الباب الثانى

المشتقات الجزئية

(Partial Derivatives)

[1] الدوال ذات المتغيرات المتعددة :

Function of Several Variables :

فى هذا الباب سوف ندرس الدوال ذات الاكثر من متغير مثب :

(1) دالة فى متغيرين $(x, y) \leftarrow z = f(x, y) = x^2 + y^2$

(2) دالة فى 3 متغيرات $(x, y, z) \leftarrow w = f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3xz^2$

مثال : أوجد قيمة الدوال الآتية :

(i) $f(x, y) = x^2 + 3y^3$ at the point (-3, 1)

(ii) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ at the point (3, 0, 4)

الحل :

(i) $f(-3,1) = (-3)^2 + 3(1)^3 = 9 + 3 = 12$

(ii) $f(3,0,4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

النطاق (أو مجال التعريف) والمدى (Domains and Ranges)

يعرف نطاق (أو مجال تعريف) الدالة $z = f(x, y)$ بأنه مجموعة النقاط فى المستوى والتى تكون عندها الدالة معرفة أى تأخذ قيما حقيقية .

وكذلك بالنسبة للدالة $w = f(x, y, z)$ (ذات الثلاثة متغيرات) .

أما المدى فيعرف بأنه الفترة التى تأخذ فيها الدالة أصغر وأكبر قيمة لها .

ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

مثال (1) : أوجد النطاق (المجال) والمدى للدوال الآتية :

(1) $z = \sqrt{y - x^2}$:

الدالة المعطاه تكون معرفة عندما يكون المقدار تحت الجذر موجب أى عندما :

$y - x^2 \geq 0$ أى $y \geq x^2$ وهو نطاق أو مجال تعريف الدالة z ، أما المدى فهو الفترة نصف المفتوحة $[0,\infty)$ وهى القيم التى تأخذها y بدءا من أقل قيمة وهى الصفر وصولا إلى المالانهاية .

(2) $z = \sin xy$:

الدالة المعطاه معرفة على كل المستوى (x, y) وهو نطاقها أو مجال تعريفها أما المدى فينحصر مابين 1 ,1- أى أنه يشكل الفترة المغلقة [1 ,1-] .

(3) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

الدالة المعطاه معرفة على كل الفراغ (x, y, z) وهو نطاقها أو مجال تعريفها أما المدى فهو الفترة نصف المفتوحة $[0,\infty)$ وذلك حيث أن : $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$

(4) $w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$:

الدالة المعطاه معرفة على كل الفراغ فيما عدا عندما $(x, y, z) = (0,0,0)$ ولذلك فإن نطاقها أو مجال تعريفها هو $(x, y, z) \neq 0,0,0$ بينما مداها هو الفترة المفتوحة $(0,\infty)$ وذلك حيث أن : $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ [ولا تساوى صفر] .

(5) $w = xy \ln z$:

وهذه الدالة تكون معرفة فقط إذا كانت $z > 0$ [حيث أن $\ln 0 = -\infty$] ولذلك فإن نطاق أو مجال تعريفها هو نصف الفضاء أو الفراغ $z > 0$ أما مداها فتمثله الفترة المفتوحة $(-\infty, \infty)$

<u>مثال (2)</u> : أوجد النطاق (المجال) والمدى للدوال الآتية :-

1- $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

<u>الحل</u> :

الداله f تكون معرفة إذا كان : $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ أى إذا كان : $-x^2 - y^2 \geq -4$ أى $x^2 + y^2 \leq 4$ وهذه المتباينة تمثل مجموعة النقاط التى تقع داخل وعلى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 ، فهى بذلك نطاق أو مجال تعريف الدالة f.

ولإيجاد المدى : أصغر قيمة للمقدار $(4-x^2-y^2)$ هى الصفر حيث أن $4-x^2-y^2 \geq 0$ ، أما أكبر قيمة للمقدار فهى عندما يكون $x=y=0$ أى أن أكبر قيمة هى : $\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4}=2$ $\therefore$ مدى الدالة هو الفترة المغلقة $[0, 2]$.

$$2\text{- } f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}} \ :$$

الحل :

الدالة f تكون معرفة إذا كان $1-x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9} \geq 0$ أى إذا كان $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9} \leq 1$

وتمثل هذه المتباينة جميع النقاط التى تقع داخل وعلى المنحنى $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

والمعروف بمجسم القطع الناقص (Ellipsoid) .

ولإيجاد المدى : أصغر قيمة للمقدار $\left(1-x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}\right)$ هى الصفر حيث أن $1-x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9} \geq 0$ ، أما أكبر قيمة للمقدار فهى عندما يكون $x=y=z=0$ أى أن أكبر قيمة هى :- $1-0-0-0=1$ ويكون مدى الدالة هو الفترة المغلقة $[0, 1]$.

$$3\text{- } w=\ln(x+2y+z-3):$$

الحل :

تكون الدالة w معرفة عندما $x+2y+z-3>0$ [ولا تساوى صفر] .

أى عندما $x+2y+z>3$ والمعادلة $x+2y+z=3$ هى معادلة مستوى ، وعلى ذلك فإن نطاق الدالة w يشكل النصف العلوى من الفراغ ولا يحتوى على المستوى ، ويكون مدى w هو مجموعة الأعداد الحقيقة R أو الفترة المفتوحة $(-\infty,\infty)$ وذلك لأن الدالة المعطاة هى كثيرة حدود .

مثال (3) : أوجد النطاق (المجال) – domain – للدوال لأتية :-

(i) $z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ (ii) $z=\ln(x^2+y^2-4)$

الحل :

$$(i)\ z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

الدالة يكون لها قيما حقيقية إذا كان $4-x^2-y^2>0$ [ولا تساوى صفرا لأن الدالة فى تلك الحالة تكون غير معرفة] ، أى إذا كان : $-x^2-y^2>-4$ أى إذا كان : $x^2+y^2<4$ ، وتمثل هذه المتباينة جميع النقاط التى تقع داخل الدائرة (وليس عليها) التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .

$$(ii)\ z=\ln(x^2+y^2-4)$$

الدالة يكون لها قيما حقيقية إذا كان $x^2+y^2-4>0$ [ولا تساوى صفراً لأن الدالة فى تلك الحالة تكون غير معرفة حيث أن $\ln 0=-\infty$] وبذلك فإن :

$x^2+y^2>4$ ، وتمثل هذه المتباينة جميع النقاط خارج الدائرة (وليس عليها) التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .

