الباب الأول

متسلسلات القوى

(Power Series)

قبل البدء فى هذا الباب يجب التنويه إلى اعتماده على الباب الخاص بالمتسلسلات والمذكور فى الجزء الثانى من هذا الكتاب .

[1] تعريف متسلسلة القوى واختبار تقاربهما : تعرف متسلسلة القوى (Power Series) بأنها كثيرة حدود (Polynomial) أو متسلسلة لانهائية لقوى أحد المتغيرات ( ) ، وصورتها

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

حيث $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ هى ثوابت تسمى المعاملات (Coefficients) .

وهناك صورة أخرى لمتسلسلة القوى حول $x = a$ وهى :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots + c_n (x-a)^n + \ldots \qquad (2)$$

حيث a يسمى مركز المتسلسلة (Center)

المتسلسلة (1) هى حالة خاصة من (2) بأخذ $a = 0$.

<u>ملحوظة</u> : بوضع قيمة ما للمتغير x نحصل على متسلسلة عددية يمكن اختبار تقاربها أو تباعدها مع ملاحظة أن هناك قيما للمتغير x (موجبه أو سالبه) تجعل المتسلسلة تقاربية وقيما أخرى تجعل المتسلسلة تباعديه .

<u>نظرية التقارب (Convergence Theorem) لمتسلسلات القوى</u> :

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة للقيم $x = c \neq 0$ فإنها تكون متقاربة تقارباً مطلقاً لكل قيم x حيث $|x| < |c|$ ، وإذا كانت المتسلسلة متباعدة للقيم $x = c$ فإنها تكون متباعدة لكل قيم x حيث $|x| > |c|$.

<u>نصف قطر التقارب (Radius of Convergence) لمتسلسلة قوى</u> :

لبحث تقارب المتسلسلة $\sum c_n (x-a)^n$ يوجد لدينا 3 إحتمالات :-

obeikandl.com

(1) يوجد عدد موجب R بحيث أن المتسلسلة تكون متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كان $|x-a|<R$ ، وتكون متباعدة إذا كان $|x-a|>R$ ، وتكون المتسلسلة متقاربة أو غير متقاربة عند نقطتى النهاية $x=a-R$ ، $x=a+R$.

ويعرف العدد R بنصف قطر التقارب (Radius of Convergence) للمتسلسلة .

(2) عندما $R=0$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة عند $x=a$ فقط ومتباعدة فيما دون ذلك

(3) عندما $R=\infty$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة تقارباً مطلقاً لكل قيم x .

ملحوظة : تسمى قيم x التى تجعل المتسلسلة متقاربة بفترة التقارب (Interval of Convergence)

كيف نختبر تقارب متسلسلات القوى

(How to test a power series for convergence)

(1) نستخدم اختبار النسبة (أو اختبار الجذر النونى) لايجاد الفترة التى تكون فيها المتسلسلة متقاربه تقارباً مطلقاً ، وهى عادة تكون الفترة المفتوحه $|x-a|<R$ أى

$$a-R<x<a+R$$

(2) إذا كانت فترة التقارب المطلق فترة محدودة ، نستخدم اختبار المقارنة أو التكامل أو اختبار المتسلسلة المتناوبه [اخنبارات التقارب والتباعد عند نقطتى النهاية].

(3) إذا كانت فترة التقارب المطلق هى $a-R<x<a+R$ فإن المتسلسلة تتباعد عندما $|x-a|>R$ (وليست متقاربة تقارباً شرطياً) ، لأن الحد النونى لايصل إلى الصفر لقيم x المذكورة .

[2] متسلسلة القوى الهندسية (Geometric Power Series) :

لدينا صورتان لمتسلسلات القوى هما :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots + c_n (x-a)^n + \ldots \qquad (2)$$

وتأخذ متسلسلة القوى الهندسية هاتان الصورتان أيضاً

[1] فبأخذ كل المعاملات $=1$ فى (1) نحصل على الصورة الآتية لمتسلسلة القوى الهندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

وهذه متسلسلة هندسية حدها الأول $=1$ ونسبتها $r=x$ وتتقارب إلى $\frac{1}{1-x}$ حيث $|x|<1$

ويمكن كتابة هذه الحقيقة بالصورة .

