي شبه زمرة العنصر المحايد قابل للتعاكس.

(٢) في حالة شبه زمرة باصطلاح الضرب $(S, .)$ نجد أن $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

وفي حالة شبه زمرة باصطلاح الجمع $(S, +)$ نجد أن $-(-a) = a$

(٣) $(Z, +)$ شبه زمرة وكل عنصر $a \in Z$ قابل للتعاكس وفي شبه زمرة $(Z, .)$ لا يوجد سوى العنصرين $1, -1$ القابلين للتعاكس.

نظرية (٢): إذا كان $a, b \in S$ عنصرين قابلين للتعاكس في شبه زمرة (S, τ) وكان a' هو معكوس a، b' معكوس b فإن $a \tau b \in S$ قابل للتعاكس وأن المعكوس هو $(a \tau b)' = b' \tau a'$.

البرهان: باستخدام قانون الدمج نستنتج أن :

$$(a \tau b) \tau (b' \tau a') = ((a \tau b) \tau b') \tau a' = (a \tau (b \tau b')) \tau a'$$
$$= (a \tau e) \tau a' = a \tau a' = e$$

وبالمثل:

$$(b' \tau a') \tau (a \tau b) = ((b' \tau a') \tau a) \tau b$$
$$= (b' \tau e) \tau b = b' \tau b = e$$

إذن $b' \tau a'$ هو معكوس العنصر $a \tau b$.

في حالة $(S, .)$ يكون $(a\,b)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}$، وفي حالة $(S,+)$ يكون $-(a+b)=(-b)+(-a)$

نظرية (٣): نفرض $a \in S$ قابل للتعاكس في شبه المجموعة (S, τ) وأن المعكوس هو a'. لأي عنصرين $b, c \in S$ يتحقق:

(1) المعادلة $x \tau a = b$ لها حل وحيد هو $x = b \tau a'$

(2) المعادلة $a \tau y = c$ لها حل وحيد هو $y = a' \tau c$

البرهان: $x = b \tau a'$ يكون حل المعادلة (1) إذا تحقق

$$(b \tau a') \tau a = b \tau (a' \tau a) = b \tau e = b$$

$\therefore$ $(b \tau a')$ حل المعادلة (1).

نفرض أن x عنصر بحيث $x \tau a = b$ إذن $x = x \tau e$
$$= x \tau (a \tau a') = (x \tau a) \tau a' = b \tau a'$$

$\therefore$ $b \tau a'$ هو الحل الوحيد للمعادلة (1).

وبالمثل يمكن برهنة الجزء الثاني من النظرية.

تعريف (٧): يقال النظام (G,τ) أنه زمرة group إذا كان هذا النظام شبه زمرة ويكون كل عنصر من عناصر G قابل للتعاكس (أي له معكوس، أي أن (G,τ) يكون زمرة إذا تحقق :

(i) τ عملية ثنائية على G. (ii) τ عملية دامجة.

(iii) يوجد العنصر المحايد $e\in G$ للعملية τ أي $x\,\tau\, e=e\,\tau\, x=x\,,\forall\, x\in G$

(iv) لكل عنصر $x\in G$ يوجد المعكوس $x'\in G$ أي $x\,\tau\, x'=x'\,\tau\, x=e$

مثال (٦): نفرض $S=\{f\in A^A\ :\ \text{تناظر أحادي } f\}$، فإن $(S,\circ)$ زمرة.

مثال (٧): $(Z,+)$ زمرة ولكن $(Z,.)$ ليست زمرة.

مثال (٨): نفرض $A=\{a,b\}$ إذن $P(A)=\{A,\{a\},\{b\},\phi\}$ هل $(P(A),\cup)$ زمرة؟.

الحل: ننشئ الجدول الآتي :

$\cup$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	A	A
$\{b\}$	$\{b\}$	A	$\{b\}$	A
A	A	A	A	A

واضح من هذا الجدول أن:

(i) ϕ هو العنصر المحايد.

