الباب الثامن

مقدمة فى المعادلات التكاملية

Integral Equations

مقدمه:

تعتبر المعادلات التكاملية أحد الموضوعات الهامة في الفيزياء الرياضية وتستخدم المعادلات التكاملية كنماذج رياضية للعديد من المسائل العملية والهندسية.

وقد اتجهت البحوث مؤخراً إلى الحلول العددية للمعادلات التكاملية وظهرت طرق مختلفة لحل العديد من الأنواع المشهورة للمعادلات التكاملية. وفى هذا الباب سنحاول إلقاء الضوء على موضوع المعادلات التكاملية وطرق حلها وتطبيقاتها المختلفة.

تعاريف أساسية:

(1) الدالة القابلة للجمع Summable Function

يقال للدالة $f(x)$ الموجبة في الفترة (a,b) أنها قابلة للجمع على تلك الفترة إذا كان التكامل $\int_a^b f(x)dx = A$ حيث A عدد ثابت محدود (finite)، وإذا كانت الدالة $f(x)$ ذات أي إشارة (موجبة أو سالبة) فإنها تكون قابلة للجمع إذا كان $\int_a^b |f(x)|dx = A$ ، حيث A قيمة محدودة.

وهنا سوف نستخدم الفترة الأساسية $I=(a,b)$ ، والمربع الأساسي $\Omega\{a \le x, t \le b\}$.

(2) الفضاء L_2 (a,b):

نقول أن الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل تربيعياً (quadratically Integrable) على الفترة $[a,b]$ إذا كان التكامل $\int_a^b f^2(x)dx = B$، حيث B ثابت محدود (لامنته).

إن فصل (Class) كل الدوال القابلة للتكامل التربيعي على $[a,b]$ يرمز له بالرمز $L_2[a,b]$ أبو بإختصار L_2.

الدالة $F(x,t)$ تسمى قابلة للجمع تربيعياً على $\Omega\{a\leq x,t\leq b\}$ إذا كان التكامل $\int_a^b\int_a^b F^2(x,t)dx\,dt < +\infty$.

وفي هذه الحالة: يعرف المعيار (norm) للدالة $F(x,t)$ بالعلاقة:

$$\|F\| = \sqrt{\int_a^b\int_a^b F^2(x,t)dx\,dt}$$

الخواص الأساسية للدالة L_2:

(1) مجموع دالتين L_2 هو أيضاً دالة L_2.

(2) إذا كان $f(x)\in L_2$ وكان λ عدد حقيقي اختياري فإن: $\lambda f(x)\in L_2$.

(3) إذا كان $f(x)\in L_2\ ,\ g(x)\in L_2$ فيكون لدينا متطابقة شوارز بالصورة:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_s^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

(4) ويعرف حاصل الضرب القياسي لدالتين $f(x)\in L_2\ ,\ g(x)\in L_2$ بالعدد:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

(5) يعرف المعيار (norm) للدالة $f(x)$ في L_2 بالعدد الموجب:

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

(6) إذا أخذنا $f(x), g(x)$ في L_2 فيكون لدينا المتطابقة المثلثية:

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

(7) إذا كان لدينا الدوال: $f(x), f_1(x), {}_2(x), \Lambda, f_n(x)$ القابلة للجمع تربيعياً على (a,b) وكان:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = 0$$

فيقال أن مجموعة الدوال $\{f_1(x), f_2(x), \Lambda\}$ أو $\{f_n(x)\}$ من الدوال L_2 تكون متقاربة في المتوسط (Convergence in the mean) إلى الدالة $f(x)$.

(8) يقال أن مجموعة الدوال $\{f_n(x)\}$ في L_2 تكون متقاربة في المتوسط إلى نفسها إذا كان لكل عدد $\in > 0$ يوجد عدد $N > 0$ بحيث أن:

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 \, dx \leq 0 \quad , \quad for \ n, m > N$$

الفضاء L_2 يكون تاماً (complete) إذا كانت مجموعة الدوال الأساسية في L_2 متقاربة لدالة تقع في L_2.

<u>تقسيم المعادلات التكاملية:</u>

تقسم المعادلات التكاملية بالنسبة إلى شكلها أو بالنسبة إلى نواتها.

أولاً: <u>تقسيم المعادلات بالنسبة لشكلها:</u>

في المعادلات التفاضلية فإن الدالة المجهولة تكون تحت مؤثر التفاضل، أما في المعادلات التكاملية فإن الدالة المجهولة تكون تحت علامة التكامل، وإذا كان هذا المجهول الذي يظهر تحت علامة التكامل غير مرفوع لقوة ما فيقال أن المعادلة التكاملية خطية، أما إذا كان المجهول مرفوعاً لقوة تساوي أو أكبر من أثنين فإن المعادلة التكاملية تكون غير خطية.

الشكل العام للمعادلة التكاملية الخطية هو:

$$\mu\Phi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\Phi(y)dy \qquad \_\_\_(1)$$

النهاية العليا للتكامل (b) تكون ثابتة أو متغيره $(b=x)$.

الدوال $f(x),k(x,y)$ هي دوال معلومة، وتعرف $f(x)$ بالحد الحر (Free Term)، كما تعرف $k(x,y)$ بالنواة (Kernel) للمعادلة التكاملية. أما المعاملات λ,μ فتعرف ببارامترات المعادلة التكاملية. الدالة $\Phi(x)$ هي الدالة المجهولة والمراد إيجادها.

حالات خاصة من (1):

(i) إذا كانت $\mu=0$ نحصل على معادلة فريدهولم (Fredholm Equation) من النوع الأول (First Kind):

$$f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\Phi(y)dy=0$$

(ii) إذا كانت $\mu\neq 0$ نحصل على معادلة فريدهولم من النوع الثاني.

(iii) إذا كانت $\mu=h(x)$ نحصل على معادلة فريدهولم من النوع الثالث:

$$h(x)\,\Phi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\Phi(y)dy$$

(iv) كحالة خاصة من (ii): إذا كانت $\mu=1$ وكذلك $f(x)=0$ فإننا نحصل على معادلة فريدهولم من النوع الثاني المتجانسة:

$$\Phi(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)\Phi(y)dy \qquad \_\_\_(2)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة فريدهولم الخطية المتجانسة من النوع الثاني أو معادلة القيمة الذاتية.

ولقيمة معينة من λ فإن المعادلة (2) يكون لها حل تافه (Trivial Solut.):

$$\Phi(x)=0$$

أما قيم λ التي تعطى حلولاً غير تافهة فتعرف بالقيم المميزة للمعادلة (Characteristic Values)، وتعرف الدالة $\Phi(y)$ بالدالة المميزة المناظرة.

معادلة ڤولتيرا التكاملية (Volterra Integral Equation):

إذا كان الحد العلوي للتكامل في (1) هو كمية متغيرة: $b = x$، فإننا نحصل على الصورة العامة:

$$\mu \Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\Phi(y)dy$$

وتعرف بمعادلة ڤولتيرا، وهي أيضاً لها ثلاث حالات طبقاً لقيم μ:

فإذا كانت $\mu = 0$ فنحصل على معادلة ڤولتيرا من النوع الأول.

وإذا كانت $\mu \neq 0$ نحصل على معادلة ڤولتيرا من النوع الثاني.

وإذا كانت $\mu = h(x)$ نحصل على معادلة ڤولتيرا من النوع الثالث.

ثانياً: تقسيم المعادلات التكاملية بالنسبة لنواتها:

(i) المعادلات التكاملية الشاذة (singular Equation):

إذا كانت النواة $k(x,y)$ (وهي دالة) مستمرة في $L_2(a,b)$ ومحدودة أو قابلة للتكامل التربيعي بمعنى أن $\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 \, dx\, dy < \infty$

أي أن هذا التكامل يكون له قيمة محددة في المربع $a \le x \le b$, $a \le y \le b$ يقال أن المعادلة التكاملية هي من نوع فريدهولم (Fredholm Type) غير الشاذة (Non-Singular)، وإذا كانت النواة لا تخضع لهذه الشروط والتي تعرف بالشروط المنتظمة (Regular Condition) كأن يكون أحد حدود التكامل أو كلاهما يساوي مالا نهاية أو أن تكون النواة لانهائية عند نقطة أو أكثر داخل حدود التكامل فيقال أن المعادلة التكاملية هي معادلة شاذة(Singular) وكمثال لها:

(i) إذا كانت النواة لها شكل دالة كالمان (Caleman Function)

$$k(x,y) = \frac{A(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \quad , \quad 0 \le \alpha < 1$$

أو يكون لها الشكل اللوغارتمي: $k(x,y) = A(x,y)\lambda n|(x-y)|$

حيث $A(x,y)$ دالة ملساء (Smoth Function)، وفي هذه الحالة يقال للمعادلة التكاملية أنها ضعيفة الشذوذ (Weak Singular).

(ii) إذا كانت النواة لها الشكل:
$$k(x,y)=\frac{B(x,y)}{x-y}$$

وتعرف بنواة كوشي (Couchy Kernel) حيث $B(x,y)$ هي دالة قابلة للتفاضل للمتغيرين x,y.

وفي هذه الحالة فإن التكامل:

$$\int_a^b k(x,y)\Phi(y)dy=\int_a^b \frac{B(x,y)}{x-y}\Phi(y)dy$$

الذي يظهر في المعادلة التكاملية هو بوجه عام متباعد (diverges). وفي هذه الحالة تكون المعادلة التكاملية من النوع الشاذ.

(iii) إذا كانت النواة لها الشكل:

$$k(x,y)=\frac{C(x,y)}{(x-y)^2}$$

حيث $C(x,y)$ هي دالة قابلة للتفاضل في x,y، فيقال أن المعادلة التكاملية قوية الشذوذ (Strong Singular)

أنواع أخرى من الأنوية:

(i) إذا كانت: $k(x,y)=k(y,x)$ تسمى النواة متماثلة (Symmetric).

(ii) إذا كانت $k(x,y)=-k(y,x)$ تسمى النواة مضادة التماثل (Skew- Symmetric).

(iii) إذا كان $k(x,y)=k^*(y,x)$ حيث $k^*(y,x)$ هي المرافق المركب لـ$k(x,y)$ فإن النواة تسمى هيرميتية (Hermitian).

(iv) إذا أمكن التعبير عن النواة كمجموع محدود من عدد من الحدود كل حد هو حاصل ضرب دالة في x فقط ودالة في y فقط، أي بالصورة:

$$k(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(y)$$

يقال أن النواة قابلة للفصل أو متحللة (Degenerate).

المعادلة التفاضلية التكاملية (Integro-differential Equation):

في المعادلات التكاملية يظهر المجهول $\Phi(y)$ دائماً تحت مؤثر التكامل، إلا أنه قد يظهر تحت مؤثر التفاضل في نفس المعادلة. فمثلاً

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}+\int_a^b \Phi(y)(1+xy)\,dy=x^2$$

تسمى المعادلة في هذه الحالة بالمعادلة التفاضلية – التكاملية.