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \quad , \quad -1<x<1$$

[2] بأخذ $c_n=\left(\frac{-1}{2}\right)^n$,..., $c_2=\frac{1}{4}$, $c_1=-\frac{1}{2}$, $c_0=1$, $a=2$ فى (2) نحصل على الصورة الآتية لمتسلسلة القوى الهندسية :

$$1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2+\ldots+\left(\frac{-1}{2}\right)^n(x-2)^n+\ldots$$

وهى متسلسلة هندسية حدها الأول $=1$ ونسبتها $r=\frac{x-2}{2}$ وتتقارب إلى $\left(\frac{2}{x}\right)$ حيث

$\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$ أى $0<x<4$ ، المجموع $=\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{x}{2}$

$$\therefore \quad \frac{2}{x}=1-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-2)^n+\ldots \quad , \quad 0<x<4$$

<u>Ex</u>:- For what values of x do the following power series converge (تتقارب)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots.$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots.$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}(n!)x^n=1+x+(2!)x^2+(3!)x^3+\ldots.$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n x^n=\frac{1}{2}x+x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3x^3+\left(\frac{4}{3}\right)^4x^4+\ldots..$

obeikandl.com

<u>الحل</u> :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$: لايجاد قيمة x التى تجعل هذه المتسلسلة تقاربية نستخدم اختبار

النسبه وذلك بفرض أن $a_n=(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \leftarrow a_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}(-1)x \rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n}{n+1}|x| \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x|=|x|$$

وتكون المتسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً عندما $|x|<1$ أى عندما $-1<x<1$ ويكون $R=1$

وتكون المتسلسلة متباعدة عندما $|x|>1$ [لأن الحد النونى لايتقارب إلى الصفر] .

<u>ملحوظة</u> :

(1) عندما $x=1$ نحصل على المتسلسلة التواقفية المتناوبه وصورتها:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......$$

وهى تقاربية .

(2) عندما $x=-1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية بحدود سالبه وصورتها:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-......$$

وهى تباعدية .

<u>الخلاصة</u> : المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ هى تقاربية لقيم x حيث : $-1<x\le 1$ وتباعدية فيما عدا ذلك .

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$: نستخدم أيضا اختبار النسبة : بفرض أن $a_n=(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

وتكون :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2n-1}{2n+1}x^2 \quad \leftarrow \quad a_{n+1}=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

obeikandi.com

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}x^2 = x^2$$

وهذه المتسلسلة تتقارب تقاربا مطلقا عندما $x^2 < 1$ ، وتتباعد عندما $x^2 > 1$ [لأن الحد النونى لايتقارب إلى الصفر] .

وعند $x = 1$: تصبح المتسلسلة بالصورة .... $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ والتى تتقارب باستخدام نظرية المتسلسلات المتناوبه .

وعند $x = -1$: تصبح المتسلسلة بالصورة .... $-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ والتى تتقارب أيضا باستخدام شروط تقارب المتسلسلات المتناوبه .

الخلاصة : المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ تكون متقاربة لقيم x حيث : $-1 \le x \le 1$ ومتباعدة فيما عدا ذلك .

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: نستخدم اختبار النسبة : وذلك بفرض أن :

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leftarrow a_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n} \to \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)n!}\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0 \quad (\text{لكل قيم } x)$$

أى أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة تقاربا مطلقا لكل قيم x [النهاية = صفر] .

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)x^n$: نستخدم إختبار النسبة : وذلك بفرض أن :

$$a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1} \leftarrow a_n = (n!)x^n$$

obeikandl.com

$$\therefore \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$$

(وذلك لكل قيم x ماعدا $x = 0$)

أى أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)x^n$ متباعدة لكل قيم x ماعدا عند $x = 0$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n x^n$: نستخدم اختبار الجذر النونى : وذلك بأخذ :

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^n x^n} \to a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^n x^n$$

$$= \left[\left(\frac{n}{2}\right)^n x^n\right]^{1/n} = \frac{n}{2}x \to \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \frac{1}{2}|nx|$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|nx| = \infty$$ (لكل قيم x ماعدا $x = 0$)

أى أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n x^n$ متباعدة لكل قيم x ماعدا عند $x = 0$.

