الجزء الثاني
الباب الثالث
الفراغات الإتجاهية
Vector Spaces

(١.٣) الفراغ الإتجاهي (الخطي)

Vector Space (Linear Space)

يعرف الفراغ الإتجاهي (الخطي) على حقل الأعداد الحقيقية R (عناصر R تسمى كميات قياسية) على أنه مجموعة غير خالية V معرف عليها بناء جبري Algebraic structure (عناصر المجموعة تسمى متجهات) كالآتي:

زمرة إبدالية Commutative group (Abelian group) 1- (V, +)

الضرب في عدد حقيقي 2- $R \times V \rightarrow V$

معرف بالآتي : $r\,u \in V, \forall u \in V, r \in R$

قوانين التوزيع distributive laws $\left.\begin{array}{l} r(u_1 + u_2) = r\,u_1 + r\,u_2 \\ (r_1 + r_2)u = r_1\,u + r_2\,u \end{array}\right\}$

قانون الدمج associative law $(r_1\,r_2)u = r_1(r_2\,u)$

العنصر المحايد الضربي Identity element product $1\,u = u, \quad 1 \in R$

مثال (١): V_3 مجموعة كل الثلاثيات المرتبة $\{a = (a_1, a_2, a_3)\}$ فراغ اتجاهي حيث

$$a + b = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$r\,a = (r\,a_1, r\,a_2, r\,a_3)\ , \ \forall\ r \in R$$

مثال (٢): $R^n = R \times R \ldots \times R$ حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعة R عدد n من المرات تكون فراغ اتجاهي، كل عنصر فيه له الشكل

$$a = (a_i) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$$

المجموعة R^n هي فراغ اتجاهي حيث

$$a + b = (a_i + b_i)\ ,\ \ r\,a = (r\,a_i)$$

مثال (٣): مجموعة كل كثيرات الحدود R [t] في المتغير t ذات المعاملات الحقيقية تكون فراغ اتجاهي حيث

$$P_1(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i\ t^i\ ,\ P_2(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i\ t^i$$

فإن المجموع

$$P_1\,(t) + P_2\,(t) = \sum_{i=0}^{\mu} (a_i + b_i)\,t^i$$

حيث μ لا تزيد عن m أو n.

الضرب في عدد قياسي r ،

$$r\,P(t) = \sum_{i=0}^{n} (r\,a_i)\,t^i = \sum_{i=0}^{n} b_i\ t^i$$

مثال (٤): مجموعة كل الدوال المتصلة F[0,1] المعرفة على النطاق [0,1] ومداها R تكون فراغ اتجاهي حيث

$$(f + g)\,(x) = f(x) + g(x),\ \ \forall\, f, g \in F$$
$$(\,r\,f)\,(x) = r\,(f(x))\ ,\forall\, r \in R\,,\, f \in F$$

مثال (٥): مجموعة كل المتتابعات $\{\langle a_n \rangle\}$ المعرفة على الأعداد الحقيقية والتي تتقارب إلى الصفر هي فراغ اتجاهي حيث

$$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle$$

$$r\langle a_n \rangle = \langle r\, a_n \rangle$$

(راجع خواص تقارب المتتابعات) حيث مجموع متتابعتين تقاربيتين هو متتابعة تقاربية.

مثال (٦): مجوعة كل المتسلسلات اللانهائية المتقاربة $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\}$ تكون فراغ اتجاهي (راجع خواص تقارب المتسلسلات) حيث مجموع متسلسلتين تقاربيتين هو متسلسلة تقاربية.

(٢.٣) الفراغات الاتجاهية الجزئية Subspaces

المجموعة الجزئية الغير خاليةS من الفراغ الاتجاهيV يقال أنها فراغ اتجاهي جزئي أو فراغ جزئي إذا كانت فراغ اتجاهي بالنسبة للعمليات (الجمع والضرب في عدد قياسي) المعرفة على V ويكتب $S \subset V$

مثال (١): $V \subset V$، $\{0\} \subset V$ تسمى الفراغات الجزئية الغير خالصة (الغير حقيقية) trivial or improper Subspaces.

مثال (٢): المجموعة $S = \{(0, r, 0) : r \in R\}$ فراغ جزئي حقيقي من V_3.

تعريف (١.٣): نفرض أن $S \subset V$، يقال أن S مغلقة بالنسبة لعملية الجمع إذا تحقق $u + v \in S, \forall u, v \in S$
وأن S مغلقة بالنسبة لعملية الضرب في عدد قياسي إذا تحقق

$$r\, u \in S, \forall u \in S, r \in R$$

حيث الضرب في عدد قياسي والجمع معرف في V.

مثال (٣): المجموعة $S=\{(a,0):a\in R, a>0\}$ مغلقة تحت عملية الجمع وليست مغلقة بالنسبة لعملية الضرب في عدد قياسي حيث

$$(-1)\,u=(-x,0)\ ,\ -x<0$$

حيث

$$u=(x,0)\ ,\ x>0$$

العرض السابق يقودنا إلى تقديم النظرية الآتية للتعرف على الفراغات الجزئية.

نظرية (١.٣): المجموعة S فراغ جزئي من فراغ اتجاهي V إذا تحقق

(i) $S\neq\Phi$ (ii) S مغلقة بالنسبة لعملية الجمع

(iii) S مغلقة بالنسبة لعملية الضرب في عدد قياسي

مثال (٤): مجموعة كثيرات الحدود $R_n[t]$ في المتغير t ذات الدرجة الأقل من n تكون فراغ جزئي من فراغ كثيرات الحدود.

الحل: بما أن $\Phi\neq R_n(t)\subset R[t]$ لأن $t^{n-1}\in R_n[t]$

بتطبيق شروط النظرية السابقة من السهل أن نتبين أن $R_n[t]$ فراغ جزئي من $R[t]$.

مثال (٥): بين أن $S=\left\{f\in F: f\left(\frac{1}{3}\right)=0\right\}$ فراغ جزئي من فراغ الدوال F.

الحل: من نظرية (١.٣) ومثال (٤) يتضح المطلوب.

