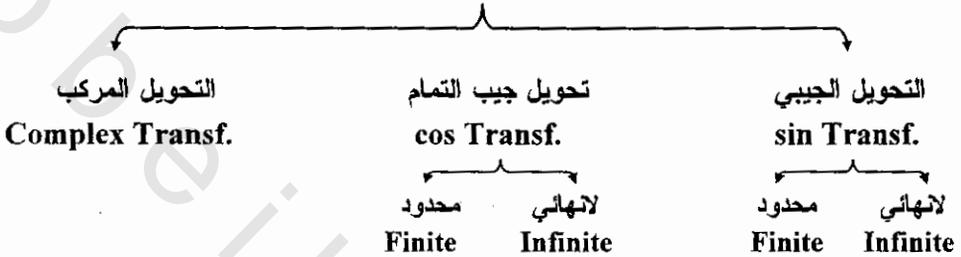


التحويلات التكاملية (2): تحويلات فورييه

Fourier Integral Transforms التحويلات التكاملية فورييه

يوجد ثلاث صور لهذه التحويلات:



أولاً: التحويل الجيبي لفورييه :

[1] التحويل الجيبي اللانهائي:

تعريف: يعرف تحويل فورييه الجيبي اللانهائي للدالة $f(x)$ حيث $0 < x < \infty$ بالتكامل:

$$f_s(n) = \int_0^{\infty} F(x) \sin nx \, dx$$

حيث n عدد صحيح موجب (Integer).

وتسمى $F(x)$ بالتحويل الجيبي العكسي للتحويل $f_s(n)$ وتعطي $F(x)$ بالتكامل الآتي:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(n) \sin nx \, dn$$

وعلى هذا: فإذا كانت: $f_s = f_s [F(x)]$ ، فإن

$$F(x) = f_s^{-1} [f_s]$$

حيث f_s هي رمز لتحويل فورييه الجيبي، f_s^{-1} هي رمز لتحويل فورييه العكسي الجيبي.

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل فورييه الجيبي للدالة: $F(x) = e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

الحل: من التعريف

$$f_s(n) = \int_0^{\infty} F(x) \sin nx \, dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin nx \, dx \quad (1)$$

لحساب هذا التكامل: نستخدم التكامل بالتجزئ أو نستخدم العلاقة:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$$

بوضع $a = -\lambda, b = n$

$$\int e^{-\lambda x} \sin nx \, dx = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2 + n^2} [-\lambda \sin nx - n \cos nx] \Big|_0^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{\lambda^2 + n^2} [-\lambda \sin 0 - n \cos 0] \quad \left| \begin{array}{l} e^{-\infty} = 0 \\ e^0 = 1 \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2 + n^2} [-n] = \frac{n}{\lambda^2 + n^2} = f(n)$$

إذا تحويل فورييه الجيبي اللانهائي للدالة $F(x) = e^{-\lambda x}$ هو:

$$f(n) = \frac{n}{\lambda^2 + n^2}$$

وهو المطلوب.

مثال(2): أوجد تحويل فورييه الجيبي اللانهائي العكسي للدالة $f(n) = e^{-\lambda n}$

الحل: المطلوب هو $F(x)$ ، فمن التعريف:

$$F(x) = f_s^{-1}[f_s(n)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(n) \sin x \, nx \, dn$$

بالتعويض عن $f_s(n) = e^{-\lambda n}$

$$\therefore F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda n} \sin x \, nx \, dn \quad (1)$$

هذا التكامل أيضاً يمكن إيجاده إما بالتجزئ أو باستخدام العلاقة:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$$

بوضع $x = n$

$$\int e^{an} \sin bx \, dx = \frac{e^{an}}{a^2 + b^2} [a \sin bn - b \cos bn]$$

بوضع $a = -\lambda, b = x$

$a = -\lambda, b = x$

$$\begin{aligned} \therefore \int e^{-\lambda n} \sin nx \, dx &= \frac{e^{-\lambda n}}{\lambda^2 + x^2} [-\lambda \sin nx - x \cos nx] \Big|_0^\infty \\ &= 0 - \frac{1}{\lambda^2 + x^2} [-\lambda \sin 0 - x \cos 0] = \frac{x}{\lambda^2 + x^2} \quad (2) \end{aligned}$$

بالتعويض في (1):

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{\lambda^2 + x^2} \right] = \frac{2x}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$$

وهو المطلوب.