(ii) $\{a\}$ ليس لها أي معكوس أي لا يوجد عنصر x في $P(A)$ يحقق $\{a\} \cup x = x \cup \{a\} = \phi$ كذلك بالنسبة للعناصر $A, \{b\}$.

(iii) من الخواص الجبرية للمجموعات نعلم أن $\cup$ عملية دامجة. إذن النظام $(P(A), \cup)$ شبه زمرة وليس زمرة.

مثال (٩): مثال (٦) يمثل زمرة ليست إبدالية (لماذا؟) ـ النظام $(Z, +)$ يمثل زمرة إبدالية (لماذا؟).

بعض خواص الزمر:

أولا: قانون الحذف (Cancellation law) : نفرض (G, τ) زمرة وأن

$$a, b, c \in G \qquad \therefore\ a \,\tau\, b = a \,\tau\, c \Rightarrow b = c$$

البرهان: نفرض $a' \in G$ هو معكوس العنصر a

$$\therefore a' \,\tau\, (a \,\tau\, b) = a' \,\tau\, (a \,\tau\, c)$$
$$\therefore (a' \,\tau\, a) \,\tau\, b = (a' \,\tau\, a) \,\tau\, c$$
$$\therefore e \,\tau\, b = e \,\tau\, c$$
$$b = c$$

ثانيا: كل معادلة من المعادلتين :

$a \,\tau\, x = b, y \,\tau\, a = b$ لها حل وحيد، لأي عنصرين $a, b \in G$

البرهان: بالتأثير على المعادلة الأولى من جهة اليمين بالعنصر a^{-1} وكذلك من جهة اليسار على المعادلة الثانية ينتج المطلوب.

ثالثا: لأي عنصر $a \in G$ يكون معكوس المعكوس للعنصر a هو a. أي أن

$$(a')' = a$$

في حالة $(G, .)$ $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ وفي حالة $(G, +)$ $-(-a) = a,$

رابعا: لأي عنصرين $a, b \in G$ نجد أن $(a \tau b)' = b' \tau a'$

في حالة الزمرة $(G, .)$, $(a\, b)^{-1} = (b)^{-1}\,(a)^{-1}$

وفي حالة الزمرة $(G, +)$, $-(a+b) = (-b) + (-a)$

خامسا: لأي عناصر $a, b, \dots, p, q \in G$ نجد أن :

$$(a \tau b \dots \tau p \tau q)' = q' \tau p' \tau \dots \tau b' \tau a'$$

في حالة $(G, .)$, $(a\, b \dots p\, q)^{-1} = q^{-1}\, p^{-1} ;;; b^{-1}$

وفي حالة $(G, +)$ $-(a+b \dots + p + q) = (-q) + (-p) + \dots + (-a)$

سادسا: لأي عنصر $a \in G$ ولأي عدد صحيح موجب m نعرف

$$a^m = a \tau a \dots \tau a \ (m \text{ factor})$$

$a^0 = e$ (العنصر المحايد)

وأن $(a')^m = a' \tau a' \tau \dots \tau a'$ (m factor)

في حالة $(G, .)$ $a^{-m} = \left(a^{-1}\right)^m = a^{-1} \tau a^{-1} \tau \dots \tau a^{-1}$ (m factor)

وفي حالة $(G, +)$ $m\, a = a + a + \dots + a$ (m factor)

& $m(-a) = (-a) + (-a) + \dots + (-a)$ (m factor)

يمكن إثبات أن $a^m \tau a^n = a^{m+n}$, $\left(a^m\right)^n = a^{m\,n}$ حيث n,m عددين صحيحين.

تعريف (٨): إذا كانت (G, τ) زمرة محدودة (أي عدد عناصر G يكون محدودا) فإن عدد عناصر G يسمى رتبة G (the order of G).

تعريف (٩): رتبة عنصر $a \in G$ هي أصغر عدد صحيح موجب n ــ إذا وجد ــ بحيث يكون $a^n = e$ (العنصر المحايد)

مثال (١٠): (أ) في الزمرة $(Z, +)$إذا كانت $a \neq 0$ فإن $n\, a \neq 0, \forall n \in N$

إذن العنصر a درجتة ما لانهاية.