معادلة فريدهولم الملتفة (Convolution Equation):

إن العديد من المسائل المهمة في الفيزياء والميكانيكا تؤدي إلى معادلة تكاملية فيها النواة دالة في الفرق $(x-y)$ أي بالصورة:

$$k(x,y)=k(x-y)$$

وتأخذ المعادلة التكاملية الصورة الآتية والتي تعرف بمعادلة فريهولم من النوع الملتف (Convolution):

$$\Phi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x-y)\Phi(y)\,dy=f(x)+\lambda K\Phi$$

حيث $K\Phi=\int_a^b k(x-y)\Phi(y)\,dy$

والنواة هي قابلة للتكامل تربيعياً بمعنى أن:

$$\int_a^b\int_a^b \left|k(x-y)\right|^2 dx\,dy<\infty$$

طرق حل المعادلات التكاملية:

أولاً: إثبات أن دالة ما تشكل حلاً لمعادلة تكاملية:

يعتبر حل المعادلة التكاملية هو دالة إذا عوضنا بها في المعادلة التكاملية فإنها تتحقق وكأمثلة على ذلك:

مثال(1): أثبت أن الدالة

$$\Phi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

هي حل لمعادلة ڤولتيرا الآتية:

$$\Phi(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x k(x,y)\Phi(y)dy$$

حيث $k(x,y)=\dfrac{y}{1+x^2}$

الحل: نعوض عن $\Phi(y)=\dfrac{1}{(1+y^2)^{3/2}}$ في الطرف الأيمن، فإذا أعطانا الطرف الأيسر $\Phi(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ فيكون هذا الحل محققاً للمعادلة التكاملية المعطاه:

$$R.H.S.=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{y}{1+x^2}\frac{1}{(1+y^2)^{3/2}}\,dy$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2(1+x^2)}\int_0^x 2y(1+y^2)^{-3/2}dy$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2(1+x^2)}\left.\frac{(1+y^2)^{-1/2}}{-1/2}\right|_0^x=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}[(1+x^2)^{-1/2}-1]$$

$$=\frac{1}{1+x^2}[1+\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}-1]=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=L.H.S.$$

وهو المطلوب.

مثال(2): أثبت أن الدالة $\Phi(x)=1-x$ هي حل للمعادلة التكاملية

$$x=\int_0^x e^{x-y}\Phi(y)dy$$

الحل:

$$R.H.S.=\int_0^x e^{x-y}[1-y]dy=\int_0^x e^x\cdot e^{-y}dy-\int_0^x(e^x\cdot e^{-y})y\,dy$$

$$=e^x\int_0^x e^{-y}dy-e^x\int_0^x ye^{-y}dy$$

$$=e^x\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_0^x-e^x\left[-y\,e^{-y}\Big|_0^x-\int_0^x e^{-y}dy\right]\quad\left|\begin{array}{l}u=y\ ,dv=e^{-y}dy\\ du=dy\ ,v=-e^{-y}\end{array}\right.$$

$$=-e^x[e^{-x}-e^0]-e^x[-xe^{-x}-(e^{-x}-e^0]$$

$$=e^{-(x-x)}+e^x+xe^{(x-x)}+e^{(x-x)}-e^x$$

$$=-1+e^x+x+1-e^x=x=L.H.S.$$

مثال(3): أثبت أن الدالة $\Phi(x)=3$ هي حل للمعادلة التكاملية

$$x^3=\int_0^x(x-y)^2\,\Phi(y)dy$$

الحل:

$$R.H.S.=\int_0^x(x-y)^2[3]dy=3\int_0^x(x^2-2xy+y^2)dy$$

$$=3x^2\int_0^x dy-6x\int_0^x y\,dy+3\int_0^x y^2\,dy$$

$$=3x^2\cdot y\Big|_0^x-6x\frac{y^2}{2}\Big|_0^x+3\frac{y^3}{3}\Big|_0^x=3x^3-3x^3+x^3=x^3=L.H.S$$

مثال(4): أثبت أن الدالة $\Phi(x)=\frac{1}{2}$ تمثل حلاً للمعادلة التكاملية

$$x^{\frac{1}{2}}=\int_0^x\frac{\Phi(y)}{\sqrt{x-y}}dy$$

الحل:

$$R.H.S.=\int_0^x \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x-y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^x -(x-y)^{-\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-y)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^x=-[x-y]^{\frac{1}{2}}\Big|_0^x$$

$$=-[(x-x)^{\frac{1}{2}}-(x-0)^{\frac{1}{2}}]=-[0-x^{\frac{1}{2}}]=x^{\frac{1}{2}}=L.H.S.$$

مسائل: أثبت أن الدوال الآتية تمثل حلاً للمعادلات التكاملية المقابلة

(i) $\Phi(x)=xe^{x}$

$$\Phi(x)=\sin x+\int_0^x k(x,y)\Phi(y)dy\ ,\ k(x,y)=2\cos(x-y)$$

(ii) $\Phi(x)=x-\frac{x^3}{6}$

$$\Phi(x)=x-\int_0^x k(x,y)\Phi(y)dy\ ,\ k(x,y)=\sinh(x-y)$$

ملحوظة: الأمثلة الآتية على معادلة فريدهولم

مثال(1): أثبت أن الدالة $\Phi(x)=1$ هي حل لمعادلة فريدهولم التكاملية الآتية:

$$e^{x}-x=\Phi(x)+\int_0^1 k(x,y)\Phi(y)dy$$

حيث $k(x,y)=x(e^{xy}-1)$

نعوض عن $\Phi(x)=1$، وعن $\Phi(y)=1$ في الطرف الأيمن. فإذا أعطى لنا الطرف الأيسر فتكون Φ المعطاة هي حل للمعادلة.

$$R.H.S.=1+\int_0^1 x(e^{xy}-1)(1)dy=1+\int_0^1 xe^{xy}dy-x\int_0^1 dy$$

$$=1+x\frac{e^{xy}}{x}\Big|_0^1-x\cdot y\Big|_0^1=1+(e^{x}-e^{0})-x$$

$$=1+e^{x}-1-x=e^{x}-x=l.H.S.$$

مثال(2): أثبت أن الدالة $\Phi(x)=xe^{-x}$ هي حل لمعادلة فريدهولم التكاملية الآتية:

$$(x-1)e^{-x}=\Phi(x)-\int_0^\infty k(x,y)\Phi(y)\,dy$$

حيث $k(x,y)=4e^{-(x+y)}$

الحل: نعوض من $\Phi(x)=xe^{-x}$ وعن $\Phi(y)=ye^{-y}$ في الطرف الأيمن:

$$R.H.S.=xe^{-x}-4\int_0^\infty e^{-(x+y)}\cdot ye^{-y}\,dy$$

$$=xe^{-x}-4e^{-x}\int_0^\infty e^{-y}\cdot y\cdot e^{-y}\,dy=xe^{-x}-4e^{-x}\int_0^\infty ye^{-2y}\,dy$$

وبوضع: $u=y\ ,\ du=dy$

$$v=-\frac{1}{2}e^{-2y}\ ,\ dv=e^{-2y}\,dy$$

$$\therefore I=[-\frac{1}{2}ye^{-2y}\Big|_0^\infty-\frac{1}{4}\int_0^\infty -2e^{-2y}\,dy=[0-\frac{1}{4}e^{-2y}\Big|_0^\infty]=[0-\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{4}(1)]=\frac{1}{4}$$

$$\therefore R.H.S.=xe^{-x}-4e^{-x}[\frac{1}{4}]=xe^{-x}-e^{-x}=e^{-x}(x-1)=L.H.S.$$

مثال(3): أثبت أن الدالة $\Phi(x)=\cos x$ لا تمثل حلاً لمعادلة فريدهولم:

$$\sin x=\Phi(x)-\int_0^\pi k(x,y)\Phi(y)\,dy$$

حيث $k(x,y)=(x^2+y)\cos y$

ملحوظة: لحل هذا المثال نعوض عن $\Phi(x)=\cos x$ وعن $\Phi(y)=\cos y$ في الطرف الأيمن ونجري عملية التكامل فإذا حصلنا على الطرف الأيسر فإن Φ المعطاة تكون حلاً لمعادلة فريدهولم وإذا لم نحصل على هذا الطرف فإن Φ المعطاة لا تمثل حلاً للمعادلة.

<u>الحل:</u>

$$L.H.S = \cos x - \int_0^{\pi} (x^2 + y)\cos y \cdot \cos y \, dy$$

$$= \cos x - \int_0^{\pi} (x^2 + y)\cos^2 y \, dy \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن

$$\int_0^{\pi} (x^2 + y^2)\cos^2 y \, dy = x^2 \int_0^{\pi} \cos^2 y \, dy - \int_0^{\pi} y\cos^2 y \, dy \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dy + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2\cos 2y \, dy$$

$$= \frac{1}{2}y \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2y \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \_\_\_\_(3)$$

$$\int_0^{\pi} y\cos^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} y(1+\cos 2y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} y\,dy + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} y\cos 2y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}I = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}I \qquad \_\_\_\_(4)$$

$$I = \int_0^{\pi} y\cos 2y \, dy = \frac{y\sin 2y}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2y\,dy \qquad \left| \begin{array}{l} u = y \; , dv = \cos 2y\,dy \\ du = dy \; , v = \dfrac{\sin 2y}{2} \end{array} \right.$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2y}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 0) = \frac{1}{4}(1-1) = 0 \qquad \_\_\_\_(5)$$

$$\therefore \int_0^{\pi} y\cos^2 y \, dy = \frac{\pi^2}{4} + 0 = \frac{\pi^2}{4} \qquad \_\_\_\_(6)$$

بالتعويض من (6),(3) في (2):

$$\int_0^{\pi} (x^2 + y^2)\cos^2 y\,dy = \frac{x^2\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$$

ويصبح (1):

$$L.H.S = \cos x - \frac{x^2\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} \neq R.H.S$$

$\therefore$ الدالة $\Phi(x) = \cos x$ لا تمثل حلاً للمعادلة التكاملية المعطاة.

ثانياً: تكوين المعادلة التكاملية المناظرة لمعادلة تفاضلية خطية

(العلاقة بين المعادلات التفاضلية الخطية ومعادلة ڤولتيرا التكاملية):

فـي هـذه الفقـرة سـوف نـرى كيفيـة تكـون المعـادلات التكامليـة المنـاظرة لمعـادلات تفاضلية خطية معطاة مع شروط ابتدائية معينة.

وسوف نرى أن حل المعادلة التفاضلية الخطية

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \Lambda + a_n(x) y = f(x) \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

ذات المعاملات $a_i(x)$، حيث الشروط الإبتدائية:

$$y(0) = c_0 \ , \ y'(0) = c_1 \ , \Lambda \ , \ y^{n-1}(0) = c_{n-1} \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

يمكن أن تختزل إلـى حـل معادلـة تكامليـة مـن النـوع الثـاني، ولتوضـيح ذلـك نأخذ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية:

$$y^{(2)} + a_1(x) y^{(1)} + a_2(x) y = F(x) \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y(0) = c_0 \ , \ y'(0) = c_1 \qquad \text{\_\_\_(4)}$$

بوضع:

$$y^{(2)} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \phi(x) = \frac{dy^{(1)}}{dx} \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

وبأخذ الشروط الإبتدائية (4) نجد أن:

<u>أولاً</u>: بتكامل (5):

$$y^{(1)} = \int_0^x \phi(x) dx = \int_0^x \phi(t) dt + c_1 = \frac{dy}{dx} \qquad \text{\_\_\_(6)}$$

<u>ثانياً</u>: بالتكامل مرة ثانية:

$$y = \int_0^x \left[\int_0^x \phi(t) dt + c_1 \right] dx = \int_0^x (x-t) \phi(t) dt + c_1 x + c_2 \qquad \text{\_\_\_(7)}$$

وهنا استخدمنا العلاقة الآتية التي تحول التكامل المتضاعف إلى تكامل أحادي:

$$\int_0^u du \int_0^v dv \,\Lambda\, \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad \_\_\_(\mathrm{I})$$

بالتعويض من (7),(6),(5) في المعادلة التفاضلية (3) نجد أن:

$$\phi(x)+\int_0^x a_1(x)\phi(t)dt + c_1 a_1(x)$$

$$+\int_0^x a_2(x)(x-t)\phi(t)dt + c_1 x a_2(x) + c_0 a_2(x) = F(x)$$

$$\therefore \phi(x)+\int_0^x [a_1(x)+a_2(x)(x-t)]\phi(t)dt$$

$$= F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_1(x) - c_0 a_2(x) \qquad \_\_\_\_(8)$$

