الباب الرابع
نظام المعادلات الخطية
System of Linear Equations

(١.٤) مقدمة عامة :

علمت من دراستك لمقرر الجبر في التعليم قبل الجامعي وفي السنة الأولى بالتعليم الجامعي أن نظام المعادلات الخطية يمكن كتابته على الصورة :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,, \quad i = 1,2,\dots,m \qquad (1)$$

وهو عبارة عن m من المعادلات في n من المجاهيل.

النظام (1) يمكن كتابته في الصورة المصفوفية

$$A\,X = b \qquad (2)$$

حيث $b = (b_i)$ عمود الثوابت، $X = (x_j)$ عمود المجاهيل، $A = (a_{ij})$ مصفوفة المعاملات. المصفوفات A, X, b هي عبارة عن مصفوفات ذات الأبعاد $m \times n\,, n \times 1, m \times 1$ على الترتيب.

النظام (1) ينشأ في عدة صور نوضحها من خلال مفاهيم الفراغات الاتجاهية

نفرض أن

$$u_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}),\ \ j = 1,2,\dots,n$$
$$W = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

المتجهات u_j هي أعمدة المصفوفة A ويمكن اعتبارها متجهات من الفراغ الاتجاهي V_m وعليه فإن النظام (1) يأخذ الصور

هل يوجد $W \in L\{u_1, \ldots, u_n\}$ (i)

بمعنى هل توجد الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بحيث أن

$$W = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n \ ?$$

هل المتجهات $u_1, \ldots, u_n$ مستقلة خطيا (ii)

بمعنى أن هل توجد الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ليست جميعها أصفارا) بحيث

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n = 0 \ ?$$

في هذه الحالة $W = 0$ ولهذا $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$

تحديد إحداثيات المتجه W بالنسبة للأساس (iii)

$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$، في هذه الحالة $n = m$، $W : (x_1, \ldots, x_n)_B$

إذا وجد حل للنظام (1) فإن النظام يسمى متوافق consistent وخلاف ذلك يسمى غير متوافق inconsistent.

إذا كان $b = 0$ أي أن $x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = 0$ فإن النظام (2) يأخذ الصورة $A X = 0$ ويسمى نظام المعادلات المتجانسة homogeneous (كل الحدود الغير صفرية في معادلاته لها نفس الدرجة) النظام المتجانس له حل تافه trivial solution $x=0$ وأي حل $x \neq 0$ يسمى حل غير تافه nontrivial.

من خواص الفراغات الاتجاهية يمكن إثبات صحة النظرية الآتية

نظرية (١.٤): مجموعة المصفوفات $M_{m\times n}$ المعرفة على R تكون فراغ اتجاهي $(M_{m\times n}\ ,+,.)$ حيث +، . هي عمليات جمع المصفوفات وضرب المصفوفة في عدد قياسي كما عرفتها سابقاً،

$$M_{m\times n}=\{A:A=(a_{ij}),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n\}\ ,a_{ij}\in R$$

(٢.٤) فراغ الحلول :

نظرية (٢.٤): نفرض أن $A\,X=0$ نظام متجانس مكون من m من المعادلات في n من المجاهيل. إذن مجموعة كل الحلول

$$S=\{C:A\,C=0\}$$

تكون فراغ اتجاهي جزئي من الفراغ الاتجاهي $M_{1\times n}$ (مصفوفات صف أو متجهات V_n)

البرهان: $S\neq\Phi$ لأن $X=0$ حل للنظام $A\,X=0$، نفرض أن

$$C=(c_j)\in S\ ،\ X=(x_j)\ ،\ A=(a_{ij})$$

إذن $a_{i1}\,c_1+...+a_{in}\,c_n=0$ لكل i حيث $1\leq i\leq m$، إذن باستخدام خواص الأعداد الحقيقية نحصل على :

$$\begin{aligned}0=r\,0&=r\,(a_{i1}\,c_1+...+a_{in}\,c_n)\\&=a_{i1}\,(r\,c_1)+...+a_{in}\,(r\,c_n)\end{aligned}$$

بمعنى أن $r\,C=(r\,c_j)$ هو حل للنظام $A\,X=0$ أي أنه إذا كان $C\in S$ فإن $r\,C\in S$ لأي عدد حقيقي r وبالتالي S مغلقة بالنسبة لعملية الضرب في عدد قياسي. ويمكن إثبات أن S مغلقة بالنسبة لعملية الجمع.

