الباب الخامس

المتتابعات والمتسلسلات اللا نهائية

Infinite Sequences and Series

أولا : المتتابعات Sequences

تعريف:

تعرف المتتابعة اللانهائية (infinite sequence) بأنها مجموعة من الأرقام $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ في ترتيب معين، وتعرف الأرقام $a_1, a_2, \ldots$ بأنها حدود (terms) المتتابعة، كما يسمى a_n بالحد النوني، كما يعرف n بدليل (index) الحد a_n، ويرمز للمتتابعة عادة بالرمز $\{a_n\}$. ويمكن اعتبار المتتابعة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ كدالة ترسل (1) إلى (a_1)، (2) إلى (a_2)، (3) إلى (a_3)، وبوجه عام ترسل العدد الموجب (n) إلى الحد النوني (a_n).

التعبير عن السلوك العام لمتتابعه بصورة رياضية:

يمكن التعبير عن السلوك العام (أو وصف) المتتابعة بصورة رياضية كما في الأمثلة التالية:

مثال (1): المتتابعة: $\{a_n\} = 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$

هذه المتتابعة ترسل العدد 1 إلى $a_1 = 2$، 2 إلى $a_2 = 4$ وهكذا ويكون الوصف (او السلوك) العام للمتتابعة بالصورة: $\boxed{a_n = 2n}$ حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$.

مثال (2): المتتابعة: $\{a_n\} = 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

هذه المتتابعة ترسل العدد 1 إلى $a_1 = 1$، 2 إلى $a_2 = 4$ و 3 إلى $a_3 = 9$ وهكذا ويكون الوصف (أو السلوك) العام للمتتابعة بالصورة: $a_n = n^2$.

مثال (٣): المتتابعة: $\{a_n\} = 12, 14, 16, 18, \ldots, (10 + 2n), \ldots$

هذه المتتابعة ترسل العدد 1 إلى $a_1 = 12$، والعدد 2 إلى $a_2 = 14$ و 3 إلى $a_3 = 16$ وهكذا ويكون الوصف (أو السلوك) العام للمتتابعة بالصورة: $a_n = 10 + 2n$.

ملحوظة على مثال (٣):

يمكن أيضا وصف هذه المتتابعة بصورة أخرى هى : $b_n = 2n$ حيث الدليل n يبدأ من العدد 6 ويزيد على التوالى.

ويلاحظ أن تلك المتسلسلة تبدأ بالحد a_1 [حيث $a_n = 10 + 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$] أو بالحد b_6 [حيث $b_n = 2n$, $n = 6, 7, 8, \ldots$].

مثال (٤): المتتابعة: $\{a_n\} = -1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n n, \ldots$

ذات الحدود السالبة فالموجبة فالسالبة وهكذا، يمكن وصفها بالصورة $\{a_n\} = (-1)^n n$

حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$

مسألة : أوجد علاقة للحد النونى (a_n) للمتتابعات التالية حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ $\qquad a_n = \frac{n}{n+1}$

(3) $-2, 1, \frac{-2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{5}, \ldots$ $\qquad a_n = (-1)^n\left(\frac{2}{n}\right)$

(4) $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$ $\qquad a_n = (-1)^{n+1} n^2$

(5) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ $\qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

(6) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$ $\qquad a_n = \frac{n+2}{n+1}$

(7) 1, 5, 9, 13, 17, $\qquad a_n = 4n - 3$

(8) 2, 6, 10, 14, 18, $\qquad a_n = 4n - 2$

(9) 1, -1, 1, -1, 1-1, $\qquad a_n = (-1)^{n+1}$

(10) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$ $\qquad a_n = \frac{n-1}{n}$

ملحوظة: بعض المراجع تطلق على المتتابعات اسم (المتواليات) فلزم التنويه.

العمليات الجبرية على المتتابعات:

إذا كانت $\{a_n\}, \{b_n\}$ متتابعتان فإن:

(i) $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

(ii) $k\{a_n\} = \{ka_n\}$ حيث k ثابت

(iii) $\{a_n\}\{b_n\} = \{a_nb_n\}$

(iv) $\{a_n\} \div \{b_n\} = \{a_n/b_n\}$

مثال: اذا كانت $\{a_n\} = 2n + 1, \{b_n\} = 2n - 1$ فأوجد:

$\{a_n\} + \{b_n\}, 2\{a_n\}, \{a_n\}\{b_n\}. \{a_n\} \div \{b_n\}$

الحل:

$\{a_n\} = 3, 5, 7, ... 2n + 1, ..., \{b_n\} = 1, 3, 5, ..., 2n\text{-}1, ...$

$\therefore \{a_n\} + \{b_n\} = \{an\text{+}1 + 2n\text{-}1\} = 4n = \{4, 8, 12, ..., 4n,...\}$

$2\{a_n\} = 2\{n + 1\} = \{4n + 2\} = \{6,10,14,..., 4n + 2,...\}$

$\{a_n\}\{b_n\} = \{(2n + 1)(2n - 1)\} = \{4n^2\text{-}1\} = \{3,15,35,...,$
$4n^2\text{-}1,...\}$

$$\{a_n\} \div \{b_n\} = \left\{\frac{2n+1}{2n-1}\right\} = \left\{3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, ..., \frac{2n+1}{2n-1}, ...\right\}$$

التقارب و التباعد Convergence and Divergence:

لإيجاد تقارب متتابعة أى وصول حدودها إلى قيمة معينة كلما زادت قيمة n نلاحظ الآتى:

(i) المتتابعة $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ تقترب حدودها من الصفر مع زيادة قيمة n، فيقال أنها متقاربة.

(ii) المتتابعة $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,1-\frac{1}{n},\ldots\right\}$ يقترب حدها النونى شيئا فشيئا من الواحد (1) كلما زادت n، فيقال أنها متقاربة.

(iii) المتتابعة $\left\{0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n+(-1)^n}{n},\ldots\right\}$ يقترب حدها النونى شيئا فشيئا من العدد (1) كلما زادت n، فيقال أنها متقاربة.

(iv) المتتابعة $\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{n},\ldots\right\}$ كلما زادت n فإن حدودها تصبح اكبر من أى عدد ويقال حينئذ أنها متباعدة.

(v) المتتابعة $\{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ تتذبذب حدودها بين العددين (1)، (-1) ولكنها لا تقترب من قيمة محددة (مفردة) ولذلك فهى متباعدة.

حساب نهايات المتتابعات Calculating Limits of Sequences:

سوف نضع هنا نظريات عامة لحساب نهايات المتتابعات.

نظرية (1): $\boxed{\text{جبر النهايات:}}$

إذا كانت: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ فإن:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B} \qquad (4)\ \lim_{n\to\infty}(kb_n)=kB$$

مع ملاحظة أن: $\lim_{n\to\infty}k=k$، $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$، حيث k ثابت.

<u>مثال:</u> أوجد النهايات الآتية:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=(-1).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)(0)=(0)$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}\right)=5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)=5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)x\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=5(0).(0)=(0)$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}(1)-\left(\frac{1}{n}\right)=1-0=1$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^6}-7}{1+\frac{3}{n^6}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{4}{n^6}-7)}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n^6})}=\frac{0-7}{1+0}=-7$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^2})=\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}=3+0-0=3$$

$$(6)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-7}{2n^2+5n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim(3+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^2})}{\lim(2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2})}=\frac{3}{2}$$

<u>نظرية (2): نظرية الساندويتش (Sandwich Theorem)</u>

إذا كانت: $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$، متتابعات لأعداد حقيقية، وكانت $a_n \le b_n \le c_n$ تتحقق لكل n فوق عدد N، وكان: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$ فإن: $\lim_{n\to\infty}b_n=L$ أيضا.

<u>نتيجة:</u> أذا كانت $|b_n|\le c_n$ وكانت $c_n\to 0$ فإن $b_n\to 0$ [لأن: $-c_n\le b_n\le c_n$]

مثال: طبق نظرية السندوتش، باعتبار أن $\frac{1}{n} \to 0$، بين أن:

$$\text{(i)} \quad \frac{\cos n}{n} \to 0 \longrightarrow -\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n} \quad \text{:لأن}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{2^n} \to 0 \longrightarrow 0 \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n} \quad \text{:لأن}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{(-1)^n}{n} \to 0 \longrightarrow -\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n} \quad \text{:لأن}$$

نظرية (3): نظرية الدالة المتصلة لمتتابعة

Continuous function theorem for sequences

إذا كانت: $\{a_n\}$ متتابعة وكان $a_n \to L$ وكانت f دالة متصلة عند L ومعرفة لكل قيم a_n

فإن: $\boxed{f(a_n) \to f(L)}$.

مثال (1): طبق نظرية (3) الإثبات أن: $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$

الحل: نعلم أن: $\frac{n+1}{n} \to 1$ فبأخذ $L = 1,\ f(x)\sqrt{x}$ فى نظرية (3) فإن:

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$$

مثال (2): طبق نظرية السندوتش لإثبات أن المتتابعة $\{2^{1/n}\}$ تتقارب إلى 1.

الحل: المطلوب إثبات أن: $2^{1/n} \to 1$، فحيث أن: $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ فبأخذ $a_n = \frac{1}{n}$،

$f(x) = 2^x$، $L=0$ فى نظرية الساندويتس، نرى أن:

$$2^{1/n} = f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(L) = 2^0 = 1$$

نظرية (٤): استخدام قاعدة لوبيتال Using L`Hopital`s rule

إذا كانت: $f(x)$ دالة معرفة لكل قيم $x \geq n_0$، وكانت $\{a_n\}$ متتابعة للأعداد الحقيقية

بحيث أن: $a_n = f(n)$ لكل $n \geq n_0$ فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ملحوظة: تطبق قاعدة لوبيتال للصور غير المعينة (indeterminate forms) مثل

$\frac{0}{0}$ و $(\frac{\infty}{\infty})$ وغيرها

ففى حالة الصورة $\frac{0}{0}$

إذا كانت $f(a) = g(a) = 0$ فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f`(x)}{g`(x)}$

فمثلا: $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x - \sin x}{x}}_{0/0} = \left.\frac{3 - \cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$

ويمكن تكرار عملية التفاضل حتى تختفى الصورة $\frac{0}{0}$

فمثلا: $$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{x - \sin x}{x^3}}_{0/0} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{3x^3}}_{0/0} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{6x}}_{0/0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

وبالنسبة للصور الأخرى مثل (∞/∞) أو $(\infty.0)$ أو $(\infty - \infty)$ أو (1^{∞}) فيجب

تحويلها أولا إلى الصورة $\frac{0}{0}$ وتطبيق قاعدة لوبيتال عليها.