مثال (٦): المجموعة $S=\{f \in F : f$ تفاضلية $, f'=f\}$ فراغ جزئي من فراغ الدوال F.

مثال (٧): بالنسبة للفراغ R^3 أي خط مستقيم يمر بنقطة الأصل يعتبر فراغ جزئي من R^3.

أي خط مستقيم L يمر بنقطة الأصل يمكن اعتباره مجموعة من النقط التي تحقق

$$L=\{r\,u : r \in R, u \in R^3\}$$

مثال (٨): المجموعة

$$S=\{a\,(2,1,3)+b\,(1,4,1)+c\,(1,-3,2) : a,b,c \in R\}$$

فراغ جزئي حقيقي من V_3 حيث $S \neq \{0\}$.

مثال (٩): المجموعة

$$S=\{a\,(2,-5)+b\,(3,-7) : a,b \in R\}$$

فراغ جزئي تافه (غير حقيقي) من الفراغ V_2 حيث $S=V_2$.

(٣.٣) الارتباط الخطي Linear dependence

تعريف (٢.٣): لأي عدد k من المتجهات $u_i \in V$ وعدد k من الأعداد القياسية $r_i \in V$ فإن التعبير $\sum_{i=1}^{k} r_i\,u_i = r_1\,u_1 + r_2\,u_2 + \ldots + r_k\,u_k$ يسمى تركيبة خطية Linear Combination

تعريف (٣.٣): نفرض أن S مجموعة جزئية من فراغ اتجاهي V. مجموعة كل التركيبات الخطية الممكنة من عناصر S تسمى تمديد للمجموعة S (Span S) ويرمز لها بالرمز L(S). إذا كانت $S = \Phi$ فإن L(S) تحتوي فقط المتجه الصفري للفراغ V.

مثال (١٠): V_2 يعتبر تمديد لمجموعة المتجهات $\{(2,1), (3,-5), (6,2)\}$

أو

$$V_2 = L\{(2,1),(3,-5),(6,2)\}$$

مثال (١١): التمديد لمجموعة مكونة من متجه واحد هو مجموعة كل المتجهات الناتجة من ضرب المتجه في أعداد قياسية.

فمثلا إذا كان $0 \neq u \in R^2$ فإن $L\{u\}$ هو خط مستقيم في المستوى R^2 على امتداد u ويمر بنقطة الأصل.

مثال (١٢): أعط تفسير هندسي للتمديد $L\{u,v\}$ حيث $u, v \in R^3$ متجهات غير صفرية.

الحل : إذا كانت $u = r\,v$ فإن $L\{u, v\} = \{r\,v : r \in R\}$ عبارة عن خط يمر بنقطة الأصل.

خلاف ذلك فإن $a\,u + b\,v$ هي رأس متوازي الأضلاع الذي رؤوسه o، au، bv، $a\,u + b\,v$ أي التمديد لمتجهين من V_3 لا يمكن أن يكون كل V_3 بل هو مستوى في V_3.

مثال (١٣): بين أن $L\{(2,-1,5),(0,3,-1)\}$ يحتوي على المتجه (3,6,5) ولا يحتوي على المتجه (2, 5, 0)

الحل: المتجه (3, 6, 5) ينتمي إلى L إذا وجدت الأعداد القياسية x, y بحيث يتحقق

$$(3,6,5) = x\,(2,-1,5) + y\,(0,3,-1)$$

هذه المعادلة الاتجاهية تؤدي إلى ثلاث معادلات في مجهولين في x, y ومن السهل أن نجد $x=\frac{3}{2}, y=\frac{5}{2}$ ،

أما بالنسبة للمتجه (2, 5, 0) لا يمكن إيجاد x, y بحيث يتحقق

$$(2,5,0) = x\,(2,-1,5) + y\,(0,3,-1)$$

مثال (١٤): $L\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\}=R[t]$ أي أن كل كثيرة حدود في R[t] هي تركيبة خطية من عناصر المجموعة $\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\}$

نظرية (٢.٣) : إذا كانت S مجموعة جزئية من فراغ اتجاهي V فإن L(S) فراغ جزئي من V أي $L(S)\subset V$

البرهان: لإثبات أن L(S) فراغ جزئي يكفي أن نتحقق من الشروط $L(S)\neq\Phi$ ، L(S) مغلقة بالنسبة لعملية الجمع والضرب في عدد قياسي المعرفة على V.

تعريف (٤.٣): يقال أن الفراغ الاتجاهي L(S) مولد generated by بالمجموعة S وعناصر S تسمى مولدات L(S) generators.

مثال (١٥): من الأمثلة السابقة : $R[t]$ مولدة بالمتجهات $1, t, t^2, \ldots$ كما في مثال (١٤) و R^2 مولد بالمتجهات $(2, 1), (3, -5), (6, 2)$ كما في مثال (١٠).

وأي فراغ اتجاهي يولد نفسه بمعنى أن $L(V) = V$.

تعريف (٥.٣): المتجه $u \in V$ مرتبط خطيا بالمتجهات $u_1, u_2, \ldots, u_k$ إذا كان $u \in L\{u_1, \ldots, u_k\}$. بمعنى إذا وجد $a_i \in R$ بحيث $u = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i$

مثال (١٦): المتجه (2,1,3) مرتبط خطيا بالمتجهات (1,4,1)، (1,-3,2).

أي $(2, 1, 3) = a(1, -3, 2) + b(1, 4, 1)$ بمعنى يمكن إيجاد الأعداد a, b التي تحقق هذه العلاقة، ومن السهل التحقق من ذلك.

مثال (١٧): بين أن المتجه $8 - t + 7t^2$ مرتبط خطيا بالمتجهات $1 + t - t^2$، $2 - t + 3t^2$ في فراغ كثيرات الحدود $R_3[t]$

الحل: نحاول إيجاد الأعداد a, b التي تحقق

$$8 - t + 7t^2 = a\left(2 - t + 3t^2\right) + b\left(1 + t - t^2\right)$$

وبمساواة المعاملات على الطرفين نحصل على ثلاث معادلات في مجهولين a, b وحلهما هو $a = 3$، $b = 2$.