[3] **تفاضل وتكامل متسلسلات القوى حداً حداً** :

Term-by-Term Differentiation and Integration of Power Series

من الممكن تفاضل أو تكامل متسلسلات القوى حداً حداً (Term-by-term) خلال فترة تقاربها ويكون لدينا النظريتان الآتيتان :-

(1) **نظرية التفاضل حداً حداً : (Term-by-term Different. Theorem)**

إذا كانت $\sum c_n(x-a)^n$ تقاربية فى الفترة $a-R < x < a+R$ حيث $R > 0$

فيمكن كتابة الدالة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ التى لها مشتقات داخل فترة التقارب ، ونحصل على تلك المشتقات بتفاضل التسلسلة الأصلية حداً حداً

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}, \; f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \ldots.$$

وكل من هذه المتسلسلات المشتقة تكون متقاربة عند كل نقاط فترة التقارب للمتسلسلة الأصلية

Ex: Applying term-by-term differentiation to find series for $f'(x)$ and $f''(x)$ if :

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad , \quad -1<x<1$$

Sol:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \quad , \quad -1<x<1$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=2+6x+12x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2} \quad , \quad -1<x<1$$

ملحوظة : لايصلح التفاضل حداً حداً لكل المتسلسلات ، فمثلا المتسلسلة المثلثية :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!x)}{n^2}$ المتقاربة لكل قيم x إذا فاضلناها حداً حداً نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ وهى متباعدة لكل قيم x . وهذه ليست متسلسلة قوة لانها لاتمثل مجموع قوى موجبه صحيحة لـ x .

(2) نظرية التكامل حداً حداً (Term-by-term integration theorem) :

لتكن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ متقاربة فى المنطقة $a-R<x<a+R$ لكل $R>0$ ، فإن $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ تكون متقاربة فى تلك المنطقة ويكون تكامل $f(x)$ بالصورة :

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{لكل} \quad a-R<x<a+R$$

Ex(1): A series for $\tan^{-1}x, -1\le x\le 1$

Identify the function : $f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots, -1\le x\le 1$

Sol:

بتفاضل $f(x)$ حداً حداً نحصل على : $f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots, -1<x<1$

وهى متسلسلة هندسية حدها الأول $=1$ ونسبتها $=-x^2$ فيكون مجموعها

$$f'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\to\int f'(x)dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$$

ويلاحظ أن $f(x)$ تساوى صفر عندما $x=0$ ولذلك فإن $C=0$ وبذلك نحصل على :

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\tan^{-1}x\ ,\ -1\le x\le 1$$

Ex(2): A series for $\ln(1+x), -1<x\le 1$

Identify the function : $f(t)=1-t+t^2-t^3+\ldots=\frac{1}{1+t}\ ,\ -1<t<1$

Sol:

هذه المتسلسلة تقاربية على الفترة المفتوحة $-1<t<1$ وباجراء التكامل حداً حداً من $x=0$ إلى $x=1$ نحصل على :

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x)-\ln(1)=\ln(1+x)$$

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x[1-t+t^2-t^3+\ldots]=[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots]_0^x$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,-1<x<1$$

$$\therefore\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ ,\ -1<x<1$$

ويلاحظ أن هذه المتسلسلة تتقارب عند $x=1$ إلى العدد $\ln 2$.

[4] ضرب متسلسلات القوى Multiplication of power series

يمكن ضرب متسلسلات القوى ذات التقارب المطلق باستخدام النظرية الآتية :

إذا كانت $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\ B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ متسلسلتان متقاربتان تقارباً مطلقاً للقيم $|x|<R$ ، وكانت :

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

تمثل كثيرة حدود (polynomial) فإن : المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لحاصل الضرب $A(x)B(x)$ لكل $|x|<R$.

رياضياً : $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Ex: Multiply the geometric series

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$, for $|x| < 1$, by itself to get a convergent power series for $\frac{1}{(1-x)^2}$, for $|x| < 1$

Solution:

المطلوب ضرب المتسلسلة الهندسية المعطاه فى نفسها لتعطى المتسلسلة $\frac{1}{(1-x)^2}$ المتقاربة للقيم $|x| < 1$ ، ومن أجل ذلك نفرض أن :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0 \qquad (n+1 \text{ حدا})$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1} = n + 1 ,$$

حيث $1 + 1 + \ldots + 1$ عبارة عن $(n+1)$ من الواحد.

وباستخدام نظرية ضرب المتسلسلات نحصل على :

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$$

وهى متسلسلة لـ $\frac{1}{(1-x)^2}$ ، وهى متقاربة تقارباً مطلقاً للقيم $|x| < 1$.