المجموعة S تسمى فراغ الحلول للنظام المتجانس $A X = 0$، بما أن فراغ الحلول (من النظرية السابقة) هو فراغ جزئي من فراغ اتجاهي بعده n، إذن يكون له أساس محدود. هذا يعني أن عدد محدود من الحلول يولد كل الحلول وذلك بأخذ كل التركيبات الخطية Linear combination.

وإذا كان الفراغ S بعده n أي أن المصفوفة A لها المرتبة n ($n=m$, $\operatorname{Det} A \neq 0$) فإن النظام المتجانس له حل صفري (تافه).

مثال (١): أوجد فراغ الحلول للنظام

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 6z - w &= 0 \\ x - y + 2z + w &= 0 \\ 5x + y + 10z + w &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

من السهل أن نتبين أن المتجهات $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ حلول لنظام المعادلات (1)، إذن فراغ الحلول المولد بالحلول السابقة هو

$$S = L\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ولهذا أي حل هو تركيبة خطية من هذه المتجهات أو أي حل له الصورة

$$\begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ -a \\ 3b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$ لأي أعداد حقيقية $a, b \in R$، كلما تتغير a, b يوجد حل وبالتالي يوجد عدد لانهائي من الحلول التي تنتمي للفراغ الجزئي S. وهذا تفسير لمعنى عدد لانهائي من الحلول يعتمد على بارامترين a, b.

(٣.٤) فراغ الصف وفراغ العمود : Row (Column) Space

تعريف (١.٤): يقال أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئين إذا كان أي حل لأحد الأنظمة هو حل للنظام الأخر وبالعكس وبمعنى آخر : العمليات الأولية المسموح بها على صفوف مصفوفة المعاملات A أو المصفوفة الموسعة $A^* = (A|b)$ لنظام المعادلات $AX = b$ تؤدي إلى نظام معادلات يكافئ النظام الأصلي.

تعريف (٢.٤): مصفوفتين A, B من درجة $m \times n$ يكونا متكافئان صفيا Row equivalent إذا وجدت متتابعة محدودة من العمليات الأولية على الصفوف بحيث تحول أحد المصفوفات إلى الأخرى ويكتب $A \overset{R}{\sim} B$.

تعريف (٣.٤): مرتبة المصفوفة Rank of matrix هي عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة الناتجة من العمليات الأولية على الصفوف لجعلها مصفوفة مثلثية عليا Upper triangular أو شبه متحرفه trapezoidal.

تعريف (٤.٤): نفرض أن $A=(a_{ij})$ مصفوفة $m\times n$، الفراغ الصفي للمصفوفة A هو فراغ جزئي من V_n مولد بالصفوف التي عددها m، بمعنى أن $L\{(a_{11},a_{12},...,a_{1n}),...,(a_{m1},a_{m2},...,a_{mn})\}$ هو الفراغ الصفي Row space للمصفوفة A.

تعريف (٥.٤): بعد الفراغ الصفي لمصفوفة A يسمى (أحياناً) المرتبة الصفية Row rank وهو مرتبة المصفوفة.

تعريف (٦.٤): لتكن A, B مصفوفتان من درجة $m\times n$ نقول أن A تكافؤ صفي للمصفوفة B عندما وفقط عندما توجد مصفوفة غير شاذة P من درجة $m\times n$ بحيث يكون $B=PA$ أو بتعبير أخر $A\overset{R}{\sim}B$ عندما وفقط عندما يمكن الحصول على B من A بإجراء عمليات أولية على صفوف A، المصفوفة B هي حاصل ضرب متتابعة من المصفوفات الأولية تؤثر على A أي أن :

$$P=E_1E_2\dots E_k$$
$$B=E_1E_2\dots E_kA$$

تعريف (٧.٤): لتكن A, B مصفوفتان من درجة $m\times n$ إذن $A\overset{C}{\sim}B$ (A تكافؤ عمودي للمصفوفة B) إذا وفقط إذا تحقق

$$B=AQ\ ,Q=E^1E^2\dots E^k$$

أي أن

$$B=E^1E^2\dots E^kA$$

تعريف (٨.٤): يقال أن A, B مصفوفتان (من نفس الأبعاد) متكافئتان ويكتب $A\sim B$ إذا وفقط إذا تحقق $B=PAQ$