مثال (١٨) : إذا كان u متجه مرتبط خطيا بالمتجهات $u_1, u_2, \ldots, u_k$ إذن

$$u = a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k \quad \text{أو} \quad (-1)u + a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k = 0$$

بمعنى أن المتجه الصفري هو تركيب خطي من (k+1) من المتجهات بحيث يوجد على الأقل عدد قياسي مختلف عن الصفر.

تعريف (٦.٣): يقال أن مجموعة المتجهات المحدودة $\{ V_1, ..., V_k \}$ مرتبطة خطيا Linearly dependent إذا وجدت الأعداد القياسية $b_1, ..., b_k$ ليست جميعها أصفارا بحيث يتحقق

$$b_1 V_1 + ... + b_k V_k = 0$$

وأي مجموعة لانهائية من المتجهات تكون مرتبطة خطيا إذا احتوت على مجموعة جزئية محدودة مرتبطة خطيا.

مثال (١٩): أي مجموعة تحتوي على المتجه الصفري تكون مرتبطة خطيا حتى وإن كانت $\{0\}$.

مثال (٢٠): بين أن المتجهات (-4, -3)، (-1, 1)، (2, 5) مرتبطة خطيا.

الحل: نفرض أن

$$x (2, 5) + y (-1, 1) + z (-4, -3) = (0, 0) \qquad (*)$$

هذه المعادلة الاتجاهية تؤدي إلى معادلتين خطيتين في x, y, z، من السهل أن نجد أن $x= 1, y = -2, z = 1$ تحقق (*)، إذن المتجهات المعطاة مرتبطة خطيا.

مثال (٢١): المتجهات (2, 5), (-1, 1) ليست مرتبطة خطيا لأنه لا يمكن إيجاد x, y تحقق

$$x (2, 5) + y (-1, 1) = (0, 0)$$

بحيث x, y ليست جميعها أصفارا، بمعنى أن $(x, y) \neq (0,0)$.

تعريف (٧.٣): مجموعة المتجهات يقال أنها مستقلة خطيا Linearly independent إذا كانت ليست مرتبطة خطيا.

مثال (٢١): مجموعة المتجهات في مثال (٢١) مستقلة خطيا.

مما سبق يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية (٣.٣): مجموعة المتجهات $\{u_1, ..., u_k\}$ مستقلة خطيا إذا فرضنا أن $t_1 u_1 + ... + t_n u_n = 0$ فإنه يؤدي إلى $t_1 = t_2 = ... = t_n = 0$ بمعنى أن التركيبة الخطية الوحيدة للمتجه الصفري هي التي معاملاتها تساوي أصفارا.

مثال (٢٣): المجموعة $\{\sin x, \cos x\}$ مستقلة خطيا.

مثال (٢٤): $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ مستقلة خطيا.

من العرض السابق للفراغات الاتجاهية نلاحظ أنه توجد استخدامات كثيرة لمعنى كلمة خطي مثل معادلة خطية، تركيبة خطية، ارتباط خطي، استقلال خطي وهذا يوضح لماذا تسمى دراسة الفراغات الاتجاهية بالجبر الخطي Linear Algebra.

(٤.٣) الأساس والبعد Base and Dimension

نعلم أن محاور الإحداثيات في المستوى R^2 يمكن النظر إليها على أنها ناتجة من حاصل ضرب المتجهات $(1, 0)$، $(0, 1)$ في أعداد

قياسية. ولهذا المتجهات $(1, 0)$، $(0, 1)$ تولد المستوى R^2 وهذا يقودنا إلى إعطاء التعريف الآتي.

تعريف (٨.٣): أساس الفراغ الاتجاهي V هو مجموعة B مرتبة من المتجهات المستقلة خطيا والتي تولد V.

مثال (٢٥): $B = \{ (0, 1) , (1, 0) \}$ أساس للمستوى R^2 حيث أن أي متجه يمكن كتابته كتركيبه خطية من متجهات المجموعة B، مثلا

$$(a, b) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1)$$

المجموعة B تسمى الأساس العياري orthonormal base (المعتاد standard base) ومثل هذا الأساس نتعرض له الأبواب القادمة.

مثال (٢٦): المجموعة $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ أساس لفراغ كثيرات الحدود $R[t]$.

النظرية الآتية تستخدم لبرهنة أنه إذا كان فراغ اتجاهي V له أساس محدود فإن كل الأساسات الممكنة له لها نفس عدد العناصر.

نظرية (٤.٣): إذا كان $\{ u_1, ..., u_k \}$ مجموعة مرتبة من المتجهات الغير صفرية المرتبطة خطيا. إذن $u_j \in L\{u_1, ..., u_{j-1}\}$ لبعض قيم j، $2 \le j \le k$، بمعنى أن أحد المتجهات هو تركيب خطي من المتجهات التي تسبقه في الترتيب.

نظرية (٥.٣): إذا كان B أساس محدود للفراغ الاتجاهي V فإن أي أساس آخر يكون له نفس عدد عناصر B.

تعريف (٩.٣): بعد Dimension الفراغ V هو عدد عناصر الأساس. فمثلا إذا كان B يحتوي على n من المتجهات فإن بعد الفراغ V هو n ويكتب $\dim V = n$، إذا كان $V = \{0\}$ فإن $\dim V = 0$. في مثل هذه الحالات يقال أن V فراغ محدود البعد finite dimensional ويقال أن V لانهائي البعد infinite dimensional إذا لم يكن محدود البعد. أي أن الأساس يتكون من عدد لانهائي من المتجهات.

مثال (٢٧): من الأمثلة السابقة يمكن أن نرى $F[0,1]$, $R[t]$ فراغات لانهائية البعد.

مثال (٢٨): $\dim R^n = n$.

الحل: إن المجموعة $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ حيث $e_i = (\delta_i^j)$ تكون أساس للفراغ R^n ومنها $\dim R^n = n$، B تسمى الأساس المعتاد للفراغ R^n.