مثال (3): باستخدام تحويل فورييه الجيبى العكسي واستخدام العلاقة

$$\therefore \int e^{-\lambda n} \sin nx \, dx = \frac{n}{\lambda^2 + n^2} \quad [\text{مثال (1)}]$$

أوجد العلاقة التكاملية:

$$\int_0^\infty \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2} \, dn = \frac{2}{\pi} e^{-ax}$$

الحل: من تعريف تحويل فورييه الجيبى العكسي اللانهائي:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(n) \sin nx \, dn, \quad f_s(n) = \int_0^\infty F(x) \sin nx \, dx$$

$$\therefore F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin nx \, dn \int_0^\infty F(x) \sin nx \, dx$$

وبأخذ $F(x) = e^{-ax}$

$$\therefore e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin nx \, dn \int_0^\infty e^{-ax} \sin nx \, dx$$

ومن رأسي المسألة فإن:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin nx \, dx = \frac{n}{a^2 + n^2}$$

$$\therefore e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin nx \, dn \left[\frac{n}{a^2 + n^2} \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2} \, dn$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2} \, dn = \frac{2}{\pi} e^{-ax}$$

وهو المطلوب.

في حالة $a=1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{n \sin nx}{1 + n^2} \, dn = \frac{2}{\pi} e^{-x}$$

[2] التحويل الجيبي المحدود:

تعريف: يعرف هذا التحويل للدالة $F(x)$ حيث $0 < x < \ell$ بالتكامل:

$$f_s(n) = \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

حيث n عدد صحيح موجب.

وفي الحالة الخاصة: عندما $\ell = \pi$:

$$\therefore f_s(n) = \int_0^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$$

ويعرف التحويل العكسي بعلاقة المجموع الآتية:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin nx$$

مثال: أوجد التحويل الجيبي المحدود لفورييه للدالة $F(x) = x$ حيث $0 < x < 2$

الحل: من التعريف:

$$f_s(n) = \int_0^{\ell} F(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

وعندما $F(x) = x$, $\ell = 2$

$$\therefore f_s(n) = \int_0^2 \underbrace{x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2}}_{dv} dx \quad (1)$$

ولإيجاد التكامل في (1): نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

فأخذ $u = x$: $du = dx$

$$\therefore v = -\frac{1}{n\pi/2} \cos \frac{n\pi x}{2} = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \quad \text{وبأخذ } dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx \text{ ، فإن}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} [2 \cos n\pi - 0] + \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n\pi/2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi + \frac{4}{n^2 \pi^2} [\sin n\pi - \sin 0] = -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi \end{aligned}$$

ولكن: $\cos n\pi = (-1)^n$ [من نظرية المتغير المركب].

$$\therefore \int_0^2 x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{4}{n\pi} (-1)^n = \frac{4}{n\pi} (-1)(-1)^n = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

وهو المطلوب.

ثانياً: تحويل جيب التمام لفورييه:

[1] تحويل جيب التمام اللانهائي:

تعريف: يعرف هذا التحويل للدالة $F(x)$ حيث $0 < x < \infty$ بالتكامل الآتي:

$$f_c(n) = \int_0^{\infty} F(x) \cos nx dx$$

الدالة $F(x)$ هي تحويل جيب التمام العكسي لفورييه وتعرف بالتكامل:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_c(n) \cos nx \, dx$$

أمثلة محلولة:

مثال (1): أوجد تحويل فورييه لجيب التمام للدالة: $F(x) = e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

الحل: من التعريف

$$f_c(n) = \int_0^{\infty} F(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cos nx \, dx \quad (1)$$

ومن العلاقة:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx]$$

فيوضع $a = -\lambda, b = n$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cos nx \, dx &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2 + n^2} [-\lambda \cos nx + n \sin nx] \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2 + n^2} [-\lambda \cos 0 + n \sin 0] = \frac{\lambda}{\lambda^2 + n^2} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ملاحظة: يستخدم التكامل $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cos nx \, dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + n^2}$ كثيراً في حل بعض

المسائل في تحليل فورييه.