حيث $P = E_1 E_2 \ldots E_k \;,\; Q = E^1 E^2 \ldots E^k$

مثال (٢): نفرض أن $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفات P, Q القابلة للعكس بحيث تحقق $PA = B \;,\; AQ = C$ حيث B، C مصفوفات في الصورة المختزلة وكذلك $PAQ = F$ حيث F مصفوفة في الصورة القانونية.

الحل: **أولا:** نحاول إيجاد المصفوفة P القابلة للعكس وذلك باتباع الخطوات الآتية :

نقوم بإجراء متتابعة من العمليات الأولية الصفية على جانبي المعادلة المصفوفية $IA = A$ لتحول المصفوفة A الموجودة على اليمين إلى الصورة المختزلة الصفية R-echelon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

متتابعة من العمليات الأولية هي :

$$e_{(1)-1(3)} \longrightarrow e_{(2)-1(1)} \longrightarrow e_{(3)-1(1)} \longrightarrow e_{(3)+1(2)} \longrightarrow$$

$$e_{\frac{1}{5}(2)} \longrightarrow e_{(1)+3(2)}$$

إذن

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

إذن

$$P = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

بالمثل يمكن إجراء متتابعة من العمليات الأولية على الأعمدة للمعادلة المصفوفية $A\,I = A$ والتي تحويل المصفوفة A الموجودة على اليمين إلى المصفوفة المختزلة العمودية C-echelon

لإيجاد المصفوفات P, Q بحيث $P\,A\,Q$ مصفوفة في الصورة القانونية normal form نقوم بإجراء عمليات أولية من نوع الصفوف والأعمدة على جانبي المعادلة المصفوفية $I\ A\ I = A$ لتتحول المصفوفة A الموجودة على اليمين إلى الصورة القانونية.

بإجراء عمليات أولية مناسبة على أعمدة المعادلة (*) نحصل على

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \\ -10 & 5 & 15 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -6 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة : المصفوفات P, Q التي تجعل P A Q مصفوفة قانونية ليست وحيدة حيث أنه باختيار متتابعة أخرى من العمليات الأولية التي تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قانونية نحصل على إجابة مختلفة.

نظرية (٣.٤): إذا كان A, B مصفوفات متكافئة صفياً فيكون لهما نفس الفراغ الصفي.

مثال (٣): أوجد بعد الفراغ الجزئي $S \subset V_4$ المعطى بالآتي :

$$S = L\{ (5, 1, -4, 7), (2, 1, -1, 1), (1, -1, -2, 5) \}$$

وأعط وصف هندسي لهذا الفراغ.

الحل: بعد الفراغ الجزئي S هو مرتبة المصفوفة

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

بإجراء العمليات الأولية على صفوف المصفوفة A نجد أنها تكافئ صفياً المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{rank}(B) = 2$$

أي أن بعد S يساوي 2

لوصف عناصر S هندسياً، نفرض أن $u \in S$ أي أنه توجد الأعداد a, b بحيث

$$u = a(1, 0, -1, 2) + b(0, 1, 1, -3)$$
$$= (a, b, -a + b, 2a - 3b)$$

أي أن

$$S = \{ (x, y, z, w) \mid z = y - x,\ w = 2x - 3y \}$$

وبالتالي S عبارة عن مستوى في الفراغ الرباعي V_4 .

مثال (٤): حدد فيما إذا كانت المجموعة

$$\{ (2, 2, -4) , (-3, -2, 8) , (1, 4, 4) \}$$

أساس للفراغ V_3 أم لا؟

الحل: المصفوفة (صفوفها متجهات المجموعة S)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

تكافئ صفيا (بعد إجراء العمليات الأولية) المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \ \text{rank}\,(B) = 2$$

ولهذا فإنها لا تصلح أن تكون أساس للفراغ V_3 لأنها لا تحتوي على ثلاث متجهات مستقلة خطيا.