وهو المطلوب .

منحنى التساوى وسطوح التساوى للدوال ذات الأكثر من متغير :

(1) منحنى التساوى للدالة $z=f(x,y)$ (Level curve) :

يعرف منحنى التساوى للدالة $z=f(x,y)$ بأنه مجموعة النقاط (x,y) فى المستوى والتى عندها : $z=f(x,y)=c$ ، حيث c ثابت .

(2) سطح التساوى للدالة $w=f(x,y,z)$ (Level surface) :

يعرف سطح التساوى للدالة $w=f(x,y,z)$ بأنه مجموعة النقاط (x,y,z) فى الفراغ والتى عندها : $w=f(x,y,z)=c$ ، حيث c ثابت .

Solved Problems مسائل محلولة

Problem (1) : Find the level curve of the function $z = x^2 + y^2$

Sol.

يشكل منحنى التساوى لهذه الدالة مجموعة الدوائر : $x^2 + y^2 = c$ والتى مركزها نقطة الأصل $(0, 0)$ والواقعة فى المستويات $z = c$ التى توازى المستوى xy . وتأخذ c قيما مختلفة :

فعندما $c = 1$ مثلا : يكون منحنى التساوى هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ وهى دائرة موجودة فى المستوى $z = 1$ وبالتالى فهى دائرة فى الفراغ مركزها $(0, 0, 1)$

Problem (2) : Find the equation for the level curve of the function $f(x, y) = 2x - y + 4$ at the point (1, 1).

Sol. $f(x, y) = 2x - y + 4$

وعند النقطة $(1, 1)$ يكون منحنى التساوى z فى المستوى (xy) هو :

$$z = 2(1) - (1) + 4 = 5$$

وبالتعويض فى الدالة $f(x, y)$ بالقيمة $z = 5$ نحصل على معادلة منحنى التساوى حيث :

$5 = 2x - y + 4 \quad \leftarrow \quad y = 2x - 1$ وهو خط مستقيم .

Problem (3): Find the equation for the level curve of the function $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ that passes through the point $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Sol.

$$f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 \qquad (1)$$

وعند النقطة $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ يكون منحنى التساوى z فى المستوى هو :

$$z = 16 - (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 = 16 - 8 - 2 = 16 - 10 = 6$$

وبالتعويض فى الدالة $f(x, y)$ بالقيمة $z = 6$ نحصل على :

$$6 = 16 - x^2 - y^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 10 \qquad (2)$$

وهو منحنى التساوى للدالة المعطاة .

Problem (4): Find the equation of the level surface for the function $f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z$ through the point $(3,-1,1)$

Sol.

$$f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z \qquad (1)$$

وعند النقطة $(3,-1,1)$ يكون سطح التساوى w فى الفراغ هو :

$$w=\sqrt{3+1}-\ln 1=\sqrt{4}=2$$

وبالتعويض فى الدالة $f(x,y,z)$ بالقيمة $w=2$ نحصل على :

$$2=\sqrt{x-y}-\ln z \quad \therefore \quad \sqrt{x-y}=2+\ln z \qquad (2)$$

وهى معادلة سطح التساوى للدالة المعطاة .

Limits and continuity النهايات والأتصال

(1) النهايات Limits :-

تنطبق قواعد النهايات للدوال أحادية القيمة على الدوال متعددة القيم ، فمثلا :-

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\pm \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$(2)\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)g(x,y)]=[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)][\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)]$$

وهكذا ....

مثال : أوجد النهايات الآتية :-

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}=\frac{(0)-(0)(1)+3}{(0)^2(1)+(5)(0)(1)-(1)^3}=-3$$

$$(2)\quad \lim_{(x,y)\to(3,-4)}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$(3)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

فى هذه المسألة نقوم بالتعويض المباشر فنجد النهاية $=\frac{0}{0}$ فنلجأ إلى ضرب البسط والمقام فى المرافق $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ فنحصل على :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0(\sqrt{0}+\sqrt{0})=0$$

$$(4)\quad \lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)}\frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}=\frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$(5)\quad \lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x=(3)(e^0)(\cos 2\pi)=(3)(1)(1)=3$$

$$(6)\quad \lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}=e^{0-\ln 2}=e^{-\ln 2}=e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{y}\sin x}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (e^{y})\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = (e^{0})\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = (1)(1) = 1$

(8) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^{2}-2xy+y^{2}}{x-y} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{(x-y)^{2}}{x-y} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} (x-y)$

$= (1-1) = 0$

(9) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^{2}-y^{2}}{x-y} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x+y)$

$= (1+1) = 2$

(10) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq 2}} \dfrac{y+4}{x^{2}y-xy+4x^{2}-4x} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq 2}} \dfrac{y+4}{x(x-1)(y+4)}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{2(2-1)} = \dfrac{1}{2}$

(11) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{(\sqrt{x+y}-2)(\sqrt{x+y}+2)}{\sqrt{x+y}-2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} (\sqrt{x+y}+2) = (\sqrt{2+2}+2) = 2+2 = 4$

(12) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x-y\neq 1}} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x-y\neq 1}} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y+1})(\sqrt{x}+\sqrt{y+1})}$

$= \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x-y\neq 1}} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3+1}} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

(2) الاتصال Continuity :-

أي دالة $f(x,y)$ تكون متصلة عند النقطة (x_0,y_0) إذا كان :

(i) f تكون معرفة عند (x_0,y_0)

(ii) النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ تكون موجودة

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

وينطبق ذلك على الدوال ذات المتغيرات الثلاثة $f(x,y,z)$ أيضاً .

Solved Examples أمثلة محلولة

Ex(1): At what points (x, y) in the plane, the following functions are contineous .

(i) $f(x,y)=\sin\frac{1}{xy}$

(ii) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$,

Sol. (i) $f(x,y)=\sin\frac{1}{xy}$

هذه الدالة تكون متصلة عند كل النقاط (x,y) ماعدا عندما $x=0$ أو $y=0$ فالدالة تكون غير معرفة .