مثال (٢٩): المجموعة $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$ أساس لفراغ $R_n[t]$ (كثيرات الحدود في t ذات الدرجة الأقل من n) إذن $\dim R_n[t] = n$.

نتيجة (١): إذا كان $S, \dim V = n$ مجموعة من المتجهات عددها n، تولد الفراغ V إذن S أساس للفراغ V.

مثال (٣٠): بين أن المجموعة $B = \{1+t+t^2, 1+t, 1\}$ هي أساس للفراغ $R_3[t]$.

الحل: $\dim R_3[t]=3$، B عدد عناصرها 3 وأي كثيرة حدود في $R_3[t]$ يمكن كتابتها في الصورة

$$a+bt+ct^2=c\left(1+t+t^2\right)+(b-c)(1+t)+(a-b)1$$

أي أن B تولد $R_3[t]$ ومن النتيجة (١) نصل إلى أن B أساس للفراغ $R_3[t]$.

نتيجة (٢): إذا كان $\dim V=n$، $S\subset V$ مجموعة جزئية من المتجهات المستقلة خطيا وعددها n، إذن S أساس للفراغ V.

مثال (٣١): المجموعة $S=\{(a,b),(c,d)\}\subset R^2$ مستقلة خطيا بشرط أن $ad-bc\neq 0$، $\dim R^2=2$ إذن S أساس للفراغ R^2 بشرط أن $ad-bc\neq 0$.

نتيجة (٣): إذا كان $\dim V=n$ إذن أي مجموعة جزئية من V تحتوي على أكثر من n متجه تكون مرتبطة خطيا.

مثال (٣٢): المجموعة $\{(1,5),(2,7),(4,0)\}$ مرتبطة خطيا في R^2.

نظرية (٦.٣): نفرض أن U فراغ جزئي خالص من فراغ اتجاهي محدود البعد V ، إذن $\dim U<\dim V$.

البرهان: نفرض أن $\dim V=n$ ، إذن لا يوجد مجموعة جزئية من U تحتوي على متجهات مستقلة خطيا عددها يزيد علىn وذلك من نتيجة (٣) إذن $\dim U\le\dim V$.

لكن إذا كانت U تحتوي على مجموعة من المتجهات المستقلة خطيا عددها n ، إذن باستخدام النتيجة (٢) تكون هذه المجموعة أساس للفراغ V ويكون $U = V$.

وبما أن U فراغ جزئي خالص من V، إذن أي مجموعة من المتجهات المستقلة خطيا من U لا يزيد عددها من n بمعنى أن $\dim U < \dim V$.

مثال (٣٣): بعد $R[t]$ لانهائي ولهذا النظرية (٦.٣) لا تطبق عليه. في الحقيقة $L\{1, t^2, t^4, ..., t^{2n}, ...\}$ هو فراغ جزئي خالص من $R[t]$ ومع ذلك هو أيضا لانهائي البعد.

تعريف (١٠.٣): نفرض أن $\dim V = n$ ونفرض أن S مجموعة جزئية من الفراغV وتحتوي على $k<n$ من المتجهات المستقلة خطيا. إذا كانB أساس للفراغ V، B تحتوي على عناصرS، إذن B تمديد للمجموعة S.

نظرية (٧.٣): أي مجموعة جزئية من المتجهات المستقلة خطيا من فراغ اتجاهي محدود البعد يمكن تمديدها (توسيعها) لتصبح أساس للفراغ الاتجاهي.

البرهان: يمكن الوصول إلى البرهان باستخدام نتيجة (٢)، (٣).

ملحوظة: في الحالة العامة ، إذا ما أعطينا أساس لفراغ V لا يحتوي على أساس لأي فراغ جزئي $S \subset V$. لكن نظرية (٧.٣) تبين أنV

محدود البعد إذن دائما من الممكن تمديد أي أساس للفراغ الجزئي S ليصبح أساس للفراغ V.

مثال (٢٤): إذا كان $B=\{1+t-2t^2, 2t+3t^2\}$ مجموعة من المتجهات المستقلة خطيا ــ هل يمكن تمديد B لتصبح أساس لفراغ $R_3[t]$.

الحل: هذا يعني هل يوجد متجه في $R_3[t]$ لا ينتمي إلى الفراغ

$$S=L\{1+t-2t^2, 2t+3t^2\}$$

المتجه $a+bt+ct^2 \in S$ إذا تحقق

$$a+bt+ct^2 = x(1+t-t^2)+y(2t+3t^2)$$

أي أن مجموعة المعادلات

$$a=x,\ b=x+2y,\ c=-2x+3y$$

متفقة لجميع قيم a, b, c وهذا ممكن إذا تحقق

$$7a-3b+2c=0$$

ولهذا

$$S=\{a+bt+ct^2 \mid 7a-3b+2c=0\}$$

وبالتالي أي متجه $a+bt+ct^2$ بحيث $7a-3b+2c\neq 0$ يجب أن يضاف للمجموعة B وليكن المتجه $1+t+t^2$.

إذا المجموعة $B=\{1+t-2t^2, 2t+3t^2, 1+t+t^2\}$ أساس لفراغ $R_3[t]$.

(٥.٣) الإحداثيات Coordinates

نظرية (٨.٣): المجموعة $B=\{u_1,...,u_n\}$ تكون أساس للفـــراغ V إذا كان وكان فقط أي متجه في V يمكن كتابته كتركيبة خطية وحيـــدة مـــن متجهات B.

البرهان: (⇐) نفرض أن $\{u_1,...,u_n\}$ أساس للفراغ V، $u\in V$، بمـــا أن الأساس يولد الفراغ إذن u يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية أي

$$u=a_1\,u_1+...+a_n\,u_n$$

لإثبات أن هذه التركيبة وحيدة نفرض أن المتجه أمكن كتابتـــه بصـــورة أخرى

$$u=b_1\,u_1+...+b_n\,u_n$$

إذن

$$0=u-u=(a_1-b_1)u_1+...+(a_n-b_n)u_n$$

ولكن عناصر الأساس مستقلة خطيا ولهذا فإن

$$a_1=b_1,\ ...,\ a_n=b_n$$

(⇒) إذا كان كل عنصر في V له تعبير خطي وحيد مـــن المتجـــهات $B=\{u_1,...,u_n\}$، إذن B تولد V. يتبقى أن نثبت أن عناصر B مستقلة خطيا ولذلك نفرض أن

$$c_1\,u_1+...+c_n\,u_n=0$$

وبما أن التركيبة الخطية وحيدة بالنسبة للمتجه الصفري

$$0=0\,u_1+...+0\,u_n$$

$\therefore \quad c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$، أي أن المتجهات $u_1, ..., u_n$ مستقلة خطيا.