من دراستك السابقة تعلم أن نظام المعادلات الخطية يكون متوافق إذا كان وكان فقط مرتبة مصفوفة المعاملات Coefficient matrix A تساوي مرتبة المصفوفة الموسعة agumented matrix A^* أي :

$$\text{rank}\ A = \text{rank}\ A^* = \text{rank}\ (A \mid b)$$

وبرهان هذه النتيجة يعطى من خلال النظرية التالية :

نظرية (٤.٤) : مجموعة المعادلات الغير متجانسة يكون لها حل عندما وعندما فقط تكون مرتبة المصفوفة الموسعة تساوي مرتبة مصفوفة المعاملات.

البرهان : نفرض أن مجموعة المعادلات

$$A_1^t x_1 + A_2^t x_2 + \dots + A_n^t x_n = b$$

حيث
$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} A_i^t = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n$$

لها حل أي أنه يوجد $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^n$ بحيث

$$\lambda_1 A_1^t + \lambda_2 A_2^t + \dots + \lambda_n A_n^t = b$$

واضح أن المتجه b ارتباط خطي من المتجهات $A_1^t, A_2^t, \dots, A_n^t$.

أي أن أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطيا بين المتجهات $A_1^t, A_2^t, \dots, A_n^t, b$ يساوي أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطيا من المتجهات $A_1^t, A_2^t, \dots, A_n^t$ وهذا يعني أن مرتبة المصفوفة الموسعة تساوي مرتبة مصفوفة المعاملات.

من ناحية أخرى، نفرض أن مرتبة مصفوفة المعاملات يساوي مرتبة المصفوفة الموسعة. وهذا يعني أن أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطيا بين المتجهات $A_1^t, A_2^t, \dots, A_n^t, b$ يساوي أكبر عدد من المتجهات

المستقلة خطيا بين المتجهات $A_1^t, A_2^t, ..., A_n^t$. أي أن إضافة المتجه b لم يحدث تغيير في عدد المتجهات المستقلة خطيا بين المتجهات $A_1^t, A_2^t, ..., A_n^t$ وعليه فإن المتجه b يعتبر ارتباطا خطيا بين المتجهات $A_1^t, A_2^t, ..., A_n^t$.

إذن يوجد $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ بحيث $\lambda_1 A_1^t + \lambda_2 A_2^t + ... + \lambda_n A_n^t = b$

وبذلك تكون $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ هي مجموعة حلول مجموعة المعادلات AX=b.

مثال (٥): بين أن النظام

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x - 3y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

غير متوافق.

الحل: المصفوفة $A^* = (A|b)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

تكافئ صفيا المصفوفة

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

أي أن $r(A) = 2$، $r(A^*) = 3$ وبالتالي النظام غير متوافق.

العلاقة بين مرتبة المصفوفات A، A^* وعدد المجاهيل وعدد المعادلات تعطى من النظريات الآتية

نظرية (٥.٤): نظام المعادلات الخطية المتوافق له حل وحيد إذا كان وكان فقط $r(A) = n$.

البرهان: نفرض أن $A x = b$ نظام متوافق من المعادلات الخطية في n من المجاهيل. إذن يوجد حل وحيد إذا كان وفقط إذا كان لا يوجد بارامترات في الحل بمعنى أن $n - \text{rank } A = 0$

نظرية (٦.٤): نظام المعادلات الخطية المتوافق حيث $m < n$ له أكثر من حل (عدد لانهائي من الحلول).

البرهان: نفرض أن $A x = b$ نظام من المعادلات الخطية المتفقة في m من المجاهيل حيث $m < n$. إذن $\text{rank } A$ لا يمكن أن تزيد عن عدد الصفوف أي أن $\text{rank } A$ لا يمكن أن تزيد عن n.

نظرية (٧.٤): النظام $A X = 0$ له حل غير تافه إذا كان وكان فقط $r(A) < n$

البرهان : البرهان حالة خاصة من نظرية (٥.٤).

تعريف (٦.٤): فراغ العمود Column space لمصفوفة $m \times n$ هو فراغ جزئي $M_{m\times 1}$ مولد بعدد n من أعمدة A.