ملحوظة : كما ورد فى مثال تفاضل المتسلسلات حداً حداً ، نحصل على نفس النتيجة ، حيث :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad , \quad -1 < x < 1$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

obeikandl.com

إذا كانت f دالة ذات مشتقات من كل الرتب خلال فترة تحتوى على a كنقطة داخلية ، فإن متسلسلة تيلور حول النقطة $x=a$ تكتب بالصورة :-

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

وهى متسلسلة لها المعاملات:-

$$a_0=f(a),\quad a_1=\frac{f'(a)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

وكحالة خاصة : عندما $a=0$ فإن المتسلسلة تأخذ صورة أبسط هى :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

وتسمى بمتسلسلة ماكلورين [وهى حالة خاصة من متسلسلة تيلور] .

كثيرة حدود تيلور Taylor's Polynomial :

من المعروف أن أى متسلسلة $\{a_n\}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ تولد (generates) كثيرة حدود حدودها هى :

$$P_0(x)=a_0,\quad P_1(x)=a_0+a_1x,\quad P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2,\ \ldots$$

وتسمى $P_0(x)$ كثيرة الحدود من الرتبة صفر ، $P_1(x)$ كثيرة الحدود من الرتبة 1 ، ... ، $P_n(x)$ كثيرة الحدود من الرتبة n .

وبالنسبة لمتسلسلة تيلور :

فإن كثيرة حدود تيلور من الرتبة n والمتولدة بواسطة الدالة f عند $x=a$ هى :

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

وذلك لقيم $k=1,2,\ldots,N$ ، حيث العدد الصحيح n يتراوح من 0 ماراً خلال N .

كثيرة حدودو تيلور من الرتبة (1) : $P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

كثيرة حدودو تيلور من الرتبة (k) :

obeikandl.com

$$P_k(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

<u>Ex(1)</u>: Find the Taylor series generated by $f(x)=\frac{1}{x}$ at $a=2$, where does the series converges to $\frac{1}{x}$.

<u>Sol</u>:

لإيجاد متسلسلة تيلور للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ عند النقطة $a=2$ من المهم إيجاد المشتقات $f'(2), f''(2), \dots.$ ، حيث :

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\to f(2)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}\to f'(2)=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x)=2!x^{-3}=\frac{2!}{x^3}\to f''(2)=\frac{2!}{(2)^3}\to\frac{f''(2)}{2!}=\frac{1}{2^3}$$

$$f'''(x)=-3!x^{-4}=-\frac{3!}{x^4}\to f'''(2)=-\frac{3!}{(2)^4}\to\frac{f'''(2)}{3!}=-\frac{1}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-(n+1)}=-\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$\therefore f^{(n)}(2)=-\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\to\frac{f^{(n)}(2)}{n!}=-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

وتصبح متسلسلة تيلور بالصورة :

$$f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^2+\dots..$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\dots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\dots$$

obeikandl.com

وهى متسلسلة هندسية حدها الأول $\frac{1}{2}$ ونسبتها $r = -\frac{x-2}{2}$ وهى تتقارب تقارباً مطلقاً عند $|x-2| < 2$ أى فى الفترة $0 < x < 4$ ومجموعها هو : $\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x}$

أى أن متسلسلة تيلور المتولده بالدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $a = 2$ تتقارب إلى $\frac{1}{x}$ فى الفترة $0 < x < 4$ ، وهو المطلوب .

<u>Ex(2)</u>: <u>Taylor series and polynomial for</u> e^x :

<u>متسلسلة وكثيرة حدود (أى مفكوك) تيلور نلدالة</u> e^x :

Find Taylor series and polynomial by $f(x) = e^x$ at $x = 0$.

<u>Sol</u>: $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = e^x,\ \ldots$

وعند $x = 0$:

$\therefore f(0) = e^0 = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = 1,\ \ldots$

وتصبح متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة f عند $x = 0$ هى :

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots..$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

وهى أيضاً متسلسلة ماكلورين للدالة e^x :

$$\therefore \boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}$$

أما كثيرة حدود تيلور من الرتبة n عند $x = 0$ (وهى أيضا كثيرة حدود ماكلورين) فهمى :

$$\boxed{P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}$$

<u>Ex(3)</u>: <u>Taylor series and polynomial for</u> $\cos x$:

<u>متسلسلة وكثيرة حدود تيلور للدالة</u> $\cos x$

obeikandl.com

Find the Taylor series and polynomial generated by $f(x)=\cos x$ at $x=0$.