وبوضع:

$$k(x,t) = -[a_1(x)+a_2(x)(x-t)] \qquad \_\_\_(9)$$

$$f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x) \qquad \_\_\_(10)$$

تأخذ المعادلة (8) الصورة:

$$\phi(x) = \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt + f(x) \qquad \_\_\_(11)$$

وهي معادلة ڤولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

<u>ملحوظة</u>: يمكن تحويل التكامل الثنائي أو الثلاثي إلى تكامل أحادي بإستخدام العلاقتين:

$$\int_0^x\int_0^u \mathrm{K}\, f(t)dt\, du = \int_0^x \Lambda\, (x-t) f(t)dt$$

$$\int_0^x\int_0^v\int_0^u \Lambda\, f(t)dt\, du\, dv = \int_0^x \Lambda\, \frac{(x-2)^2}{2} f(t)dt$$

وبتعميم هاتين العلاقتين نحصل على العلاقة (I)، ومنها أيضاً:

$$\int_0^x\int_0^x \mathrm{K}\, f(t)dt\, dx = \int_0^x \Lambda\, (x-t) f(t)dt$$

أمثلة محلولة

مثال(1): كون المعادلة التكاملية المناظرة للمعادلة التفاضلية:

$$y''+xy'+y=0 \qquad \_\_\_(1)$$

ذات الشروط الابتدائية:

$$y(0)=1 \; , \; y'(0)=0 \qquad \_\_\_(2)$$

الحل: نضع:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\phi(x) \qquad \_\_\_(3)$$

وبتكامل (3):

$$y'=\int_0^x \phi(t)\,dt+y'(0)=\int_0^x \phi(t)\,dt \qquad \_\_\_(4)$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية:

$$\int_0^x dy=\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx$$

$$\therefore y=\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx+y(0) \;\rightarrow\; \therefore y=\int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt+1 \qquad \_\_\_(4)$$

بالتعويض من (4),(3) في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$\phi(x)+\int_0^x x\phi(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt+1=0$$

$$\therefore \phi(x)=-1-\int_0^x (2x-t)\phi(t)\,dt$$

مثال(2): كون المعادلات التكاملية المناظرة للمعادلات التفاضلية الآتية ذات الشروط الابتدائية المعطاة:

(i) $y''+y=\cos x \quad , \quad y(0)=y'(0)=0$

(ii) $y''-y'\sin x+e^x y=x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=1$

(iii) $y''+(1+x^2)y=\cos x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=2$

الحل:

(i) $y''+y=\cos x \quad , \quad y(0)=y'(0)=0$

نضع $y''=\phi(x)$

وبإجراء التكامل:

$$\therefore y'=\int_0^x \phi(t)dt+y'(0)=\int_0^x \phi(t)dt$$

وبالتكامل مرة ثانية:

$$\therefore \int_0^x dy=\int_0^x\int_0^x \phi(t)dt\, dx$$

$$\therefore y=\int_0^x (x-t)\phi(t)dt+y(0)=\int_0^x (x-t)\phi(t)dt$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\phi(x)+\int_0^x (x-t)\phi(t)dt=\cos x$$

$$\therefore \phi(x)=\cos x-\int_0^x (x-t)\phi(t)dt=f(x)+\int_0^x (t-x)\phi(t)dt$$

$$\therefore f(x)=\cos x \ , \ k(x,t)=(t-x)$$

(ii) $y''-y'\sin x+e^x y=x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=1$

نضع $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\phi(x)$

وبإجراء التكامل:

$$\therefore y'=\int_0^x \phi(t)dt+y'(0)=\int_0^x \phi(t)dt-1$$

وبالتكامل مرة ثانية:

$$\therefore \int_0^x dy=\int_0^x\int_0^x \phi(t)dt\, dx-\int_0^x (1)dx$$

$$\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx = \int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt$$

$$\therefore y = \int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx - x + y(0)$$

$$= \int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx - x + 1 = \int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt - x + 1$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\phi(x) - \sin x\left[\int_0^x \phi(t)\,dt - 1\right] + e^x\left[\int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt - 1x + 1\right] = x$$

$$\therefore \phi(x) - \int_0^x \phi(t)\,dt\,[\sin x - (x-t)e^x] + \sin x - (x-1)e^x = x$$

$$\phi(x) = x - \sin x + (x-1)e^x + \int_0^x [\sin x - (x-t)e^x]\,\phi(t)\,dt$$

$$= f(x) + \int_0^x k(x,t)\phi(t)\,dt$$

$$\therefore f(x) = x - \sin x + (x-1)e^x$$

$$k(x,t) = \sin x - (x-t)e^x$$

(iii) $y'' + (1+x^2)y = \cos x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=2$

نضع $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \phi(x)$

وبإجراء التكامل:

$$\therefore y' = \int_0^x \phi(t)\,dt + y'(0) = \int_0^x \phi(t)\,dt + 2$$

وبالتكامل مرة ثانية:

$$\therefore \int_0^x dy = \int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx + \int_0^x 2\,dx$$

$$\therefore y = \int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx + 2x + y(0)$$

$$= \int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx + 2x = \int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt + 2x$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\phi(x)+(1+x^2)\left[\int_0^x (x-t)\phi(t)dt+2x\right]=\cos x$$

$$\phi(x)+\int_0^x \phi(t)dt[(1+x^2)(x-t)]=\cos x-(1+x^2)(2x)$$

$$\therefore\ \phi(x)=\cos x-2x(1+x^2)-\int(1+x^2(x-t)\phi(t)dt$$

$$=f(x)+\int_0^x k(x,t)\phi(t)dt$$

حيث $f(x)=\cos x-2x(1+x^2)$

$$k(x,t)=-[(1+x^2)(x-t)]=(1+x^2)(t-x)$$

<u>مسألة</u>: كون المعادلات التكاملية المناظرة للمعادلات التفاضلية الآتية ذات الشروط الابتدائية المعطاة

(i) $y'''-2xy=0\ ,\ \ y(0)=\dfrac{1}{2}\ ,\ \ y'(0)=y''(0)=1$

(ii) $y'''+xy''+(x^2-x)y=xe^x+1\ ,\ y(0)=y'(0)=1,\ \ y''(0)=0$

<u>حل المسألة</u>:

(i) $y'''-2xy=0\ ,\ \ y(0)=\dfrac{1}{2}\ ,\ \ y'(0)=y''(0)=1$

نضع $\phi(x)=\dfrac{d^3y}{dx^3}=y'''$ ، وبإجراء التكامل:

$$\therefore\ y''=\int_0^x \phi(t)dt+y''(0)=\int_0^x \phi(t)dt+1$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية:

$$y'=\int_0^x\int_0^x \phi(t)dt\,dx+x+y'(0)=\int_0^x\int_0^x \phi(t)dt\,dx+x+1$$

وبإجراء التكامل مرة ثالثة:

$$\therefore y=\int_0^x\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx\,dx+\frac{x^2}{2}+x+y(0)$$

$$=\int_0^x\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx\,dx+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$$

ولكن من علاقة تحويل التكامل المتضاعف إلى تكامل أحادي:

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx\,dx=\frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2\,\phi(t)\,dt$$

$$\therefore y=\frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2\,\phi(t)\,dt+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه :

$$\phi(x)-2x\left[\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\,\phi(t)\,dt+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right]=0$$

$$\therefore \phi(x)=x\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)+\int_0^x x(x-t)^2\,\phi(t)\,dt$$

$$=f(x)+\int_0^x k(x,t)\,\phi(t)\,dt$$

حيث

$$f(x)=x\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{x^2+2x+1}{2}\right)=\frac{x}{2}(x+1)^2$$

$$k(x,t)=x(x-t)^2$$

(ii) $y'''+xy''+(x^2-x)y=xe^x+1\,,\ y(0)=y'(0)=1,\ \ y''(0)=0$

نضع $y'''=\phi(x)$ ، وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\therefore y''=\int_0^x \phi(t)\,dt+y''(0)=\int_0^x \phi(t)\,dt$$

$$\therefore y'=\int_0^x y''=\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx \ \rightarrow\ y'=\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx+y'(0)=\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx+1$$

وبإجراء التكامل:

$$\therefore y=\int_0^x\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx\,dx+x+y(0)=\int_0^x\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx\,dx+x+1$$

ولكن:

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x \phi(t)\,dt\,dx\,dx=\frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2\,\phi(t)\,dt$$

$$\therefore y=\frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2\,\phi(t)\,dt+x+1$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة :

$$\phi(x)+x\int_0^x \phi(t)\,dt+(x^2-x)\left[\frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2\,\phi(t)\,dt+x+1\right]=xe^x+1$$

$$\therefore \phi(x)=xe^x+1-(x^2-x)(x+1)-\int_0^x [x+\frac{1}{2}(x^2-x)(x+t)^2\,\phi(t)\,dt]$$

$$=f(x)+\int_0^x k(x,t)\,\phi(t)\,dt$$

حيث:

$$f(x)=xe^x+1-(x^2-x)(x+1)=xe^x+1-x(x-1)(x+1)$$

$$=xe^x+1-x(x^2-1)=x(e^x-x^2+1)+1$$

$$k(x,t)=-[\frac{1}{2}(x^2-x)(x-t)^2+x]$$

ثالثاً: حل معادلات ڤولتيرا التكاملية ذات النواة المتفككة (أو المتحللة):

Resolvent Ketnel of Vilterra Integral Equations

الأنوية المتكررة والنواة المتحللة (أو المتفككة):

نفرض أن لدينا معادلة ڤولتيرا من النوع الثاني بالصورة:

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)\phi(t)dt \qquad \_\_\_(1)$$

حيث $k(x,t)$ دالة متصلة عندما: $0\le t\le x\,,\,0\le x\le a$

$f(x)$ دالة متصلة عندما: $0\le x\le a$

سنبحث عن حل للمعادلة (1) على شكل متسلسلة قوى لا نهائية في λ بالصورة:

$$\phi(x)=\phi_0(x)+\lambda\phi_1(x)+\lambda^2\phi_2(x)+\Lambda \qquad \_\_\_(2)$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$\phi_0(x)+\lambda\phi_1(x)+\lambda^2\phi_2(x)+\Lambda$$

$$=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)[\phi_0(t)+\lambda\phi_1(t)+\Lambda+\lambda^n\phi_n(t)]dt \qquad \_\_\_(3)$$

بمقارنة معاملات قوى λ في الطرفين:

الحد المطلق : $\phi_0(x)=f(x)$

معاملات λ : $\phi_1(x)=\int_0^x k(x,t)\phi_0(t)dt=\int_0^x k(x,t)f(t)dt \qquad \_\_\_(4)$

معاملات λ^2 : $\phi_2(x)=\int_0^x k(x,t)\phi_1(t)dt=\int_0^x k(x,t)\int_0^x k(t,t_1)f(t_1)dt_1\,dt$

وهكذا ...