تعريف (٧.٤): مرتبة العمود Column rank لمصفوفة هو بعد فراغ العمود للمصفوفة.

مثال (٦): نفرض أن $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

إذن فراغ العمود للمصفوفة A يكون

$$L\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\right\}=L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mu_{2\times1}$$

وتكون مرتبة العمود هي 2

باستخدام المصفوفة البديلة transpose ومرتبة المصفوفة التي تعرضنا لها بالتفصيل في باب المصفوفات يكون لدينا

$$\text{column rank } A = \text{row rank } A^t = \text{row rank } A = \text{rank } A$$

أي أن مرتبة العمود لمصفوفة تساوي مرتبتها.

نظرية (٨.٤): أي مجموعة من n+1 متجه في الفراغ V_n تكون مرتبطة خطيا.

البرهان : نفرض أن $B=\{u_1,\dots,u_{n+1}\}\subset V_n$ ونفرض أن $x_1,\dots,x_{n+1}$ تحقق المعادلة الاتجاهية

$$x_1 u_1+\dots+x_{n+1}u_{n+1}=0$$

وهذه المعادلة الاتجاهية تؤول إلى نظام متجانس من المعادلات الخطية في n+1 من المجاهيل. بما أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل إذن لا يوجد حل وحيد ، بمعنى أنه يوجد حل غير الحل الصفري للمجاهيل $x_1,\dots,x_{n+1}$ وبالتالي المجموعة B مرتبطة خطيا.

(٤.٤) تأويل هندسي لنظام المعادلات الخطية :

نفرض أن $AX=B$ نظام من n معادلة خطية في m من المجاهيل. الحل $X=C$ لهذا النظام يمكن النظر إليه على أنه نقطة في فراغ كارتيزي ذو بعد m أي أن $X \in R^m$. الحل $X=C$ هو عبارة عن $m \times 1$ مصفوفة و X^t عبارة عن عدد m من الأعداد الحقيقية المرتبة ، تسمى المجموعة $\{C \in M_{m\times 1} : AC = B\}$ بمجموعة الحل للنظام $AX=B$.

إذن السؤال الهندسي الآن ما طبيعة شكل الحل في R^m؟

بالطبع إذا كان النظام غير متوافق تكون المجموعة خالية ومجموعة الحل تكون فراغ جزئي من $M_{m\times 1}$ إذا كان وفقط إذا كان $B=0$.

المحل الهندسي لمعادلة واحدة من النظام $AX=B$ يسمى المستوى الأعظم hyperplane في R^m (إذا كانت $m=2$ فإن المحل الهندسي يكون خط مستقيم، إذا كانت $m=3$ فإن المحل الهندسي يكون مستوى). ولهذا النظام $AX=B$ يمثل عدد n مستوى أعظم في R^m ليس بالضرورة أن يكونوا كلهم مختلفين ويكون المحل الهندسي للحل هو عبارة عن خط مستقيم أو نقطة أو المحل الهندسي خالي (ليس لها حل).

مثال (٧): ادرس المحل الهندسي لحل مجموعة المعادلات

$$4x - 2y + 6z = 1 ,\ 2x + y - 3z = 2 ,\ 6x - 3y + 9z = 4$$

الحل : العمليات الاولية على نظام المعادلات الخطية المعطى تؤدي إلى نظام غير متوافق من المعادلات

$$x = 0 \ ,\ y - 3z = 0 ,\ 0 = 1$$

ولهذا لا توجد نقطة مشتركة بين المستويات الثلاث. في هذه الحالة مستويين الأول والثالث متوازيين واتجاه العمودي عليهما هو $(2,-1,3)$. بما أن الثلاث مستويات ليست جميعها متوازية ، المستويين المتوازيين (الأول والثالث) يقطعا المستوى الثاني في خطين مستقيمين متوازيين.

إذا كان النظام $AX=B$ متفق، إذن طبيعة مجموعة الحل تعتمد على عدد البارامترات في الحل. إذا لم توجد بارامترات يكون للنظام حل وحيد والذي يمثل بنقطة في الفراغ R^m. إذا كان لدينا معادلتين في مجهولين لهما حل وحيد، هذه المعادلات تمثل بخطين مستقيمين غير متوازيين في المستوى ومتقاطعين في نقطة. ولكن في الحالة العامة أي حل من الممكن أن يحتوي على بارامتر أو أكثر.