(ii) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$

تكون متصلة عند كل النقاط (x, y) بحيث أن : $x^2-3x+2\neq 0$ أى $(x-2)(x-1)\neq 0$ أى : $x\neq 2,\ x\neq 1$ ، أى أن الدالة تكون متصلة عند كل النقاط ماعدا عند $x=1$ و $x=2$.

Ex(2): At what points (x,y,z) in space, the following functions are contineous.

(i) $f(x,y,z)=xy\sin\frac{1}{z}$

(ii) $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+z^2-1}$,

Sol.

(i) $f(x,y,z)=xy\sin\frac{1}{z}$

تكون متصلة عند كل (x,y,z) بحيث أن $z\neq 0$ حيث تكون الدالة معرفة .

(ii) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+z^2-1}$

تكون متصلة عند كل (x,y,z) بحيث أن $x^2+z^2-1\neq 0$ أى $x^2+z^2\neq 1$

أى أن الدالة تكون متصلة عند كل نقاط الفراغ ماعدا عندما $x^2+z^2=1$ وهو المطلوب .

Ex(3): Discuss the continuity of the function $f(x,y)$ at the point (2, 3), where

$$f(x,y)=\begin{cases} xy(x+y) & (x,y)\neq(2,3) \\ 8 & (x,y)=(2,3) \end{cases}$$

Sol.

(i) $f(2,3)=8$ $\rightarrow$ the function is defined at (2, 3)

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} xy(x+y)=(2)(3)[2+3]=(6)[5]=30$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)\neq f(2,3)$$

$\therefore$ الدالة تكون غير متصلة عند النقطة (2, 3) .

ملحوظة : يمكن إعادة تعريف الدالة $f(x,y)$ بحيث تصبح متصلة عند النقطة (2, 3) بحيث تأخذ الدالة الصورة الآتية :

$$f(x,y)=\begin{cases} xy(x+y) & (x,y)\neq(2,3) \\ 30 & (x,y)=(2,3) \end{cases}$$

وبالتالى نحصل على : $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)=f(2,3)$ أى أن الدالة بصورتها هذه تكون متصلة عند (2, 3) .

Ex(4): Discuss the continuity of the function $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$ at the point (0, 0).

Sol.

(i) $f(0,0)=\dfrac{\sin 0}{0}=\dfrac{0}{0}=$ كمية غير معينة

$\therefore$ الدالة غير معرفة عند النقطة (0, 0) وبالتالى فهى غير متصلة عند النقطة (0, 0)

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

∴ النهاية موجودة ، ولكن : $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$

أى الدالة غير متصلة عند النقطة $(0, 0)$.

ملحوظة : يمكن إعادة تعريف الدالة $f(x,y)$ بحيث تصبح متصلة عند النقطة $(0, 0)$ بحيث تكون صورتها

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

وبالتالى نحصل على : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ أى أن الدالة بصورتها هذه تكون متصلة عند $(0, 0)$.

Solved Problem مسائل محلولة

Problem (1): Prove that the function $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2 - 4xy}{x+6xy^3}$ is continuous at the point $(4, 1)$.

Sol.

الدالة المعطاة هى دالة كسرية ، ولكى نثبت أنها متصلة عند $(4, 1)$ نحسب النهاية عند تلك النقطة فإذا أعطت قيمة حقيقية فأنها تكون متصلة عند تلك النقطة

$$\lim_{(x,y)\to(4,1)} \frac{x^3y^2 - 4xy}{x+6xy^3} = \frac{(4)^3(1)^2 - 4(4)(1)}{(4)+6(4)(1)^3} = \frac{64-16}{4+24} = \frac{48}{28} = \frac{12}{7}$$

وبالتالى فإن الدالة تكون متصلة عند النقطة $(4, 1)$ ، وهو المطلوب .

Problem (2): Find the values of x, y at which the function

$$f(x,y) = \frac{x^3 + 7xy^5 - 8y^6}{x^2 - y^2} \text{ is continuous .}$$

Sol.

حيث أن $f(x,y)$ دالة كسرية فلكى تكون متصلة يجب أن المقام لا يساوى صفرا [حتى تكون معرفة] ، أى أن $x^2-y^2\neq 0$ أى أن $y^2\neq x$ أى أن $y\neq\pm\sqrt{x}$ ، وهذا يعنى أن الدالة $f(x,y)$ تكون متصلة عند كل النقاط فى الفراغ ماعدا عند $y\neq\pm\sqrt{x}$ وهو المطلوب.

Problem (3): discuss the continuity of the function :

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+2y & ,\ (x,y)\neq(1,2) \\ 0 & ,\ (x,y)=(1,2) \end{cases}$$

Sol.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=(1)^2+2(2)=5\neq f(1,2) \qquad \mid f(1,2)=0$$

وبالتالى فإن الدالة غير متصلة عند النقطة $(1,2)$ وتمثل تلك النقطة نقطة عدم اتصال للدالة .

ويلاحظ أنه يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تساوى قيمة النهاية حتى تصبح الدالة متصلة وصورتها حينئذ تكون :

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+2y & ,\ (x,y)\neq(1,2) \\ 5 & ,\ (x,y)=(1,2) \end{cases}$$

$$f = f(x, y, z)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = \left.\dfrac{df}{dx}\right\|_{y,z \text{ const.}}$	$\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = \left.\dfrac{df}{dy}\right\|_{x,z \text{ const.}}$	$\dfrac{\partial f}{\partial z} = f_z = \left.\dfrac{df}{dz}\right\|_{x,y \text{ const.}}$
المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x	المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y	المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة الى z

Solved Problem مسائل محلولة

Ex(1): Find the values of $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ at the point (4, -5) if

$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$

Sol.

لإيجاد $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: نفاضل بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتة

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1)$$

$$= 2x + (3)(1)y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,-5)} = 2(4) + 3(-5) = 8 - 15 = -7$$

لإيجاد $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: نفاضل بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتة

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1)$$

$$= 0 + (3)(x)(1) + 1 - 0 = 3x + 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,-5)}=3(4)+1=12+1=13$$

وهو المطلوب .

Ex(2): if $f(x,y)=y\sin xy$, find $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Sol.

