الباب السادس
تغير الأساس وتشابه المصفوفات
Change of Basis and Similarity of Matrices

(٦.١) التغير في الإحداثيات Change in Coordinates

نفرض أن $B=\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ أساس للفراغ V ذو البعد n. إذن إحداثيات أي متجه $v \in V$ بالنسبة للأساس B تعطى من

$$v:(x_1, ..., x_n)_B$$

وإذا وجد أساس أخر $B'=\{u'_1, ..., u'_n\}$ للفراغ V فإن إحداثيات المتجه v تأخذ الصورة :

$$v:(x'_1, ..., x'_n)_{B'}$$

المشكلة الآن هو كيفية تحديد العلاقة بين الإحداثيات الجديدة (x'_i) والإحداثيات القديمة (x_i)، إذن

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = v = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, u'_i \qquad (1)$$

العلاقة بين الإحداثيات يمكن إيجادها عن طريق التعبير عن متجهات أحد الأساسات وليكن B' كتركيبة خطية من متجهات الأساس B مثلاً (أو العكس) أي أن :

$$u'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\, u_i \qquad (2)$$

بمعنى أن $u'_j:(P_{1j}, ..., P_{nj})_B$

المصفوفة $P=(P_{ij})$ ذات الأبعاد $n\times n$ تسمى مصفوفة التغير Transition matrix من الأساس B إلى الأساس B'.

لاحظ أن العمود j في المصفوفة P يحتوي على إحداثيات $u'_j \in B'$ بالنسبة للأساس B.

الآن المعادلة (1) تأخذ الصورة

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = x'_1\left(\sum_{i=1}^{n} P_{i1}\, u_i\right) + \dots + x_n\left(\sum_{i=1}^{n} P_{in}\, u_i\right) \qquad (3)$$

وبما أن المجموعة $\{u_i\}$ مستقلة خطياً، إذن معاملات u_i على الطرف الشمال تساوي معاملات u_i على الطرف اليمين. وبترتيب الحدود في الطرف الأيمن تصبح المعادلة (3) في الصورة :

$$x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + \dots + x_n\, u_n = \left(\sum_{j=1}^{n} P_{1j}\, x'_j\right) u_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} P_{2j}\, x'_j\right) u_2 + \\ + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n} P_{nj}\, x'_j\right) u_n$$

إذن

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n} P_{1j}\, x'_j \;, \dots ,\; x_n = \sum_{j=1}^{n} P_{nj}\, x'_j$$

أو في صورة أعم

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, x'_j \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

أو

$$X = P\, X'$$

حيث $P = (P_{ij})$ مصفوفة مربعة $n \times n$ (مصفوفة التغير)،

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \;,\; X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^t$$

مثال (١): نفرض أن V_2 له الأساسات

$$B = \{\, (2, 1), (1, 0) \,\} \;,\; B' = \{\, (0, 1), (1, 4) \,\}$$

وإذا كان $v=(3,-5)\in V_2$ أوجد إحداثيات V بالنسبة للأساسات B, B' وكذلك مصفوفة التغير P.

الحل: مصفوفة التغير P من B إلى B' نحصل عليها عن طريق حساب إحداثيات متجهات B' بالنسبة إلىB وبسهولة نحصل على :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

يمكن الحصول على إحداثيات المتجه $V=(3,-5)$ بسهولة في الصورة (انظر الباب الثالث).

$$(3,-5):(-5,13)_B \ , (3,-5):(-17,3)_{B'}$$

إذن $X'=\begin{pmatrix} -17 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}$ هي متجهات إحداثيات المتجهV بالنسبة للأساس B'، B على الترتيب

ولهذا

$$P\,X'=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -17 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}=X$$

مثال (٢) : أوجد مصفوفة التغير P من الأساس $B=\{t+1, 2t^2, t-1\}$ إلى الأساس $B'=\{4t^2-6t, 2t^2-2, 4t\}$ للفراغ $R_3[t]$.

الحل: بحسابات بسيطة كما في الباب الثالث نجد أن :

$$4t^2-6t:(-3,2,-3)_B \ , 2t^2-2:(-1,1,1)_B \ , 4t:(2,0,2)_B$$

ولهذا فإن :

$$P=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نظرية (١.٦): إذا كانت P مصفوفة التغير من الأساس B إلى الأساس B' إذن P مصفوفة غير شاذة، $X' = P^{-1} X$ وأن P^{-1} هي مصفوفة التغير من B' إلى B.