مثال (١): طبق قاعدة لوبيتال لإثبات أن: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

الحل:

بالتعويض مع اعتبار أن $\ln \infty = \infty$ فان $\frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty}$ فنطبق قاعدة لوبيتال كما فى

حالة الصورة $\frac{0}{0}$ وذلك بتفاضل البسط والمقام بالنسبة إلى n:

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\div\lim_{n\to\infty}1=0\div 1=\frac{0}{1}=0$$

<u>مثال (٢):</u> طبق قاعدة لوبيتال لإيجاد النهاية : $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5n}$

<u>الحل:</u>

بالتعويض مع اعتبار أن $a^{\infty}=\infty$ فإن $\frac{2^n}{5n}=\frac{\infty}{\infty}$ فنطبق قاعدة لوبيتال وذلك بالتفاضل بسطا ومقاما بالنسبة إلى n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n.\ln 2}{5}=\frac{\ln 2}{5}\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$$

حيث : $\frac{dx}{dx}(a^x)=a^x.\ln a$

<u>مثال (٣):</u> هل المتتابعة التى حدها النونى $a_n=\frac{n}{2^n}$ متقاربة، وإذا كانت كذلك فاوجد $\lim_{n\to\infty}a_n$

<u>الحل:</u>

المطلوب فى هذا المثال استخدام قاعدة لوبيتال لإثبات هل المتتابعة $a_n=\frac{n}{2^n}$ متقاربة أم لا، وإذا كانت كذلك فالمطلوب إيجاد $\lim_{n\to\infty}a_n$، ولحل المثال:

بالتعويض نجد أن: $\frac{\infty}{\infty}=\frac{n}{2n}$ فنطبق قاعدة لوبيتال بالتفاضل بسطا ومقاما بالنسبة إلى n.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n.\ln n}=\frac{1}{\infty}=0$$

المتتابعة متقاربة ونهايتها تساوى صفرا.

مثال (4): طبق قاعدة لوبيتال لإيجاد: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^3}$

الحل:

بالتعويض نجد أن $\frac{3^n}{n^3}=\frac{\infty}{\infty}$ فنطبق قاعدة لوبيتال بالتفاضل بسطا ومقاما بالنسبة إلى n فإذا كانت النتيجة مازالت $\frac{\infty}{\infty}$ فتفاضل البسط والمقام مرة أخرى حتى تختفى الصورة $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^3}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\ln 3}{3n^2}}_{\infty/\infty}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(\ln 3)^2}{6n}}_{\infty/\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(\ln 3)^3}{6}=\infty$$

$\therefore$ المتتابعة متباعدة (diverges) وتصل إلى ∞.

نظرية (5): نهايات شائعة (Commonly occurring limits)

النهايات الثمان الآتية لمتتابعات متقاربة تستخدم كثيرا فى حل المسائل، وهى:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=\infty$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}x^{1/n}=1 \quad (x>0)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0 \quad (|x|<1)$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$ [تعريف e^x] (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

مثال: طبق نظرية (5) لإثبات النهايات الآتية:

(1) $\frac{\ln(n^2)}{n}\to 0:\quad \frac{\ln(n^2)}{n}=\frac{2\ln n}{n}\to 2.(0)=0$ [باستخدام (2)]

(2) $\sqrt[n]{n^2}\to 1:\quad \sqrt[n]{n^2}=n^{2/n}=(n^{1/n})^2\to(1)^2=1$ [باستخدام (3)]

(3) $\sqrt[n]{3n} \to 1$: [يأخذ x=3 فى (3)]

$\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n} n^{1/n}) \to (1)(1) = 1$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ [يأخذ x=-½ فى (5)]

(5) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$:

$\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ [يأخذ x=-2 فى (7)]

التعريفات التكرارية (Recursive Definition)

يمكن الحصول على ما يسمى بالعلاقات التكرارية (Recursion formula) التى تعطى أى حد فى المتتابعة من الحد الذى قبله، وكأمثلة على ذلك:

(1) المتتابعة ....,n,.....,1,2,3 لها $a_1=1$, $a_2=a_1+1$, $a_3=a_2+1=3$

وهكذا بحيث أن: $a_n = a_{n-1} + 1$

(2) المتتابعة ....,!n,.....,1,2,6,24

لها $a_1=1$, $a_2=2.a_1=2$, $a_3=3.a_2=6$, $a_4=4.a_3=24$

وهكذا بحيث أن: $a_n = n.a_{n-1}$

(3) المتتابعة ....,1,2,3,5

لها $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1+1=2$, $a_4=2+1=3$, $a_3=3+2=5$

وهكذا بحيث أن: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

وتعرف العلاقات التى حصلنا عليها بين a_n و a_{n-1} بالعلاقات التكرارية.

مسائل محلولة
Solved Problems

Problem (1):

Applying L`Hopital Rule to show that the sequence whose n th term is $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ is convergent, so find $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Solution:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n \quad at\ n \to \infty \text{ then } a_n = \left(\frac{1+0}{1-0}\right)^\infty = 1^\infty$$

وهى إحدى الصور الغير المعينة فنطبق عليها قاعدة لوبيتال بأن نحولها أولا إلى الصورة $(\infty.0)$ وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لـ a_n حيث:

$$\ln a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[n\ \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right] \qquad (\infty.0)$$ وهى الصورة

وذلك لأن نهاية $\ln\dfrac{n+1}{n-1}$ عندما $n \to \infty$ تساوى صفرا

وللتعامل مع هذه الصورة نحولها إلى الصورة $\dfrac{0}{0}$ حتى يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال عليها كالاتى:

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n\ \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2}{n^2-1}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n^2}{(n^2-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

$$\frac{d}{dn}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{-2}{n^2-1}$$

$\therefore \ln a_2 = 2 \qquad \therefore a_n = e^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = e^2$

أى أن المتتابعة $\{a_n\} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ تقاربية (متقاربة) وتتقارب إلى القيمة e^2 عندما $n \to \infty$

وهو المطلوب.

<u>Problem (2):</u>

Which of the following sequences converge and which diverge, and find the limit of each convergent sequence.

المطلوب معرفة أى المتتابعات التالية متقاربة وأيهما متباعدة وإيجاد نهاية المتقاربة منها.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 \to$ converges (متقاربة)

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{1+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{\frac{1}{n}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{2} = -1 \to$ converges

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n-1)}{n-1} =$

$= \lim_{n\to\infty}(n-1) = \infty \to$ diverges (متباعدة)

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)(1)=\frac{1}{2}\to \text{converges}$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2=(1)^2=1\to \text{converges}$$

$$(6)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\ln n}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}}=\frac{\infty}{1}=\infty\to \text{diverges}$$

$$(7)\ \lim_{n\to\infty}[\ln n-\ln(n+1)]-\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n}{n+1}=\ln(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1})$$

$$=\ln(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\frac{1}{n}})=\ln 1=0\to \text{converges}$$

$$(8)\ \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\ln e=1\to \text{converges}$$

حيث (من تعريف العدد e): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

ثانيا : المتسلسلات اللانهائية | Infinite Series

تعريف (١):

تعرف المتسلسلة اللانهائية (infinite series) بأنها مجموعة متتابعة لا نهائية، فإذا كانت $\{a_n\}$ هى المتتابعة اللانهائية : $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ فان المتسلسلة اللانهائية المناظرة تكون:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ملحوظة:

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة منتهية (finite) تتكون من n حدا فان مجموع حدودها، أى:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + \ldots = \sum_{r=1}^{n} a_r$$

يسمى متسلسلة منتهية أو محدودة (finite series) مكونه من n من الحدود، ويسمى a_n بالحد النونى (n th term) للمتسلسلة.

تعريف (٢):

تعرف متتابعة المجاميع الجزئية (sequence of partial sums) لمتسلسلة بأنها المتتابعة $\{S_n\}$ المعرفة كالاتى:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

ويسمى العدد s_n بالمجموع الجزئى النونى (n th partial sum).

تعريف (٣):

يقال للمتسلسلة اللانهائية أنها تقاربية أو متقاربة (converges) وأن مجموعهما هو العدد L إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية لها $\{S_n\}$ تقاربية ونهايتها هى L، وفى هذه الحالة نكتب:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

أما إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية متباعدة (غير تقاربيه) فإن المتسلسلة تكون: متسلسلة تباعدية أو متبعدة (diverges).

أمثلة:

مثال (1): المتتابعة:
$$\{a_n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots \frac{1}{2^n}, \cdots$$

يشكل مجموعها المتسلسلة اللانهائية:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

ومتتابعة المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة هى $\{S_n\}$ حيث:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{2},\ s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}, \cdots$$

مثال (2): المتتابعة:

$$\{a_n\} = \frac{1}{1\times 2}, \frac{1}{2\times 3}, \frac{1}{3\times 4}, \frac{1}{4\times 5}, \cdots, \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

يشكل مجموعها المتسلسلة اللانهائية:

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ومتتابعة المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة هى $\{S_n\}$ حيث:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1\times 2},\ s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4}, \cdots\cdots$$

يشكل مجموعها المتسلسلة اللانهائية:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

ومتتابعة المجاميع الجزئية لها هى $\{s_n\}$ حيث:

$$s_1=a_1=1$$

$$s_2=a_1+a_2=1+\frac{1}{2}$$

$$s_3=a_1+a_2+a_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},.....$$

أمثلة محلولة

Solved Examples

Example (1): Prove that the infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ is converges and find its sum (مجموعها)

Solution:

نكتب: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

فتصبح المتسلسلة بالصورة:

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots\cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) + \cdots\cdots$$

وتكون متتابعة المجاميع الجزئية بالصورة $\{S_n\}$ حيث:

$$s_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2},$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3} \cdots, \cdots$$

$$s_n = a_1 + \cdots a_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

توجد نهاية S_n عندما $n\to\infty$ فإذا كانت هذه النهاية $=L$ فيكون L هذا هو مجموع المتسلسلة المعطاة [التعريف 3].

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

$\therefore$ متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}$ تقاربية ونهايتها = 1 فتكون المتسلسلة المعطاة تقاربية ومجموعها يساوى 1. وهو المطلوب.

Example (2): Find a formula for the nth partial sum of the series:
$\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+.....+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+.....$, and use it to find the series sum if the series converges.

Solution:

نكتب $$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

فتصبح المتسلسلة بالصورة الآتية:

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+\cdots$$

وتكون المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ بالصورة:

$$s_1=a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ s_2=a_1+a_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\cdots$$

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

نوجد نهاية S_n عندما $n\to\infty$ فإذا كانت هذه النهاية $=L$ فيكون L هذا هو مجموع المتسلسلة:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\infty}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

∴ متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ تقاربية ونهايتهما = ½ فتكون المتسلسلة المعطاة تقاربية ومجموعها = ½ وهو المطلوب.

<u>Example (3):</u> Find the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$

<u>Solution:</u>

المتسلسلة المعطاة صورتها:

$$(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})+\cdots$$

وتكون متتابعة المجاميع الجزئية بالصورة:

$$s_1=a_1=1-\frac{1}{\sqrt{2}},\ s_2=a_1+a_2=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})=1-\frac{1}{\sqrt{3}},\cdots$$

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+\ldots.+$$

$$(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

نوجد نهاية $\{s_n\}$ عندما $n\to\infty$ فإذا كانت هذه النهاية =L فيكون L هذا هو مجموع المتسلسلة.