تعريف (١٠): يقال للمجموعة A الغير خالية أنها تكون حلقة بالنسبة للعمليتين (+), (.) إذا تحققت الشروط التالية لجميع العناصر $a, b, c \in A$

(1) $a + b \in A$ (2) $a + b = b + a$

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (4) $\exists 0 \in A : 0 + a = a + 0, \forall a \in A$

(5) $\exists -a \in A : a + (-a) = (-a) + a = 0, \forall a \in A$

(6) $a, b \in A$ (7) $a . (b . c) = (a . b) . c$

(8) $a . (b + c) = a . b + a . c, \ (b + c) . a = b . a + c . a$

يلاحظ أن الشروط من (5) - (1) يعني أن (A, +) تكون زمرة إبدالية والشروط (7) ,(6) يعني أن (A, .) تكون نصف زمرة. ويرمز عادة للحلقة بالرمز (A, +, .).

مثال (١١): المجموعة A = {a, b} مع عمليات الجمع والضرب والمعرفة بالجدولين

+	a	b
a	a	b
b	b	a

.	a	b
a	a	a
b	a	b

تكون حلقة.

مثال (١٢): النظام الجبري (Z, +, .) تكون حلقة حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

مثال (١٣): النظام الجبري (R, +, .) يكون حلقة.

مثال (١٤): النظام الجبري $(T, +, .)$ حيث $T = \{2x+1, x \in Z\}$ لا يكون حلقة.

تعريف(١١): إذا كان النظام $(A, +, .)$ حلقة بشرط أن النظام $(A-\{0\}, .)$ زمرة فتسمى الحلقة في هذه الحالة بالحقل Field ويرمز لها عادة بالرمز F.

مثال (١٥): النظام الجبري $(R, +, .)$ حقل ويسمى حقل الأعداد الحقيقية Field of real numbers.

مثال (١٦): إذا كانت $M = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in Q\}$ وكانت عمليتي الجمع والضرب معرفتين كما يلي:

$$(a, b, c, d) + (a, f, g, h) = (a + e, b + f, c + g, d + h)$$
$$(a, b, c, d) + (a, f, g, h) = (ae + bg, af + bh, ce + dg, cf + dh)$$

حيث $Q, e, f, g, h \in Q$ مجموعة الأعداد القياسية. فإن النظام الجبري $(M, +, .)$ لا يكون حقل ولكن يكون حلقة.

تمارين (٣.١)

(١) نفرض R مجموعة الأعداد الحقيقية، نعرف العملية $\circ$ على R كما يلي: $x \circ y = x + y + xy , \forall x, y \in R$ برهن أن $(R, \circ)$ نصف زمرة.

هل $(R, \circ)$ شبه زمرة؟.

نفرض أن $R' = \{ x \in R : x \neq -1\}$ برهن أن $(R, \circ)$ زمرة.

(٢) أي من هذه المجموعات تكون زمرة تحت تأثير العملية المشار إليها:

(i) $S = \{x : x \in Z, x < 0\}$ مع عملية الجمع +،

(ii) $S = \{x : x \in Z\}$ مع عملية الجمع +،

(iii) $S = \{x : x \in Z, x$ فردية$\}$ مع عملية الضرب.

(iv) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ مع عملية الضرب.

(٣) برهن أن النظام $(P(x), \Delta)$ هو زمرة إبدالية، حيث العملية Δ معرفة كالآتي: $A \Delta B = (A \bigcup B) - (A \bigcap B), \forall A, B \in P(x)$.

(٤) إذا كان x, y عنصرين في زمرة وأن $x^2 = y^2 = (x y)^2 = e$ برهن أن y, x تتبادلان.

(٥) برهن أنه إذا كان $x^2 = e , \forall x \in G$ فإن G زمرة إبدالية.

(٦) إذا كانت $A = \{0,1,2,3\}$ وكانت τ هي العملية الثنائية المعطاة بالجدول

τ	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ادرس النظام (A, τ).