نفاضل بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتة

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[y\sin xy]=y\frac{\partial}{\partial y}(\sin xy)+(\sin xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$=y[\cos xy.\frac{\partial}{\partial y}(xy)]+(\sin xy)(1)$$

$$=y[x\cos xy]+\sin(xy)=xy\cos xy+\sin xy$$

Ex(3): Find f_x and f_y if $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$

Sol.

$$\text{(i) } f_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(y+\cos x)(0)-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$$

$$\text{(ii) } f_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial y}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(y+\cos x)(2)-2y(1)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$$

Ex(4): Implicit partial differentiation (التفاضل الجزئي الضمني)

Find $\frac{\partial z}{\partial y}$ from the equation: $yz-\ln z=x+y$

Sol.

نفاضل طرفي المعادلة بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتة ، z متغير (تعتمد على x).

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(\ln z) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(y)$$

$$\therefore \ y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0 = 1$$

$$\therefore \left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y - \frac{1}{z}} = \frac{z}{yz - 1}$$

وهو المطلوب .

Ex(5): Find $\frac{\partial f}{\partial z}$ for the function $f(x,y,z) = x\sin(y+3z)$

Sol.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}[\sin(y+3z)]$$

$$= x[\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z)] = x\cos(y+3z)[3] = 3x\cos(y+3z)$$

Second-order Partial derivatives: المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

إذا كان لدينا الدالة $f = f(x,y)$ فإن المشتقات الجزئية الثانية هى :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx}$$ [نفاضل أولا بالنسبة إلى y ثم بالنسبة إلى x]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy}$$ [نفاضل أولا بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y]

: Clairaut's Theorem نظرية كليروت

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة هى ومشتقاتها الجزئية فإن :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}} \rightarrow \boxed{f_{yx} = f_{xy},}$$

وتعرف بنظرية كليروت .

Ex: If $f(x,y)=x\cos y+ye^{x}$

find: $f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}$ and verify Clairaut's Theorem

Sol.

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y+ye^{x})=\cos y+ye^{x} \qquad (1)$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x\cos y+ye^{x})=-x\sin y+e^{x} \qquad (2)$$

$$\therefore\ f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(f_x)=\frac{\partial}{\partial x}[\cos y+ye^{x}]=ye^{x} \qquad (3)$$

$$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(f_y)=\frac{\partial}{\partial y}[-x\sin y+e^{x}]=-x\cos y \qquad (4)$$

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)=\frac{\partial}{\partial y}(\cos y+ye^{x})=-\sin y+e^{x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \qquad (5)$$

$$f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(f_y)=\frac{\partial}{\partial x}(-x\sin y+e^{x})=-\sin y+e^{x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$ $\leftarrow f_{xy}=f_{yx} \leftarrow$ (5) , (6) من

وهى نظرية كليروت .

المشتقات من رتب أعلى : **Higher order derivatives**

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f_{yy})=(f_{yy})_x=f_{yyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f_{yyx})=(f_{yyx})_x=f_{yyxx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f_{yy})=(f_{yy})_{xx}=f_{yyxx}$$

Ex(1): If $f(x,y,z)=1-2xy^2z+x^2y$, calculate the fourth order partial derivative f_{yxyz}

Sol.

المطلوب المشتقة الرابعه f_{yxyz} : نفاضل أولا بالنسبة إلى y ثم إلى x ثم إلى y ثم إلى z

$$f = 1-2xy^2z + x^2y \to f_y = -4xyz + x^2 \to f_{yx} = -4yz + 2x \to$$

$$f_{yxy} = -4z \to f_{yxyz} = -4$$

Ex(2): If $f(x,y,z) = xy^3 - zx^5 + x^2yz$, prove that :

$$f_{xyz} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx} = f_{zyx} = 2x$$

Sol. $\to$ $f = xy^3 - zx^5 + x^2yz$

$f_x = y^3 - 5zx^4 + 2xyz \to f_{xy} = 3y^2 + 2xz \to f_{xyz} = 2x$ (1)

$f_x = y^3 - 5zx^4 + 2xyz \to f_{xz} = -5x^4 + 2xy \to f_{xzy} = 2x$ (2)

$f_y = 3xy^2 + x^2z \to f_{yx} = 3y^2 + 2xz \to f_{yxz} = 2x$ (3)

$f_y = 3xy^2 + x^2z \to f_{yz} = x^2 \to f_{yzx} = 2x$ (4)

$f_z = -x^5 + x^2y \to f_{zx} = -5x^4 + 2xy \to f_{zxy} = 2x$ (5)

$f_z = -x^5 + x^2y \to f_{zy} = x^2 \to f_{zyx} = 2x$ (6)

[3] قاعدة السلسلة **The chain rule**

نظرية :

[1] إذا كانت $w = f(x,y)$ حيث : $x = x(t),\ y = y(t)$

$$\therefore \boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}} \qquad (1)$$

[2] إذا كانت $w = f(x,y,z)$ حيث : $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$

$$\therefore \boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}} \qquad (2)$$

Ex(1): If $w = xy$, apply the chain rule to find $\frac{dw}{dt}$ along the path :

$x = \cos t,\ y = \sin t$

Sol. $w = xy = f(x, y)$

$$\therefore \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

$$w = f = xy \to \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

$$x = \cos t \quad \to \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = \sin t \quad \to \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

بالتعويض فى (1) نحصل على :

$$\frac{dw}{dt} = (y)(-\sin t) + (x)(\cos t)$$

$$= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) = -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t$$

[حيث : $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$]

وهو المطلوب .

Ex(2): Find $\frac{dw}{dt}$ for the curve $w = xy + z$

where : $x = \cos t$, $y = \sin t$,

Sol. $w = xy + z = f(x, y, z)$

$$\therefore \quad \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1)$$

$$= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1$$

$$= 1 + \cos^2 t - \sin^2 t = 1 + \cos 2t$$

وهو المطلوب .

composite function الدوال المتراكبة (المركبة)

نظرية :

[1] إذا كانت $w = f(x, y)$ حيث : $x = x(r,s), \;\; y = y(r,s)$

فإن التفاضل الجزئى للدالة w بالنسبة إلى r, s يعطى بالعلاقتين :-

[التفاضل بالنسبة إلى r مع ثبوت s]

$$\text{(i)} \; \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

[التفاضل بالنسبة إلى s مع ثبوت r]

$$\text{(ii)} \; \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

[2] إذا كانت $w = f(x, y, z)$ حيث : $x = x(r,s), \;\; y = y(r,s), \;\; z = z(r,s)$

فإن التفاضل الجزئى للدالة w بالنسبة إلى r, s هو :-

$$\text{(i)} \; \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\text{(ii)} \; \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Ex(1): If $w = x^2 + y^2, \;\; x = r - s, \;\; y = r + s$

find $\frac{\partial w}{\partial r}$ and $\frac{\partial w}{\partial s}$ in terms of r and s

Sol.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x)(1) + (2y)(1) = 2x + 2y$$

$$= 2(r - s) + 2(r + s) = 4r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x)(-1) + (2y)(1) = 2y - 2x$$

$$= 2(r + s) - 2(r - s) = 4s$$

وهو المطلوب .