مثال (2): أوجد تحويل جيب التمام العكسي $f_c^{-1}[e^{-\lambda n}]$

الحل: من التعريف:

$$F(x) = f_c^{-1}[f_c] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(n) \cos nx \, dn = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda n} \cos nx \, dn$$

ولإيجاد هذا التكامل نستخدم العلاقة السابقة للتكامل $(\int e^{ax} \cos bx \, dx)$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-\lambda n}}{\lambda^2 + x^2} (-\lambda \cos nx + n \sin nx) \right] \Bigg|_0^{\infty} \quad \left| \begin{array}{l} a = -\lambda \\ b = x \end{array} \right. \\ &= \frac{2}{\pi} \left[0 - \frac{1}{\lambda^2 + x^2} (-\lambda \cos 0 + x \sin 0) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{\lambda^2 + x^2} (-\lambda) \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\lambda^2 + x^2} \right] \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (3): باستخدام تحويلات فورييه العكسية اللانهائية واستخدام العلاقة التكاملية:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{a}{a^2 + n^2} \quad (\text{مثال (1)})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{1 + n^2} \, dn = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad (x > 0) \quad \text{أثبت أن:}$$

الحل: من تعريف تحويل فورييه العكسي اللانهائي:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_c(n) \cos nx \, dn$$

حيث:

$$f_c(n) = \int_0^{\infty} F(x) \cos nx \, dx$$

$$\therefore F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos nx \, dn \int_0^{\infty} F(x) \cos nx \, dx$$

وبأخذ $F(x) = e^{-x}$

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos nx \, dn \int_0^{\infty} e^{-x} \cos nx \, dx$$

ولكن من رأس المسألة. وبوضع $a=1$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos nx \, dx = \frac{1}{1+n^2}$$

$$\therefore e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos nx \, dn \left[\frac{1}{1+n^2} \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} \, dn$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} \, dn = \frac{2}{\pi} e^{-x}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: يعتبر هذا التكامل من التكاملات الهامة التي تستخدم في التطبيقات الفيزيائية.

مثال (4): باستخدام نتيجة المثال رقم (3) أوجد تحويل فورييه لجيب التمام للدالة:

$$F(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{حيث } 0 < x < \infty$$

الحل: من تعريف تحويل فورييه النهائي لجيب التمام:

$$f_c(n) = \int_0^{\infty} F(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \cos nx \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{1+x^2} \, dx \quad (1)$$

ولكن من مثال (3) [بتبديل موضعي n, x]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-n} \quad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1):

$$\therefore f_c(n) = \frac{\pi}{2} e^{-n}$$

وهو المطلوب.

مثال (5): باستخدام التكامل الآتي:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{a}{a^2 + n^2}$$

أوجد تحويل فورييه لجيب التمام للدالة $F(x) = x^2 e^{-ax}$ حيث $a > 0$

الحل: من التعريف

$$f_c(n) = \int_0^{\infty} F(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos nx \, dx \quad (1)$$

ولإيجاد التكامل في (1): نستخدم التكامل المعطي وهو:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{a}{a^2 + n^2} \quad (2)$$

ونطبق قاعدة ليبنتز المعروفة للتفاضل داخل (أو تحت) علامة التكامل، وهي:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} [e^{-ax} \cos nx \, dx] = \frac{d}{da} \left[\frac{a}{a^2 + n^2} \right] \quad (3)$$

[بتفاضل طرفي (2) بالنسبة للبارامتر a ، حيث التفاضل في الطرف الأيسر هو تفاضل جزئي بالنسبة للبارامتر a داخل علامة التكامل].