البرهان: باستخدام خواص المصفوفات والمعكوس حيث أن

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} P'_{ij}\, x_j \,،\, x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, x'_j$$
$$X' = P' X \;,\; X = P X'$$

ومنها $X = P P' X$ أي أن $P P' = I$ ومنها $P' = P^{-1}$ وبهذا نكون قد توصلنا إلى البرهان.

(٢.٦) تغير مصفوفة التحويل الخطي :

Change of the matrix of map

إذا كان $T : V \rightarrow W$ تحويل خطي إذن كل اختيار لاساسات V،W ينتج عنه مصفوفة للتحويل T.

نحاول إيجاد العلاقة بين هذه المصفوفات أو ما يسمى بتغير مصفوفة التحويل نتيجة لتغير أساس V، W.

نفرض أن A مصفوفة T بالنسبة للأساس B_1 ،B_2 للفراغات V، W على الترتيب.

المصفوفة A' هي مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسات B'_1, B'_2 للفراغات V، W على الترتيب.

نفرض أن P مصفوفة التغير من B_1 إلى B'_1 للفراغ V، Q مصفوفة التغير من B_2 إلى B'_2 للفراغ W.

إذا كان $v \in V$، نفرض أن X, X' هي إحداثيات المتجه $v \in V$ بالنسبة للأساس B_1, B_1' على الترتيب. وكذلك $T(v) \in W$، نفرض أن Y, Y' هي إحداثيات $T(v)$ بالنسبة للأساس B_2, B_2' على الترتيب، هذه الإحداثيات ترتبط بالعلاقات :

$$X = P X', Y = Q Y', Y = A X, Y' = A' X' \qquad (1)$$

من هذه المعادلات نحصل على :

$$Q Y' = Y = A X = A (P X')$$

أو

$$Y' = Q^{-1} (A (P X'))$$

ولكن المعادلة $Y' = (Q^{-1} A P) X'$ معناها أن المصفوفة $Q^{-1} A P$ هي مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسات B_1'، B_2' أو $A' = Q^{-1} A P$

مثال (٣): نفرض أن $T: V_3 \to V_2$ معرف بالقاعدة

$$T(a, b, c) = (3a - c, 4b + 2c)$$

وتغيير الأساسات $B_1 = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \}$

$$B_2 = \{ (0, 1), (1, -2) \}$$

$$B_1' = \{ (2, -1, 3), (1, 0, 2), (0, 1, 1) \}$$

$$B_2' = \{ (1, 1), (2, 1) \}$$

أوجد مصفوفات التحويل T بالنسبة للأساسات المختلفة.

الحل: مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسات B_1، B_2 هي

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ومصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسات B_1', B_2' هي

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

مصفوفة التغير من B_1 إلى B_1' هي

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ومصفوفة التغير من B_2 إلى B_2' هي

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ويمكن التحقق من أن

$$Q^{-1} A P = A^{-1}$$

وتعميماً لهذا المثال يمكننا إعطاء النظرية التالية :

نظريــة (٢.٦): المصفوفات A, A' هي مصفوفات للتحويل $T : V \to W$
إذا كان وكان فقط يوجد مصفوفات غير شاذة P, Q بحيث

$$A' = Q^{-1} A P$$

في النظرية السابقة، المعادلة المصفوفية

$$A' = Q^{-1} A P$$

تعبر عن العلاقة بين مصفوفات التحويل الخطــــيA، A' بالنســبة لتغــير الأساسات لكل من V، W.

تعريف (١): يقال أن المصفوفات A, B (لــــهما نفــس الأبعــاد) متكافئــة equivalent إذا وجدت مصفوفات غير شاذة P, Q بحيث

$$B = Q A P$$

ويكتب $A \equiv A$.

تعريف (٢): يقال أن المصفوفات المربعة A, B متشابهة أو متماثلة similar إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P تحقق $B = P^{-1} A P$ ويكتب $A \overset{s}{\sim} B$ حيث A, B، P مصفوفات مربعة ومن نفس الأبعاد.