والآن: يمكن إثبات أنه تحت بعض الشروط بالنسبة إلى $f(x),k(x,t)$ فإن المتسلسلة (2) تتقارب بانتظام في x,λ حيث $x\in[0,a]$ ومجموعها هو الحل الوحيد للمعادلة (1):

أيضاً: من (4) ينتج أن:

$$\phi_1(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt$$

$$\phi_2(x)=\int_0^x k(x,t)\left[\int_0^x k(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt$$

$$=\int_0^x f(t_1)dt_1\int_{y_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt=\int_0^x k_2(x,t_1)f(t_1)dt_1 \quad \_\_\_(6)$$

حيث

$$k_2(x,t_1)=\int_{t_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt \quad \_\_\_(7)$$

وبصفة عامة فإن:

$$\phi_n(x)=\int_0^x k_n(x,t)f(t)dt \quad , \quad n=1,2,\Lambda \quad \_\_\_(8)$$

تسمى الدوال $k_n(x,t)$ بالأنوية المتكررة. ويمكن تعيين هذه الأنوية باستخدام الصيغ التكرارية الآتية: $k_1(x,t)=k(x,t)$

$$k_{n+1}(x,t)=\int_t^x k(x,z)k_n(z,t)dz \quad , \quad n=1,2,\Lambda \quad \_\_\_(9)$$

باستخدام (9),(8) يمكن كتابة المعادلة (2) بالصورة:

$$\phi(x)=f(x)+\sum_{v=1}^{\infty}\lambda^v\int_0^x k_v(x,t)f(t)dt \quad \_\_\_(10)$$

وبكتابة

$$\sum_{v=0}^{\infty}\lambda^v k_{v+1}(x,t)=R(x,t;\lambda) \quad \_\_\_(11)$$

وتسمى بالنواة المتحللة (أو المتفككة) للمعادلة التكاملية (1) وهي متسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً وبانتظام في حالة كون $k(x,t)$ تكون نواة متصلة.

ونلاحظ أن الأنوية المتكررة $k_n(x,t)$ والنواة المتحللة $R(x,t;\lambda)$ لا تعتمد على النهائية السفلى في المعادلة التكاملية.

إيجاد النواة المتحللة $R(x,t;\lambda)$ للمعادلة التكاملية

إن النواة المتحللة $R(x,t;\lambda)$ تحقق العلاقة الآتية:

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{v=0}^{\infty}\lambda^{v}k_{v+1}(x,t)=k_{1}(x,t)+\sum_{v=1}^{\infty}\lambda^{v}k_{v+1}(x,t)$$

$$=k(x,t)+\sum_{v=1}^{\infty}\lambda^{v}\int_{t}^{x}k(x,z)k_{v}(z,t)dz$$

$$=k(x,t)+\int_{t}^{x}k(x,z)[\sum\lambda^{v}k_{v}(z,t)dz]$$

$$=k(x,t)+\int_{t}^{x}k(x,z)[\lambda k_{1}+\lambda^{2}k_{2}+\Lambda]dz$$

$$=k(x,t)+\lambda\int_{t}^{x}k(x,z)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}k_{i+1}\,dz$$

$$=k(x,t)+\lambda\int_{0}^{x}k(x,z)R(z,t;\lambda)dz \qquad \_\_\_(12)$$

باستخدام النواة المتحللة فإن حل المعادلة التكاملية (1) يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{x}R(z,t;\lambda)f(t)dt \qquad \_\_\_(13)$$

أمثلة محلولة

مثال(١): أوجد النواة المتحللة لمعادلة فولتيرا التكاملية ذات النواة $k(x,t)=1$

الحل: نفرض أن $k_1(x,t)=k(x,t)=1$

ومن العلاقة (9):

$$k_2(x,t)=\int_t^x k(x,z)k_1(z,t)\,dz=\int_t^x dz=x-t$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x 1\cdot(z-t)\,dz=\frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$k_4(x,t)=\int_t^x 1\cdot\frac{(z-t)^2}{2}\,dz=\frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$k_n(x,t)=\int_t^x 1\cdot\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}\,dz=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

وبالتالي فمن تعريف النواة المتحللة:

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{v}\frac{(x-t)^n}{n!}=e^{\lambda(x-t)}$$

وهو المطلوب .

مثال(٢): أوجد الأنوية المتحللة لمعادلات فولتيرا التكاملية ذات الأنوية التالية:

(i) $k(x,t)=e^{x-t}$, (ii) $k(x,t)=e^{x^2-t^2}$

(iii) $k(x,t)=\dfrac{1+x^2}{1+t^2}$, (iv) $k(x,t)=\dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$

الحل:

(i) $k(x,t)=e^{x-t}$

$$k_1(x,t)=k(x,t)=e^{x-t}$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x e^{x-z}\cdot e^{z-t}\,dz=e^{x-t}\int_t^x e^{-z}e^{z}\,dz$$

$$=e^{x-t}\int_t^x e^{0}\,dz=e^{x-t}\int_t^x dz=e^{x-t}(x-t)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x e^{x-z}\cdot e^{z-t}(z-t)dz=e^{x-t}\int_t^x (z-t)\,dz$$

$$=e^{x-t}\left[\frac{(z-t)^2}{2}\right]_t^x=e^{x-t}\left[\frac{(x-t)^2}{2}-\frac{(t-t)^2}{2}\right]$$

$$=e^{x-t}\frac{1}{2!}(x-t)^2$$

$$k_4(x,t)=\int_t^x e^{x-z}\frac{1}{2!}e^{z-t}(z-t)^2\,dz=\frac{1}{2}e^{x-t}\int_t^x e^{0}(z-t)^2\,dz$$

$$=\frac{1}{2}e^{x-t}\frac{(z-t)^3}{3}\Big|_t^x=\frac{1}{2}e^{x-t}\left[\frac{(x-t)^3}{3}-\frac{(t-t)^3}{3}\right]=e^{x-t}\frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$k_n(x,t)=e^{x-t}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$R(x,t;\lambda)=\sum\lambda^n e^{x-t}\frac{(x-t)^n}{n!}=e^{x-t}\cdot e^{\lambda(x-t)}=e^{(x-t)+\lambda(x-t)}=e^{(1+\lambda)(x-t)}$$

(ii) $k(x,t)=e^{x^2-t^2}$

$$k(x,t)=e^{x^2-t^2}$$

$$k_1(x,t)=k(x,t)=e^{x^2-t^2}$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot e^{z^2-t^2}\,dz=e^{x^2-t^2}\int_t^x e^0\,dz=e^{x^2-t^2}\,(x-t)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot e^{z^2-y^2}\,(z-t)dz$$

$$=e^{x^2-t^2}\left[\frac{(z-t)^2}{2}\right]_t^x=e^{x^2-t^2}\left[\frac{1}{2}(x-t)^2\right]$$

$$k_4(x,t)=\int_t^x e^{x^2-z^2}\cdot e^{z^2-t^2}\cdot\frac{1}{2}(z-t)^2\,dz=\frac{1}{2}e^{x^2-t^2}\int_t^x (z-t)^2\,dz$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2-t^2}\left[\frac{(x-t)^3}{3}-\frac{(t-t)^3}{3}\right]=e^{x^2-t^2}\,\frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$k_n(x,t)=e^{x^2-t^2}\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\therefore R(x,t;\lambda)=\sum\lambda^n e^{x^2-t^2}\,\frac{(x-t)^n}{n!}=e^{x^2-t^2}\cdot e^{\lambda(x-t)}$$

(iii) $k(x,t)=\dfrac{1+x^2}{1+t^2}$

$$k_1(x,t)=k(x,t)=\frac{1+x^2}{1+t^2}$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x\frac{1+x^2}{1+z^2}\cdot\frac{1+z^2}{1+t^2}dz=\frac{1+x^2}{1+t^2}\int_t^x dz=\frac{1+x^2}{1+t^2}(x-t)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x\frac{1+x^2}{1+z^2}\cdot\frac{1+z^2}{1+t^2}\cdot(z-t)dz=\frac{1+x^2}{1+t^2}\int_t^x (z-t)\,dz$$

$$=\frac{1+x^2}{1+t^2}\left[\frac{(x-t)^2}{2!}-\frac{(t-t)^2}{2!}\right]=\frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$k_4(x,t)=\int_t^x \frac{1+x^2}{1+z^2}\cdot\frac{1+z^2}{1+t^2}\frac{(z-t)^2}{2!}dz$$

$$=\frac{1+x^2}{1+t^2}\int_t^x \frac{(z-t)^2}{2!}dz=\frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$k_n(x,t)=\frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$R(x,t;\lambda)=\sum\frac{1+x^2}{1+t^2}\frac{(x-t)^n}{n!}=\frac{1+x^2}{1+t^2}e^{\lambda(x-t)}$$

(iv) $k(x,t)=\dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$

$$k_1(x,t)=k(x,t)=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x \frac{2+\cos x}{2+\cos z}\cdot\frac{2+\cos z}{2+\cos t}dz=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}\int_t^x dz=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}(x-t)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x \frac{2+\cos x}{2+\cos z}\cdot\frac{2+\cos z}{2+\cos t}(z-t)dz=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}\int_t^x (z-t)dz$$

$$=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}\cdot\frac{(z-t)^2}{2}\Big|_t^z=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}\frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$k_n(x,t)=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$R(x,t;\lambda)=\sum\lambda^n\frac{2+\cos x}{2+\cos t}\cdot\frac{(x-t)^n}{n!}=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}e^{\lambda(x-t)}$$

مسألة: أوجد النواة المتحللة لمعادلة فولتيرا التكاملية ذات النواة $k(x,t)=x-t$

حل المسألة:

$$k_1(x,t)=k(x,t)=x-t$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x k(x,z)k_1(z,t)\,dz=\int_t^x (x-z)(x-t)\,dz$$

وبالتكامل بالتجزئ

$$u=x-z \quad , dv=(z-t)\,dz \; , du=-dz \; , \; v=\frac{(z-t)^2}{2}$$

$$k_2=(x-z)\frac{(z-t)^2}{2}\Big|_t^z+\int_t^z\frac{(z-t)^2}{2}dz=\frac{(z-t)^3}{3!}$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x k(x,z)\,k_2(z,t)\,dz=\int_t^x (x-z)\frac{(z-t)^3}{3!}dz$$

وبالتكامل بالتجزئ:

$$u=x-z \quad , dv=(z-t)^3\,dz \; , du=-dz \; , \; v=\frac{(z-t)^4}{4}$$

$$\therefore k_3=\frac{1}{3!}[(x-z)\frac{(z-t)}{4}\Big|_t^x+\int_t^x\frac{(z-t)^4}{4}dz$$

$$=\frac{1}{4!}\frac{(z-t)^5}{5}\Big|_t^x=\frac{1}{5!}(x-t)^5$$

$$k_4(x,t)=\int_t^x k(x,z)k_3(z,t)\,dz=\frac{1}{5!}\int_t^x (x-z)(z-t)^5\,dz$$

وبالتكامل بالتجزئ: $u=x-z \quad , dv=(z-t)^5\,dz \; , du=-dz \; , \; v=\frac{(z-t)^6}{6}$

$$\therefore k_4=\frac{1}{5!}[(x-z)\frac{(z-t)^6}{6}]\Big|_t^x+\int_t^x\frac{(z-t)^6}{6}dz$$

$$=\frac{1}{6!}\int_t^x (z-t)^6\,dz=\frac{1}{6!}\frac{(z-t)^7}{7}\Big|_t^x=\frac{1}{7!}(x-t)^7$$

$$k_n(x,t)=\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\therefore R(x,t;\lambda)=\sum\lambda^n k_{n+1}=\sum\lambda^n\frac{(x-t)^{2(n+1)-1}}{[2(n+1)-1]!}=\sum\lambda^n\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ولكن

$$\sinh x=\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وبكتابة:

$$\lambda^n=\lambda^{\frac{1}{2}(2n+1)-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\sqrt{\lambda})^{2n+1}$$

$$\therefore R(x,t;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum(\sqrt{\lambda})^{2n+1}\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sinh\sqrt{\lambda}(x-t)$$

وهو المطلوب.