Sol:

$$f(x)=\cos x \quad , \quad f'(x)=-\sin x$$

$$f''(x)=-\cos x \quad , \quad f^{(3)}(x)=\sin x$$

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x \quad , \quad f^{(2n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\sin x$$

وعند $x=0$: فإن جيوب التمام $=1$ ، الجيوب $=0$ ، أى أن :

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n \quad , \quad f^{(2n+1)}(0)=0$$

وتصبح متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة f عند $x=0$ هى :

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ldots$$

$$=1+(0)(x)-\frac{x^2}{2!}+(0)(x^3)+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

وهى ،أيضاً متسلسلة ماكلورين للدالة $\cos x$ وتكتب بالصورة :

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots}$$

أما كثيرة حدود تيلور من الرتبة $(2n)$ فهى :

$$\boxed{P_{2n}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

Ex(4): Taylor series and polynomial for $\ln(1+x)$:

متسلسلة وكثيرة تيلور للدالة $\ln(1+x)$:

Find the Taylor series and polynomial for the function $\ln(1+x)$ at $a=0$

Sol:

نستخدم التكامل حداً حداً للدالة $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ، وذلك كالتالى :-

حيث أن :-

obeikandl.com

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots \qquad , \qquad -1<x<1$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x)-\ln(1)=\ln(1+x)$$

أيضاً :

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x [1-t+t^2-t^3+\ldots.]dt=[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots]_0^x$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots \qquad , \qquad -1<x<1$$

$$\therefore \boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots..}$$

وهو مفكوك تيلور للدالة $\ln(1+x)$ ويخضع للشرط $|x|<1$ أى $-1<x<1$ وبوضع

$x=1$ فى هذه المفكوك نحصل على $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$

وتكون كثيرة حدود تيلور من الرتبة n هى :

$$\boxed{P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}}$$

<u>Ex(5)</u>: <u>Taylor series and polynomial for</u> $\sin x$ at $x=0$:

<u>متسلسلة وكثيرة تيلور للدالة</u> $\sin x$:

Find Taylor series and polynomial for $\sin x$ at $x=0$

<u>Sol</u>:

$$f(x)=\sin x \to f(0)=0 \qquad , \qquad f'(x)=\cos x \to f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x \to f''(0)=0 \qquad , \qquad f^{(3)}(x)=-\cos x \to f^{(3)}(0)=-1$$

$$\therefore f^{(2n)}(x)=(-1)^n \sin x \qquad , \qquad f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n \cos x$$

حيث أنه عند $x=0$: فإن جيوب التمام $=1$ ، الجيوب $=0$

$$\therefore f^{(2n)}(0)=0 \qquad , \qquad f^{(2n+1)}(0)=)(-1)^n$$

وتصبح متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة $f(x)$ عند $x=0$ تشمل الحدود ذات القوى الفردية فقط وتكون صورتها هى :

$$f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots..$$

$$=0+(1)(x)+\frac{(0)}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

وهى أيضا متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin x$ وتكتب بالصورة :-

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots..}$$

أما كثيرة حدود تيلور من الرتبة $(2n+1)$ فهى :

$$\boxed{P_{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

(6) تطبيقات على متسلسلات القوى : Applications of Power Series

تطبيق [1] متسلسلة ذات الحدين (The Binomial Series)

تعتبر متسلسلة ذات الحدين أحد تطبيقات متسلسلات القوى ، والتى تمكننا من إيجاد مفكوك الكميات المكونة من حدين ومرفوعة إلى أى أس ، وهى عبارة عن متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة $f(x)=(1+x)^m$ حيث m ثابت ، وصورتها

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k+\ldots \qquad (1)$$

وهذه المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا حيث $|x|<1$ بمعنى أن القيمة العددية للمقدار x تكون اقل من الواحد ، وهو شرط تقارب هذه المتسلسلة أى شرط إيجاد مجموعها .

وبتعريف الكميات [التى تسمى معاملات ذات الحدين] :

$$\binom{m}{1}=m,\binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!},\ldots\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!} \quad (k\geq 3)$$

حيث $k!=k\times(k-1)\times\ldots\ldots3\times2\times1$

فان (1) تأخذ الصورة الآتية :

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots + \binom{m}{k}x^k + \ldots.$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

(2)

حالات خاصة :

(1) إذا كانت $m = -1$:

$$\binom{-1}{1} = -1, \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1, \ \ldots.$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\ldots(-1-k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k k!}{k!} = (-1)^k$$

وباستخدام تلك القيم لمعاملات ذات الحدين نحصل على المتسلسلة الهندسية :