مثال (٤): نفرض أن $T : V_3 \to V_3$

$$T(a, b, c) = (2a + 4c, 3b, 4a + 8c)$$

وأن B هو الأساس القياسي (المعتاد) للفراغ V_3 أي $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ و

$$B' = \{(1, 0, 2), (0, 2, 0), (2, 1, -1)\}$$

بين أن مصفوفة T بالنسبة للأساس B تشابه مصفوفة T بالنسبة للأساس B'.

الحل: مما سبق يمكنك الحصول على مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساس B وهي

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ومصفوفة T بالنسبة للأساس B' وهي

$$A' = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفة التغير P من B إلى B' هي :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

باستخدام ضرب المصفوفات يمكنك التحقق من أن

$$P^{-1} A P = A'$$

(٣.٦) التكافؤ الصفي والتحويلات الخطية :

ليكن V, W فراغان اتجاهيان وأن $\dim V = n, \dim W = m$ وأن المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تكون أساساً للفراغ V وأن المتجهات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ تكون أساساً للفراغ W. ومن النظريات السابقة فإنه يوجد تحويل خطي وحيد T بحيث $T : V \to W$ وتمثل بالمصفوفة A وهكذا

$$T X_1 = a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \ldots + a_{1m} Y_m ,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$T X_2 = a_{n1} Y_1 + a_{n2} Y_2 + \ldots + a_{nm} Y_m .$$

$$\text{i.e.,} \quad \begin{bmatrix} T X_1 \\ \vdots \\ T X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}$$

ولنفرض أن هناك مصفوفة B تكافؤ صفي لـ A أي أن $B = P A$. ينشأ الآن السؤال التالي :

ما هي علاقة B بالتحويل الخطي T والنظرية التالية تعطينا الإجابة على ذلك :

نظرية (٣.٦): إذا كانت $A, B \in F_{n\times m}$ (من الدرجة n×m وعناصرهم في F) وكانت $A \sim B$ وكانت $T: V \to W$ تحويل خطي يمثل بالمصفوفة A بالنسبة للأساس المرتب $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ للفراغ V والأساس المرتب $\{Y_j\}_{j=1}^{m}$ للفراغ W

فإن :

(١) المتجهات $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ المعرفة كما يلي

$$\tilde{X}_i = P_{i1}\, X_1 + P_{i2}\, X_2 + \dots + P_{in}\, X_n \;, i = 1, 2, \dots, n$$

تكون أساساً للفراغ V (حيث P_{ij} هي عناصر المصفوفة P الغير شاذة حيث B=PA)

(٢) التحويل الخطي T يمثل بالمصفوفة $B = PA$ بالنسبة للأساس $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^{n}$ للفراغ V ولنفس الأساس السابق للفراغ W

البرهان:

(١) حيث أن المتجهات $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^{n}$ عددها n وحيث أن أي أساس للفراغ V يتكون من n من المتجهات المستقلة خطياً فيلزم إثبات أن هذه المتجهات مستقلة خطياً.

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1\, \tilde{X}_1 + \dots + \lambda_n\, \tilde{X}_n \\ &= \lambda_1 \left(P_{11}\, X_1 + \dots + P_{1n} X_n\right) + \dots + \lambda_n \left(P_{n1} X_1 + \dots + P_{nn}\, X_n\right) \\ &= \left(\lambda_1 P_{11} + \lambda_2 P_{21} + \dots + \lambda_n P_{n1}\right) X_1 + \dots + \left(\lambda_1 P_{1n} + \lambda_2 P_{2n} + \dots + \lambda_n P_{nn}\right) X_n \end{aligned}$$

و

لكن المتجهات $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ مستقلة خطياً ومن ثم ينتج أن

$$\begin{aligned}
&P_{11}\lambda_1 + P_{21}\lambda_2 + \ldots + P_{n1}\lambda_n = 0\\
&P_{12}\lambda_1 + P_{22}\lambda_2 + \ldots + P_{n2}\lambda_n = 0\\
&\quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&P_{1n}\lambda_1 + P_{2n}\lambda_2 + \ldots + P_{n2}\lambda_n = 0
\end{aligned}$$

أو في الشكل المصفوفي $P^t \lambda^t = 0$ i.e.,

حيث $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

ومما سبق وحيث أن المصفوفة P غير شاذة فإن رتبتها n ومن ثم فمجموعة المعادلات المتجانسة السابقة لا يكون لها سوى الحل التافه

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

ومن ثم فالمتجهات $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^{n}$ تكون مستقلة خطياً.