حالة: إذا كانت النواة $k(x,t)$ كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$ في t

إذا كانت النواة $k(x,t)$ كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$ في t فيمكن تمثيلها في الصورة الآتية:

$$k(x,t)=a_0(x)+a_1(x)(x-t)+a_2\frac{(x-t)^2}{2!}+\Lambda$$

$$+a_{n-1}(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{\_\_\_}(14)$$

والمعاملات $a_k(x)$ هي دوال متصلة في $[0,a]$.

إذا كانت الدالة $g(x,t;\lambda)$ معرفة كحل لمعادلة تفاضلية بالصورة:

$$\frac{d^n g}{dx^n}-\lambda[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}+a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}+\Lambda+a_{n-1}(x)g]=0 \text{\_\_\_}(15)$$

تحقق الشروط

$$g|_{(x=t)}=\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=t}=\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=t}=\Lambda=\left.\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\right|_{x=t}=0,\ \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}=1 \qquad \text{\_\_\_}(16)$$

فإن النواة المتحللة $R(x,t;\lambda)$ تعرف في هذه الحالة بالعلاقة:

$$R(x,t;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n} \qquad \_\_\_(17)$$

وبالمثل عندما:

$$k(x,t)=b_0(t)+b_1(t)(t-x)+\Lambda+\frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1} \qquad \_\_\_(18)$$

فإن النواة المتحللة تكون

$$R(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(t,x;\lambda)}{dt^n} \qquad \_\_\_(19)$$

حيث $g(x,t;\lambda)$ هي حل للمعادلة

$$\frac{d^n g}{dt^n}+\lambda[b_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dy^{n-1}}+\Lambda+b_{n-1}(t)g]=0 \qquad \_\_\_(20)$$

وتحقق الشروط (16).

أمثلة محلولة

مثال(1): أوجد النواة المتحللة للمعادلة التكاملية ذات النواة $k(x,t)=x-t$ حيث $\lambda=1$

الحل: المعادلة التكاملية التي فيها $\lambda=1$، $k(x,t)=x-t$ هي:

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^x(x-t)\phi(t)dt$$

ومن (14) فإن: $a_1(x)=1$ وجميع الدوال $a_k(x)=0$

المعادلة (15) يكون لها الشكل:

$$\frac{d^2g}{dx^2}-g(x,t;1)=0$$

ملحوظة: هنا أخذنا $n=2$ لأن آخر حد في كثيرة الحدود

$$a_{n-1}g=a_{2-1}g=a_1g=g(x,t;1)$$

مع الشروط [المعادلة (16)]: $g|_{x=t}=0 \;,\; g'|_{x=t}=1$

المعادلة المساعدة: $m^2-1=0 \quad \leftarrow \quad m=\pm 1$

ويصبح الحل العام:

$$g(x,t;1)=g(x,t)=c_1(t)e^{x}+c_2(t)e^{-x}$$

من الشرطين المعطيين:

$$c_1(t)e^{t}+c_2(t)e^{-t}=0 \quad , \quad c_1(t)e^{t}-c_2(t)e^{-t}=1$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$c_1(t)=\frac{1}{2}e^{-t} \; , c_2(t)=-\frac{1}{2}e^{t}$$

وبالتالي فإن: $g(x,t)=\frac{1}{2}(e^{x-t}-e^{-(x-t)})=\sinh(x-t)$

وباستخدام المعادلة (17) نجد أن:

$$R(x,t;1)=\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_x=\sinh(x-t)|_x=\sinh(x-t)$$

<u>مثال(2):</u> أوجد النواة المتحللة للمعادلة التكاملية ذات النواة:

$k(x,y)=2x$ حيث $\lambda=1$

<u>الحل:</u>

$n-1=0 \therefore n=1 \quad | \quad a_0(x)=2x \; , a_1(x)=0$

نكون المعادلة: $g'-2\lambda x g=0$ حيث $g'=\frac{dg}{dx}$

$$\therefore g'-2xg=0 \rightarrow \int\frac{dg}{g}=\int 2x\,dx$$

$$\therefore \lambda n g=x^2+A \rightarrow g=e^{x^2}+A$$

ولإيجاد الثابت A :

$$g(t)=1\,,\; e^{t^2+A}=1=e^0$$

$$\therefore t^2+A=0 \to A=-t^2 \to g=e^{x^2-t^2}$$

$$\therefore R(x,t;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\frac{dg}{dx}=2xe^{x^2-t^2}$$

<u>مسألة:</u> أوجد النواة المتحللة للمعادلة التكاملية ذات النواة $k(x,t)=2-(x-t)$ حيث $\lambda=1$

<u>حل المسألة:</u>

$$k(x,t)=a_0(x)+a_1(x)(x-t) \qquad \big|\; n-1=1 \to n=2$$

$$a_0=2\,,\; a_1=-1$$

نكون المعادلة على الصورة:

$$\frac{d^2g}{dx^2}-[2\frac{dg}{dx}-g]=0$$

$$\therefore \frac{d^2g}{dx^2}-2\frac{dg}{dx}+g=0 \;\to\; (D^2-2D+1)g=0 \to (D-1)^2 g=0$$

وحل هذه المعادلة هو:

$$g(x,t)=(Ax+B)e^x$$

نوجد g' :

$$g'(x,t)=(Ax+B)e^x+Ae^x=Axe^x+Be^x+Ae^x$$
$$=Ae^x(1+x)+Be^x$$

نطبق الشرطين: $g|_{x=t}=0\,,\; g'|_{x=t}=1$

$$\therefore Ate^t+Be^t=0\,,\quad Ae^t(1+t)+Be^t=1$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن: $A=e^{-t}\,,\; B=-te^{-t}$

$$\therefore\ g(x,t)=(xe^{-t}-te^{-t})e^{x}=xe^{x-t}-te^{x-t}=e^{x-t}(x-t)$$

$$g'(x,t)=e^{x-t}+e^{x-t}(x-t)=e^{x-t}(1+x-t)$$

$$g''(x,t)=e^{x-t}+e^{x-t}(1+x-t)=e^{x-t}(2+x-t)$$

$$\therefore\ R(x,t;\lambda)=\frac{d^2g}{dx^2}=e^{x-t}(2+x-t)\quad\rightarrow\quad n=2$$

رابعاً: حل المعادلات التكاملية باستخدام طريقة التقريبات المتتالية (Successive approximation)

نفرض أن لدينا معادلة تكاملية من نوع ڤولتيرا من النوع الثاني بالصورة:

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,y)\phi(y)dy \qquad \_\_\_(1)$$

ونفرض أن $f(x)$ دالة متصلة في المنطقة $[0,a]$ والنواة $k(x,y)$ دالة متصلة في $0\le y\le x$ ، $0\le x\le a$، ويأخذ $\phi_0(x)$ دالة مستمرة في $[0,a]$ ووضعها في الطرف الأيمن للمعادلة (1) بدلاً من $\phi(x)$ نحصل على:

$$\phi_1(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,y)\phi_0(y)dy$$

كذلك $\phi_1(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[0,a]$، وباستمرار هذه الطريقة نحصل على متتابعة من الدوال $\phi_0(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\Lambda\ ,\phi_n(x),\Lambda$

حيث:

$$\phi_n(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,y)\phi_{n-1}(y)dy$$

تحت الشروط الموضوعة على $f(x),k(x,y)$ فإن المتتابعة $\{\phi_n(x)\}$ تتقارب للحل $\phi(x)$ عندما $n\to\infty$.

__وبصفة خاصة:__ إذا أخذنا $\phi_0(x)=f(x)$ فإن $\phi_n(x)$ ستكون المجموع الجزئي للمتسلسلة (2) والتي تعرف الحل للمعادلة التكاملية. إن الإختيار المناسب للتقريب الصفري $\phi_0(x)$سيقود لتقارب سريع للمتتابعة $\{\phi_n(x)\}$ لحل المعادلة التكاملية.

أمثلة محلولة

مثال(1): حل المعادلة التكاملية $\phi(x)=1+\int_0^x \phi(y)dy$ حيث $\phi_0(x)=0$ وذلك باستخدام طريقة التقريبات المتتالية.

الحل: حيث أن $\phi_0(x)=0$ $\leftarrow$ $\phi_1(x)=1$

$$\phi_2(x)=1+\int_0^x dy=1+x$$

$$\phi_3(x)=1+\int_0^x (1+y)dy=1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$\phi_4(x)=1+\int_0^x (1+y+\frac{y^2}{2})dy=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\Lambda+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

وعليه فإن $\phi_n(x)$ هي المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

وعليه فإن $\phi_n(x)\to e^x$ عندما $n\to\infty$، وبذلك أمكن أثبات أن الدالة $\phi(x)=e^x$ هي حل للمعادلة التكاملية المعطاة

$$\left[\quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \cos x=\sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}, \cosh x=\sum\frac{x^{2n}}{2n!}\right.$$

$$\left.\sin x=\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \sinh x=\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad\right]$$

مثال(2): باستخدام طريقة التقريبات المتتالية حل المعادلات التكاملية الآتية:

1) $\phi(x)=1-\int_0^x (x-y)\phi(y)dy, \phi_0(x)=0$

2) $\phi(x)=1+\int_0^x (x-y)\phi(y)dy, \phi_0(x)=1$

3) $\phi(x)=x-\int_0^x (x-y)\phi(y)dy, \phi_0(x)=0$

4) $\phi(x)=1+x+\int_0^x (x-y)\phi(y)dy\ ,\phi_0\ (x)=1$

الحل:

(1) $\phi(x)=1-\int_0^x (x-y)\phi(y)dy\ ,\phi_0\ (x)=0$

$$\phi_1\ (x)=1$$

$$\phi_2\ (x)=1-\int_0^x (x-y)\ dy=1-[xy-\frac{y^2}{2}]|_0^x=1-[x^2-\frac{x^2}{2}]=1-\frac{x^2}{2}$$

$$\phi_3\ (x)=1-\int_0^x (x-y)(1-\frac{y^2}{2})\ dy=1-\int_0^x (x-y-\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{2})dy$$

$$=1-[xy-\frac{y^2}{2}-\frac{xy^3}{6}+\frac{y^4}{8}]_0^x=1-x^2+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{8}$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+(\frac{4-3}{24})x^4=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

$$\phi_4\ (x)=1-\int_0^x (x-y)(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4!})\ dy$$

$$=1-\int_0^x (x-\frac{xy^2}{2}+\frac{xy^4}{4!}-y+\frac{y^3}{2}-\frac{y^5}{4!})dy$$

$$=1-[xy-\frac{xy^3}{6}+\frac{xy^5}{5\times 4!}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{8}-\frac{y^6}{6\times 4!}]_0^x$$

$$=1-[x^2-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{5\times 4!}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{6\times 4!}]=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$$

$$\phi_n\ (x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}=\cos x \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\phi_n\ (x)=\cos x$$

(2) $\phi(x)=1+\int_0^x (x-y)\phi(y)dy\ ,\phi_0\ (x)=1$

$$\phi_1(x)=1+\int_0^x (x-y)\,dy=1+[xy-\frac{y^2}{2}]\Big|_0^x=1+\frac{x^2}{2}$$

$$\phi_2(x)=1+\int_0^x (x-y)(1+\frac{y^2}{2})\,dy=1+\int_0^x [x+\frac{xy^2}{2}-y-\frac{y^3}{2}]\,dy$$

$$=1+[xy+\frac{xy^3}{6}-\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{8}]_0^x$$

$$=1+[x^2+\frac{x^4}{6}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{8}]=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

$$\phi_3(x)=1+\int_0^x (x-y)[1+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!})\,dy$$

$$=1+[x^2+\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{6!}]$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}=\cosh x \quad \rightarrow \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\cosh x$$