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots.$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k \tag{3}$$

وبوضع $(-x)$ بدلا من (x) نحصل على المتسلسلة :

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + \ldots. = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \tag{4}$$

(2) إذا كانت $m = \frac{1}{2}$: فإن

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = \frac{-\frac{1}{4}}{2!} = -\frac{1}{8}, \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{1}{16}, \ldots$$

وباستخدام تلك القيم نحصل على المتسلسلة الآتية :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\ldots=\sqrt{1+x} \qquad (5)$$

وبوضع $(-x)$ بدلا من (x) نحصل على المتسلسلة :

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\ldots=\sqrt{1-x} \qquad (6)$$

ويمكن استخدام العلاقتين (6) ,(5) لإيجاد قيم تقريبية لكل من : $\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}$

لقيم $|x|$ الصغيرة ، فمثلا :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{x}{2}$$ (بأخذ الحدين الأول والثانى)

$$\simeq 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$ (بأخذ الحدود الثلاثة الأولى) , ...

$$\sqrt{1-x} \simeq 1-\frac{x}{2}$$ (بأخذ الحدين الأول والثانى)

$$\simeq 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$ (بأخذ الحدود الثلاثة الأولى) , ...

أيضاً بأخذ x^2 مكان x فى (6) نحصل على :

$$\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}-\ldots..$$

ولقيم $|x^2|$ الصغيرة فإن :

$$\sqrt{1-x^2} \simeq 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$$

(3) <u>مفكوك</u> $(a+x)^m$: يمكن إيجاد مفكوك $(a+x)^m$ بالصورة :

$$(a+x)^m = a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}x+\binom{m}{2}a^{m-2}x^2+\ldots\ldots \qquad (7)$$

obeikandi.com

ويمكن تحويل هذا المفكوك لأى قيمة للمقدار m بتحويله إلى الصورة : $a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ وذلك

بأخذ a كمشترك ، وبذلك فإن :

$$(a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m = a^m\left[1+\frac{x}{a}+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\dots\dots\right] \qquad (8)$$

وهى متسلسلة متقاربة حيث $|x|<|a|$.

obeikandi.com

<u>Solved Examples</u> :

<u>EX(1)</u>: Find the first four terms of the binomial series for the functions:-

المطلوب إيجاد الحدود الأربعة الأولى فى متسلسلات ذات الحدين التالية :

(1) $$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(1-x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x)^3+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\dots\dots$$

(2) $$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2} = 1-2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\dots\dots$$

$$=1-x+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^3+\dots\dots$$

(3) $$(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^3+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(x^3)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(x^3)^3+,\dots$$

$$=1-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^6-\frac{5}{16}x^9+\dots\dots$$

(4) $$(8+12x)^{\frac{3}{2}} = \left[8\left(1+\frac{3}{2}x\right)\right]^{\frac{2}{3}} = 4\left(1+\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=4\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{2}x\right)^2+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{3}{2}x\right)^2+,\ldots\right]$$

$$=4\left[1+x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\ldots\right]$$

Ex(2) : If x is very large, Prove that :

$$\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}\simeq\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^5}$$

Solution:-

إذا كانت X كبيرة جداً فإن $\frac{1}{x}$ تكون صغيرة جدا ، لذلك نكتب مفكوك كل من :-

$\sqrt[3]{x^3+6},\sqrt[3]{x^3+3}$ بدلالة قوى $\frac{1}{x}$ كالتالى :

$$\sqrt[3]{x^3+6}=(x^3+6)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}=x\left[1+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^6}+\ldots\right]$$

$$\simeq x+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^5} \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{x^3+3}=(x^3+3)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}=x\left[1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^6}+\ldots\right]$$

$$\simeq x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5} \qquad (2)$$

من $(1),(2)$ بالطرح

$$\therefore\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}\simeq\left(x+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^5}\right)-\left(x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}\right),$$

$$\simeq\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^5}$$

وهو المطلوب

obeikandi.com

Ex(3): Series for $\sin^{-1} X$:

Integrate the binomial series for $(1-X^2)^{-\frac{1}{2}}$ to fined a series for $\sin^{-1} X$, where $|X|<1$

Solution:

نعلم أن :

$$(1-X^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} = \frac{d}{dX}(\sin^{-1} X) \qquad (1)$$