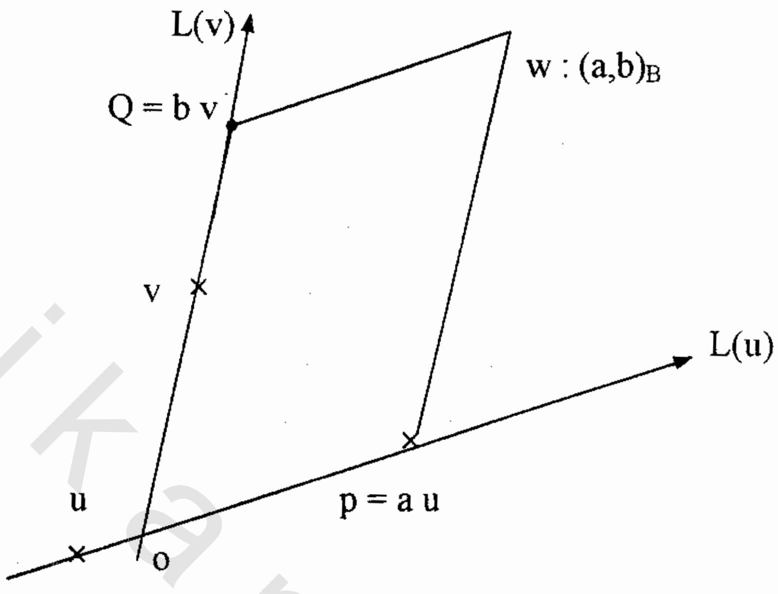
تعريف (١١.٣): نفرض أن $B = \{u_1, ..., u_n\}$ أساس لفراغ اتجاهي V محدود البعد ونفرض أن $w \in V$ حيث $w = a_1 u_1 + ... + a_n u_n$، الأعداد القياسية $a_1, ..., a_n$ هي إحداثيات w بالنسبة إلى الأساس B وسوف نكتب $w : (a_1, ..., a_n)_B$ ليدل على أن w لها إحداثيات $a_1, ..., a_n$ بالنسبة للأساس B.

مثال (٣٥): نعتبر الأساس $B = \{(1, 3), (-2, 4)\}$ للفراغ V_2. المتجه $(1,3)$ يمكن كتابته على الصورة $(1,3) = 1\,(1, 3) + 0\,(-2, 4)$

ولهذا إحداثيات المتجه $(1, 3)$ بالنسبة للأساس B هي $1, 0$ أو $(1,3) : (1,0)_B$ بالمثل $(-2, 4) : (0,1)_B$

لإيجاد إحداثيات أي متجه أخر وليكن $(7,9)$ بالنسبة للأساس B. أنه من الضروري حل المعادلة الاتجاهية $(9, 7) = x\,(1, 3) + y\,(-2, 4)$ بالنسبة للمجاهيل x, y والحلول هي $x = 5, y = -2$ إذن إحداثيات المتجه $(7,9)$ هي $(7,9) : (5,-2)_B$

هندسيا يمكن تمثيل أساس B للمستوى V_2 والإحداثيات بالنسبة للأساس B. نفرض أن $B=\{u, v\}$، إذن B تحدد خطين في المستوى يناظرا $L(u)$، $L(v)$ وهذه الخطوط تسمى محاور الإحداثيات (شكل (١)).



شكل (١)

إحداثيات أي متجه w يمكن إيجادها باستخدام قاعدة التحصيل بالنسبة لمتوازي الأضلاع الذي فيه a u, b v ضلعين متجاورين. بمعنى أنه إذا كان الخط pw يوازي L(v) والخط Qw يوازي L(u) إذن p=a u, Q=b v ويؤدي إلى $w:(a,b)_B$

مثال (٣٦): نعتبر الأساس $B=\{t^2+1, t+1, t^2+t\}$ لفراغ كثيرات الحدود $R_3[t]$. إحداثيات متجهات الأساس بالنسبة للأساس هي

$$t^2+1:(1,0,0)_B\ , t+1:(0,1,0)_B\ , t^2+t:(0,0,1)_B$$

لإيجاد إحداثيات أي متجه أخر مثل 2t بالنسبة للأساس B نعتبر المعادلة الاتجاهية

$$x\left(t^2+1\right)+y\left(t+1\right)+z\left(t^2+t\right)=2t$$

ومنها نحصل على $x = -1, y = z = 1$، ولهذا $2t:(-1,1,1)_B$.
بنفس الطريقة يمكن أن نبين $2:(1,1,-1)_B$ ، $8t^2+3t+1:(3,-2,5)_B$

مثال (٣٧): إحداثيات أي متجه في الفراغ R^n بالنسبة للأساس القياسي (المعتاد) $\{e_i\}$ هي نفسها مركبات المتجه أي أن

$$(7,-1):(7,-1)_{\{e_i\}}; (4,8,2).(4,8,2)_{\{e_i\}}$$

ومن الجدير بالذكر أن نكرر أن المتجه ليس له إحداثيات. له إحداثيات فقط بالنسبة لأساس محدد. إذن الأعداد 4, 8, 2 تسمى مركبات المتجه (4,8,2) وليست إحداثياته.

تعريف (١٢.٣): يقال أن الفراغ V يشاكل (على شاكلة) الفراغ W isomorphic ويكتب $V \cong W$ إذا وجد تناظر إحادي T من V إلى W بحيث يحافظ على البناء الجبري في كل منهما بمعنى

(i) $\forall u, v \in V, T(u+v) = T(u) + T(v)$
(ii) $\forall u \in V, r \in R, T(r\,u) = r\,T(u)$

وهذا يعني أن الفراغات الاتجاهية المتشاكلة لا يمكن أن تختلف عن بعضها بطرق جبرية.