Ex(2): Express $\frac{\partial w}{\partial r}$ and $\frac{\partial w}{\partial s}$ in terms of r and s, if :

$$w = x + 2y + z^2, \;\; x = \frac{r}{s}, \;\; y = r^2 + \ln s, \;\; z = 2r$$

Sol. $w = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=(1)\left(\frac{1}{s}\right)+(2)(2r)+(2z)(2)$$

$$=\frac{1}{s}+4r+4z=\frac{1}{s}+4r+4(2r)=\frac{1}{s}+12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=(1)\left(\frac{-r}{s^2}\right)+(2)\left(\frac{1}{s}\right)+(2z)(0)$$

$$=-\frac{r}{s^2}+\frac{2}{s}=\frac{2}{s}-\frac{r}{s^2}$$

وهو المطلوب .

ملحوظة: إذا كانت f دالة فى x فقط أى إذا كانت $w = f(x)$ وكانت $x = x(r, s)$ فيكون لدينا العلاقتين :-

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}$$

حيث w دالة فى x فيكون تفاضلها تفاضلا كلياً ، بينما x تعتمد على r, s فيكون تفاضلها تفاضلا جزئياً .

التفاضل الضمنى لدالة على الصورة $F(x, y) = 0$:-

نظرية : إذا كان لدينا دالة صورتها $F(x, y) = 0$ فإن :

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}}$$

حيث : $F_x=\frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$

الإثبات :- حيث أن : $w = F(x, y) = 0$ ، فبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

بالتفاضل بالنسبة إلى x :

$$w = F(x, y)$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dx}{dx}=0$$

$$\therefore\ F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}} \qquad (1) \qquad \Bigg| \quad F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \ , \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

<u>Ex</u>: If $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$, find $\dfrac{dy}{dx}$

<u>Sol</u>.

الدالة المعطاة على صورة : $F(x,y)=0$ حيث : $F(x,y) = y^2 - x^2 - \sin xy$

بتطبيق العلاقة (1) :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos xy}{2y - x\cos xy} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$

وهو المطلوب .

تعميم للتفاضل الضمنى لدالة على الصورة $F(x,y,z)=0$:

إذا كانت $F(x,y,z)$ دالة ضمنية ، وكانت $z = z(x,y)$ فإن :

(نظرية)

$$\text{(i)} \ \ z_x = -\frac{F_x}{F_y} \ , \qquad \text{(ii)} \ \ z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

<u>**الإثبات**</u>: حيث أن $z = z(x,y)$ فإن :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = z_x dx + z_y dy \qquad (1)$$

وحيث أن : $F(x,y,z)=0$ فإن :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \rightarrow F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \qquad (2)$$

بالتعويض عن dz من (1) فى (2) :-

$$F_x dx + F_y dy + F_z(z_x dx + z_y dy) = 0$$

$$\therefore (F_x + F_z z_x)dx + (F_y + F_z z_y)dy = 0$$

وحيث أن x, y متغيرات مستقلة فإن معاملات dx, dy كل منهما يساوى صفرا (نظرية) :

$$\therefore F_x + F_z z_x = 0 \rightarrow \boxed{z_x = -\frac{F_x}{F_z}} \quad , \quad F_y + F_z z_x = 0 \rightarrow \boxed{z_y = -\frac{F_y}{F_z}}$$

وهو المطلوب .

Ex: If $z^3 - xz - y = 0$, prove that : $z_{xy} = -\frac{(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3} = z_{yx}$

Sol. $F(x, y, z) = z^3 - xz - y$

$$F_x = -z \quad , \quad F_y = -1 \quad , \quad F_z = 3z^2 - x$$

$$\therefore z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\left(\frac{-z}{3z^2 - x}\right) = \frac{z}{3z^2 - x}, z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\left(\frac{-1}{3z^2 - x}\right) = \frac{1}{3z^2 - x}$$

$$\therefore z_{xy} = (z_x)_y = \left(\frac{z}{3z^2 - x}\right)_y = \frac{(3z^2 - x)(z_y) - z(6zz_y)}{(3z^2 - x)^2}$$

$$= \frac{z_y(3z^2 - x - 6z^2)}{(3z^2 - x)^2} = \frac{-z_y(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{\frac{1}{3z^2 - x}(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^2}$$

$$= -\frac{(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3} \qquad (1)$$

$$z_{yX} = (z_y)_X = \left(\frac{1}{3z^2 - x}\right)_X = \frac{(3z^2 - x)(0) - (1)(6zz_X - 1)}{(3z^2 - x)^2}$$

$$= -\frac{\frac{6z^2}{3z^2 - x} - 1}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{\frac{6z^2 - 3z^2 + x}{(3z^2 - x)}}{(3z^2 - x)^2} = \frac{-(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3} \qquad (2)$$

من $(1), (2)$ ينتج المطلوب .

[4] الدوال المتجانسة (Homogenous Functions)

نظرية : يقال أن الدالة $f(x,y)$ دالة متجانسة من درجة m إذا كان لأى بارامتر λ تتحقق العلاقة :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$$

حيث m تسمى درجة التجانس .

المعنى الهندسي للدالة المتجانسة :

بتغيير الاحداثيات (x, y) إلى $(\lambda x,\lambda y)$ فإن الدالة يمكن أن تعود إلى صورتها الأصلية مضروبة فى λ^m .