(3) $\phi(x)=x-\int_0^x (x-y)\phi(y)dy\,,\phi_0(x)=0$

$$\phi_1(x)=x$$

$$\phi_2(x)=x-\int_0^x (x-y)\,\phi_1(y)dy=x-\int_0^x [xy-y^2]dy$$

$$=x-[\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}]_0^x=x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}=x-\frac{x^3}{6}=x-\frac{x^3}{3!}$$

$$\phi_3(x)=x-\int_0^x (x-y)[y-\frac{y^3}{3!}]\,dy=x-\int_0^x [xy-\frac{xy^3}{3!}-y^2+\frac{y^4}{3!})dy$$

$$=x-[\frac{xy^2}{2}-\frac{xy^4}{4\cdot 3!}-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5\cdot 3!}]\Big|_0^x=x-[\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{4\cdot 3!}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 3!}]$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{20\cdot 3!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

$$\phi_4(x)=x-\int_0^x (x-y)[y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}]\,dy=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$$

$$\phi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x\quad\rightarrow\ \therefore \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\sin x$$

(4) $\phi(x)=1+x+\int_0^x (x-y)\phi(y)dy\,,\ \phi_0(x)=1$

$\phi_0(x)=1$

$$\phi_1(x)=1+x+\int_0^x (x-y)\,dy=1+x+[xy-\frac{y^2}{2}]_0^x$$

$$=1+x+x^2-\frac{x^2}{2}=1+x+\frac{x^2}{2!}$$

$$\phi_2(x)=1+x+\int_0^x (x-y)\,(1+y+\frac{y^2}{2})dy$$

$$=1+x+\int_0^x [x-y+xy-y^2+\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{2}]dy$$

$$=1+x+[xy-\frac{y^2}{2}+\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}+\frac{xy^3}{2\cdot 3}-\frac{y^4}{2\cdot 4}]\Big|_0^x$$

$$=1+x+[x^2-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{2\cdot 3}-\frac{y^4}{2\cdot 4}]$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$$

$\phi_3(x)=\Lambda$

$$\phi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x \quad\rightarrow\quad \therefore \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=e^x \rightarrow \therefore\ \phi_n(x)=e^x$$

خامساً: استخدام تحويلات لابلاس في حل المعادلات التكاملية من النوع الملتف (Convolution Type)

عندما تعتمد النواة $k(x,y)$ على الفرق $(x-y)$ أي عندما

$$k(x,y)=k(x-y)$$

فإنها تسمى نواة الفرق (Difference Kernel)، وتأخذ معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ذات نواة الفرق الشكل الآتي:

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^x k(x-y)\phi(y)dy \qquad \_\_\_(1)$$

تعرف المعادلة (1) بأنها معادلة تكاملية من النوع الملتف (Convolution).

نفرض أن $f(x),k(x)$ دالتان ملساوتان (Smoth) بصورة كافية حيث أنه عندما $x\to\infty$ فإنهما لا تتموان أسرع من دالة أسية، أي أن:

$$|f(x)|\le M_1 e^{s_1(x)} \quad , \quad |k(x)|\le M_2 e^{s_2(x)} \qquad \_\_\_(2)$$

ويمكن إثبات أن $\phi(x)$ تحقق أيضاً الحد الأعلى للمتباينات في (2) أي أن:

$$|\phi(x)|\le M_3 e^{s_3(x)}$$

وبالتالي يمكن إيجاد تحويل لابلاس للدوال $f(x),k(x),\phi(x)$

$$\int_0^x k(x-y)\phi(y)dy=k(x)\cdot\phi(x)$$

وتأخذ المعادلة (1) الصورة:

$$\phi(x)=f(x)+\lambda k(x)\cdot\phi(x) \qquad \_\_\_(3)$$

وبأخذ تحويل لابلاس لطرفي (3) نجد أن:

$$\Phi(s)=F(s)+\lambda k(s)\cdot\Phi(s) \qquad \_\_\_(4)$$

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-\lambda k(s)} \quad , \quad \lambda k(s)\neq 1 \qquad \_\_\_(5)$$

ثم باستخدام تحويل لابلاس العكسي نحصل على حل للمسألة المعطاة.

أمثلة محلولة

مثال(1): باستخدام تحويلات لابلاس حل المعادلة التكاملية الآتية:

$$\phi(x)=\sin x+2\int_0^x \cos(x-y)\phi(y)dy \qquad \_\_\_(6)$$

الحل:

$$\phi(x)=\sin x+2\cos x\phi(x) \qquad \_\_\_(7)$$

وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين في (7) نحصل على:

$$\Phi(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{2s}{1+s^2}\Phi(s) \;\rightarrow\; \Phi(s)=\frac{1}{(s-1)^2} \qquad \_\_\_(8)$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي للعلاقة (8) نحصل على: $\phi(x)=xe^x$

وهو المطلوب.

مثال(2): حل المعادلات التكاملية الآتية باستخدام تحويلات لابلاس:

1) $\phi(x)=e^x-\int_0^x e^{x-y}\phi(y)dy$

2) $\phi(x)=x-\int_0^x (x-y)\phi(y)dy$

3) $\phi(x)=x+\int_0^x \sin(x-y)\phi(y)dy$

4) $\phi(x)=e^x+2\int_0^x \cos(x-y)\phi(y)dy$

5) $\phi(x)=\sin x+\int_0^x (x-y)\phi(y)dy$

<u>الحل:</u>

$$(1)\ \phi(x)=e^{x}-\int_{0}^{x}e^{x-y}\phi(y)dy$$

$$\therefore \phi(x)=e^{x}-e^{x}\phi(x) \qquad \_\_\_(1)$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\Phi(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-1}\Phi(s)$$

$$\therefore \Phi(s)[1+\frac{1}{s-1}]=\frac{1}{s-1} \ \rightarrow\ \Phi(s)[\frac{s}{s-1}]=\frac{1}{s-1}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s}=\frac{1}{s} \qquad \_\_\_(2)$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي للعلاقة (2) نحصل على: $\phi(x)=1$

$$(2)\ \phi(x)=x-\int_{0}^{x}(x-y)\phi(y)dy$$

$$\therefore \phi(x)=x-x\phi(x)$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\Phi(s)=\frac{1}{s^{2}}-\frac{1}{s^{2}}\Phi(s)$$

$$\therefore \Phi(s)[1+\frac{1}{s^{2}}]=\frac{1}{s^{2}} \ \rightarrow\ \Phi(s)[\frac{s^{2}+1}{s^{2}}]=\frac{1}{s^{2}}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{1}{s^{2}}\frac{s^{2}}{s^{2}+1}=\frac{1}{s^{2}+1}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي للعلاقة (2) نحصل على: $\phi(x)=\sin x$

وهو المطلوب.

$$(3)\ \phi(x)=x+\int_{0}^{x}\sin(x-y)\phi(y)dy$$

$$\therefore \phi(x)=x+\sin x\phi(x)$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\therefore \Phi(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}\Phi(s)$$

$$\Phi(s)[1-\frac{1}{s^2+1}]=\frac{1}{s^2} \rightarrow \Phi(s)[\frac{s^2}{s^2+1}]=\frac{1}{s^2}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{s^2+1}{s^4}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\phi(x)=x+\frac{x^3}{6}=x+\frac{x^3}{3!}$$

(4) $\phi(x)=e^x+2\int_0^x \cos(x-y)\phi(y)dy$

$$\therefore \phi(x)=e^x+2\cos x \phi(x)$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\Phi(s)=\frac{1}{s-1}+2\frac{s}{s^2+1}\Phi(s)$$

$$\Phi(s)[1-\frac{2s}{s^2+1}]=\frac{1}{s-1}$$

$$\Phi(s)[\frac{s^2-2s+1}{s^2+1}]=\frac{1}{s-1} \rightarrow \Phi(s)[\frac{(s-1)^2}{s^2+1}]=\frac{1}{s-1}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{1}{s-1}[\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}]=\frac{s^2+1}{(s-1)^3}$$

<u>ولإيجاد تحويل لابلاس العكسي:</u> نستخدم الكسور الجزئية كالتالي:

$$\Phi(s)=\frac{s^2+1}{(s-1)^3}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s-1)^3}$$

$$\therefore s^2+1=A(s-1)^2+B(s-1)+C$$

بوضع $s=1$: $\therefore 1+1=C \rightarrow \boxed{C=2}$

وبمقارنة معاملات s^2:

$$S^2+1=A(s^2-2s+1)+B(s-1)+C \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{1=A}$$

وبمقارنة معاملات s:

$$0=-2A+B \quad \rightarrow \quad \therefore B=2A \quad \rightarrow \quad \boxed{B=2}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{s^2+1}{(s-1)^3}=\frac{1}{(s-1)}+\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{2}{(s-1)^3}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\phi(s)=L^{-1}\frac{s^2+1}{(s-1)^3}=L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)}\right)+2L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)+2L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right)$$

$$=e^x+2(xe^x)+2\cdot\left[\frac{x^2}{2}e^x\right]=e^x+2xe^x+x^2e^x$$

$$=e^x(1+2x+x^2)=e^x(1+x)^2$$

وهو المطلوب.

(5) $\phi(x)=\sin x+\int_0^x (x-y)\phi(y)dy$

$$\phi(x)=\sin x+x\phi(x)$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\Phi(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}\Phi(s)$$

$$\Phi(s)\left[1-\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad \Phi(s)\left[\frac{s^2-1}{s^2}\right]=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore \Phi(s)=\left[\frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)}\right]$$

ولإيجاد تحويل لابلاس العكسي: نستخدم الكسور الجزئية كالتالي:

$$\Phi(s)=\frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)}=\frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)}$$

$$\therefore s^2=A(s+1)(s^2+1)+B(s-1)(s^2+1)+(Cs+D)(s-1)(s+1)$$

بوضع $s=1$:

$$\therefore 1=4A \quad \rightarrow \quad \boxed{A=\frac{1}{4}}$$

بوضع $s=-1$:

$$1=B(-2)(2)=-4B \quad \rightarrow \quad \boxed{B=-\frac{1}{4}}$$

<u>بمقارنة معاملات</u> s^3:

$$0=A+B+C=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+C \rightarrow \boxed{C=0}$$

<u>وبمقارنة معاملات</u> s^2:

$$0=A-B-D=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-D \rightarrow \boxed{D=\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

<u>وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:</u>

$$\phi(s)=\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right]+\frac{1}{2}\sin x$$
$$=\frac{1}{2}\sinh x+\frac{1}{2}\sin x$$

وهو المطلوب.

سادساً: استخدام تحويلات لابلاس لحل نظام من معادلات ڤولتيرا التكاملية

(System of volterra integral Equation)

يمكن استخدام تحويل لابلاس في حل نظام من معادلات ڤولتيرا التكاملية من النوع

$$\phi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{v} \int_0^x k_{ij}(x-y)\phi_j(y)dy \qquad \text{(1)}$$

حيث $f_j(x), k_{ij}(x)$ دوال متصلة معروفة لها تحويل لابلاس.

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (1) نحصل على:

$$\Phi_i(s) = F_i(x) + \sum_{j=1}^{v} k_{ij}(s)\Phi_j(s) \qquad \text{(2)}$$

وهذا نظام من المعادلات الجبرية الخطية في $\Phi_j(s)$ بحله نوجد $\Phi_j(s)$ ثم بأخذ تحويل لابلاس العكسي يمكن إيجاد الدوال الأصلية التي هي حل للنظام المعطي.