مثال (٨): أوجد المحل الهندسي المناظر لمجموعة حل نظام المعادلات

$$x-2y+z=5 \;,\; 3x+y-4z=1 \;,\; x+5y-6z=9$$

الحل: بإجراء العمليات الأولية على هذا النظام (طريقة الحذف لجاوس) يتحول النظام إلى

$$x-z=1 \;,\; y-z=-2$$

وهذا الحل يحتوي على بارامتر واحد t أي أن الحل هو

$$x=1+t \;,\; y=t-2 \;,\; z=t \;,\; t\in R$$

المحل الهندسي لمجموعة الحل في الفراغ R^3 يكون على الصورة

$$(x,y,z)=t\,(1,1,1)+(1,-2,0) \;,\; t\in R$$

إذن الثلاث مستويات تتقاطع في خط مستقيم اتجاهه (1, 1, 1) ويمر خلال النقطة (1, -2, 0)

في المثال السابق، بارامتر واحد كان ضروري للتعبير عن كل الحلول والمحل الهندسي للحل كان خط مستقيم.

عدد البارامترات اللازم لوصف المحل هندسيا يسمى عدد درجات الحرية للمحل الهندسي degree of freedom .

إذن الخط المستقيم له درجة حرية واحدة والنقطة ليست لها درجة حرية والفراغ كله له ثلاث درجات حرية.

المستوى $x + 2y - z = 3$ يمكن التعبير عنه (باعتبار حلول معادلة من الدرجة الأولى) في الصورة

$$x = 3 - 2t + s , y = t , z = s , \ \forall \ t, s \in R$$

والبارامترات t, s تمثل درجتين من درجات الحرية والحل يمكن التعبير عنه في الصورة

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + t(-2, 1, 0) + s(1, 0, 1) \ \forall t, s \in R$$

وهذا يمثل مستوى يمر خلال النقطة (3, 0, 0) ويوازي المستوى الذي يمر خلال نقطة الأصل ومولد بالمتجهات (1, 0, 1), (-2, 1, 0). هذه الفكرة يمكن تعميمها للمحل الهندسي لأي معادلة خطية في

$$p = u + t v + s w \ , u, v, w \in R^m$$

حيث v, w متجهات مستقلة خطيا، هذا المحل الهندسي يسمى مستوى في R^m.

مثال (٩): ادرس تقاطع المستويات الفوقية (العظمى) hyperplanes في الفراغ R^4 والمعطاة بالمعادلات الخطية

$$x + y + 2z + 5w = 5 \quad , \quad 3x + y + 8z + 7w = q$$
$$x - y + 4z - 3w = -1$$

الحل: بإجراء بعض العمليات الأولية على نظام المعادلات المعطى يتحول النظام إلى

$$x + 3y + w = 2$$
$$y - z + 4w = 3$$

وهذا الحل يعتمد على بارامترين والمحل الهندسي له درجتين حرية ولهذا فهو مستوى. لنرى ذلك نكتب الحل على الصورة

$$(x, y, z, w) = (2, 3, 0, 0) + s(-3, 1, 1, 0) + t(-1, -4, 0, 1) \quad , \forall s, t \in R$$

وهذا يمثل مستوى في R^4 يمر خلال النقطة $(2, 3, 0, 0)$ ويوازي المستوى المار بنقطة الأصل ومولد بالمتجهات $(-3,1,1,0), (-1, -4, 0, 1)$

مثال (١٠) : أوجد أساس للفراغ المولد بالمتجهات

$$(1, 0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 2, 2), (2, 1, 0, 1, 2), (1, 1, -1, -1, 0)$$

الحل: الفراغ المولد بهذه المتجهات هو فراغ الصفوف للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

بإجراء العمليات الأولية على صفوف المصفوفة تأخذ الصورة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الصفوف الغير صفرية (متجهات) هي

$$(1, 0, 1, 2, 0), (0, 1, -2, -3, 6), (0, 0, 0, 0, 1)$$

تكون أساس لفراغ الصفوف وبالتالي فهي أساس للفراغ المولد بالمتجهات المعطاة.