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\infty}=1-0=1$$

∴ المتتابعة تقاربية ونهايتها = 1 فتكون المتسلسلة المعطاة تقاربية ومجموعها = 1.

وهو المطلوب.

<u>ملحوظة هامة:</u>

تسمى المتسلسلات فى مثال (1)، (2)، (3) بالمتسلسلات التلسكوبية telescopic series ومن أمثلتها أيضا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)(2n+1)},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+3)},\ldots\ldots$$

المتسلسلات الهندسية Geometric series:

تعريف (١):

تعرف المتسلسلة الهندسية بأنها المتسلسلة التى صورتها:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

حيث $a, \quad r$ عددان ثابتان، يسمى a أساس (Base) المتسلسلة، ويسمى r النسبة العامة (general ratio).

تعريف (٢):

يمكن كتابة المتسلسلة الهندسية أيضا بالصورة: $(\sum_{n=0}^{\infty} ar^n)$

إذا بدأنا بالقيمة $n = o$ (وليس $n = 1$).

تعريف (٣):

العلاقة التكرارية [بين كل حد والذى قبله] هى:

$$a_{n+1} = a_n r \quad , \quad a_1 = a$$

بمعنى أن :

$$a_1 = a, a_2 = a_1 r = ar, a_3 = a_2 r = ar^2 , \ldots , a_n = a_{n-1}\, r = ar^{n-1}$$

تعريف (٤):

النسبة r إما أن تكون موجبة، كما فى المتسلسلة:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1} + \ldots.$$

أو سالبة، كما فى المتسلسلة:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \ldots + (-\frac{1}{3})^{n-1} + \ldots.$$

حالة خاصة: وإذا كانت $r = 1$: فإن المجموع الجزئى النونى للمتسلسلة الهندسية يكون:

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \dots + a(1)^{n-1} = n\,a$$

وتكون المتسلسلة فى هذه الحالة متباعدة لأن: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ تبعا لإشارة a

أما إذا كانت $r = -1$: فإن المجموع الجزئى النونى للمتسلسلة الهندسية يكون:

$$s_n = a + a(-1) + a(-1)^2 + \dots + a(-1)^{n-1}$$

وتكون المتسلسلة فى هذه الحالة متباعدة لأن المجموع S_n يتذبذب بين a, o.

تعريف (5): تقارب وتباعد المتسلسلة الهندسية عندما $|r|\neq 1$:

نوجد أولا: الصورة العامة للمجموع الجزئى النونى للمتسلسلة الهندسية كالآتى:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \longrightarrow$$

$$\therefore\ rs_n = a\,r + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

بالطرح نحصل على:

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$\therefore\ s_n(1-r) = a(1-r^n) \longrightarrow \qquad \therefore \boxed{s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}},\ r\neq 1$$

حالات خاصة:

(1) عندما $|r|<1$ ← فعندما $n\to\infty$ فان $r^n\to 0$ ونحصل على: $\boxed{s_n = \dfrac{a}{1-r}}$

أى أن المتسلسلة تقاربية

(2) عندما $|r|>1$ ← فعندما $n\to\infty$ فان $|r^n|\to\infty$ وتكون المتسلسلة تباعدية.

والخلاصة:

أنه إذا كانت $|r|<1$ فان المتسلسلة الهندسية تكون تقاربية ومجموعها: $s_n = \dfrac{a}{1-r}$

وإذا كانت $|r|>1$ فان المتسلسلة تكون تباعدية.

مثال: أوجد مجموع المتواليات الهندسية الآتية:

$$[1]\ 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}+\ldots.=2+2(\frac{1}{3})+2(\frac{1}{3})^2+2(\frac{1}{3})^3+\ldots..$$

$$a=2, \qquad r=\frac{1}{3}$$

$$s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{2[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2-2(\frac{1}{3})^n}{\frac{2}{3}}=3-3(\frac{1}{3})^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}[3-3(\frac{1}{3})^n]=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}3(\frac{1}{3})^n=3-0-3$$

وذلك لأن: $[\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n=0 \leftarrow \lim_{n\to\infty}x^n=0, |x|<1]$

ملحوظة: حيث أن $|r|>1$ $[r=\frac{1}{3}]$ فيمكن تطبيق الحالة الخاصة حيث مجموع المتسلسلة $=\frac{a}{1-r}$

$$\therefore s_n=\frac{a}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=3$$

$$[2]\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

$$=1+(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3+\ldots..$$

$$a=1, \qquad r=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{(1)[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}[\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})(-\frac{1}{2})^n] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3} - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

$$= \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

ملحوظة: حيث أن $|r|<1$ $[r=-\frac{1}{2}]$ فيمكن تطبيق الحالة الخاصة حيث مجموع المتسلسلة = $\frac{a}{1-r}$

$$\therefore s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

[3] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n} = \frac{5}{4}+\frac{5}{16}+\frac{5}{64}+\ldots+\frac{5}{4^n}+\ldots = \frac{5}{4}+\frac{5}{4}(\frac{1}{4})+\frac{5}{4}(\frac{1}{4})^2+\ldots$

$$a = \frac{5}{4}, \qquad r = \frac{1}{4}$$

وحيث أن $r = \frac{1}{4} \leftarrow |r|<1$ فيكون مجموع المتسلسلة هو:

$$s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{4(1-\frac{1}{4})} = \frac{5}{4-1} = \frac{5}{3}$$

[4] $\sum_{n=o}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n} = 2+\frac{4}{5}+\frac{8}{25}+\frac{16}{125}+\ldots = 2[1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\ldots]$

يلاحظ أن n بدأت من n = o وليس n = 1، وأننا أخذنا 2 عامل مشترك فيكون مجموع المتسلسلة هو ضعف مجموع المتسلسلة بين القوسين حيث:

$$\therefore a = 1, r = \frac{2}{3} \to s_n = 2[\frac{a}{1-r}] = 2[\frac{1}{1-\frac{2}{5}}] = 2[\frac{1}{\frac{3}{5}}] = \frac{10}{3}$$

Problem: Find the sum of the following geometric series:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (ii) $\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^n 5}{4^n}$

Solution:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+.....$

$$a=\frac{1}{9} \quad , \quad r=\frac{1}{3}$$

$$\therefore S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{1/9}{1-1/3}=+\frac{1}{9(1-1/3)}=\frac{1}{9-3}=\frac{1}{6}$$

(ii) $\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^n 5}{4^n}=5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+......$

$$a=5 \quad , \quad r=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{5}{1-(-1/4)}=\frac{5}{1+1/4}=4$$

Repeating decimals:الكسر العشرى المتكرر

Example: Express the repeating decimal 5.232323 ..... as the ratio of two integers.

Solution:

المطلوب كتابة الكسر العشرى المتكـــرر .....5.232323 كنـــسبة بـــين عـــددين صحيحين نتبع الآتى:

$$5.232323\ldots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \ldots\ldots$$

$$= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left[1 + \left(\frac{1}{(100)}\right) + \left(\frac{1}{(100)}\right) + \ldots\ldots\right]}$$

متسلسلة هندسية فيها $a = 1, r = \frac{1}{100} = 0.01$

فيكون مجموعهما: $S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-0.01} = \frac{1}{0.99}$

وهو المطلوب $\therefore\ 5.232323\ldots = 5 + \frac{23}{100}\left[\frac{1}{0.99}\right] = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$

<u>اختبار الحد النوني للتباعد The nth – term test for divergence</u>

<u>نظرية:</u> [تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية، إذا كان $a_n \to o$، وتكون تباعدية إذا اختلف a_n عن الصفر]، وتستخدم النظرية لإثبات تباعد متسلسلة [حيث $an \neq 0$].

<u>الإثبات:</u> نفرض أن S يمثل مجموع المتسلسلة وأن $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ هو المجموع الجزئى النونى، فعندما تكبر n جدا فان كل من S_n، S_{n-1} تقترب من S وبذلك فان الفرق بينهما $a_n = S_n - S_n - 1$ يقترب من الصفر.

<u>مثال:</u> طبق إختبار الحد النونى للتباعد على المتسلسلات الآتية:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 : \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0 \to \text{diverges (متباعدة)}$$

$$(2)\ \sum_{n=o}^{\infty} \cos n\pi : \lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \infty \neq 0 \to \text{diverges}$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} : \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0 \to \text{diverges}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} : \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1} = \infty \neq 0 \to \text{diverges}$

(5)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5} : \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+5/n} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \neq 0 \to \text{diverges}$$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{n} : \lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n} = \ln\frac{1}{\infty} = \ln 0 = -\infty \neq 0 \to \text{diverges}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} : \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{-1}{n}\right)\right]^{n}$

$= e^{-1} \neq 0 \to \text{diverges}$

[$e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \leftarrow e^{x}$ من تعريف]

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) : \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}[\ln n - \ln(n+1)]$

$$= \lim_{n\to\infty}\{[\ln(1)-\ln(2)]+[\ln(2)-\ln(3)]+\ldots[\ln(n)-\ln(n+1)]\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{[\ln(1)-\ln(n+1)] = -\lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = -\infty \neq 0 \to \text{diverges}$$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) : \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 \to \text{diverges}$$

قواعد جبر المتسلسلات:

إذا كانت $\sum a_n=A, \sum b_n=B$ متسلسلتان متقاربتان فإن:

(i) $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n = A \pm B,$

(ii) $\sum k a_n = k\sum a_n = KA,$ حيث ثابت $k =$

نتيجة: إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة و $\sum b_n$ متباعدة فان $\sum(a_n \pm b_n)$ متباعدة.

Ex: Find the sums of the following series:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n}$

Solution:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right)$$

ولكن:

(1) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ هى متسلسلة هندسية فيها $a = 1, r = ½$ فيكون

مجموعهما:

$$= \frac{1}{1-(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

(2) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}}$ هى متسلسلة فيها $a = 1, r = \frac{1}{6}$ فيكون مجموعهما:

$$= \frac{1}{1-(\frac{1}{6})} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

(ii) $\sum_{n=o}^{\infty}\frac{4}{2^n}=4\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{2^n}=4[\frac{1}{1-½}]=4[\frac{1}{½}]=4[2]=8$

حيث المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ هى متسلسلة هندسية فيها $a = 1, r = ½$ فيكون مجموعها

$$=\frac{1}{1-(½)}=\frac{1}{½}=2$$

إعادة كتابة الدليل في المتسلسلات (Reindexing):

من الممكن إعادة كتابة الدليل (reindex) لأى متسلسلة مع الاحتفاظ بترتيب حدودها، وذلك بدون تغيير تقاربها أى الاحتفاظ بها كمتسلسلة متقاربة، ويكون لدينا حالتان:

(١) لرفع القيمة الابتدائية للدليل بمقدار h، نستبدل n في معادلة a_n بالقيمة $(n-h)$.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty}a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots$$

(٢) لخفض القيمة الابتدائية للدليل بمقدار h، نستبدل n في معادلة a_n بالقيمة $(n+h)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty}a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots$$

Example (1):

Write the geometric series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\ldots$$

as a sum beginning with: (i) n = 0, (2) n = 5, (3) n = -4.