أمثلة محلولة

مثال(1): أوجد حلاً لنظام المعادلات التكاملية الآتية:

$$\phi_1(x) = 1 - 2\int_0^x e^{2(x-y)}\phi_1(y)dy + \int_0^x \phi_2(y)dy \qquad \text{(1)}$$

$$\phi_2(x) = 4x - \int_0^x \phi_1(y)dy + 4\int_0^x (x-y)\phi_2(y)dy \qquad \text{(2)}$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للمعادلتين (2) ,(1) نحصل على:

$$\Phi_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-2}\Phi_1(s) + \frac{1}{s}\Phi_2(s) \qquad \text{(3)}$$

$$\Phi_2(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{1}{s}\Phi_1(s) + \frac{4}{s^2}\Phi_2(s) \qquad \text{(4)}$$

وهذا النظام من المعادلات يمكن كتابته في الصورة:

$$\frac{s}{s-2}\Phi_1(s) - \frac{1}{s}\Phi_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s}\Phi_1(s) + \frac{s^2-4}{s^2}\Phi_2(s) = \frac{4}{s^2}$$

وبحل هذا النظام نجد أن:

$$\Phi_1(s)=\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+1)^2} \qquad \_\_\_(5)$$

$$\Phi_2(s)=\frac{3s+2}{(s-2)(s+1)^2}=\frac{8}{9}\frac{1}{(s-2)}-\frac{8}{9}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)^2} \qquad \_\_\_(6)$$

(باستخدام الكسور الجزئية)

ويأخذ تحويل لابلاس العكسي للمعادلتين (6) ,(5) نحصل على:

$$\phi_1(x)=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$\phi_2(x)=\frac{8}{9}e^{2x}-\frac{8}{9}e^{-x}+\frac{1}{3}xe^{-x}=\frac{1}{9}[8e^{2x}-8e^{-x}+27xe^{-x}]$$

وهو المطلوب.

<u>الحد التفصيلي بالكسور الجزئية:</u>

$$\Phi_1(s)=\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}$$

$$A(s+1)+B=s \rightarrow As+A+B=s$$

بمقارنة معاملات s: $\boxed{A=1}$

بمقارنة الحد المطلق: $\boxed{A=-B=-1} \leftarrow A+B=0$

$$\therefore \Phi_1(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Phi_2(s)=\frac{3s+2}{(s-2)(s+1)^2}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{c}{(s+1)^2}$$

$$\therefore A(s+1)^2+B(s-2)(s+1)+C(s-2)=3s+2$$

بوضع $s=2$: $\boxed{A=\frac{8}{9}} \leftarrow 9A=8$

بوضع $s=-1$: $\boxed{C=\frac{1}{3}} \leftarrow -3c=-1$

بمقارنة معاملات s^2: $\boxed{A=-B=-\frac{8}{9}} \leftarrow A+B=0$

$$\therefore \Phi_2(s)=\frac{8}{9}\frac{1}{s-2}-\frac{8}{9}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)^2}$$

مثال(٢): أوجد حلاً لنظم المعادلات التكاملية الآتية:

$$\Phi_1(x)=\sin x+\int_0^x \phi_2(y)dy \qquad \_\_\_(1)$$

$$\Phi_2(x)=1-\cos x-\int_0^x \phi_1(y)dy \qquad \_\_\_(2)$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للمعادلتين (2) ,(1) نحصل على:

$$\Phi_1(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s}\Phi_2(s) \qquad \_\_\_(3)$$

$$\Phi_2(x)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s}\Phi_1(s) \qquad \_\_\_(4)$$

حيث: $L[1]=\frac{1}{s}$

المعادلتان (4) ,(3) يمكن وضعهما بالصورة:

$$\therefore \Phi_1(s)-\frac{1}{s}\Phi_2(s)=\frac{1}{s^2+1} \qquad \_\_\_(5)$$

$$\frac{1}{s}\Phi_1(s)+\Phi_2(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2+1-s^2}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s(s^2+1)} \qquad \_(6)$$

وبحل النظام (6),(5) نجد أن:

$$\Phi_1(s)=\frac{1}{s^2+1}\ ,\ \Phi_2(s)=0$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي

$$\varphi_1(x)=L^{-1}\,\varphi_1(s)=L^{-1}\frac{1}{s^2+1}=\sin x$$

$$\varphi_2(x)=L^{-1}\,\varphi_2(s)=L^{-1}(0)=0$$

مثال(٣): أوجد حلاً لنظم المعادلات التكاملية الآتية:

$$\phi_1(x)=e^x+\int_0^x \phi_1(y)\,dy-\int_0^x e^{x-y}\phi_2(y)\,dy \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\phi_2(x)=-x-\int_0^x (x-y)\phi_1(y)\,dy+\int_0^x \phi_2(y)\,dy \qquad \_\_\_\_(2)$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للمعادلتين (2) ,(1) نحصل على:

$$\Phi_1(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\Phi_1(s)-\frac{1}{s-1}\Phi_2(s) \qquad \Big|\ L[1]=\frac{1}{s}$$

$$\Phi_2(x)=-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\Phi_1(s)+\frac{1}{s}\Phi_2(s)$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$\Phi_1(s)[1-\frac{1}{s}]+\frac{1}{s-1}\ \Phi_2(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$\Phi_2(s)[1-\frac{1}{s}]+\frac{1}{s^2}\ \Phi_1(s)=-\frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\ \frac{s-1}{s}\Phi_1(s)+\frac{1}{s-1}\ \Phi_2(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$\therefore\ \frac{s-1}{s}\Phi_2(s)+\frac{1}{s^2}\ \Phi_1(s)=-\frac{1}{s^2}$$

وحل هذا النظام هو:

$$\Phi_1(s)=\frac{1}{s-2}\ ,\ \Phi_2(s)=\frac{-1}{s(s-2)}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\therefore \Phi_1(x)=e^{2x}\quad ,\quad \Phi_2(x)=\frac{1-e^{2x}}{2}$$

<u>الحل التفصيلي لإيجاد</u> $\Phi_2(x)$:

$$\Phi_2(s)=\frac{-1}{s(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}$$

$$\therefore -1=A(s-2)+Bs$$

بوضع $s=0$:

$$-1=-2A \rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$$

بوضع $s=2$:

$$-1=-2B \rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

$$\Phi_2(s)=\frac{1}{2}(\frac{1}{s})-\frac{1}{2}(\frac{1}{s-2})$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}\Phi_2(s)=L^{-1}[\frac{-1}{s-2}]=\frac{1}{2}(\frac{1}{s})-\frac{1}{2}(\frac{1}{s-2})$$

$$\therefore \Phi_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}=\frac{1-e^{2x}}{2}$$

<u>مسألة:</u> أوجد حلاً لنظم المعادلات التكاملية الآتية:

$$\Phi_1(x)=1-\int_0^x \Phi_2(y)dy \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\Phi_2(x)=\cos x-1+\int_0^x \Phi_3(y)dy \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\Phi_3(x)=\cos+\int_0^x \Phi_1(y)dy \qquad \_\_\_\_(3)$$

<u>حل المسألة:</u> بأخذ تحويلات لابلاس للمعادلة المعطاه نحصل على:

$$\Phi_1(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\Phi_2(s)$$

$$\Phi_2(s)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\Phi_3(s)$$

$$\Phi_3(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s}\Phi_1(s)$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$\Phi_1(s)+\frac{1}{s}\Phi_2(s)+0=\frac{1}{s} \qquad \_\_\_(1)$$

$$0+\Phi_2(s)-\frac{1}{s}\Phi_3(s)=\frac{s^2-s^2-1}{s(s^2+1)}=\frac{-1}{s(s^2+1)} \qquad \_\_\_(2)$$

$$-\frac{1}{s}\Phi_1(s)+0+\Phi_3(s)=\frac{s}{s^2+1} \qquad \_\_\_(3)$$

بضرب (1) في $\frac{1}{s}$ ثم جمعها على (3):

$$\frac{1}{s}\Phi_1(s)+\frac{1}{s^2}\Phi_2(s)\frac{1}{s^2}$$

$$-\frac{1}{s}\Phi_1(s)+\Phi_3(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore \frac{1}{s^2}\Phi_2(s)+\Phi_3(s)=\frac{(s^2+1)+s^3}{s^2(s^2+1)} \qquad \_\_(4)$$

بضرب (4) في $\frac{1}{s}$ ثم جمعها على (2):

$$\frac{1}{s^3}\Phi_2(s)+\frac{1}{s}\Phi_3(s)=\frac{s^2+1+s^3}{s^3(s^2+1)},\Phi_2(s)-\frac{1}{s}\Phi_3(s)=\frac{-1}{s(s^2+1)}$$

$$\therefore \Phi_2\left(\frac{s^3+1}{s^3}\right)=\frac{-s^2+s^2+1+s^3}{s^3(s^2+1)}=\frac{s^3+1}{s^3(s^2+1)}$$

$$\therefore \Phi_2(s)=\frac{s^3+1}{s^3(s^2+1)}\cdot\frac{s^3}{s^3+1}=\frac{1}{s^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي: $\boxed{\phi_2(x)=\sin x}$

وبالتعويض عن Φ_2 في المعادلة (1):

$$\Phi_1(s)+\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}$$

$$\Phi_1(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{s^2+1-1}{s(s^2+1)}=\frac{s^2}{s(s^2+1)}-\frac{s}{s^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي: $\boxed{\phi_1(x)=\cos x}$

بالتعويض عن Φ_1 في المعادلة (3):

$$\frac{-s}{s(s^2+1)}+\Phi_3(x)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore \Phi_3(x)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على: $\boxed{\phi_3(x)=\cos x+\sin x}$

وهو المطلوب.

سابعاً: استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية – التكاملية

(Integro-differential Equation)

المعادلة التفاضلية التكاملية هي معادلة لها الصورة:

$$a_0(x)\phi^n(x)+a_1(x)\phi^{n-1}(x)+\Lambda+a_n(x)\phi(x)$$
$$+\sum_{m=0}^{v}\int_0^x k_m(x,y)\phi^m(y)dy=f(x) \qquad \_\_\_(1)$$

حيث $m=0,\ 1,\Lambda,v$

المعاملات $a_i(x)$ $(i=0,1,\Lambda,n)$، كذلك $f(x),k_m(x,y)$ هي دوال معلومة، $\phi(x)$ هي الدالة المجهولة.

وهنا لابد من وجود شروط ابتدائية صورتها:

$$\phi(0)=\phi_0 \ ,\ \phi'(0)=\phi'_0 \ ,\Lambda\ ,\phi^{n-1}(0)=\phi_0^{n-1} \qquad \_\_\_(2)$$

في المعادلة (1) نفرض أن المعاملات $a_k(x)=const.$ حيث $k=0,\Lambda,n$ $k_m(x,y)=k_m(x-y)$ أي أن جميع k_m تعتمد على الفرق $(x-y)$ ويأخذ $a_0=1$ فإن المعادلة (1) تأخذ الشكل الآتي:

$$\phi^n(x)+a_1\phi^{n-1}+\Lambda+\sum_{m=0}^{v}\int_0^x k_m(x-y)\phi^m(y)dy=f(x) \qquad \_\_\_(3)$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين ثم التعويض بالشروط الابتدائية وأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على الحل المطلوب.