مثال (١١): حدد ما إذا كانت مجموعة المعادلات الآتية لها حل أم لا؟

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

الحل: مجموعة المعادلات يكون لها حـــل إذا كـــانت مرتبـــة مصفوفـــة المعاملات تساوي مرتبة المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

واضح أن المصفوفة الموسعة من المرتبة الثالثة بينما مصفوفة المعاملات من المرتبة الثانية. أي أن مجموعة المعادلات ليس لها حل.

مثال (١٢): هل مجموعة المعادلات الآتية متفقة؟

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\
x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 + 3x_2 - x_3 &= -2 \\
3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

الحل: بإجراء العمليات الأولية على صفوف المصفوفة الموسعة نحصل على

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

واضح أن مرتبة المصفوفة الموسعة تساوي مرتبة مصفوفة المعاملات تساوي 3 = عدد المجاهيل وبذلك فإن لمجموعة المعادلات حل وحيد. مجموعة المعادلات المعطاة تكافئ المعادلات

$$x_3 = 1 \;,\; x_2 = 0 \;,\; x_1 = -1$$

وهذا هو حل مجموعة المعادلات المعطاة.

مثال (١٣): هل مجموعة المعادلات الآتية متفقة؟

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 &= -8 \end{aligned} \qquad (*)$$

الحل: بإجراء بعض العمليات الأولية على صفوف المصفوفة الموسعة

نحصل على :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

أي أن مجموعة المعادلات السابقة تكافئ مجموعة المعادلات

$$3x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 8$$

$$x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_2 - x_4$$

$$x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4$$

واضح مما سبق أن مرتبة مصفوفة المعاملات يساوي 2 وبذلك تكون مجموعة المعادلات المعطاة فراغاً اتجاهياً بعده 2 = 2-4 أي أنه يوجد متجهان مستقلان خطياً يمثلان أساساً لفراغ الحلول.

بوضع $x_3 = \lambda$ ، $x_4 = \mu$ يكون

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\lambda - \mu \\
x_2 &= -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\lambda + \mu \\
x_3 &= \lambda \\
x_4 &= \mu \qquad , \quad \lambda, \mu \in R
\end{aligned}$$

وهذا هو حل مجموعة المعادلات المعطاة. ويتضح أنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول حيث أن كل قيمة من قيم μ, λ تعطي حلاً لمجموعة المعادلات.

والتفسير الهندسي للحل هو أن كل معادلة من نظام المعادلات (*) المعطى يمثل مستوى أعظم في الفراغ R^4. وهذه المستويات الأعظم تتقاطع كلها في مستوى يعتمد على بارامترين λ, μ . ومعادلته هي

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right) + \lambda\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + \mu(-1, 1, 0, 1)$$

وهو عبارة عن مستوى يمر بالنقطة $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right)$ ويوازي الأتجاهين

$$\overrightarrow{a} = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right), \quad \overrightarrow{b} = (-1, 1, 0, 1)$$

مثال (١٤): أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية ليس لها حل (ليست متفقة)

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z + 2t &= 1 \\ x - 2y + 3z + t &= 2 \\ 3x - 14y - 11z + t &= 0 \end{aligned}$$

الحل: المصفوفة الموسعة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -14 & -11 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

بإجراء العمليات الأولية على الصفوف يمكن أن نرى

$\text{rank } A = 2 , \text{rank } [A|B] = 3$

أي أن المجموعة غير متفقة.