فباستخدام مفكوك ذات الحدين للمقدار $(1-X^2)^{-\frac{1}{2}}$ نحصل على :

$$(1-X^2)^{-\frac{1}{2}} = [1+(-X^2)]^{-\frac{1}{2}} = (1)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(1)^{-\frac{3}{2}}(-X^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1)^{-\frac{5}{2}}}{2!}\left(-X^2\right)^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}X^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-X^6) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{X^2}{2} + \frac{1.3}{2^2 2!}X^4 + \frac{1.3.5}{2^3 3!}X^6 + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}X^{2n} \qquad (2)$$

ومن (1) ، (2) نجد أن :

$$\int_0^X \frac{d}{dt}(\sin^{-1} t) = \int (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^X \left[1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1.3}{2^2 2!}t^4 + \frac{1.3.5}{2^3 3!}t^6 + \ldots\right]$$

$$\therefore \sin^{-1} X = \left[X + \frac{1}{2}\frac{X^3}{3} + \frac{1.3}{2^2 2!}\frac{X^5}{5} + \frac{1.3.5}{2^3 3!}\frac{X^7}{7} + \ldots\right]$$

$$= X + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)(2n+1)}\frac{X^{2n+1}}{2n+1}$$

حيث $|X|<1$ وهو المطلوب .

Evaluating Nonelementary Integrals تطبيق [2] حساب التكاملات غير الأولية

Ex(1) : From the series of $\sin X$ find the integral of $\sin X^2$ in the form of power series.

Sol.

من متسلسلة $\sin X$:

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \ldots.. \quad (1)$$

بوضع X^2 مكان X نحصل على :

$$\sin X^2 = X^2 - \frac{X^6}{3!} + \frac{X^{10}}{5!} - \frac{X^{14}}{7!} + \ldots.. \quad (2)$$

بالتكامل نحصل على :

$$\int \sin X^2 dX = \frac{X^3}{3!} - \frac{X^7}{7.3!} + \frac{X^{11}}{11.5!} - \frac{X^{15}}{15.7!} + \ldots + C$$

حيث C هو ثابت التكامل [تكامل غير محدود] .

Ex(2): Estimate $\int_0^1 \sin^2 X dX$ with an error of less than 0.001 .

Sol.

المطلوب حساب التكامل المحدود $\int_0^1 \sin^2 X dX$ بالتقريب مع نسبة خطأ تقل عن 0.001

فحيث أن [معادلة (2) فى مثال (1)] :

$$\sin X^2 = X^2 - \frac{X^6}{3!} + \frac{X^{10}}{5!} - \frac{X^{14}}{7!} + \ldots..$$

$$\therefore \int_0^1 \sin X^2 dX = \left[\frac{X^3}{3} - \frac{1}{3!}\frac{X^7}{7} + \frac{1}{5!}\frac{X^{11}}{11} - \frac{1}{7!}\frac{X^{15}}{15} + \ldots..\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7.3!} + \frac{1}{11.5!} - \frac{1}{15.7!} + \ldots\right]$$

وهى متسلسلة متناوبه ، وبالحساب نجد أن : $\frac{1}{11.5!} \simeq 0.00076$ وهو أول حد بالحساب العددى تكون قيمته أقل من 0.001 وبذلك نأخذ الحدين الأول والثانى ويصبح التكامل بالتقريب المطلوب هو :

$$\int_0^1 \sin X^2 dx \simeq \frac{1}{3} - \frac{1}{7.3!} \simeq \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \simeq 0.310$$

Ex(3): Series for arctangent: $\tan^{-1} X$ and series for (π) :-

حيث أن $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} X) = \frac{1}{1+X^2} = 1 - X^2 + X^4 - X^6 + \dots$ فبالتكامل نحصل على المتسلسلة :

$$\tan^{-1} X = X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} - \frac{X^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{2n+1} + \dots \qquad (1)$$

وهى متسلسلة تقاربيه فى الفترة $|X| \leq 1$.

وبوضع $X = 1$ فى (1) نحصل على العلاقة الآتية التى تعرف بعلاقة ليبنتز (Leibnitz formula)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \qquad (2)$$

حيث $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$.

وبضرب العلاقة (2) فى (4) نحصل على المتسلسلة الآتية للعدد π :

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots + (-1)^n \frac{4}{2n+1} + \dots \qquad (3)$$

تطبيق [3] حساب الصور غير المعينه Evaluating Indeterminate forms

فى بعض الأحيان يمكن حساب الصور غير المعنية مثل $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ أو $(\infty - \infty)$ وغيرها بالتعبير عن الدالة المشتملة على تلك الصور كمتسلسلة قوى (متسلسلة تيلور أو ماكلورين) ، كما فى الأمثلة الآتية :

Ex(1): Using power series to evaluate $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln X}{X - 1}$.

obeikandi.com

Sol.