Solution:

for n = 1 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots..$

for n = 0 : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots..$

for n = 5 : $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^{n-5}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots..$

for n = -4 : $\sum_{n=-4}^{\infty}\frac{1}{2^{n+4}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots..$

Example (2):

Write the series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\ldots..+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots..$$

as a sum beginning with: (i) n = 0, (2) n = 5, (3) n = -2.

Solution:

for n = 1 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\ldots..$

for n = 0 : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\ldots..$

for n = 5 : $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-3)(n-2)}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\ldots..$

for n = -2 : $\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\ldots..$

وهو المطلوب

ثالثا: اختبارات تقارب وتباعد المتسلسلات:

تمهيد:

عند دراستنا المتسلسلات، يكون لدينا سؤالان:

(1) هل المتسلسلة متقاربة أم لا.

(2) إذا كانت متقاربة فما هو مجموعهما.

والمجموع هنا ليس هو المجموع بالمعنى الدارج ولكن هو نهاية.

وسوف نقتصر هنا على اختبارات تقارب المتسلسلات ذات الحدود الموجبة فقط، والسبب فى ذلك هو أن المجموعات الجزئية لتلك المتسلسلات تشكل متتابعات غير متناقصة (nondecreasing) وأن تلك المتتابعات تكون محدودة من أعلى وهى دائما متقاربة. ولذلك فلإثبات أن المتسلسلة ذات الحدود الموجبة متقاربة يكفى فقط إثبات أن مجموعها الجزئى يكون محدودا من أعلى (أى متقاربا).

المجموعات الجزئية غير المتناقصة (Non decreasing partial sums):

(1) يقال أن المتتابعة $\{a_n\}$ محددة من أعلى أو من أسفل إذا كان مداها محدودا (من أعلى أو من أسفل)، فمثلا:

(i) المتتابعة $\{an\} = \frac{1}{n}$ من أسفل بالصفر ومن أعلى بالعدد 1 لجميع قيم n حيث:

$$0 \le \frac{1}{n} \le 1$$

(ii) المتتابعة $\{a_n\}=2^n$ محدودة من أسفل بالعدد 2 لجميع قيم n حيث $2 \le 2^n$ وهى ليست محدوده من أعلى لأنه لا يوجد عدد M يحقق العلاقة: $2^n \le M$ لجميع قيم n.

(2) يقال أن المتتابعة $\{a_n\}$ غير متناقصة إذا كان $a_n \le a_{nH}$ لكل قيم n الصحيحة كما يقال أن تلك المتتابعة متزايدة (increasing) إذا كان $a_n < a_{nH}$ لكل قيم n الصحيحة.

(3) أى متتابعة محدودة تكون متقاربة (converges) وأى متتابعة غير محـــدودة تكون متباعدة (diverges).

(4) إذا كان لدينا متسلسلة $\sum_{n=1}^{n} a_n$ (لا نهائية) ذات حـــدود موجبـــة $(a_n \geq 0)$ فـــإن مجاميعها الجزئية تشكل متتابعة غير متناقصة حيث:

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} < \ldots$$

والخلاصة:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{n} a_n$ ذات الحدود الموجبة متقاربـــة (converges) إذا كانت مجاميعهما الجزئية محدودة من أعلى.

Example: Prove that the sequence $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ is increasing one, and bounded from above (محـــدودة مـــن أعـــلى) by 1 and from below (ومن أسفل) by ½.

Solution:

لإثبات أن المتتابعة $\dfrac{n}{n+1}$ متزايدة نثبت أن $a_{n+1} > a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{n+1}{n+2}}{\dfrac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \rightarrow a_{n+1} > a_n$$

أى أن المتتابعة متزايدة، ولإيجاد محـــدوديتها (Boundness): نكتـــب المتتابعـــة بالصورة:

$$a_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots\right\}$$

ومن ذلك نرى أنها محدودة من أسفل بالعدد ½ بالعدد ومن أعلى بالعدد ١ لأن:

$$\frac{n}{n+1} \le 1$$

أى أن $\frac{1}{2} \le \frac{n}{n+1} \le 1$ وهو المطلوب

المتسلسلة التوافقية Harmonic series:

تعرف المتسلسلة التوافقية بأنها المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \ldots$$

وهى متسلسلة متباعدة (divergent)، وباستخدام اختيار الحد النونى فإن:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ومعنى هذا أنها ليست متباعدة، ولذلك فإن هذا الاختبار يفشل فى تحديد تقارب أو تباعد تلك المتسلسلة.

والسبب فى تباعد هذه المتسلسلة هو أنه لا يوجد حدا أعلى لمجموعاتها الجزئية وبالتالى فهى غير متقاربة (أى أنهما متباعدة)، وسنعود لدراستها بالتفصيل فى الفقرة التالية.

إختبارات التقارب والتباعد:

أولا: اختبار التكامل Integral test:

نظرية: إذا كانت f دالة متصلة وموجبة ومتناقصة (decreasing) فى المتغير x حيث $x \ge N$ [N عدد صحيح موجب]، وكانت $\{a_n\}$ متتابعة ذات حدود موجبة بحيث أن $a_n = f(n)$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=N}^{n} a_n$ تكون متقاربة إذا كان التكامل $\int_N^{\infty} f(x)dx$ متقاربا، ومتباعدة إذا كان هذا التكامل متباعدا، ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

Example (1): Does the following series converge or diverge.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Solution:

[1] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....$ (المتسلسلة التوافقية)

نأخذ $f(n)=\frac{1}{n}$ التكامل وهى دالة موجبة ومتصلة ومتناقصة [تتناقص قيم حدودها باستمرار].

ثم نوجد التكامل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ حيث $f(x)=\frac{1}{x}$ $x \geq 1,$ [وهو متكامل معتل أو شاذ]

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty}[\ln x]_1^a$$
$$= \lim_{a\to\infty}[\ln a - \ln 1] = \lim_{a\to\infty}\ln a = \infty$$

أى أن التكامل متباعد وعليه فإن المتسلسلة المعطاة تكون متباعدة.

[2] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+....$

نأخذ الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ وهى دالة متصلة وموجبة ومتناقصة.

ثم نوجد التكامل $\int_1^{\infty} f(x)dx$:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^a$$
$$= -[\lim_{a\to\infty}(\frac{1}{a}) - \lim_{a\to\infty}(1)] = -[0-1] = 1$$

أى أن التكامل متقارب وعليه فالمتسلسلة المعطاة تكون متقاربة.

$$[3]\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots.$$

نأخذ الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ وهى دالة متصلة وموجبة ومتناقصة.

ثم نوجد التكامل $\int_1^{\infty} f(x)dx$:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{a\to\infty}[\tan^{-1}x]_1^a$$

$$=\lim_{a\to\infty}[\tan^{-1}a-\tan^{-1}1]=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

وهذا يعنى أن التكامل متقارب وعليه فإن المتسلسلة المعطاة تكون متقاربة.

ملاحظات:

(1) فى الأمثلة السابقة [مثال ii، مثال iii] لا تمثل (1)، $(\frac{\pi}{4})$ مجموع المتسلسلتين $(\frac{1}{n^2})$، $(\frac{1}{n^2+1})$ بالرغم من أن المتسلسلتين تقاربيتين ولكننا لا نعلم مجموع أى منهما.

(2) المتسلسلة والتكامل ليس من الضرورى أن يكون لهما نفس القيمة فى حالة التقارب ففى المثال (ii) مثلا: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2})=\frac{\pi^2}{6}$ (مثال سابق)، بينما

$$\int_1^{\infty}(\frac{1}{x^2})dx=1$$

$$[4]\ \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}=e^{-1}+2e^{-4}+3e^{-9}+\ldots\ldots.=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^4}+\frac{3}{e^9}+\ldots..$$

الدالة هى $f(x)=xe^{-x^2}$ دالة متصلة وموجبه ومتناقصة.

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_1^a(-2xe^{-x^2}dx) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}[e^{-x^2}]_1^a$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}[e^{-a^2} - e^{-1}] = -\frac{1}{2}[e^{-\infty} - e^{-1}] = -\frac{1}{2}[\frac{1}{e^\infty} - \frac{1}{e}]$$

$$= -\frac{1}{2}[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{e}] = -\frac{1}{2}[0 - \frac{1}{e}] = \frac{1}{2e}$$

وهذا يعنى أن التكامل متقارب وعليه فإن المتسلسلة تكون متقاربة

Example (2):

Show that the p-series (المتسلسلة-p):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

حيث p ثابت (عدد حقيقى)، تتقارب عندما $p > 1$، وتتباعد عندما $p \le 1$

Solution:

(i) عندما $p>1$ أى $p-1>0$:

نأخذ $f(x) = \frac{1}{x^p}$ وهى دالة موجبة ومتناقصة فى x

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^P}dx = \int_1^\infty x^{-P}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{-P+1}}{-P+1}\right]_1^a = \frac{-1}{P-1}\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{a^{P-1}} - 1\right]$$

$$= \frac{-1}{P-1}[\frac{1}{\infty} - 1] = \frac{-1}{P-1}[0-1] = \frac{1}{P-1} \to \text{converges (التكامل تقاربى)}$$

وهذا يعنى أن المتسلسلة تقاربية.

ويلاحظ أن مجموع المتسلسلة -p ليس $\frac{1}{P-1}$، أى أننا باستخدام اختبار التكامل أثبتنا أن المتسلسلة متقاربة (تقاربية) ولكن لا نعلم القيمة التى تتقارب إليها.

(ii) عندما p<1 أى 1-p>0:

$$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{x^P}dx = \frac{1}{1-P}\lim_{a\to\infty}\left[a^{1-P}-1\right] = \infty \to \text{diverges}$$ (التكامل متباعد)

أى أن المتسلسلة متباعدة باستخدام اختبار التكامل فى هذه الحالة.

وهو المطلوب.