مثال (١٥): أوجد حل لنظام المعادلات الخطية المتجانس

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 0 \\ x - 11y + 14z &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

الحل: هذا النظام يكافئ المعادلة المصفوفية

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام العمليات الأولية على صفوف المصفوفة A فإن النظام يتحــــول

إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ -7y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

أي $y = \frac{8}{7} z , x = -\frac{10}{7} z$ حيث z يعتبر كبارامتر، أي لكل قيمه من قيم z توجد قيمة للمتغيرات x, y وهذا يوضح معنى أن النظام له عدد لانهائي من الحلول، مثلاً $z = 1$ يكون $y = \frac{8}{7}, x = -\frac{10}{7}$. والتأويل الهندسي للحل هو أن المستويات الثلاث المناظرة للنظام (*) تتقاطع في خط مستقيم (عدد لانهائي من النقط تناظر عدد لانهائي من الحلول). واضح أن المستويات الثلاث تمر بنقطة الأصل وبالتالي خط التقاطع يمر بنقطة الأصل والخط المستقيم يعطى من

$$(x, y, z) = t\left(-\frac{10}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$$

ويوازي الاتجاه $\bar{\ell} = \left(-\frac{10}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$

مثال (١٦): أوجد قيم λ , μ التي تجعل نظام المعادلات الخطية الآتية

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 10 \\ x + 2y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

(i) ليس له حل، (ii) له حل وحيد

(iii) له عدد لانهائي من الحلول.

الحل: نوضح الحل من خلال المحددات والمصفوفات :

نظام المعادلات يكون له حل وحيد إذا كان وكان فقط محـــدد مصفوفـة المعاملات مختلف عن الصفر (أي مرتبتها تساوي 3 (عدد المجـــاهيل)) أي أن

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \lambda - 3 \neq 0$$

إذن يكون للنظام حل وحيد عندما $\lambda \neq 3$، μ تأخذ أي قيمة.

باستخدام المصفوفة الموسعة والعمليات الأولية على صفوفـــها يتحـــول النظام إلى

$$(A|b) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & \mu - 10 \end{array}\right]$$

وبذلك نرى أنه في حالة $\lambda = 3$، $\mu \neq 10$ أن

$$r(A) \neq r(A|b)$$

وبذلك النظام ليس له حل.

أما في حالة $\lambda = 3$، $\mu = 10$ تكون $r(A) = r(A \mid b) = 2$

وبذلك يوجد عدد لانهائي من الحلول.

أما في حالة $\lambda \neq 3$، μ اختيارية فإن النظام له حل وحيد.

تمارين (٤)

١ــ فراغ العمود لمصفوفة A هو عبارة عن فراغ الصف للمصفوفة A^t بين أن للمصفوفة A ذات الأبعاد $n \times n$، فراغ الصف للمصفوفة A ليست بالضرورة أن يساوي فراغ الصف للمصفوفة A^t في الحالات الآتية :

(i) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 8 & -8 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

٢ــ أوجد فراغ العمود ومرتبة المصفوفات الآتية

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

٣ــ نفرض أن $AX = b$ هو نظام من المعادلات الخطية في مجهولين. أي أنه كل معادلة تمثل خط مستقيم في المستوى. اعتبر كل القيم الممكنة لمرتبة المصفوفة A، A^t وفي كل حالة حدد كيف تتقاطع الخطوط المستقيمة التي عددها n.

٤ــ بين أن فراغ الصف يساوي فراغ العمود في كل من المصفوفات الآتية

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

٥ــ أوجد قيم λ التي تجعل المعادلات الآتية قابلة للحل (متفقة) ثم أوجد الحل وأعط تفسير هندسي للحل :

(i)
$$\begin{aligned} 5x - 3y + 2z + 4w &= 3 \\ 4x - 2y + 3z + 7w &= 1 \\ 8x - 6y - z - 5w &= 9 \\ 7x - 3y + 7z + 17w &= \lambda \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \lambda x + y + z + w &= 1 \\ x + \lambda y + z + w &= 1 \\ x + y + \lambda z + w &= 1 \\ x + y + z + \lambda z &= 1 \end{aligned}$$

٦ــ أوجد أساساً للفراغ الجزئي R^4 المولد بالمتجهات

(i) (1, 1, -4, -3) , (2, 0, 2, -2) , (2, -1, 3, 2)

(ii) (-1, 1, -2, 0) , (3, 3, 6, 0) , (9, 0, 0, 3)

(iii) (1, 1, 0, 0) , (0, 0, 1, 1) , (-2, 0, 2, 2), (0, -3, 0, 3)

٧ــ في كل من الحالات الآتية حدد ما إذا كانت b تقع في فراغ أعمدة A وإذا كان ذلك عبر عن b كتركيبة خطية من فراغ الأعمدة.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$