(٢) أساس للفراغ W $\{Y_i\}$ ، $\{X_i\}$ أساس للفراغ V

$$\begin{tikzcd}
\{X_i\} \arrow[rr, "T", "A"'] & & \{Y_i\} \\
& \{\tilde{X}_i\} \arrow[ul, "I_V"', "P"] \arrow[ur, "PA=B", "I_V T = T"'] &
\end{tikzcd}$$

$\{\tilde{X}_i\}$ أساس آخر للفراغ V

$$T\tilde{X}_i = T\left(P_{i1}X_1 + P_{i2}X_2 + \ldots + P_{in}X_n\right) \quad , \quad \text{تحويل خطي } T$$

$$= P_{i1}TX_1 + P_{i2}TX_2 + \ldots + P_{in}TX_2$$

$$= \left(P_{i1}\ P_{i2}\ \ldots P_{in}\right)\begin{bmatrix} TX_1\\ TX_2\\ \\ TX_n\end{bmatrix} = \left(P_{i1}\ P_{i2}\ \ldots P_{in}\right) A \begin{bmatrix} Y_1\\ \\ Y_m\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} T\tilde{X}_1 \\ T\tilde{X}_2 \\ \vdots \\ T\tilde{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$= P A \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

أي أن المصفوفة B تناظر التحويل T بالنسبة للأساسين المرتبين $\{Y_i\}$ ، $\{\tilde{X}_i\}$

نظرية (٤.٦): إذا كانت $T: V \to W$ تحويل خطي يمثل بالمصفوفة A بالنسبة للأساس $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ للفراغ V والأساس $\{Y_j\}_{j=1}^{m}$ الفراغ W وتمثل بالمصفوفة B بالنسبة للأساس $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ للفراغ V ولنفس الأساس $\{Y_j\}_{j=1}^{m}$ لـ W وكانت $X^t = P X^t$ فإن (حيث $X = (X_1 \; x_2 \ldots X_n)$)

١) المصفوفة P غير شاذة ٢) $P A = B$ ومن ثم تكون $A \underset{R}{\sim} B$

البرهان:

$$T: V \to W$$

$$\{X_i\} \xrightarrow{A} \{Y_i\} \text{ and } \{\tilde{X}_i\} \xrightarrow{P} \{X_i\},\ \{\tilde{X}_i\} \xrightarrow{B} \{Y_j\}$$

ومن ثم فإن

$$\{\tilde{X}_i\} \xrightarrow{P} \{X_i\} \xrightarrow{A} \{Y_i\} \Rightarrow \{\tilde{X}_i\} \underset{B}{\xrightarrow{PA}} \{Y_j\}$$

حيث P تمثل تحويل خطي غير شاذ من $V \to V$ فتكون المصفوفة P غير شاذة أيضا ومن ثم ينتج أن $A \underset{R}{\sim} B$ عندما وفقط عندما يمثلان نفس التحويل $T: V \to V$ بالنسبة لنفس الأساس للفراغ W.

ملحوظة: نعلم أن $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ ، $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^{n}$ أساسين مختلفين للفراغ V وكانت المصفوفة A تناظر التحويلة $\{X_i\}\to\{\tilde{X}_i\}$ أي أن $\tilde{X}=AX$

وكانت B تناظر التحويل $\{\tilde{X}_i\}\to\{X_i\}$ أي أن $X=B\tilde{X}$ فإن

$X=B\tilde{X}=BAX$ ومن ثم تكون BA=I وبالمثل AB=I أي أن $B=A^{-1}$

مثال (٥): أثبت أن $A \underset{R}{\sim} B$ هي علاقة تكافؤ للمصفوفات التي من الدرجة $n\times m$.

الحل: باستخدام تعريف التكافؤ الصفي وخواص علاقة التكافؤ نصل إلى المطلوب.