ملحوظة:

من أمثلة متسلسلات p- المتقاربة نذكر المتسلسلات الآتية:

$$\sum\left(\frac{1}{n}\right)^3, \sum\left(\frac{1}{n}\right)^4, \sum\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \ldots\ldots$$

Problem:

Which of the following series converge, and which diverge

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \to$ divergence by the integral test:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2x-1} = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^a = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}[\ln(2a-1)-\ln 1] = \frac{1}{2}\ln\infty = \infty$$

$\ln 1 = 0, \quad \ln\infty = \infty$ حيث

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}} \to$ Converges by the integral test:

لإيجاد $\int_1^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$: نضع $u = e^x \leftarrow du = e^x dx$ وحدود التكامل تصبح من e إلى ∞

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_e^\infty \frac{1}{1+u^2}du = \lim_{a\to\infty}\left[\tan^{-1}u\right]_e^a$$

$$= \lim_{a\to\infty}[\tan^{-1}a - \tan^{-1}e] = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}e \simeq 0.35$$

$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1} \rightarrow$ diverges by the integral test:

لإيجاد $\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$: نضع $u = x^2 + 1 \leftarrow du = 2xdx$ وحدود التكامل تصبح من 2 الى ∞

$$\therefore \int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_2^{\infty}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}[\ln u]_2^a = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}[\ln a - \ln 2] = \infty$$

ثانيا: اختبارات المقارنة Comparison tests:

تمهيد:

رأينا كيف نعين تقارب العديد من المتسلسلات ومنها المتسلسلة الهندسية ومتسلسلة p وغيرها عن طريق اختبار التكامل، والآن سوف نختبر تقارب العديد من المتسلسلات بمقارنة حدودها بحدود المتسلسلة معروف تقاربها، وهو ما يعرف بإختبارات المقارنة وهى نوعان:

(١) اختبار المقارنة المباشر (Direct comparison test):

ويعرف أيضا باختبار القسمة (Quotient test) وينص على:

إذا كانت $\sum c_n$، $\sum a_n$ متسلسلتان ذات حدود موجبه، فإن:

(أ) المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متقاربة، إذا كانت $\sum c_n$ متقاربة، حيث $a_n \le c_n$ لكل قيم $n > N$ حيث N عدد صحيح ما.

(ب) المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متباعدة، إذا كانت $\sum c_n$ متباعدة، حيث $a_n \ge c_n$ لكل قيم $n > N$ حيث N عدد صحيح ما.

Example:

Apply the direct comparison test for the following series:

[1] $a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ \ldots..$

Solution:

نقارن المتسلسلة المعطاة بالمتسلسلة $c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهى متسلسلة تباعدية [المتسلسلة التوافقية] فنجد أن:

$$a_1 = c_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 < c_2 = \frac{1}{2} = 0.5,\ \ldots.$$

$$\therefore = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \rightarrow a_n \geq c_n$$

[حدود a_n أكبر من أو تساوى الحدود المناظرة لـــ c_n]

ومن اختبار المقارنة المباشر نجد أن المتسلسلة المعطاة a_n تكون تباعدية (متباعدة).

$$[2]\ a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{5n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1/5} = \frac{1}{1-1/5} + \frac{1}{2-1/5} + \frac{1}{3-1/5} + \ldots..$$

$$= \frac{1}{4/5} + \frac{1}{9/5} + \frac{1}{14/5} + \ldots..$$

نقارن المتسلسلة a_n بالمتسلسلة $c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهى متسلسلة تباعديـــة (المتسلـــسلة التوافقية).

فنجد أن: $\frac{5}{5n-1} > \frac{1}{n} \rightarrow a_n > c_n$ [حدود a_n أكبر من الحدود المناظرة لـــ c_n]

ومن اختبار المقارنة المباشر نجد أن المتسلسلة المعطاة a_n تكون متباعدة.

$$[3]\ a_n = 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{8+\sqrt{3}} + \ldots.. + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$$

نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ أى:

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots..$$

وهى متسلسلة هندسية متقاربة، نجد أن:

$$1+\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{8+\sqrt{3}}+\ldots\ldots\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

أى أن : $a_n \le c_n$ [أى أن حدود a_n أقل من أو تساوى الحدود المناظرة لـ c_n]،

ومن اختبار المقارنة نجد أن المتسلسلة a_n تكون متقاربة (تقاربية).

Problem:

Which of the following series converge and which diverge.

Give reasons for your answers.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ (2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

(3) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(\ln n)}$ (4) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1-n}{n2^n}$

Solution:

[1] : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\left(\frac{n}{3n}\right)^n$ فنجد أن:

$$\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n<\left(\frac{n}{3n}\right)^n\to\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{3}\right)^n\to a_n<c_n$$

أى أن حدود المتسلسلة المعطاة أقل من الحدود المناظرة لـ c_n، ولما كانت المتسلسلة $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ هى متسلسلة هندسية تقاربية حدها النونى $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ فتكون المتسلسلة a_n تقاربية [من اختبار المقارنة].

[2] $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$:

نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ أى $\frac{1}{n^{3/2}}$ وهى متسلسلة -p حدها النونى

$\frac{1}{n^{3/2}}$ وهى متقاربة، حيث $n^2-1>n$ لكل $n\geq 2$ أى أن: $n^2(n^2-1)>n^3$

أى أن: $n\sqrt{n^2-1}>n^{3/2}$ أى أن: $\frac{1}{n^{3/2}}<\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ ولذلك فإن $a_n<c_n$ أى

أن المتسلسلة المعطاة a_n تكون تقاربية.

[3] $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(\ln n)}$:

نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $c_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهى متسلسلة تباعدية، وذلك لأن:

$n>\ln n$ أى أن $\ln n>\ln(\ln n)$ أى أن: $\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln(\ln n)}$ وهذا يعنى أن $c_n<a_n$ أو

$a_n>c_n$، فمن اختبار المقارنة نجد أن المتسلسلة a_n المعطاة تكون تباعدية.

[4] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n2^n}$:

تكون المتسلسلة a_n بالصورة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^n}\right)$$

وهى مجموع متسلسلتين متقاربتين حيث:

(١) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ متقاربة باستخدام اختبار المقارنة المباشر وذلك

لأن $\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}$: أى أن حدود المتسلسلة أقل من حدود المتسلسلة $\frac{1}{2^n}$ التى نقارن

بها.

(2) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^n}\right)$ هى متسلسلة هندسية متقاربة.

المتسلسلة المعطاة هى متسلسلة متقاربة (converges).

(2) اختبار المقارنة فى صورة نهاية (The limit comparison test):

نظرية: إذا كان لدينا متسلسلتان ذات حدود موجبة $\sum a_n, \sum b_n$ وكان

$\sum_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ فإن:

(1) المتسلسلتان $\sum a_n, \sum b_n$ كلاهما متقاربتان أو كلاهما متباعدتان إذا كان $L \neq 0$ أو $L > 0$

(2) المتسلسلة $\sum b_n$ تكون تقاربية إذا كان $L = 0$ وبالتالى فإن $\sum a_n$ تكون تقاربية.

(3) المتسلسلة $\sum b_n$ تكون تباعدية إذا كان $L = \infty$ وبالتالى فإن $\sum a_n$ تكون تباعدية.

وتطبق هذه النظرية عادة للمتسلسلات التى فيها a_n هى دالة كسرية لـ n.

Example: Using the limit comparison test to prove that which of the following series converge and which diverge.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^4+1}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Solution: [1] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$:

لتكن $a_n = \frac{1}{2^n-1}$، فللقيم الكبيرة لـ n فإن a_n تسلك مثل $\frac{1}{2^n}$ ولذلك نأخذ

$b_n = \frac{1}{2^n}$، وحيث أن: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متسلسلة متقاربة.

ولذلك فإن: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^n-1}x2^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-(\frac{1}{2^n})}=1>0$

وطبقا للجزء (1) من اختبار المقارنة فى صورة نهاية فإن : المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متقاربة [لأن $\sum b_n$ متقاربة].

[2] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}$:

لتكن $\frac{2n+1}{n^2+2n+1}=\frac{2n+1}{(n+1)^2}= a_n$، فللقيم الكبيرة لــ n فإن a_n تسلك مثــل $\frac{2n}{n^2}$ أى $\frac{2}{n}$ ولذلك نأخذ $b_n=\frac{1}{n}$ [لم نأخذ $b_n=\frac{2}{n}$ بهدف التبسيط فقط]، وحيث أن: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلة متباعدة ولذلك فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+1}{n^n+2n+1}x\ n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2>0$$

وطبقا للجزء (1) من الاختبار $\sum a_n$ فإن : المتسلسلة تكون متباعدة [لأن متباعدة].

[3] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^4+1}$

للقيم الكبيرة من n فإن $a_n=\sum\frac{3n^2+2n+1}{n^4+1}$ تسلك مثل $\frac{3n^2}{n^4}$ أى $\frac{3}{n^2}$ ولذلك نأخــذ $b_n=\frac{1}{n^2}$ [لــم نأخــذ $b_n=\frac{3}{n^2}$ بهــدف التبــسيط فقــط]، وحيــث أن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلة متقاربة. ولذلك فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2+2n+1}{n^4+1}x\ n^2\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n^3+1}{n^4+1}=3>0$$

وطبقا للجزء (1) من الاختبار فإن : المتسلسلة $\sum a_n$ تكــون متقاربــة [لأن $\sum b_n$ متقاربة]

[4] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n\ln n}{n^2+5}$

لتكن $a_n=\dfrac{1+n\ln n}{n^2+5}$ فللقيم الكبيرة لـــــ n فــإن a_n تــسلك مثــل $\dfrac{n\ln n}{(n^2)}$ أى $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ وحيث أن: $\dfrac{\ln n}{n}>\dfrac{1}{n}$ للقــيم $n\geq 3$ فيمكننـــا أخــذ $b_n=\dfrac{1}{n}$، حيــث $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ وهى متسلسلة متباعدة، ولذلك فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+n\ln n}{n^2+5}\times n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}=\infty$$

وطبقا للجزء (3) الاختبار فإن: المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متباعدة [لأن $\sum b_n$ متباعدة]

Problem: Using the limit comparison test to prove that which of the following series converge and which diverge:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4-n}{n^3+1}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{(n+2)}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

Solution:

[1] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$

لتكن $a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ فللقيم الكبيرة لـــ n فإن a_n تسلك مثل: $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ [حيث ln n تزيد بصورة أقل من $\sqrt{n}$] ولذلك نأخــذ $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ وهـــى متسلـــسلة متباعـــدة [$\sum\dfrac{1}{n^{½}}$ هى متسلسلة p حيث P = ½<1 فهى متباعدة]، أيضا فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}x\sqrt{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\infty>0$$

وطبقا للجزء (3) اختبار المقارنة فى صورة نهاية فـإن: المتسلسلة $\sum a_n$ تكـون متباعدة [لأن $\sum b_n$ متباعدة]

[2] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-n}{n^3+1}$

لتكن $a_n=\frac{4-n}{n^3+1}$ فللقيم الكبيرة لـ n فإن a_n تسلك مثل: $\frac{n}{n^3}$ أى مثل $\left(\frac{1}{n^2}\right)$

لذلك نأخذ $b_n=\frac{1}{n^2}$ وهى متسلسلة متقاربة. وحيث أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4-n}{n^3+1}x\,n^2\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n^3}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-1}{1+\frac{1}{n^3}}=-1\neq 0$$

وطبقا للجزء (1) من الاختبار فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكـون متقاربـة [لأن $\sum b_n$ متقاربة]

[3] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(n+2)}$

لتكن $a_n=\frac{\ln(n+2)}{n+2}$ فللقيم الكبيرة من n فـإن a_n تـسلك مثـل: $\frac{1}{n}$ [لأن: $\ln(n+2)<n+2$] ولذلك نأخذ $b_n=\frac{1}{n}$ وهى متسلسلة تباعدية.