بوجه عام : فإن الدالة $f(x_1,x_2,...,x_n)$ يقال أنها متجانسة من الدرجة m إذا كان لأى بارامتر λ تتحقق العلاقة :-

$$\boxed{f(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,x_2,...,x_n)}$$

Ex: Prove that the function $f(x,y)=x^4+2xy^3-5y^4$ is homogeneous from the 4th order

Sol.

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda x)^4+2(\lambda x)(\lambda y)^3-5(\lambda y)^4 \\ &=\lambda^4x^4+\lambda^4(2xy^3)-\lambda^4(5y^4) \\ &=\lambda^4(x^4+xy^3-5y^4)=\lambda^4f(x,y)\rightarrow m=4 \end{aligned}$$

$\therefore$ الدالة متجانسة من الدرجة الرابعة ، وهو المطلوب .

نظرية أويلر للدوال المتجانسة (Euler's Theorem) :-

إذا كانت $f(x,y)$ دالة متجانسة من درجة m فإن :-

$$\boxed{xf_x+yf_y=mf} \quad \text{حيث} \quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x},\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$$

الاثبات : حيث أن $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فإن :-

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y) \tag{1}$$

فبفرض أن : $u=\lambda x\,,\ v=\lambda y$ فإن : $f=f(u,v)$

ومن قاعدة السلسلة فإن :

$$f_\lambda=\frac{\partial f}{\partial \lambda}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \lambda}=f_u x+f_v y=xf_u+yf_v \qquad (2)$$

حيث : $\frac{\partial u}{\partial \lambda}=x\,,\ \frac{\partial v}{\partial \lambda}=y$

وبتفاضل (1) بالنسبة إلى λ نحصل على :

$$f_\lambda=m\lambda^{m-1}f \qquad (3)$$

بمساواة (2), (3) :

$$\therefore\ xf_u+yf_v=m\lambda^{m-1}f \qquad (4)$$

وحيث أن λ ثابت اختيارى فيمكن كتابته $\lambda=1 \leftarrow u=x\,,\ v=y$.

وتصبح (4) بالصورة :

$$\boxed{xf_x+yf_y=mf}$$

وهو المطلوب .

ملحوظة: يمكن تعميم نظرية أويلر لثلاث متغيرات أو أكثر ، فتصبح صورتها :

$\boxed{xf_x+yf_y+zf_z=mf}$ ، .... وهكذا .

Ex: Verify Euler's Theorem for the following functions:

(i) $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$ (ii) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

(iii) $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

Sol.

(i) $f(x,y)=\frac{x}{x+y}\rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x}{\lambda x+\lambda y}=\frac{\lambda x}{\lambda(x+y)}$

$$=\frac{x}{x+y}=\lambda^0 f(x,y)$$

حيث $\lambda^0=1$ ، وبذلك فإن الدالة هى دالة متجانسة من الدرجة صفر .

ومن نظرية أويلر : يجب إثبات أن : $xf_x + yf_y = 0$

$$f_x = \frac{(x+y)(1)-(x)(1)}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2} \quad , \qquad (1)$$

$$f_y = \frac{(x+y)(0)-(x)(1)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{(x+y)^2} \qquad (2)$$

من (1) بالضرب فى x ومن (2) بالضرب فى y والجمع نحصل على :

(نظرية أويلر)

$$\therefore xf_x + yf_y = \frac{xy}{(x+y)^2} - \frac{yx}{(x+y)^2} = 0$$

وهو المطلوب .

$$\text{(ii)}\ f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \to f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda(x-y)}{\lambda(x+y)} = \lambda^0 f(x,y)$$

$|\lambda^0 = 1$

$\therefore$ الدالة متجانسة من الدرجة صفر $(m = 0)$ ولاثبات أنها تحقق نظرية أويلر يجب إثبات أن : $xf_x + yf_y = 0$

$$f_x = \frac{(x+y)(1)-(x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad ,$$

(1)

$$f_y = \frac{(x+y)(-1)-(x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2} \qquad (2)$$

بضرب (1) فى x و (2) فى y والجمع نحصل على :

(نظرية أويلر)

$$xf_x + yf_y = \frac{2xy}{(x+y)^2} - \frac{2yx}{(x+y)^2} = 0$$

وهو المطلوب .

$$\text{(iii)}\ f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} \to f(\lambda x, \lambda y) = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \lambda^0 f(x,y)$$

$\therefore$ الدالة متجانسة من الدرجة صفر $(m = 0)$ ولاثبات أنها تحقق نظرية أويلر يجب إثبات أن : $xf_x + yf_y = 0$

$$f_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}(y)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (1)$$

$$f_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad (2)$$

بضرب (1) فى x و (2) فى y والجمع نحصل على :

$$xf_x + yf_y = \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2} = 0$$

∴ الدالة المعطاه تحقق نظرية أويلر ، وهو المطلوب .

Problem : Prove that the function $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x^3+y^3)}$, $x-y \neq 0$

verify Euler's Theorem for homogeneous functions.

الدالة التوافقية : Harmonic function

نظرية : يقال أن الدالة $z = f(x,y)$ دالة توافقية (أو هارمونية) إذا حققت المعادلة $f_{xx} + f_{yy} = 0$ والتى تعرف بمعادلة لابلاس (Laplace's Equation) وصورتها فى الاحداثيات الكرتيزية :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Ex(1): Prove that the function $z = \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$ is a harmonic function.

Sol.

المطلوب إثبات أن : $z_{xx} + z_{yy} = 0$ (معادلة لابلاس) حتى تكون الدالة z توافقية .

$$z_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad (1)$$

$$\therefore z_{xx} = y\left[\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}(2x)\right] = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad (2)$$

$$z_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}(x)\left(\frac{-1}{y^2}\right) = \frac{y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2} \qquad (3)$$

$$\therefore z_{yy} = -x\left[\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}(2y)\right] = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad (4)$$

من (4) , (2) بالجمع نحصل على :

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$ (معادلة لابلاس)

$\therefore$ الدالة $z = \tan^{-1}\frac{x}{y}$ هى دالة توافقية .

Ex(2): Prove that the function $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ is a harmonic function.

Sol.

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (1) \quad , \quad f_{yy} = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad , (2)$$

$$f_{xx} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] = 2\left[\frac{(x^2+y^2)(1)-(x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}\right] = 2\left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (3)$$

$$f_{yy} = 2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = 2\left[\frac{(x^2+y^2)(1)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right] = 2\left[\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (4)$$

من (4) , (3) بالجمع :

$$f_{xx} + f_{yy} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$ (معادلة لابلاس)

وهو المطلوب .