وبإجراء التفاضل داخل علامة التكامل في الطرف الأيسر والتفاضل الكلي في الطرف الأيمن نحصل على:

$$\int_0^{\infty} (-x) e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{(a^2 + n^2)(1) - a(2a)}{(a^2 + n^2)^2}$$

$$\therefore - \int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{n^2 - a^2}{(a^2 + n^2)^2}$$

وبتطبيق قاعدة ليبنتز مرة ثانية [بالتفاضل بالنسبة للبارامتر a]:

$$- \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} [x e^{-ax} \cos nx \, dx] = \frac{d}{da} \left[\frac{n^2 - a^2}{(a^2 + n^2)^2} \right]$$

$$\therefore - \int_0^{\infty} x \cdot (-x) e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{(a^2 + n^2)^2 (-2a) - (a^2 + n^2) \cdot 2(a^2 + n^2) \cdot 2a}{(a^2 + n^2)^4}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{-2a(a^2 + n^2)^2 - 4a(a^2 + n^2)(n^2 - a^2)}{(a^2 + n^2)^4}$$

$$= \frac{-2a(a^2 + n^2) - 4a(n^2 - a^2)}{(a^2 + n^2)^3}$$

$$= \frac{-2a[a^2 + n^2 + 2(n^2 - a^2)]}{(a^2 + n^2)^3}$$

$$= \frac{-2a(3n^2 - a^2)}{(a^2 + n^2)^3} = \frac{2a}{(a^2 + n^2)^3} (a^2 - 3n^2)$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$f_c(n) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos nx \, dx = \frac{2a}{(a^2 + n^2)^3} (a^2 - 3n^2) \quad (4)$$

وهو المطلوب.

حالة خاصة: عندما $a=1$: بالتعويض في (4):

$$f_c(n) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \cos nx \, dx = \frac{2}{(1+n^2)^3} (1-3n^2)$$

وهو تكامل هام يستخدم أيضاً في التطبيقات الفيزيائية.

[2] تحويل جيب التمام المحدود:

يعرف هذا التحويل للدالة $F(x)$ حيث $0 < x < \ell$ بالعلاقة:

$$f_c(n) = \int_0^{\ell} F(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \quad (1)$$

وعندما $\ell = \pi$ كحالة خاصة:

$$f_c(n) = \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx \quad (2)$$

ويعرف التحويل العكسي بالعلاقة:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} f_c(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos nx$$

$$\text{حيث: } f_c(0) = \int_0^{\pi} F(x) \, dx$$

مثال: أوجد تحويل جيب التمام المحدود لفورييه للدالة $F(x) = x$

حيث $0 < x < \pi$

الحل: من التعريف (المعادلة (2)):

$$f_c(n) = \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \quad (1)$$

ولإيجاد التكامل في (1) نستخدم التكامل بالتجزئ كآلاتي:

$$f_c(n) = \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1}{n} d(\sin nx)$$

$$\cos nx \, dx = \frac{1}{n} d(\sin nx)$$

وذلك لأن:

$$[d(\sin nx) = n \cdot \cos nx \, dx]$$

$$\therefore f_c(n) = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{d(\sin nx)}_v$$

$$u = x \quad \therefore du = dx$$

$$dv = d(\sin nx) \quad \therefore v = \sin nx$$

$$\therefore f_c(n) = \frac{1}{n} \left[x \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[0 - \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right] = -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin 0 = 0 \\ \sin n\pi = 0 \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} \left[\cos n\pi - \cos 0 \right]$$

ولكن: $\cos 0 = 1$ ، $\cos n\pi = (-1)^n$ [من التحليل المركب]

$$\therefore f_c(n) = \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1]$$

ثالثاً: تحويل فورييه المركب (Complex Fourier Transform)

تعريف: يعرف تحويل فورييه المركب للدالة $F(x)$ حيث $-\infty < x < \infty$ بالعلاقة:

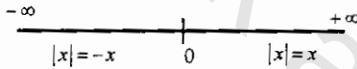
$$f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx} dx \quad (1)$$

حيث e^{inx} هي قلب أو نواة (Kernel) التحويل. ويعرف تحويل فورييه المركب العكسي بالعلاقة:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-inx} dn \quad (2)$$

أمثلة محلولة:

مثال(1): أوجد تحويل فورييه المركب للدالة $F(x) = e^{-|x|}$



الحل:

معنى $|x|$ في المنطقة من $(-\infty)$ إلى $(+\infty)$:

$$\begin{aligned} |x| &= -x & (-\infty \rightarrow 0) \\ |x| &= x & (0 \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (x \geq 0) \\ e^{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

تسمى $|x|$ عادة بدالة المقياس.