وحيث أن: $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n+2)}{n+2}x\,n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+2)}{n+2}=\infty$$

وطبقا للجزء (3) من الاختبار فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكـون تباعديـة [لأن $\sum b_n$ متباعدة]

[4] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

لتكن $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ فللقيم الكبيرة من n فإن a_n تسلك مثل: $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ أى مثل: $\frac{1}{n^{2/3}}$ ولذلك نأخذ $b_n = \frac{1}{n^{2/3}}$ وهى متسلسلة -p تباعدية [حيث $P = \frac{2}{3} < 1$].

وحيث أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} x \sqrt[3]{n^2} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 > 0$$

وحسب الجزء (١) من الاختبار فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكون تباعدية [لأن $\sum b_n$ متباعدة].

ثالثا: اختبارات النسبة والجذر النونى The ratio and the nth root tests:

(١) اختبار النسبة The Ratio Test [اختبار دالمبيرت]:

فى حالة فشل الاختبارات السابقة فإن هناك بعض المتسلسلات يمكن استخدام اختبار النسبة، والذى يعرف أيضا باختبار دالمبيرت (D`Alembert Ratio Tests)، وينص على الآتى:

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة، وليكن: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ فإن:

(١) المتسلسلة تكون تقاربية إذا كان $\rho < 1$

(٢) المتسلسلة تكون تباعدية إذا كان $\rho > 1$

(٣) الاختبار يفشل إذا كانت $\rho = 1$

ملحوظة:

يستخدم اختبار النسبة عادة عندما تكون حدود المتسلسلة مشتملة على مضروبات (factorials) التعبيرات المشتملة على n أو التعبيرات المرفوعة لقوة تشتمل على n.

Example: Applying the ratio test to investigate the convergence of the following series:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!n!}{(2n)!}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n})^n}{n!}$

Solution:

[1] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$

نفرض أن: $a_n=\frac{2^n+5}{3^n} \rightarrow a_{n+1}=\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}}=\frac{1}{3}\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}=\frac{1}{3}\left[\frac{2+5.2^{-n}}{1+5.2^{-n}}\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2+\frac{5}{2^n}}{1+\frac{5}{2^n}}\right]=\frac{1}{3}.\left[\frac{2}{1}\right]=\frac{2}{3}<1$$

وهذا يعنى أن $\rho<1$ أى أن المتسلسلة a_n تقاربية (متقاربة).

ملحوظة: القيمة $\frac{2}{3}$ لا تمثل مجموع المتسلسلة، ولكنها فقط للدلالة على تقــارب أو تباعد المتسلسلة، وفى الحقيقة فإن مجموع المتسلسلة هو:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3^n}\right)=\frac{1}{1-(\frac{2}{3})}+\frac{5}{1-(\frac{1}{3})}=\frac{21}{2}$$

[2] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

نفرض أن: $a_n = \frac{(2n)!}{n!n!} \leftarrow a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}$$

$(2n+2)! = (2n+2)\ (2n+1)\ (2n)!$

$(n+1)! = (n+1)\ (n)!$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{4}{1} = 4 > 1$$

وهذا يعنى أن $\rho>1$ أى أن المتسلسلة a_n تكون متباعدة.

[3] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$

نفرض أن: $a_n = \frac{4^n n!n!}{(2n)!} \leftarrow a_{n+1} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\frac{(2n)!}{4^n n!n!}$$

$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)(n+1)}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{(2n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2(\frac{1}{2}) = 1$$

وهذا يعنى أن: $\rho=1$ بمعنى أن اختبار النسبة فشل فى اختبار تقارب أو تباعد المتسلسلة المعطاة (طبقا للجزء 3 من اختبار النسبة).

ملحوظة: باستخدام تقريب الحد النونى يمكن إثبات أن هـذه المتسلسلة متباعـدة كالتالى:

حيث أن: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+2}{2n+1}>1$ فإن: $a_{n+1}>a_n$

أى أن كل الحدود تكون أكبر من أو تساوى 2 = a_1 وأن الحـد النـونى $a_n \not\to 0$ عندما $n\to\infty$ فتكون المتسلسلة بذلك متباعدة.

[4] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n})^n}{n!}$

نفرض أن: $a_n=\frac{(\sqrt{n})^n}{n!} \leftarrow a_{n+1}=\frac{(\sqrt{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\sqrt{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(\sqrt{n})^n}{n!}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}(1+\frac{1}{n})^{n/2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}(1+\frac{1}{n})^{n/2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n/2}\right)$$

$$=(0)(e^{1/2})=0<1$$

أى أن $\rho<1$ وهذا يعنى أن المتسلسلة a_n متقاربة

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

$$e^{1/2}=\sqrt{e}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n/2}$$

Problem: Which of the following series converges and which diverges. Give the reasons for your answers.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}n!e^{-n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$

Solution:

[1] $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2^{n+1}}\right]}{\left[\dfrac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^{\sqrt{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)<1\to \text{the series converges}$$

(متقاربة)

[2] $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\dfrac{n!}{e^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e}=\infty>1$$

∴ المتسلسلة متباعدة (diverges)

[3] $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\dfrac{n!}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10}=\infty>1$$

∴ المتسلسلة متباعدة (diverges)

[4] $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}}{\dfrac{n^{10}}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n^{10}}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{10}(\frac{1}{10})$$

$$=(\frac{1}{10})\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{10}=(\frac{1}{10})[1]=\frac{1}{10}<1\to \text{the series converges}$$

(٢) **اختبار الجذر النوني [The nth Root Test] (اختبار كوشي):**

يعرف هذا الاختبار أيضا باختبار الجذر (Root test) أو اختبار كوشي (Cauchy`s test) وينص على:

إذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبه، وكانت: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$

فإن:

(i) تكون المتسلسلة متقاربة (converges) إذا كانت $\rho < 1$

(ii) تكون المتسلسلة متباعدة (diverges) إذا كانت $\rho > 1$

(iii) يفشل الاختبار إذا كانت $\rho = 1$

Examples: Applying nth root test to show that which of the following series converges, and which diverges:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

Solution:

[1] $a_n = \frac{n^2}{2^n} \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{(2^n)^{1/n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} < 1$$

(فالمتسلسلة متقاربة converges)

[2] $a_n = \frac{2^n}{n^2} \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2}$ | $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} = 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2 < 1$$

(فالمتسلسلة متباعدة diverges)

[3] $a_n = \left(\frac{1}{1+n}\right)^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \left(\frac{1}{1+n}\right)^{n/n} = \frac{1}{1+n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0 < 1$$ (فالمتسلسلة متقاربة)

[4] $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n} \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{n/n} = \frac{1}{\ln n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$ (والمتسلسلة متقاربة)

Ex (2):

Let

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ odd (فردى)} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ even (زوجى)} \end{cases}$$

, Does $\sum a_n$ converges

Solution:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ odd} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ even} \end{cases} \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} & , n \text{ odd} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} & , n \text{ even} \end{cases}$$

وبذلك فإن: $\frac{1}{2} \le \sqrt[n]{a_n} \le \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$

ومن نظرية الساندويتش، وحيث أن $\sqrt[n]{n} = n^{n/1} \rightarrow 1$ فإن:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ (وتكون المتسلسلة متقاربة)

Problem: Which of the following series converge and which diverge. Give reasons for your answers:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$

Solution:

[1] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{n^n}$:

نفرض أن: $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^n}} \leftarrow a_n=\frac{(\ln n)^n}{n^n}$

$$=\frac{[(\ln n)^n]^{1/n}}{(n^n)^{1/n}}=\frac{\ln n}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}}_{\downarrow}=(\frac{0}{1})=0<1\rightarrow \textit{series converges}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال [بتفاضل البسط والمقام]

[2] $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

نفرض أن: $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n} \leftarrow a_n=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

$$=\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^n}\right)^2\right]^{1/n}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^n}\right)=0<1\rightarrow \text{series converges}$$

[3] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

نفرض أن: $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}} \leftarrow a_n=\frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

$$=\frac{\sqrt[n]{(n!)^n}}{\sqrt[n]{(n^n)^2}}=\frac{[(n!)^n]^{1/n}}{[(n^n)^2]^{1/n}}=\frac{n!}{(n^{n/n})^2}=\frac{n!}{n^2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^2} = \infty > 1 \to \text{series diverges}$$

[4] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}$

نفرض أن: $a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}} \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{2^{n^2}}} = \frac{(n^n)^{1/n}}{2^{n^2/n}} = \frac{n}{2^n}$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n \ln 2}}_{\text{باستخدام قاعدة لوبيتال}} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1 \to \text{series converges}$$

رابعا: <u>المتسلسلات المتناوبة، التقارب المطلق والمشروط</u>

<u>Alternating series, Absolute and Conditional Convergence</u>

(1) <u>المتسلسلات المتناوبة Alternating series</u>:

<u>**تعريف**</u>: تناولنا فيما سبق المتسلسلات ذات الحدود الموجبة فقط، وفى هذا الجزء سوف ندرس ما يسمى بالمتسلسلات المتناوبة، وتعرف بأنها المتسلسلات ذات الحدود متعاقبة الإشارة أى أن حدوها تتناوب ما بين الموجب والسالب، وتأخذ إحدى الصورتين:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots.$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots.$$

حيث $a_n>0$ [موجبه] لجميع قيم n

وكمثال للصورة الأولى: المتسلسلة $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$

وكمثال للصورة الثانية: المتسلسلة $\cdots + \frac{(-1)^n(4)}{2^n} + \cdots + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + 2 -$

المتسلسلة الأولى: تسمى المتسلسلة المتناوبة التوافقية، وهى متقاربة (كما رأينا سابقا).

المتسلسلة الثانية: هى متسلسلة هندسية فيها $r = -\frac{1}{2}$ وهى متقاربة ومجموعها

$$\frac{-2}{1+(\frac{1}{2})} = \frac{-4}{3}$$

<u>اختبار ليبنتز للمتسلسلات المتناوبة:</u>

<u>(Leibnitzy Test for alternating series)</u>

ينص هذا الاختبار على الآتى:

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ تكون تقاربية إذا تحققت الشروط الآتية:

(1) الحدود a_n كلها موجبه، ومتناوبة الإشارة.

(2) المتسلسلة تناقصية بمعن أن $a_{n+1} \le a_n$ لكل قيم $n \ge N$ حيث N عدد صحيح.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [نهاية الحد العام تقترب من الصفر].

<u>Example:</u> Applying Leibnitz test to show that the following series converges or diverges. Give the reason for your answer.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

<u>Solution:</u>

[1] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

من الواضح أن : الحدود كلها موجبة ومتناوبة الإشارة [وهو الشرط الأول لتقارب المتسلسلات المتناوبة].

أيضا : فإن المتسلسلة تناقصية حيث أن: $1 > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \cdots$ أى أن $a_n < a_{n+1}$

وهو الشرط الثانى لتقارب المتسلسلات المتناوبة.