تعريف (٣): لتكن المصفوفتان $A, B\in F_{n\times m}$. يقال للمصفوفة A أنها تكافئ بالنسبة للأعمدة المصفوفة Column-Equivalent B إذا كان وفقط إذا كان هناك مصفوفة غير شاذة Q بحيث $AQ^{-1}=B$ (حيث Q من الدرجة $m\times m$) ونعبر عن ذلك هكذا $A \underset{C}{\sim} B$.

مثال (٦): أثبت أن $A \underset{C}{\sim} B$ هي علاقة تكافؤ للمصفوفات التي من الدرجة $n\times m$.

ملحوظة: يمكننا استخلاص نتائج مشابهة للنتائج التي حصلنا عليها في نظريتي (٣.٦)، (٤.٦).

تعريف (٤): يقال للمصفوفتان $A, B\in F_{n\times n}$ أنهما متكافئتان عندما وفقط عندما توجد مصفوفتان غير شاذتان P, Q بحيث تكون $PAQ^{-1}=B$ ونعبر عن ذلك هكذا $A\sim B$ (أثبت أن هذه علاقة تكافؤ).

نتائج :

١) إذا كانت المصفوفة A رتبتها k فإنها تكافئ المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & & \text{اصفار} \\ & 1 & \\ \text{اصفار} & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

٢) إذا كانت $A \sim B$ فإن $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

(٤.٦) الفراغ الاتجاهي للتحويلات الخطية :

نفرض أن U, V فراغان اتجاهيان معرفان على الحقل F. مما سبق يمكن إثبات أن المجموعة V^U التي تحتوي على كل الرواسم (الدوال) من U إلى V تكون فراغ اتجاهي على F تحت عمليتي الجمع والضرب في عدد قياسي.

تعتبر المجموعة الجزئية من V^U التي تحتوي على كل التحويلات (الدوال) الخطية من U إلى V والتي يرمز لها بالرمز Hom(U, V) إذا كان $f, g : U \to V, \alpha, \beta \in F$ من السهل أن نتحقق من أن

$\alpha f + \beta g : U \to V$ تحويل خطي.

إذن Hom (U, V) هو فراغ اتجاهي جزئي من الفراغ الاتجاهي V^U.

وبالتالي يمكن صياغة النظرية الآتية :ـ

نظرية (٥.٦): نفرض أن U, V فراغان اتجاهيان معرفان على حقل F ، إذن Hom(U, V) هو فراغ اتجاهي على F وأن

$$\dim \operatorname{Hom}(U, V) = \dim U \cdot \dim V$$

البرهان:

الجزء الأول من النظرية تم برهنته قبل صياغة النظرية مباشرة.

لإثبات الجزء الثاني نفرض أن $\{e_1, e_2, ..., e_m\}, \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ أساسان مرتبان للفراغات U, V على الترتيب ومما سبق يوجد تحويل خطي وحيد $\Phi_{ij} : U \to V\,,\ \Phi_{ij}(e_k) = \delta_{ik}\, f_j\,, k = 1, 2, ..., m$

مجموعة التحويلات الخطية $\{\Phi_{ij}\}$ التي عددها mn تكون أساس للفراغ Hom (U, V) ويمكنك التأكد من الأستقلال الخطي للمجموعة $\{\Phi_{ij}\}$.

إن أي تحويل خطي $f : U \to V$ يمكن كتابته على الصورة :

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, f_j \quad , \quad i = 1, ..., m$$

تعريف (٥): نفرض أن V فراغ اتجاهي معرف على الحقل F. الفراغ الاتجاهي Hom(V, F) يسمى الفراغ التوئم للفراغ V ويرمز له بالرمز V^* وأي عنصر في V^* يسمى دالي على V functional أي تحويل خطي من V إلى F.

بما أن F فراغ خطي على نفسه إذن dim F = 1 ونفرض أن dim V = n

إذن $\dim\ V^* = \dim \text{Hom}\,(V, F) = n \times 1 = n$

ومن برهان النظرية السابقة يمكن أن نرى أن $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ أساس للفراغ V^* مناظر للأساس $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ للفراغ V حيث

$e_i^* : V \to F$ تحويل خطي يحقق $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ ، الأساس $\{e_i^*\}$ يسمى الأساس التوئم للأساس $\{e_i\}$.

نظرية (٦.٦): إذا كان $\dim V$ محدود فإن $V = V^{**}$.