نظرية (٩.٣): إذا كان $0 \neq \dim V = n$ إذن $V \cong R^n$.

أي أن دراسة الفراغات الاتجاهية محدودة البعد يمكن إجرائها باستخدام الفراغات R^n. وهذه النظرية غاية في الأهمية في دراسة الفراغات التي تشاكل R^n .

مثال (٣٨) : فراغ المصفوفات 2×2 يشاكل R^4 عن طريق كتابة عناصر المصفوفة في شكل رباعي مرتب $(a_{ij})\leftrightarrow(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})\in R^4$

مثال (٣٩): فراغ كثيرات الحدود $R_n[t]$ يشاكل R^4 حيث

$$1+a_1\,t+a_2\,t^2+a_3\,t^3\leftrightarrow(1,a_1,a_2,a_3)\in R^4$$

(٦.١) المجموع المباشر Direct Sum

تعريف (١٣.٣): مجموع فراغين اتجاهين جزئيين U,V من فراغ اتجاهي W يرمز له بالرمز $U+V$ يعرف كالآتي

$$U+V=\{u+v : u\in U, v\in V\}$$

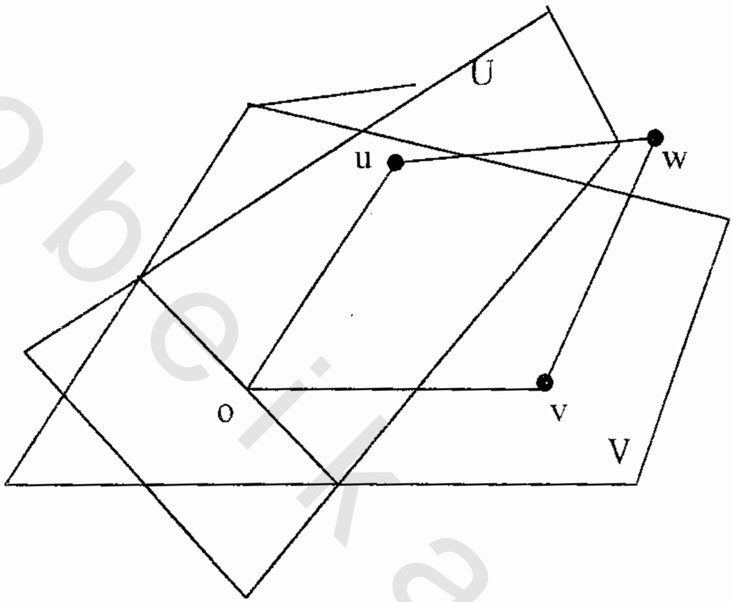
ويمكن التأكد من أن $U+V$ هو فراغ اتجاهي جزئي من W. الفراغات U, V تسمى عناصر Summands (مركبات) المجموع $U+V$

مثال (٤٠): نفرض أن

$$U=L\{(1,1,0),(0,1,1)\}$$
$$V=L\{(1,0,1),(1,1,1)\}$$

إذن
$$U+V=L\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

المجموع $U+V$ يكافئ V_3 لأن أي ثلاثة من المتجهات تكون مستقلة خطيا. إذا اعتبرنا U, V مستويات مارة بنقطة الأصل في V_3 إذن $U+V$ يعبر عن V_3 كمجموع مستويين وأي متجه في V_3 يمكن التعبير عنه كمجموع متجهين $v\in V, u\in U$ كما هو مبين بالشكل.



شكل (٢)

ملحوظة : يوجد تشابه وثيق بين كتابة متجه كتركيبة خطية من متجهات وكتابة فراغ اتجاهي كمجموع فراغات جزئية منه.

إذا كانت التركيبة الخطية وحيدة نحصل على الإحداثيات.

نناقش مثل هذه الحالة في مجموع الفراغات الجزئية، نفرض أن $w \in W$ أمكن كتابته بطريقتين $w = u_1 + v_1, w = u_2 + v_2, u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$ وكل المتجهات u_1, u_2, v_1, v_2 مختلفة.

إذن $0 = w - w = u_1 - u_2 + v_1 - v_2$ تؤدي إلى $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 = z$

إذن $z = u_2 - u_1 \in U, z = v_1 - v_2 \in V, z \in U \cap V$ ولهذا ومن الفرض $u_1 \neq u_2$، إذن $U \cap V, z \neq 0$ ليست الفراغ الصفري.

إذن إذا كتب متجه كمجموع متجهين من فراغين جزئين U, V بأكثر من طريقة فإن $U \cap V$ ليست فراغ اتجاهي صفري أو تافه بمعنى أن

$$U \cap V \neq \{0\}$$

وبهذا نكون قد برهنا النظرية.

نظرية (١٠٣): نفرض أن U, V فراغين جزئين من فراغ اتجاهي W، $W=U+V$. كل متجه $w \in W$ له تعبير وحيد كمجموع $w = u + v$، $u \in U, v \in V$ إذا كان وكان فقط $U \cap V = \{0\}$

تعريف (١٤٠٣): نفرض أن U, V فراغين جزئيين من فراغ اتجاهي W. المجموع $U + V$ يقال أنه مجموع مباشر direct sum ويكتب $U \oplus V$ إذا كانت $U \cap V = \{0\}$. إذا كان $W = U \oplus V$ فإن $U \oplus V$ تحليل مجموع مباشر للفراغ V، أن U, V تسمى المركبات المباشرة للفراغ V.

مثال (٤١): إذا كان $B =\{(4, -7), (2,5)\}$ أساس للمستوى R^2، $U=L\{(4,-7)\}$، $V=L\{(2,5)\}$. هل المجموع $U + V$ مجموع مباشر لفراغ اتجاهي؟

الحل: بما أن B تولد R^2 إذن $R^2 = U + V$، نفرض أن $z \in U \cap V$ إذن $z= a(4,-7), z = b(2,5)$ حيث $a, b \in R$ وبما أن B مستقلة خطياً إذن $z = 0$ ولهذا $U + V$ هو مجموع مباشر ويكتب $R^2 = U \oplus V$.