ومن التعريف فإن تحويل فورييه المركب للدالة $F(x)$ هو:

$$\begin{aligned} f(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{inx} dx = \int_{-\infty}^0 e^{+x} \cdot e^{inx} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{inx} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1+in)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(1-in)x} dx = - \int_0^{-\infty} e^{(1+in)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(1-in)x} dx \\ &= - \left[\frac{e^{(1+in)x}}{1+in} \right]_0^{-\infty} + \left[\frac{e^{-(1-in)x}}{-(1-in)} \right]_0^{\infty} \\ &= - \frac{1}{1+in} [e^{-\infty} - e^0] - \frac{1}{1-in} [e^{-\infty} - e^0] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{1+in}[0-1] - \frac{1}{1-in}[0-1] = \frac{1}{1+in} + \frac{1}{1-in}$$

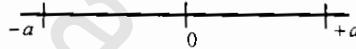
$$= \frac{(1-in) + (1+in)}{(1+in)(1-in)} = \frac{2}{(1+n^2)}$$

حيث $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $e^{-\infty} = 0$, $e^0 = 1$, $e^{\infty} = \infty$ وهو المطلوب.

مثال (2): أوجد تحويل فورييه المركب للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

الحل: معنى أن $|x| \leq a$ ، $|x| > a$ هو الفترة $-a \leq x \leq a$



إذا التكامل في المسألة سوف يكون في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ للدالة $f(x) = 1-x^2$

$$f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{inx} dx$$

ومن تعريف تحويل فورييه المركب:

وفي المسألة:

$$f(n) = \int_{-1}^1 (1-x^2) e^{inx} dx \quad (1)$$

ولإيجاد التكامل في (1): نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ

$$\therefore du = -2x dx \quad \leftarrow 1-x^2 = u$$

نضع:

$$\therefore v = \frac{e^{inx}}{in} \quad \leftarrow e^{inx} dx = dv$$

ونضع:

$$f(n) = \left[(1-x^2) \cdot \frac{e^{inx}}{in} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{e^{inx}}{in} (-2x dx)$$

$$= [0] + \frac{2}{in} \int_{-1}^1 x e^{inx} dx \quad (2)$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x e^{inx} dx &= \left[x \cdot \frac{e^{inx}}{in} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{e^{inx}}{in} dx = \frac{1}{in} [e^{in} - (-e^{-in})] - \frac{1}{in} \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{in} [e^{in} + e^{-in}] + \frac{1}{n^2} [e^{in} - e^{-in}] \end{aligned} \quad (3)$$

وذلك بوضع:

$$x = u \rightarrow dx = du$$

$$e^{inx} dx = dv \rightarrow v = \frac{e^{inx}}{in}$$

وباستخدام معادلتَي أويلر [في التحليل المركب]:

$$\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x, \quad \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = i \sin x$$

فتصبح (3):

$$\int_{-1}^1 x e^{inx} dx = \frac{2 \cos n}{in} + \frac{2i \sin n}{n^2} \quad (4)$$

بالتعويض في (2):

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{2}{in} \left[\frac{2 \cos n}{in} + \frac{2i \sin n}{n^2} \right] \\ &= -\frac{4 \cos n}{n^2} + \frac{4 \sin n}{n^3} = \frac{4}{n^3} [\sin n - n \cos n] \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

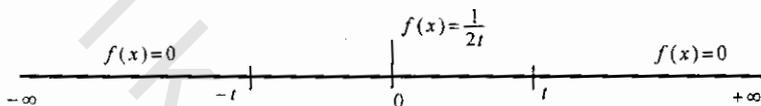
مثال (3): أوجد تحويل فورييه للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2t} & |x| \leq t \\ 0 & |x| > t \end{cases}, \quad t > 0$$

ثم أوجد النهاية التي يؤول إليها هذا التحويل عندما $t \rightarrow 0$.