أيضا: فإن:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

وهو الشرط الثالث لتقارب المتسلسلات المتناوبة.

وبهذا تتحقق الشروط الثلاثة لتقارب المتسلسلة المتقاربة المعطاة، وبذلك تكون تلك المتسلسلة تقاربية:

[2] $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots\cdots$$

تطبيق الشروط الثلاثة لتقارب المتسلسلة المتناوبة.

(1) الحدود a_n كلها موجبة ومتناوبة الإشارة.

(2) المتسلسلة تناقضية حيث: $1 > \frac{1}{2}, \frac{1}{2} > \frac{1}{4}, \cdots$ أى أن: $a_{n+1} < a_n$

(3) نهاية الحد النونى تؤول إلى الصفر: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

∴ المتسلسلة المعطاة تقاربية.

[3] $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots$$

تطبيق الشروط الثلاثة للتقارب:

(1) الحدود a_n كلها موجبة ومتناوبة الإشارة.

(2) المتسلسلة تناقصية حيث: $1 > \frac{1}{3}, \frac{1}{3} > \frac{1}{5}, \cdots$ أى أن: $a_{n+1} < a_n$.

(3) نهاية الحد النونى تؤول إلى الصفر: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

∴ المتسلسلة المعطاة تقاربية.

Problem: Apply the Leibnitz test to prove that the alternating series:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{4n-3}$ diverges (تباعدية)

Solution:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{4n-3}=-2+\frac{4}{5}-\frac{6}{9}+\frac{8}{13}-\ldots\ldots$$

بتطبيق الشروط الثلاثة للتقارب نجد أن:

(1) الحدود a_n كلها موجبة ومتناوبة الإشارة.

(2) المتسلسلة تناقصية حيث $2>\frac{4}{5},\frac{4}{5}>\frac{6}{9},\cdots$ أى أن: $a_{n+1}<a_n$

ويمكن إثبات أن تلك المتسلسلة تناقصية باستخدام قواعد التفاضل كالتالى:

نعرف الدالة $f(x)$ بالصورة $f(x)=\frac{2x}{4x-3}$ ونفاضل بالنسبة إلى x فـإذا كـان $f`(x)<0$ تكون الدالة تناقصية (متناقصة):

$$f`(x)=\frac{(4x-3)(2)-4(2x)}{(4x-3)^2}=\frac{8x-6-8x}{(4x-3)^2}=\frac{-6}{(4x-3)^2}<0$$

وبالتالى فإن الحد العام $a_n=\frac{2n}{4n-3}$ للمتسلسلة المعطاة يكون تناقصيا.

(3) نهاية الحد النونى $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{4-\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0$

أى أن نهاية الحد العام لا تساوى صفرا، وبالتالى فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعدية.

(2) التقارب المطلق والمشروط Absolute and Conditional Convergence

تعريف التقارب المطلق:

تكون المتسلسلة $\sum a_n$ تقاربية تقاربا مطلقا (absolutely congergent) إذا كانت المتسلسلة المناظرة للقيمة المطلقة $\sum |a_n|$ متقاربة.

نظرية: إذا كانت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة فإن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة. [ويعرف هذا باختبار التقارب المطلق absolute convergence test].

تعريف التقارب المشروط:

تكون المتسلسلة $\sum a_n$ تقاربية تقاربا مشروطا (conditionally convergent) إذا كانت المتسلسلة المناظرة للقيمة المطلقة $|\sum a_n|$ متباعدة.

Example (1): Applying the absolute convergence test for the following series.

[1] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^2} = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16} + \cdots\cdots$

المتسلسلة المناظرة للقيم المطلقة هى:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots\cdots$$

وهى متسلسلة تقاربية، وبذلك فإنه طبقا لاختبار التقارب المطلق تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^2}$ تقاربية تقاربا مطلقا.

[2] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\text{Sin } n}{n^2} = \dfrac{\text{Sin } (1)}{1} + \dfrac{\text{Sin } (2)}{4} + \dfrac{\text{Sin } (3)}{9} + \cdots$

المتسلسلة المناظرة للقيم المطلقة هى:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sin } n}{n^2} \right| = \frac{|\text{Sin } (1)|}{1} + \frac{|\text{Sin } (2)|}{4} + \frac{|\text{Sin } (3)|}{9} + \cdots$$

وحيث أن: $|\sin(n)|\leq 1$ فإن:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{Sin } n}{n^2}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ولكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ هى متسلسلة متقاربة، فباستخدام اختبار التقارب المطلق تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{Sin } n}{n^2}$ تقاربية تقاربا مطلقا.

[3] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\cdots$

نقارن بالمتسلسلة المناظرة للقيم المطلقة وهى:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

وهى متسلسلة متقاربة، وبذلك تكون المتسلسلة المعطاة (من اختبار التقارب المطلق) متقاربة تقاربا مطلقا.

<u>Example (2):</u> Which of the following series converge absolutely and which converge conditionally. Give reasons for your answers:

[1] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$

المتسلسلة المناظرة للقيم المطلقة هى:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

وهى متسلسلة تباعدية، فتكون المتسلسلة المعطاة متقاربة تقاربا مشروطا [من تعريف التقارب المشروط].

[2] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$:

المتسلسلة المناظرة للقيم المطلقة هى:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots\cdots$$

وهى متسلسلة تباعدية [من اختبار الحد النونى] حيث:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

وبذلك فإن المتسلسلة المعطاة تكون متقاربة تقاربا مشروطا.

متسلسلة P المتناوبة Alternating P-series:

تكتب متسلسلة P المتناوبة بالصورة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^P} = 1 - \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \frac{1}{4^P} + \cdots\cdots$$

وهى متسلسلة متقاربة، ويكون لديك حالتان:

(1) $P > 1$, the series converges absolutely المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا

وصورتها [بأخذ $P = \dfrac{3}{2}$ مثلا]:

$$1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots\cdots$$

(2) $P < 1$, the series converges conditionally المتسلسلة متقاربة تقاربا مشروطا

وصورتها [بأخذ $P = \dfrac{1}{2}$ مثلا]:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots\cdots$$

والسبب فى ذلك هو أنه بمقارنة متسلسلة P المتناوبة مع متسلسلة P العادية [المناظرة للقيم المطلقة] نجد أنه:

(1) متسلسلة P العادية تكون متقاربة عندما $P > 1$ فبمقارنة المتسلسلة المتناوبة بها تكون تلك الأخيرة متقاربة تقاربا مطلقا.

(2) متسلسلة P العادية تكون متباعدة عندما $P < 1$ فبمقارنة المتسلسلة المتناوبة بها تكون تلك الأخيرة متقاربة تقاربا مشروطا.

<u>ملخص لاختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات اللانهائية:</u>

(1) <u>المتسلسلة الهندسية **(geometric series):**</u> $\sum ar^n$ تكون متقاربة إذا كان $|r|<1$ ومتباعدة إذا كان $|r|>1$.

(2) <u>المتسلسلة **P (P-series):**</u> $\sum \frac{1}{n^P}$ تكون متقاربة إذا كان $P>1$ ومتباعدة إذا كان $P\leq 1$.

(3) <u>اختبار الحد النونى **(n th term test):**</u> $\sum a_n$ تكون متقاربة إذا كان $a_n \to 0$ ومتباعدة إذا كان $a_n \neq 0$.

<u>اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة:</u>

(1) <u>اختبار التكامل **(integral test):**</u> نختار $f(x)$ دالة متصلة ومتناقصة ونكتب $a_n=f(n)$ وتكون المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة إذا كان $\int f(x)dx$ متقاربا، ومتباعدة إذا كان التكامل متباعدا.

(2) <u>اختبار المقارنة المباشر **(Direct comparison test):**</u> نقارن $\sum a_n$ بمتسلسلة $\sum c_n$ فإذا كان $a_n \leq c_n$ وكانت $\sum c_n$ متقاربة تكون $\sum a_n$ متقاربة، وإذا كانت $a_n \geq c_n$ وكانت $\sum c_n$ متباعدة كانت $\sum a_n$ متباعدة.

(3) <u>اختبار المقارنة فى صورة نهاية **(Limit comparison test):**</u> إذا كان $\sum a_n$ و$\sum b_n$ متسلسلتان ذات حدود موجبة وكان $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ فإن

المتسلسلتان تكونان متقاربتان أو متباعدتان إذا كان $L>0$, $L\neq0$، أما إذا كان $L = 0$ فإن $\sum a_n$ تكون تقاربية، وإذا كان $L=\infty$ فإن $\sum b_n$ تكون متباعـدة، $\sum a_n$ تكون متباعدة.

(4) __اختبار النسبة (دالمبيـرت) (Ratio test):__ إذا كـان $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$ فـإن المتسلـــسلة $\sum a_n$ تكون تقاربية إذا كـان $\rho<1$ وتباعدية إذا كـان $\rho>1$ ويفشل الاختبار عندما $\rho=1$.

(5) __اختبار الجذر النونى (كوشى) (nth root test):__ إذا كـان $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$ فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكون تقاربية إذا كان $\rho<1$ وتباعدية إذا كـان $\rho>1$ ويفشل الاختبار عندما $\rho=1$.

(5) __المتسلسلات المتناوبة (Alternating series):__

(1) __إختبار ليبنتز (Leibnitz test):__ المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ تكون تقاربية إذا كانت كل حدودها موجبة ومتناوبة الإشارة، وكان $a_{n+1}\leq a_n$ (أى كانـت تناقصية)، وكان $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) تكون المتسلسلة $\sum a_n$ تقاربية تقاربا مطلقـا (absolutely converges) إذا كانت المتسلسلة المناظرة للقيمـة المطلقـة $|\sum a_n|$ متقاربـة، وتكـون $\sum a_n$ متقاربة تقاربا مشروطا (conditionally converges) إذا كانت المتسلسلة المناظرة للقيمة المطلقة $|\sum a_n|$ متباعدة.

(3) __اختبار التقـارب المطلـق (absolute convergence test):__ إذا كانـت $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right|$ متقاربة فإن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة تقاربا مطلقا.

(4) __متسلسلة P المناوبة (Alternating P-series):__ تكـون $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^P}$ متقاربا تقاربا مطلقا إذا كان $P>1$ وتقاربا مشروطا إذا كان $P<1$.