مثال: حل المعادلة التفاضلية – التكاملية الآتية:

$$\phi'(x)-\int_0^x \cos(x-y)\phi(y)dy=\sin x \ , \ \phi(0)=2$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على:

$$s\,\Phi(s)-\phi(0)-\frac{s}{s^2+1}\Phi=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore \Phi[\frac{s^2+s-s}{s^2+1}]=\frac{1}{s^2+1}+2=\frac{1+2s^2+2}{s^2+1}=\frac{2s^2+3}{s^2+1}$$

$$\therefore \Phi=\frac{2s^2+3}{s^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}$$

$$\therefore As^2+Bs+C=2s^2+3$$

بمقارنة الحد المطلق: $C=3$

بمقارنة معامل s: $B=0$

بمقارنة معامل s^2: $A=2$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{2}{s}+\frac{3}{s^3}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\phi(x)=2+\frac{3}{2}x^2 \qquad \Big| \ L^{-1}(\frac{1}{s})=1$$

مسألة: بإستخدام تحويل لابلاس حل المعادلات التفاضلية التكاملية الآتية:

(i) $\phi''+\int_0^x e^{2(x-y)}\phi'(y)dy=e^{2x} \ , \phi(0)=0 \ , \phi'(0)=1$

(ii) $\phi'(x)-\phi(x)+\int_0^x (x-y)\phi'(y)dy-\int_0^x \phi(y)dy=x \ , \phi(0)=-1$

$$\text{(iii)}\ \phi''(x)-2\phi'(x)+\phi(x)+2\int_0^x \cos(x-y)\phi''(y)dy$$

$$+2\int_0^x \sin(x-y)\phi'(y)dy=\cos x\ ,\ \phi(0)=\phi'(0)=0$$

$$\text{(iv)}\ \phi''(x)+\phi(x)+\int_0^x \sinh(x-y)\phi(y)dy$$

$$+\int_0^x \cosh(x-y)\phi'(y)\,dy=\cosh x \qquad ,\ \phi(0)=\phi'(0)=0$$

حل المسألة:

$$(1)\ \phi''(x)+\int_0^x e^{2(x-y)}\phi'(y)dy=e^{2x}\ ,\phi(0)=0\,,\phi'(0)=1$$

بأخذ تحويل لابلاس:

$$s^2\Phi(s)-s\phi(0)-\phi'(0)+\frac{1}{s-2}[s\Phi(s)-\Phi(0)]=\frac{1}{s-2}$$

$$\therefore s^2\Phi(s)-1+\frac{1}{s-2}[s\,\Phi(s)]=\frac{1}{s-2}$$

$$\therefore \Phi(s)[s^2+\frac{s}{s-2}]=\frac{1}{s-2}+1$$

$$\therefore \Phi(s)[\frac{s^3-2s^2+s}{s-2}]=\frac{s-1}{s-2}$$

$$\Phi(s)=\frac{s-1}{s-2}\cdot\frac{s-2}{s^3-2s^2+s}=\frac{(s-1)}{s^3-2s^2+s}$$

$$=\frac{s-1}{s(s^2-2s+1)}=\frac{s-1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s(s-1)}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{1}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}$$

باستخدام الكسور الجزئية: $1=A(s-1)+Bs$

بمقارنة الحد المطلق: $\boxed{A=-1}$ $1=-A \rightarrow$

بمقارنة معامل s: $\boxed{B=-A=1}$ $0=A+B \rightarrow$

$$\Phi(s)=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s-1}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\phi(x)=-1+e^{x}=e^{x}-1$$

(2) $\phi'(x)-\phi(x)+\int_0^x (x-y)\phi'(y)dy-\int_0^x \phi(y)dy=x\ ,\ \phi(0)=-1$

بأخذ تحويل لابلاس:

$$s\Phi(s)-\phi(0)-\Phi(s)+\frac{1}{s^2}[s\Phi(s)-\phi(0)]-\frac{1}{s}\Phi(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\ s\Phi(s)+1-\Phi(s)+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\Phi(s)-\frac{1}{s}\Phi(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\ \Phi(s)[s-1+\frac{1}{s}-\frac{1}{s}]=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}-1$$

$$\Phi(s)[s-1]=-1$$

$$\therefore\ \Phi(s)=\frac{-1}{s-1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي: نحصل على:

$$\phi(x)=-e^{x}$$

(3) $\phi''(x)-2\phi'(x)+\phi(x)+2\int_0^x \cos(x-y)\phi''(y)dy$

$+2\int_0^x \sin(x-y)\phi'(y)dy=\cos x\ ,\ \phi(0)=\phi'(0)=0$

بأخذ تحويل لابلاس:

$$s^2\Phi(s)-s\Phi(0)-\Phi(0)-2[s\Phi(s)-\phi(0)]+\Phi(s)$$

$$=\frac{s}{s^2-1}-2[\frac{s}{s^2-1}\{s^2\Phi(s)\}-s\phi(0)-\phi(0)]$$

$$-2[\frac{1}{s^2+1}\{s\Phi(s)-\phi(0)\}]$$

$$\therefore\ s^2\Phi(s)-2s\Phi(s)+\Phi(s)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{2s^3}{s^2+1}\Phi(s)-\frac{2s}{s^2+1}\Phi(s)$$

$$\therefore\ \Phi(s)[s^2-2s+1+\frac{2s^3}{s^2+1}+\frac{2s}{s^2+1}]=\frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore \Phi(s)[s^2-2s+1+2s\frac{s^2+1}{s^2+1}]=\frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore \Phi(s)[s^2+1]=\frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)}=\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي

$$\varphi(x)=L^{-1}\Phi(s)=L^{-1}\frac{s}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{2}x\sin x$$

$$[L\{x\sin x\}=\frac{2a\,x}{(s^2+a^2)^2}]$$

(4) $\phi''(x)+\phi(x)+\int_0^x \sinh(x-y)\phi(y)dy$

$$+\int_0^x \cosh(x-y)\phi'(y)\,dy=\cosh x \qquad , \quad \phi(0)=\phi'(0)=0$$

بأخذ تحويل لابلاس:

$$s^2\Phi(s)-s\phi(0)-\phi'(0)+\Phi(s)+\frac{1}{s^2-1}\Phi(s)$$

$$+\frac{s}{s^2-1}[s\Phi(s)-\phi(0)]=\frac{s}{s^2-1}$$

$$\therefore s^2\Phi(s)+\Phi(s)+\frac{1}{s^2-1}\Phi(s)+\frac{s^2}{s^2-1}\Phi(s)=\frac{s}{s^2-1}$$

$$\therefore \Phi(s)[s^2+1+\frac{1}{s^2-1}+\frac{s^2}{s^2-1}]=\frac{s}{s^2-1}$$

$$\therefore \Phi(s)[\frac{s^2(s^2-1)+s^2-1+1+s^2}{(s^2-1)}]=\frac{s}{s^2-1}$$

$$\therefore \Phi(s)[\frac{s^4+s^2}{s^2-1}]=\frac{s}{s^2-1}$$

$$\therefore \Phi(s)=\frac{s}{s^2-1}\cdot\frac{s^2-1}{s^2(s^2-1)}=\frac{1}{s(s^2+1)}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي: نستخدم أولاً الكسور الجزئية:

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$1=A(s^2+1)+s(Bs+C)$$

بمقارنة الحد المطلق: $1=A \rightarrow \boxed{A=1}$

معامل s^2: $0=A+B \rightarrow \boxed{B=-A=-1}$

معامل S: $0=C \rightarrow \boxed{C=0}$

$$\therefore \frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1}=\Phi(s)$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي: $\phi(x)=1-\cos x$

وهو المطلوب.

<u>معادلة فريدهولم التكاملية:</u>

معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني لها الشكل:

$$\phi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\phi(y)dy=f(x) \qquad \_\_\_(1)$$

حيث $\phi(x)$ هي الدالة المجهولة، $k(x,y)$ ، $f(x)$ دوال معلومة، x,y متغيرات حقيقية في الفترة (a,b) ، λ عامل عددي.

الدالة $k(x,y)$ هي نواة المعادلة (1) وهي معرفة في المربع Ω حيث:

$\Omega\{0\le x\le b . a\le y\le b\}$ في المستوى (x,y) ومتصلة في Ω.

إذا كانت $f(x)\neq 0$ تسمى المعادلة (1) غير متجانسة.

أما إذا كانت $f(x)=0$ فإن (1) تأخذ الشكل:

$$\phi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\phi(y)dy=0 \qquad \_\_\_(2)$$

وتسمى المعادلة متجانسة.

إن حدود التكامل a,b في (2) ,(1) يمكن أن تكون محدودة أو غير محدودة، إن الحل للمعادلة (2) ,(1) تمثله أي دالة $\phi(x)$ والتي عندما نعوض بها في المعادلة تختزلها إلى متطابقة في $x\in(a,b)$.

أمثلة محلولة:

مثال(1): أثبت أن $\phi(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ هي حل للمعادلة التكاملية من نوع فريدهولم الآتية:

$$\phi(x)-\frac{\pi^{2}}{2}\int_{0}^{1}k(x,y)\phi(y)dy=\frac{x}{2}$$

حيث النواة تأخذ الشكل:

$$k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(2-y)}{2} & 0\le x\le y\\[2mm] \dfrac{y(2-x)}{2} & y\le x\le 1\end{cases}$$

الحل: نكتب الطرف الأيسر كما يلي:

$$L.H.S.=\phi(x)-\frac{\pi^{2}}{4}\int_{0}^{1}k(x,y)\phi(y)dy$$

$$=\phi(x)-\frac{\pi^{2}}{4}\left\{\int_{0}^{x}\frac{y(2-x)}{2}\phi(y)dy+\int_{x}^{1}\frac{x(2-y)}{2}\phi(y)dy\right\}$$

$$=\phi(x)-\frac{\pi^{2}}{4}\left\{\frac{(2-x)}{2}\int_{0}^{x}y\phi(y)dy+\frac{x}{2}\int_{x}^{1}(2-y)\phi(y)dy\right\}$$

وبالتحويل بالدالة $\phi(x)=\dfrac{\sin\pi x}{2}$ نحصل على النتيجة الآتية:

$$L.H.S.=\frac{x}{2}=R.H.S.$$

وهو المطلوب.

مثال(2): أفحص هل الدالة المعطاة تمثل حلاً للمعادلة التكاملية التي بجانبها:

$$\text{(i)}\ \phi(x)=1,\ \phi(x)+\int_0^1 x(e^{xy}-1)\phi(y)dy=e^x-x$$

$$\text{(ii)}\ \phi(x)=xe^{-x}\ ,\ \phi(x)-4\int_0^\infty e^{-(x+y)}\phi(y)dy=(x-1)e^{-x}$$

الحل:

$$\text{(i)}\ \phi(x)=1\,,\ \phi(x)+\int_0^1 x(e^{xy}-1)\phi(y)dy=e^x-x$$

$$L.H.S.=1+\int_0^1 x(e^{xy}-1)dy=1+x\int_0^1 e^{xy}\,dy-x\int_0^1 dy$$

$$=1+\frac{xe^{xy}}{x}\Big|_0^1-xy\Big|_0^1=1+e^x-1-x=e^x-1$$

$\therefore$ الدالة $\phi(x)=1$ هي حل للمعادلة المعطاه.

$$\text{(ii)}\ \phi(x)=xe^{-x}\ ,\ \phi(x)-4\int_0^\infty e^{-(x+y)}\phi(y)dy=(x-1)e^{-x}$$

$$L.H.S.=xe^{-x}-4e^{-x}\int_0^\infty e^{-y}\cdot y\cdot e^{-y}dy$$

$$=xe^{-x}-4e^{-x}\int_0^\infty ye^{-2y}\,dy$$

باستخدام التكامل بالتجزئ: $u=y\,,\,dv=e^{-2y}dy$

$$du=dy\,,\ v=-\frac{1}{2}e^{-2y}$$

$$L.H.S.=xe^{-x}-4e^{-x}\,[-\frac{1}{2}+e^{-2y}-\frac{e^{-2y}}{4}]\Big|_0^\infty$$

$$=xe^{-x}-4e^{-x}\,[0-0-(0-\frac{1}{4})]$$

$$=xe^{-x}-e^{-x}=e^{-x}\,(x-1)=R.H.S.$$

$\therefore$ الدالة المعطاة $\phi(x)=xe^{-x}$ هي حل للمعادلة المعطاة. وهو المطلوب.