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2t} & -t \leq x \leq t \\ 0 & x > t \text{ or } x < -t \end{cases}$$



تحويل فورييه المركب للدالة $f(x)$ هو:

$$\begin{aligned} f(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{inx} dx = \int_{-t}^t \left(\frac{1}{2t}\right) e^{inx} dx \\ &= \frac{1}{2t} \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_{-t}^t = \frac{1}{2t} \frac{1}{in} [e^{int} - e^{-int}] = \frac{1}{2t} \frac{1}{in} [2i \sin nt] = \frac{\sin nt}{nt} \end{aligned}$$

عندما $n = 0$ فإن

$$f(n)|_{n=0} = f(0) = \int_{-t}^t \left(\frac{1}{2t}\right) dx = \frac{1}{2t} [x]_{-t}^t = \frac{1}{2t} [2t] = 1$$

وهو تحويل فورييه للدالة المعطاه عندما $n = 0$. ويصبح تحويل فورييه للدالة المعطاه بالصورة:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{\sin nt}{nt}, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

عندما $t \rightarrow 0$: فإن نهاية التحويل $f(n)$ تكون:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin nt}{nt} = 1$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: من قوانين النهايات [في حساب التفاضل]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

مثال (4):

(أ) أثبت أن تحويل فوررييه المركب للدالة:

$$f(n) = \frac{2 \sin na}{n} \text{ وهو } F(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

(ب) باستخدام تحويل فوررييه العكسي المركب للدالة $f(n)$ ، أثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} [\sin na \cos nx] dn = \begin{cases} \pi & (|x| \leq a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

(ج) استخدم النتيجة في (ب) لإثبات التكامل:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

ملحوظة: هذا المثال يوضح استخدام تحويلات فوررييه لإيجاد التكاملات.

الحل: الجزء (أ): تحويل فوررييه المركب للدالة $F(x)$ هو:

$$f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx} dx$$

وحيث أن $F(x) = 1$ في الفترة $-a \leq x \leq a$

$$\therefore f(n) = \int_{-a}^a (1) e^{inx} dx = \int_{-a}^a e^{inx} dx = \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_{-a}^a = \frac{1}{in} [e^{ina} - e^{-ina}]$$

$$\therefore e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \leftarrow i \sin x = \frac{1}{2} [e^{ix} - e^{-ix}]$$

$$\therefore f(n) = \frac{1}{in} [2i \sin na] = \frac{2 \sin na}{n}$$

وهو المطلوب أولاً.

الجزء (ب): تحويل فورييه العكسي المركب للدالة $f(n) = \frac{2 \sin na}{n}$ هو [من التعريف]

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-inx} dn = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2 \sin na}{n} \right] e^{-inx} dn \quad (1)$$

ومن معادلتى أويلر فإن:

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$$

$$\therefore F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin na}{n} \right] [\cos nx - i \sin nx] dn$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin na \cos nx dn - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n} dn$$

ولكن: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n} dn = 0$ [لأنه تكامل دالة فردية من $-\infty$ إلى $+\infty$]

$$\therefore F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin na \cos nx dn$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin na \cos nx dn = \pi F(x)$$

ولكن:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin na \cos nx dn = \begin{cases} \pi & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

وهو المطلوب ثانياً.

الجزء (ج): بأخذ $x=0, a=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \, dn = \pi$$

ولكن $(\sin n)$ دالة زوجية حيث: (للدالة) $= 2 \int_0^{\infty}$ (دالة زوجية)

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \, dn = \int_0^{\infty} \frac{\sin n}{n} \, dn = \pi$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin n}{n} \, dn = \frac{\pi}{2}$$

وبأخذ $n=x$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب ثالثاً.

متطابقة بارسيفال لتحويلات فورييه Parseval's Identity

تنص متطابقة بارسيفال لتحويلات فورييه على الآتي:

إذا كان $f(n)$ هو تحويل فورييه للدالة $F(x)$ حيث:

$$f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx} \, dx, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-inx} \, dn$$

فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 \, dn$$

مثال: إذا كان تحويل فورييه للدالة $F(x)$ ، حيث:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

يعطي بالعلاقة: $f(n) = \frac{2 \sin na}{n}$ ، $n \neq 0$ [سبق إثباتها].