البرهان : يكفي إثبات أن الراسم $\Phi : V \to V^*$ المعرف بالقاعدة $\Phi(x) = \hat{x}$ هو تشاكل بمعنى أن $V \cong V^{**}$ حيث $\hat{x} : V^* \to F$ تحويل خطي معرف بالقاعدة $\hat{x}(f) = f(x)\,,\ \forall f \in V^*$.

مثال (٧): نفرض أن V فراغ محدد البعد لـه الأساس $\{e_1, \ldots, e_n\}$، V^* الفراغ التوئم له الأساس $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$. نفرض أن

$$f \in \mathrm{Hom}(V,V), f^* \in \hom\left(V^*, V^*\right)$$

بحيث $\left(f^*(\Phi)\right)(v) = \Phi\left(f(v)\right), \Phi \in V^*, v \in V$

إذا كانت A مصفوفة f بالنسبة للأساس $\{e_i\}$ بين أن مصفوفة f^* بالنسبة للأساس $\{e_i^*\}$ هي A^t.

الحل: نفرض أن $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_j$

إذن $A = (\alpha_{ij})$ هي مصفوفة f بالنسبة للأساس $\{e_i\}$

نعتبر $\left(f^*(e_i^*)\right)(e_j) = e_i^*\, f(e_j)$

$$= e_i^* \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\, e_k \right) = \alpha_{ij}$$

أيضاً

$$\alpha_{i1}\, e_1^* + \ldots + \alpha_{in}\, e_n^* = \alpha_{ij} \ , \ \forall j$$

إذن $f^*(e_i^*) = \alpha_{i1}\, e_1^* + \ldots + \alpha_{in}\, e_n^*$

ومن ثم مصفوفة f^* بالنسبة للأساس $\{e_i^*\}$ هي

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{in} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = {}^{t}A$$

تمارين (٦)

(١) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 4 & 5 \\ -2 & -26 & 1 & -10 \\ 3 & 39 & 6 & 15 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة P بحيث تكون $P\,A = B$

(إرشاد : استخدام العلاقة المصفوفية $I_3A = A$ ثم استخدم العمليات الأولية على الصفوف).

(٢) إذا كانت التحويلة $T: V_2 \to V_3$ مصفوفتها هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للأساس الطبيعي أوجد المصفوفة الغير الشاذة P بحيث تكون $P\,A = B$، حيث B مصفوفة قطرية. ثم أوجد الأساس الفراغ V_2 بحيث تمثل المصفوفة B التحويلة T بالنسبة للأساس الطبيعي (المعتاد) في R_3. أوصف هندسياً $\ker T$، $\text{rang } T$.

(٣) أوجد المصفوفة T بحيث تكون $B = T^{-1}\,A\,T$ إذا كانت

(i) $\quad A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} , \; B = \begin{bmatrix} 36 & -81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix}$

(ii) $\quad A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix} , \; B = \begin{bmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$

(٤) أوجد مصفوفة التغير من الأساس B إلى الأساس B' حيث

(i) $B = \{ (2,3), (0,1) \}$, $B' = \{ (6,4), (4,8) \}$

(ii) $B = \{ (1,1,1), (1,1,0) \}$

$B' = \{ (2,0,3), (-1,4,1), (3,2,6) \}$

(٥) نفرض أن $T(a, b) = (4a - b, 3a + 2b)$ تحويل خطي من V_2 إلى V_2، $B' = \{ (0,1), (-1,3) \}$، $B = \{ (1,1), (-1,0) \}$ أوجد المصفوفات A, A' وبين أن $A' = P^{-1} A P$.

(٦) المصفوفة A تكافئ المصفوفة B إذا كان وفقط إذا كان B يمكن الحصول عليها من A بعمليات أولية على الصفوف والأعمدة استخدم ذلك لكي تبين أن :

(a) المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ تكافئ I_2.

(b) المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ تكافئ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(٧) بين أنه إذا كانت المصفوفة A معدومة القوى (متساوية القوى) فإن أي مصفوفة تشابه المصفوفة A تكون معدومة القوى (متساوية القوى).

(إرشاد : معدومة القوى nilpotent تعني أن $A^p = 0, p \in N$ ، متساوية القوى تعني أن $A^p = A, p \in N$)