[5] التفاضلات : (Differentials) :

إذا كانت $w = f(x, y, z)$ فإن تفاضلة (dufferential) الدالة w تعرف بالعلاقة :

$$\boxed{dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz} \qquad (1)$$

و هذه العلاقة تنتج من العلاقة :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

وذلك بضرب الطرفين فى dt .

تمثل العلاقة (1) التغير الحادث فى الدالة أى dw نتيجة التغيرات الحادثة فى كل من x, y, z أى dx, dy, dz .

Ex: Find the differential of $w = e^{x^2+y^2}\sin z^2$

Sol.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}\sin z^2 \;, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}\sin z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e^{x^2+y^2}\cos z^2.(2z) = 2ze^{x^2+y^2}\cos z^2$$

بالتعويض فى (1) نحصل على تفاضلة الدالة w بالصورة :

$$dw = 2e^{x^2+y^2}[x(\sin z^2)dx + (y\sin z^2)dy + (z\cos z^2)dz]$$

وهو المطلوب .

حساب التغير فى دالة f فى الاتجاه $\bar{u}$:

Estimating the change in f in the direction of $\bar{u}$:

يمكن كتابة تفاضلة دالة $f = f(x, y, z)$ بدلالة تدرج f (أى $\bar{\nabla} f$) كالتالى :-

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1)$$

$$(\bar{\nabla} f).(d\bar{r}) = \left[\bar{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right].\left[\bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz\right]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad (2)$$

من (2) , (1)نجد أن :

$$\boxed{df = (\overline{\nabla} f).(d\vec{r}) = (\overline{\nabla} f \,.\, \vec{u}) dr} \qquad (3)$$

$d\vec{r} = \vec{u}\, dr$ | حيث $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ متجه الوحدة فى إتجاه $\vec{r}$

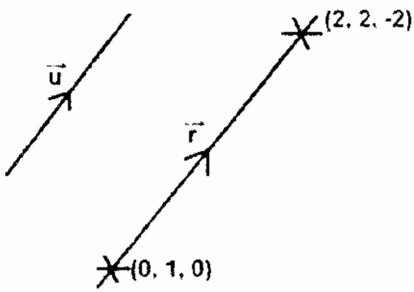
$\vec{r} = \vec{u}\; r = \vec{u}|\vec{r}|$ | $d\vec{r} = \vec{i}\; dx + \vec{j}\; dy + \vec{k}\; dz$

Ex: Find the change in the value of $f(x, y, z) = y \sin x + 2yz$ in moving a distance of $dr = 0.1$ unit (0, 1, 0) straight toward (2, 2, -2).

Sol.

لإيجاد التغير فى قيمة الدالة f أى df والناتج عن الحركة لمسافة $dr = 0.1$ من النقطة (0, 1, 0) إلى النقطة (2, 2, -2) فى إتجاه $\vec{u}$.

<u>خطوات الحل</u> :-



نوجد $\vec{u}$: (متجه الوحدة فى إتجاه $\vec{r}$)

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

ثم نوجد تدرج f (أو $f$grad أو $\overline{\nabla} f$): حيث :-

$$f = y \sin x + 2yz$$

$$\therefore \overline{\nabla} f = (y \cos x)\vec{i} + (\sin x + 2z)\vec{j} + 2y\,\vec{k}$$

$$\overline{\nabla} f \Big|_{p_0(0,1,0)} = (\cos 0)\vec{i} + (\sin 0 + 0)\vec{j} + 2(1)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\overline{\nabla} f \Big|_{p_0} . \vec{u} = (\vec{i} + 2\vec{k}).\left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

ويكون التغير فى f (أى df) نتيجة الحركة مسافة $dr = 0.1$ من $(0,1,0) \leftarrow (2,2,-2)$

هو :

$$df = (\overline{\nabla} f\Big|_{p_0} \cdot \vec{u})dr = \left(\frac{-2}{3}\right)(0.1) \simeq -0.067$$

Problem: Find the change in the value of $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ in moving a distance of $dr = 0.1$ unit from $p_0(3,4,12)$ in the direction of $\vec{r} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\vec{k}$ [Answer : $df = 0.0008$] .

إستخدام التفاضلة في حساب التغير الحادث في دالة :

إذا تحركنا من النقطة (x_0, y_0) إلى النقطة (x_0+dx, y_0+dy) فإن التغير الناتج في الدالة f يعرف كما سبق بتفاضلة f ويعطى بالعلاقة :-

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0)} dy = f_x\big|_{(x_0,y_0)} dx + f_y\big|_{(x_0,y_0)} dy \qquad (1)$$

وتستخدم هذه العلاقة في حساب التغير الحادث في كميات يمكنها التغير ، كما في الأمثلة الاتية:-

Ex: A cylinder of radius 1 and height 5, if the radius and height are changing by the amounts $dr = +0.03$, $dh = -0.1$, estimate the resulting absolute change in the valume of cylinder.

Sol.

المطلوب حساب التغير المطلق في حجم الاسطوانة إذا تغير نصف قطرها وارتفاعهما بالقيم dr ، dh .

حجم الاسطوانة : $\boxed{V = (\pi r^2)(h)}$

حيث : h = الارتفاع ، مساحة القاعدة = πr^2 ، r نصف قطر الاسطوانة .

$$\therefore V = V(r,h) \rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Bigg|_{(r_0,h_0)} dr + \frac{\partial V}{\partial h}\Bigg|_{(r_0,h_0)} dh$$

$$V = \pi r^2 h \rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = V_r = 2\pi r h, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = V_h = \pi r^2$$

$$\therefore dV = (2\pi r_0 h_0)dr + (\pi r_0^2)dh = 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1)$$

$$= 0.3\pi - 0,1\pi = 0.2\pi \simeq 0.63$$

ملحوظة : بدلا من حساب التغير المطلق (absolute change) في قيمة الدالة f يمكن حساب مايعرف بالتغير النسبي (relative change) أو النسبة المئوية وذلك باستخدام العلاقة :

$$\left[\frac{df}{f\,|_{(x_0,y_0)}}\times 100\right]$$

وفى المثال : حيث أوجدنا التغير المطلق الحادث فى حجم الاسطوانة $dV = 0.63$ نتيجة تغير الارتفاع ونصف القطر ، فمن الممكن إيجاد النسبة المئوية التى تحدد التغير النسبى فى الحجم وذلك بالعلاقة :-

$$\frac{dV}{V\,|_{(x_0,y_0)}}\times 100=\frac{0.2\pi}{\pi r_0^2 h_0}\times 100=\frac{0.2\pi}{\pi(1)^2(5)}\times 100=0.04\times 100=4\%$$