هندسياً المستوى الكارتيزي R^2 يمكن كتابته كمجموع مباشر لخطين يمران بنقطة الأصل.

مثال (٤٢): نفرض أن $U=\{(x,y,z) : x+y+z=0\}$، $V=L\{(3,1,4)\}$

هل المجموع $U+V$ هو مجموع مباشر $U \oplus V$؟

الحل: نفرض أن $(a, b, c) \in U \cap V$ إذن

$$a+b+c = 0, (a, b, c) = t(3, 1, 4)$$

بحذف a, b, c نحصل على $t = 0$ أي أن $U \cap V = \{0\}$، $(a,b,c)=0$.

وبالتالي $U+V$ هو مجموع مباشر $U \oplus V$

مثال (٤٣): هل $U \oplus V = V_3$؟ حيث U, V كما في مثال (٤٢).

الحل: بما أن $(1, -1, 0)$، $(1, 0, -1)$ تولد U إذن المجموع المباشر هو $L\{(1,-1,0), (1,0,-1), (3,1,4)\}$. وبما أن الثلاث متجهات في هذه المجموعة مستقلين خطياً إذن $V_3 = U \oplus V$.

باستخدام المجموع المباشر $U \oplus V$ المطلوب كتابة متجه وليكن المتجه $(8,9,-1)$ ولهذا يجب أن نجد الأعداد x, y, t بحيث

$$(8, 9, -1) = (x, y, -x-y) + t(3, 1, 4)$$

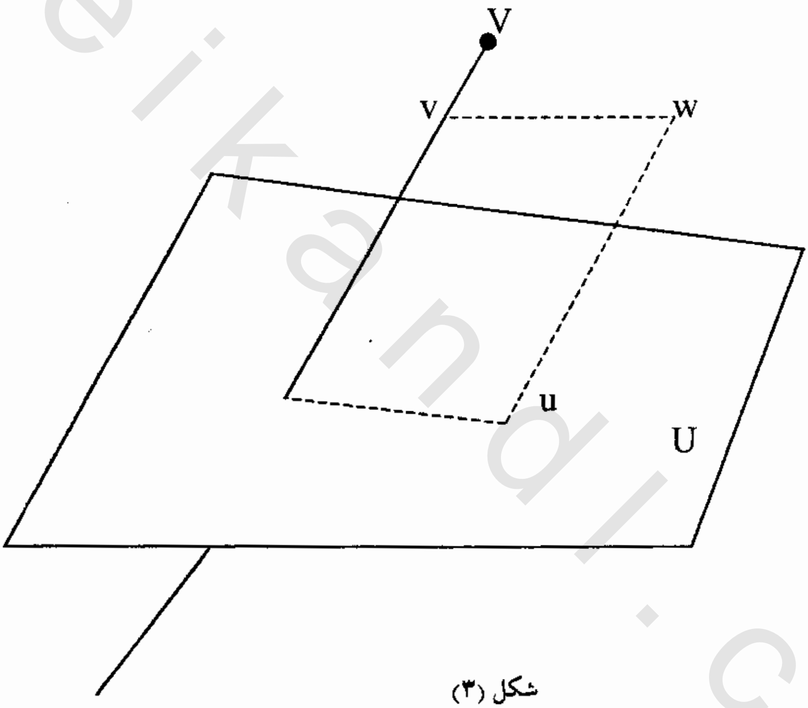
وهذه المعادلة لها حل في الصورة

$$(8, 9, -1) = (2, 7, -9) + (6, 2, 8)$$

حيث $(2,7,-9) \in U$، $(6,2,8) \in V$ كما هو مطلوب.

من هذا المثال يمكننا القول بأن أي فراغ ثلاثي يمكن التعبير عنه كمجموع مباشر لمستوى وخط مستقيم غير واقع في هذا المستوى ومتقاطعين في نقطة الأصل (لماذا؟).

للإجابة على هذا السؤال، نفرض أن w نقطة معلومة والنقاط $u \in U$ ، $v \in V$ يمكن الحصول عليهما هندسياً. النقطة u هي تقاطع المستوى U والخط المار بالنقطة w موازياً للخط V. النقطة v هي تقاطع الخط V وخط مار بالنقطة w موازياً للمستوى U. كما هو موضح بشكل (٣).



شكل (٣)

من الأمثلة السابقة يكون لدينا النظرية التالية :

نظرية (١١.٣): إذا كان U, V فراغات جزئية من فراغ اتجاهي محدود البعد، وكان $U \oplus V$ هو المجموع المباشر إذن

$$\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$$

البرهان : نفرض أن $\{u_1, ..., u_m\}$، $\{v_1, ..., v_n\}$ أساسات للفراغـــات U، V على الترتيبين إذن $\dim U = m$ ، $\dim V = n$

ونحاول إثبات أن $B = \{u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n\}$ أساس للمجوع المباشـــر $V \oplus U$.

لذلك نفرض أن B تولد $V \oplus U$ أي أن

$$a_1 u_1 + ... + a_m u_m + b_1 v_1 + ... + b_v v_n = 0$$

نفرض أن $z = a_1 u_1 + ... + a_m u_m$

أي أن $z \in U$ ولكن $z = -b_1 v_1 - ... - b_n v_n$

أي أن $z \in V$ إذن $z \in U \cap V = \{0\}$ ولهذا $z = 0$

الآن المجموعة $\{u_i\}$، $\{v_i\}$ مستقلة خطياً، إذن $\{u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n\}$ مستقلة خطياً وهي أساس للفراغ $V \oplus U$.

تمارين (٣)

١ــ هل مجموعة الدوال $F = \{ f : f : R \to R \}$ الحقيقية المعرفة على R بحيث $f(0) = 1$ تحت تأثير العمليات المعرفة على F فراغ اتجاهي.

٢ــ أثبت أن مجموعة المصفوفات المربعة ذات الدرجة الثانية تكون فراغ اتجاهي.