فاستخدم متطابقة بارسيفال لإثبات أن:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

الحل: من مطابقة بارسيفال:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 dn \quad (2)$$

وبالتعويض عن:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$f(n) = \frac{2 \sin na}{n} \quad \text{و عن } -a \leq x \leq a \text{ في المنطقة } F(x) = 1 \text{ أي أن}$$

$$\therefore \int_{-a}^a (1)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2 na}{n^2} dn$$

$$\therefore [x]_{-a}^a = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{4 \sin^2 na}{n^2} dn$$

$$\therefore 2a = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} dn$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} dn = \frac{\pi a}{2} \quad (2)$$

$$n^2 = \frac{x^2}{a^2}, \quad dn = \frac{dx}{a} \leftarrow n = \frac{x}{a} \leftarrow x = na \text{ وبوضع}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2/a^2} \frac{dx}{a} = \frac{\pi a}{2} \rightarrow \int_0^{\infty} a^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{dx}{a} = \frac{\pi a}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب.

إيجاد بعض التكاملات باستخدام تحويلات فورييه:

مثال: أوجد تحويلات فورييه للجيب وجيب التمام للدالة $F(x) = e^{-ax}$ ومن ذلك أوجد قيمة التكاملين:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{a^2 + n^2} dn, \quad \int_0^{\infty} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2} dn$$

الحل: تحويل فورييه لجيب التمام للدالة e^{-ax} :

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos nx \, dx \quad (1)$$

تحويل فورييه للجيب للدالة e^{-ax} :

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin nx \, dx \quad (2)$$

بإجراء التكامل بالتجزئ للعلاقة (1) نحصل على:

$$I_1 = \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \cos nx \right]_0^{\infty} - \frac{n}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin nx \, dx = \left[\frac{1}{a} \right] - \frac{n}{a} [I_2] = \frac{1}{a} - \frac{n}{a} I_2 \quad (3)$$

وبالمثل بعد إجراء التكامل بالتجزئ للعلاقة (2) نحصل على:

$$I_2 = \frac{n}{a} I_1 \quad (4)$$

من (3), (4) نجد أن:

$$I_1 = \frac{1}{a} - \frac{n}{a} \left[\frac{n}{a} I_1 \right] = \frac{1}{a} - \frac{n^2}{a^2} I_1 \rightarrow I_1 \left(1 + \frac{n^2}{a^2} \right) = \frac{1}{a}$$

$$\therefore I_1 \left(\frac{a^2 + n^2}{a^2} \right) = \frac{1}{a} \rightarrow I_1 = \frac{a}{a^2 + n^2} \quad (5)$$

وبالتعويض في (4):

$$I_2 = \frac{n}{a} \left[\frac{a}{a^2 + n^2} \right] = \frac{n}{a^2 + n^2} \quad (6)$$

وباعتبار الدالة $F(x) = e^{-ax}$ حيث تحويل فورييه الجيبي لها هو:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin nx \, dx = I_2 = \frac{n}{a^2 + n^2} \quad (7)$$

وتحويل فورييه لجيب التمام لها هو:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos nx \, dx = I_1 = \frac{a}{a^2 + n^2} \quad (8)$$

ويكون تحويل فورييه العكسي للعلاقتين (7), (8) هو:

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \, dn$$

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} \cos nx \, dn$$

وهذا يؤدي إلى التكاملين:

$$\int_0^{\infty} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2} \, dn = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{a^2 + n^2} \, dn = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

(وقد سبق إيجاد هذين التكاملين في أمثلة سابقة).

خاصية الالتفاف أو الطي (Convolution) لتحويلات فورييه:

[1] تعريف الالتفاف: إذا كان لدينا الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ القابلتين للتكامل في

الفترة $(-\infty < x < +\infty)$ وكان تحويل فورييه لهما هو: $F_1(s), F_2(s)$.