(١) نهايات شائعة الاستعمال في المتسلسلات

(commonly occurring limits:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, (4) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$, (6) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ [تعريف e^x]

علاقات هامة:

$\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{0}{1} = 0$, $e^o = 1$, $e^{\infty} = \infty$, $e^{-\infty} = 0$, $\ln 1 = 0$, $\ln \infty = \infty$, $\ln 0 = -\infty$

$\ln e = 1$, $\ln e^a = a$, $e^{\ln a} = a$, $\ln a^b, = b \ln a$, $\frac{d}{x}(a^x) = a^x . \ln a$

تطبيق هام على المتسلسلات

التكاملات الناقصية Elleptic Intograls

تعريف: تعرف هذه التكاملات بأنها تكاملات يكون حلها على صورة متسلسلات لا نهائية، وتظهر التكاملات الناقصية على ثلاثة صور أو أنواع هى:

(1) النوع الأول: يكون على صورة:

$$F(k,\phi)=\int_{\theta=0}^{\theta=\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\ 0<k<1 \qquad (1)$$

حيث ϕ تسمى السعة وتكتب: $\phi=\text{amp } F(k,\phi)$

k تسمى المقياس وتكتب: $k=\text{mod } F(k,\phi)$

يعرف التكامل (1) بالتكامل غير التام، وفى الحالة الخاصة عندما $\phi=\frac{\pi}{2}$ فإن التكامل:

$$F(k,\frac{\pi}{2})=\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

يسمى تكامل تام من النوع الأول ويرمز له اختصارا بالرمز $F(k)$.

(2) النوع الثانى: يكون على صورة:

$$F(k,\phi)=\int_{\theta=0}^{\theta=\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\ d\theta,\ 0<k<1 \qquad (2)$$

حيث $\phi=\text{amp } E(k,\phi)$ ، $k=\text{mod } E(k,\phi)$

يعرف التكامل (2) بالتكامل غير التام، وفى الحالة الخاصة عندما $\phi=\frac{\pi}{2}$ فإن التكامل:

$$F(k,\frac{\pi}{2})=\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\ d\theta$$

يسمى تكامل تام من النوع الثانى ويرمز له اختصارا بالرمز $E(k)$.

(3) <u>النوع الثالث:</u> يكون على صورة:

$$L(k,n,\phi)=\int_{\theta=0}^{\theta=\phi}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)(\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\ ,\ 0<k<1 \qquad (3)$$

حيث $k=\operatorname{mod} L(k,n,\phi) \qquad , \ \phi=\operatorname{amp} L(k,n,\phi)$

يعرف التكامل (3) بالتكامل غير التام، وفى الحالة الخاصة عندما $\phi=\frac{\pi}{2}$ فإن التكامل:

$$L(k,n,\frac{\pi}{2})=\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

يسمى تكامل تام من النوع الثالث ويرمز له اختصارا بالرمز $L(k,n)$.

ويلاحظ أنه عندما $n=0$ فإن هذا التكامل يتحول إلى النوع الأول.

أمثلة محلولة

<u>مثال (1):</u> إذا كان $0<k<1$ فاثبت أن التكامل التام من النوع الأول $I(k)$ يعطى فى صورة المتسلسلة اللانهائية الآتية:

$$F(k)=\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^4k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^6k^6+\cdots\cdots\right]$$

<u>الحل:</u> باستخدام مفكوك ذات الحديث للمقدار $(1-x)^{-½}$

$$(1-x)^{-½}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\left(\frac{-1}{2}\right)(-x)+\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-x}{2!}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{-x}{3!}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)(x)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)x^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)x^3+\cdots\cdots$$

وبوضع $x = k^2 \sin^2\theta$ نحصل على:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(k^2\sin^2\theta) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)(k^2\sin^2\theta)^2 +$$

$$+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)(k^2\sin^2\theta)^3 + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)k^2\sin^2\theta + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)k^4\sin^4\theta + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)k^6\sin^6\theta + \cdots\cdots$$

وبتكامل الطرفين من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$ نحصل على:

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)k^2\sin^2\theta + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)k^4\sin^4\theta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)k^6\sin^6\theta + \cdots\cdots\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta + \left(\frac{1}{2}\right)k^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)k^4\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\, d\theta +$$

$$+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)k^6\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\, d\theta + \cdots\cdots$$

وباستخدام العلاقة:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\, d\theta = \left[\frac{1.3.5\cdots(n-1)}{2.4.6\cdots n}\right]^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

فإن:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\, d\theta = \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\, d\theta = \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^5\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ F(k)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}k^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)k^4\left[\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]+$$

$$+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)k^6\left[\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^5\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^4k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^6k^6+\cdots\cdots\right]$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (2):</u> احسب قيمة التكامل $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin\ x}}$

<u>الحل:</u> لكى يكون التكامل ناقصيا نحاول جعل الكمية تحت الجذر على الصورة $1-k^2\sin^2\theta$ وذلك بالتعويض عن: $dx=-dy \leftarrow x=\frac{\pi}{2}-y$

$$\therefore\ \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y=1-2\sin^2\frac{y}{2}$$

<u>حدود التكامل للمتغير الجديد y:</u>

عندما $y=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\leftarrow x=0$

عندما $y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0\leftarrow x=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{y}{2}}}$$

وبوضع $2\sin^2\frac{y}{2}=\sin^2 z$

$$\therefore\ \sqrt{2}\ \sin\frac{y}{2}=\sin z\rightarrow\sin\frac{y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z$$

$$\therefore\ \frac{y}{2} = \sin^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z\right] \to y = 2\sin^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z\right]$$

$$\therefore$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 z}}(\sqrt{2}\cos z\, dz) \qquad D(\sin^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}D(u)$$

حيث المتغير الجديد z يتغير من $0 \to \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{y}{2}}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{2}\cos z\, dz}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 z}\sqrt{1-\sin^2 z}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dz}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 z}}$$

والتكامل الأخير هو تكامل ناقصى من النوع الأول حيث $k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\ \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dz}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 z}} = \sqrt{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6+\cdots\right]$$

[باستخدام نتيجة المثال رقم (1)]

ويصبح التكامل بالصورة:

$$F = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6+\cdots\right]$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots\right]$$

<u>مثال (٣):</u> إذا كان $0 < k < 1$ فاثبت أن:

$$E(k)=E(k,\frac{\pi}{2})=\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{k^{2}}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^{4}\frac{k^{4}}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^{6}\frac{k^{6}}{5}-\cdots\right]$$

<u>الحل:</u> باستخدام مفكوك ذات الحديث للمقدار $\sqrt{1-x}$ نجد أن:

$$(1-x)^{1/2}=\sqrt{1-x}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)(-x)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-x}{2!}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-x}{3!}\right)^{3}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{-x}{4!}\right)^{4}+\cdots$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)(x)-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)\frac{x^{2}}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{x^{3}}{5}-\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)\frac{x^{4}}{7}-\cdots$$

وبوضع $x=k^{2}\sin^{2}\theta$ نحصل على:

$$\therefore\qquad=\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}=1-\left(\frac{1}{2}\right)(k^{2}\sin^{2}\theta)-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)\left(\frac{k^{2}\sin^{2}\theta}{3}\right)^{2}-$$

$$-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\left(\frac{k^{2}\sin^{2}\theta}{5}\right)^{3}-\cdots\cdots$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k^{2}}{1}\sin^{2}\theta-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)\frac{k^{4}}{3}\sin^{4}\theta-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{k^{6}}{5}\sin^{6}\theta-\cdots$$

وبتكامل الطرفين من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$ نحصل على:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k^2}{1}\sin^2\theta-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)\frac{k^4}{3}\sin^4\theta-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{k^6}{5}\sin^6\theta-\cdots\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2} d\theta-\left(\frac{1}{2}\right)k^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)\frac{k^4}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\, d\theta-$$

$$-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{k^6}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\, d\theta-\cdots\cdots$$

وباستخدام العلاقة:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\, d\theta=\left(\frac{1.3.5\cdots(n-1)}{2.4.6\cdots n}\right)^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\, d\theta=\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\, d\theta=\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^5\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)k^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)\frac{k^4}{3}\left[\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-$$

$$-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{k^6}{5}\left[\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^5\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\cdots\cdots$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^4\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^6\frac{k^6}{5}-\cdots\cdots\right]$$

وهو المطلوب.

مثال (4): أوجد قيمة التكامل:

$$I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(3x^2+1)\sqrt{(x^2-1)(x^2-3)}}$$

الحل: بالتعويض: $x=\sec\theta$ $\quad dx=\sec\theta\tan\theta\, d\theta \leftarrow$

عندما $x=1$ فإن $\sec\theta=1$ $\theta=0\leftarrow$

عندما $x\to\infty$ فإن $\sec\theta\to\infty$ $\theta=\frac{\pi}{2}\leftarrow$

$$\therefore\quad I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{(3\sec^2\theta+1)\sqrt{(\sec^2\theta-1)(\sec^2\theta+3)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{(3\sec^2\theta+1).\tan\theta.\sqrt{(\sec^2\theta+3)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\, d\theta}{(3\sec^2\theta+1)\sqrt{\sec^2\theta+3}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left(\frac{3}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}+3}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{(3+\cos^2\theta-3)d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3(1-\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{[(3+\cos^2\theta)-3]d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{4-3\sin^2\theta}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{4-3\sin^2\theta}} + \int_0^{\pi/2} \frac{-3d\theta}{\left[3+\left(1-\sin^2\theta\right)\right]\sqrt{4-3\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{-3d\theta}{\left[4-\sin^2\theta\right]\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}} - \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\left[1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right]\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{8}L\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{8}L\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4}\right)$$

وهو المطلوب.

مسائل

مسألة (١): أثبت أن:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+3)}}=\frac{1}{2}F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

حيث:
$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}$$

الحل:

بأخذ التعويض: $x=\sec\theta \qquad \therefore\ dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$

عندما $x=1 \longleftarrow \sec\theta=1 \leftarrow \theta=0$

عندما $x\to\infty \longleftarrow \sec\theta\to\infty \leftarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \qquad I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\ \tan\theta\, d\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)(\sec^2\theta+3)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\ \tan\theta\, d\theta}{\tan\theta\sqrt{(\sec^2\theta+3)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\, d\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta+3)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}+3}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+3(1-\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{4-3\sin\theta}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}=\frac{1}{2}F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

وهو المطلوب.

مسألة (2): أثبت أن:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^3)}} = \frac{1}{3} F\left(\frac{2}{3}\right)$$

حيث:

$$F\left(\frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\theta}}$$

الحل: بأخذ التعويض: $dx = 2\cos\theta d\theta \leftarrow x = 2\sin\theta$

عندما $x = 0$ $\longleftarrow$ $\theta = 0 \leftarrow \sin\theta = 0$

عندما $x = 2$ $\longleftarrow$ $\theta = \frac{\pi}{2} \leftarrow \sec\theta \rightarrow 1$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(4-4\sin^2\theta)(9-\sin^2\theta)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(4\cos^2\theta)(9-4\sin^2\theta)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\, d\theta}{2\cos\theta\sqrt{9-4\sin^2\theta}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{9-4\sin^2\theta}} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\theta}} = \frac{1}{3}F\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}F\left(\frac{2}{3}\right)$$

وهو المطلوب.

مسائل للحل

احسب التكاملات الآتية:

(1) $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx$

(2) $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1+4\sin x^2}\, dx$

(3) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}}$

[$x = \tan\theta$ ضع]

(4) $\int_{0}^{6} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$

[$u \tan\theta$ ثم ضع $u = \sqrt{(x-3)}$ ضع]