٣ــ بين أن المجموعات الآتية فراغات جزئية من الفراغات المشار إليها.

(i) $\{ (x, y, z) \mid x = 3y, x + y = z \} \subset V_3$

(ii) $\{ a\,t^3 + b\,t \mid a, b \in R \} \subset R[t]$

(iii) $\{ f \mid f(x) = a \sin x + b \cos x, a, b \in R \} \subset F$

٤ــ هل المجموعات الآتية فراغات جزئية؟ (من الفراغات المشار إليها).

(i) $\{ (x, y) \mid y = x^2 \} \subset V_2$

(ii) $\{ (x, y, z) \mid x + y + z = 1 \} \subset V_3$

(iii) $\{ f \mid f : R \to R, f' = 0 \} \subset F$

٥ــ أي من المتجهات الآتية (1,0,0), (1, -4,1), (1,0,1), (0,3,3) ينتمي إلى الفراغ $L\{ (-2,1,9), (2,-4,6) \}$.

٦ــ أي من كثيرات الحدود الآتية $t^2, t-1, t^3 + 3t^2 + 3t - 1$ ينتمي إلى الفراغ $L\{ t^3 - t + 1, 3t^2 + 2t, t^3 \}$

٧ــ أي من المجموعات الآتية يولد V_3

(i) $\{ (1,1,0), (0,1,1), (1,1,1) \}$
(ii) $\{ (1,1,1), (1,2,3) \}$
(iii) $\{ (1,1,0), (2,0,-1), (4,4,0), (5,3,-1) \}$

٨ــ أوجد الشروط التي يجب أن تحققها الأعداد القياسية a, b كي تكــون مجموعة المتجهات الآتية مستقلة خطياً :

(i) $\{ (1,a,2), (1,1,b) \}$
(ii) $\{(1,2,0), (a,b,2), (1,0,1) \}$
(ii) $\{ (a,2,3), (0,4,6), (0,0,b) \}$

٩ــ هل المجموعات الآتية مستقلة خطياً.

(i) $\left\{e^{x}, e^{2x}, e^{3x}\right\}$ في فراغ الدوال F.

(ii) $\left\{4t, t^2+t, 3-t^2-t\right\}$ في فراغ كثيرات الحدود R[t].

(iii) $\{ \tan x, \sin x \}$ في فراغ الدوال F.

(vi) $\left\{\dfrac{3x^2}{x+1}, \dfrac{-x}{2x+2}, 4x\right\}$ في فراغ الدوال F.

١٠ــ نفرض أن $S = \{(2,-4), (1,3), (-6,-3)\} \subset V_2$، بين أن

(i) S مستقلة خطياً.

(ii) المتجه (5,0) يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من متجهات S بعــدد لانهائي من الطرق.

(iii) أي متجهين من S وليكن أول أثنين يولدا V_2.

(vi) $L(S) = V_2$ هو فراغ جزئي تافه (صفري) من V_2.

١١ـ هل المجموعات الآتية تصلح أن تكون أساس للفراغات المشار إليها.

(i) $\{(2,1,-5),(7,4,3)\}, V_3$

(ii) $\{t, 3t^2+1, 4t+2, 1-5t\}, \; R_3[t]$

(iii) $\{(2,1),(-3,4)\}, V_2$

١٢ـ حدد بعد الفراغات الآتية

(i) $L\{(2,-3,1),(1,4,2),(5,-2,4)\} \subset V_3$

(ii) $L\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\} \subset F$

(iii) $L\{t-1, 1-t^2, t^2-t\} \subset R_3[t]$

١٣ـ أوجد إحداثيات المتجه $(2,-5)$ في الفراغ V_2 بالنسبة لكل من الآتية

(i) $\{(6,-5),(2,5)\}$ (ii) $\{(3,1),(-2,6)\}$

(iii) $\{e_i\}$ (iv) $\{(1,0),(2,-5)\}$

١٤ـ بين أن $B=\{t^3, t^3+t, t^2+1, t+1\}$ أساس للفراغ $R_4[t]$ وأوجد إحداثيات المتجهات الآتية بالنسبة إلىB

(i) t^2+1 , (ii) t^3 (iii) t^2-t

١٥ـ أوجد إحداثيات المتجه $(2,-3,5)$ بالنسبة إلى

(i) $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

(ii) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,-5,5)\}$

١٦ـ بفرض أن B أساس للفراغ V بحيث

$(1,1):(6,-3)_B$, $(4,1):(3,2)_B$ أوجد الأساس B.

١٧ـ أوجد الأساس B الذي يحقق $(0,1):(-1,2)_B$, $(1,0):(5,-8)_B$.

١٨ــ بين أن $L\{(1,7)\}$، $L\{(2,3)\}$ تحليل جمعي مباشر للفراغ V_2

١٩ــ بين أن المجموع $L\{(3,0,1)\} + L\{(1,4,-2)\}$ هــــو مجمــوع مباشر. هل هذا المجموع يعطي تحليل جمعي مباشر للفراغ V_3.

٢٠ــ نفرض أن

$$U=\{(x,y,z)\,|\,2x-y+4z=0\}\text{ ،}\quad V=\{(x,y,z)\,|\,5y-3z=0\}$$

فراغات جزئية من V_3 ، بين أن

(i) المجموع $U+V$ ليس مباشر أو

(ii) $u \in U, v \in V$ بحيث أن $u+v=(2,9,6)$

٢١ــ هل V_3 هو مجموع $U+V$ أو مجموع مباشر $U \oplus V$ في الحالات الآتية

(i) $U = \{(x,y,z) \mid x = 2y\}$, $V = \{(x,y,z) \mid z = 0\}$

(ii) $U = \{(x,y,z) \mid x = y, z = 0\}$, $V = \{(x,y,z) \mid x = 0, y = z\}$

(iii) $U = L\{(4,1,3)\}$, $V = L\{(2,1,1), (1,0,2)\}$

(v) $U = L\{(2,-1,1)\}$, $V = L\{(1,5,3), (3,4,4)\}$