بوضع $X=1$ نجد أن النهاية للدالة $= \frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0}$ فنعبر عن $\ln X$ بمتسلسلة تيلور فى قوى $(X-1)$ بالصورة

$$\ln X = (X-1) - \frac{1}{2}(X-1)^2 + \ldots \qquad (1)$$

[نحصل على تلك العلاقة بوضع $(X-1)$ مكان X فى مفكوك $\ln(1+X)$ الذى سبق إيجاده]
من (1) نجد أن :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln X}{X-1} = \lim_{x\to 1}\left[1-\frac{1}{2}(X-1)+\ldots\right] = 1$$

Ex(2): <u>Using power series to evaluate</u> $\lim_{x\to 0}\frac{\sin X - \tan X}{X^3}$.

Sol.

بالتعويض عن $X=0$ نجد أن النهاية للدالة $= \frac{\sin 0 - \tan 0}{0} = \frac{0}{0}$ فنعبر عن $\sin X, \tan X$ بمتسلسلة تيلور كالآتى :

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \ldots, \quad \tan X = X + \frac{X^3}{3} + \frac{2X^5}{15} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \sin X - \tan X = \left(X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \ldots\right) - \left(X + \frac{X^3}{3} + \frac{2X^5}{15} + \ldots\right)$$

$$= -\frac{X^3}{2} - \frac{X^5}{8} - \ldots = X^2\left[-\frac{1}{2} - \frac{X^2}{8} - \ldots\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin X - \tan X}{X^3} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2} - \frac{X^2}{8} - \ldots\right] = -\frac{1}{2}$$

Ex(3): Using power series to evaluate $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin X} - \frac{1}{X}\right]$, then find an approximation formula for $\csc X$

Sol.

بالعويض عن $X=0$ نجد أن النهاية للدالة $= \frac{1}{\sin 0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$ فنعبر عن $\sin X$ بمتسلسلة تيلور ، كالآتى :

$$\frac{1}{\sin X}-\frac{1}{X}=\frac{X-\sin X}{X\sin X}=\frac{X-\left[X-\frac{X^3}{3!}+\frac{X^5}{5!}-\ldots\right]}{X\cdot\left[X-\frac{X^3}{3!}+\frac{X^5}{5!}-\ldots\right]}$$

$$=\frac{X^3\left[\frac{1}{3!}+\frac{X^2}{5!}+\ldots\right]}{X^2\left[1-\frac{X^2}{3!}+\ldots\right]}=X\,\frac{\frac{1}{3!}-\frac{X^2}{5!}+\ldots}{1-\frac{X^2}{3!}+\ldots} \qquad (1)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin X}-\frac{1}{X}\right)=\lim_{x\to 0}\left[X\,\frac{\frac{1}{3!}-\frac{X^2}{5!}+\ldots}{1-\frac{X^2}{3!}+\ldots}\right]=0 \qquad (2)$$

ونلاحظ من (1) أنه : إذا كانت $|X|$ صغيرة : فإن : $\frac{1}{\sin}-\frac{1}{X}\simeq X\,\frac{\frac{1}{3!}}{1}\simeq\frac{X}{3!}\simeq\frac{X}{6}$

ومنها نجد أن : $\csc X\simeq\frac{1}{X}+\frac{X}{6}$.

تذكر أن

نذكر هنا مفكوكات الدوال الهامة التي سبق الحصول عليها :

1- $\sin X=X-\frac{X^3}{3!}+\frac{X^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad |X|<\infty$

2- $\cos X=1-\frac{X^2}{2!}+\frac{X^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{X^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad |X|<\infty$

3- $\tan^{-1}X=X-\frac{X^3}{3}+\frac{X^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{X^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad |X|\le 1$

4- $\frac{1}{1-X}=1+X+X^2+\ldots+X^n+\ldots,\quad |X|<1$

5- $\frac{1}{1-X}=1-X+X^2+\ldots+(-X)^n+\ldots,\quad |X|<1$

6- $e^x=1+X+\frac{X^2}{2!}+\ldots+\frac{X^n}{n!}+\ldots,\quad |X|<\infty$

7- $\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}++\ldots+(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}+\ldots,\quad -1<X\le 1$

obeikandl.com