يعرف التفاف الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ بالعلاقة:

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s) F_2(x-s) ds$$

لكل قيم x التي يكون فيها قيمة لهذا التكامل، ويلاحظ أن:

$$F_1(x) * F_2(x) = F_2(x) * F_1(x)$$

[2] نظرية الالتفاف لتحويل فورييه: تنص هذه النظرية على الآتي:

" تحويل فورييه لالتفاف الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ يساوي حاصل ضرب تحويل

فورييه لهما. "

رياضياً: إذا كان $F(s)$ هو تحويل فورييه لالتفاف الدالتين $F_1(x), F_2(x)$ أي

للدالة $F(x)$ وكان حاصل ضرب تحويل فورييه للدالتين هو $F_1(n) \cdot F_2(n)$ ،

فإن:

$$F(s) = F_1(n) \cdot F_2(n)$$

الإثبات: من تعريف تحويل فورييه المركب للدالة $F(x)$ التي هي إلتفاف

الدالتين $F_1(x), F_2(x)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{inx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{inx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(s) F_2(x-s) ds \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-s) e^{inx} dx \right] ds \end{aligned}$$

وبوضع $x-s = u$ ، فإن $x = u + s$ ← $dx = du$

$$\begin{aligned} \therefore F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(u) e^{in(u+s)} du \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(s) e^{ins} ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_2(u) e^{inu} du = F_1(n) \cdot F_2(n) \end{aligned}$$

أي أن: تحويل فورييه لالتفاف دالتين يساوي حاصل ضرب تحويل فورييه لهما.

مثال: إذا كانت الدالة $F(t)$ تعرف بالعلاقة الآتية:

$$F(t) = \begin{cases} f(t)e^{-xt}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

أثبت أن تحويل فورييه (المركبة) للدالة $F(t)$ تساوي تحويل لابلاس للدالة $f(t)$.

الحل: إذا كانت تحويل فورييه المركبة للدالة $F(t)$ هي $F(n)$ حيث:

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{int} F(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{int} (0) dt + \int_0^{\infty} e^{int} (e^{-xt}) f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(x-in)t} f(t) dt \end{aligned}$$

وبوضع $x - in = s$ ، فإن:

$$F(n) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = L[f(t)]$$

حيث $L[f(t)]$ هي تحويل لابلاس للدالة $f(t)$.

أي أن تحويل فورييه للدالة $F(t) = f(t)e^{-xt}$ تساوي تحويل لابلاس للدالة $f(t)$.

وهو المطلوب.

مسائل

(1) باستخدام العلاقة $f_s(n) = \int_0^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$ لتحويل فورييه المحدودة

للجيب، أوجد هذا التحويل للدوال الآتية:

(أ) $F(x) = e^{ax}$: الإجابة $f_s = \frac{n}{a^2 + n^2} [1 + (-1)^n e^{a\pi}]$

(ب) $F(x) = \cos ax$: الإجابة $f_s = \frac{n}{a^2 + n^2} [1 - (-1)^n \cos a\pi]$

(2) باستخدام العلاقة $f_s(n) = \int_0^{\infty} F(x) \sin nx \, dx$ لتحويل فورييه اللانهائي للجيب

أوجد هذا التحويل للدالة: $F(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

: الإجابة $f_s = \sqrt{\frac{\pi}{2}} n e^{-\frac{n^2}{2}}$

(3) باستخدام العلاقة $f_c(n) = \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx$ لتحويل جيب التمام المحدود

لفورييه، أوجد هذا التحويل للدوال الآتية:

(أ) $F(x) = e^{ax}$: الإجابة $f_c = \frac{a}{a^2 + n^2} [(-1)^n e^{a\pi} - 1]$

(ب) $F(x) = \sin ax$: الإجابة $f_c = \frac{n}{a^2 - n^2} [(-1)^n \cos a\pi - 1]$

(4) باستخدام العلاقة $f_c(n) = \int_0^{\infty} F(x) \cos nx \, dx$ لتحويل جيب التمام اللانهائي

لفورييه، أوجد هذا التحويل للدوال:

(أ) $F(x) = e^{-x}$: الإجابة $f_c = \frac{1}{1 + n^2}$

(ب) $F(x) = e^{-x^2}$: الإجابة $f_c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n^2}{4}}$

(5) باستخدام العلاقة $f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{inx} dx$ ، لتحويل فورييه المركب، أوجد

هذا التحويل للدوال:

$$f(n) = \frac{1}{|n|} \quad \text{الإجابة:} \quad , F(x) = \frac{1}{|x|} \quad (\text{أ})$$

(ب) $F(x) = e^{-inx}$ حيث $a < x < b$ الإجابة:

$$f(n) = \frac{i}{n} [e^{ia(w+n)} - e^{ib(w+n)}]$$