<u>الصور (أو الأشكال) التفاضلية التامة</u> : <u>Exact Differential Forms</u>

(i) الصورة الآتية : $(Mdx+Ndy+Pdz)$ تمثل صورة تفاضلية (differential form)

(ii) تكون الصورة التفاضلية تامة (exact) على النطاق D فى الفراغ إذا كانت :-

$$Mdx+Ndy+Pdz=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=(\overline{\nabla}f).\,d\vec{r}$$

حيث f دالة قياسية فى D ، وشرط كون $(Mdx+Ndy+Pdz)$ صورة تامة هو :

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z}}$$

وهذا يكافئ قولنا أن المجال $\overline{F}=M\,\overline{i}+N\,\overline{j}+P\,\overline{k}$ هو مجال محافظ .

أيضاً فإن التكامل للصورة التفاضلية التامة يكون :

$$\int_A^B Mdx+Ndy+Pdz=\int_A^B df=f(B)-f(A),$$

حيث f دالة قياسية .

<u>Ex</u>: Show that $ydx+xdy+4dz$ is exact and evaluate the integral $\int_A^B (ydx+xdy+4dz)$ from $A(1, 1, 1)$ to $B(2, 3, -1)$.

<u>Sol</u>.

$$ydx+xdy+4dz=Mdx+Ndy+Pdz$$

$$\therefore\ M=y,\quad N=x,\quad P=4$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=1=\frac{\partial M}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial x}=0=\frac{\partial M}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial z}$$

$\therefore$ الصورة $(ydx+xdy+4dz)$ هى صورة تامة ، ولذلك فإن :

$$\boxed{ydx+xdy+4dz=df},$$

حيث f دالة قياسية .

<u>ولإيجاد التكامل</u> :

$$\int_A^B (ydx+xdy+4dz)=\int_A^B df=f(B)-f(A)=f(2,3,-1)-f(1,1,1) \qquad (1)$$

<u>ولإيجاد f</u>:

$$ydx+xdy+4dz=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}=y \quad (2)\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x \quad (3)\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=4 \quad (4)$$

بتكامل (2) : $\leftarrow$ (5) $f=xy+g(y,z)$ ومنها : $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+\dfrac{\partial g}{\partial y}$

وبالمساواة مع (3) $\leftarrow$ $x+\dfrac{\partial g}{\partial y}=x$ $\leftarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial y}=0}$

$$g(y,z)=h(z)\ \rightarrow\ f=xy+h(z) \qquad (6)$$

من (6) $\leftarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{dh}{dz}$ وبمساواتهما مع (4) :

$$\therefore \frac{dh}{dz}=4\ \rightarrow\ h(z)-4z+c$$

وتصبح صورة الدالة f النهائية :

$$\boxed{f(x,y,z)=xy+4z+c}$$

وبذلك تكون قيمة التكامل :

$$\int_A^B (ydx+xdy+4dz)=f(2,3,-1)-f(1,1,1)=2+c-(5+c)=-3$$

Problem: Show that the differential form in the integrals are exact, then evaluate the integrals:

(i) $\int_A^B (2x dx + 2y dy 2z dz),\ A(0,0,0),\ B(2,3,-6),$

(ii) $\int_A^B \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy + dz,\ A(1,0,0),\ B(0,1,1)$

[٦]تطبيقات على المشتقات الجزئية :

(ا) إخطاط (أو خطية) دالة : Linearization of a function

يعرف الإخطاط (أو الخطية) (Linearization) للدالة $f(x,y)$ عند النقطة $P_0(x_0,y_0)$ بأنه الدالة:-

$$\boxed{L(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\right)(x-x_0)+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\right)(y-y_0)} \qquad (1)$$

Ex: Find the linearization $L(x,y)$ of the function :

$$f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3 \quad \text{at the point } P_0(3,2)$$

Sol.

نوجد $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}, f$ عند النقطة P_0 فنحصل على :-

$$f=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-x+y$$

وعند النقطة $P_0(3,2)$:

$$f(3,2)=(3)^2-(3)(2)+\frac{1}{2}(2)^2+3=8$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}=2(3)-(2)=4 \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}=-3+2=-1$$

وتصبح الدالة $L(x,y)$ المطلوبة بالصورة :-

$$L(x,y)=(8)+(4)(x-3)+(-1)(y-2)=4x-y-2$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : فى حالة الدالة $f(x,y,z)$ فإن الدالة $L(x,y,z)$ عند النقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ تأخذ الصورة :-

$$\boxed{L(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\right)(x-x_0)+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\right)(y-y_0)+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\right)(z-z_0)} \qquad (2)$$

Ex: Find the Linearization $L(x,y,z)$ of the function $f(x,y,z)=x^2-xy+3\sin z$ at the point $P_0(2,1,0)$.

Sol.

نوجد $\frac{\partial f}{\partial z},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f$ عند النقطة $P_0(2,1,0)$ فنحصل على :-

$$f=x^2-xy+3\sin z \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-x,\ \frac{\partial f}{\partial z}=3\cos z$$

وعند النقطة $P_0(2,1,0)$ فإن :-

$$f(2,1,0)=(2)^2-(2)(1)+3\sin 0=4-2+0=2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}=2(2)-(1)=3,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}=-2,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}=3\cos 0=3$$

وتصبح الدالة $L(x,y,z)$ بالصورة :-

$$\begin{aligned}L(x,y,z)&=(2)+(3)(x-2)+(-2)(y-1)+(3)(z-0)\\&=2+3x-6-2y+2+3z\\&=3x-2y+3z-2\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

(2) التقريب الخطى القياسى Standard Linear Approximation

عرفنا الإخطاط (أو الخطية) لدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x_0,y_0) بالصورة :-

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+f_y|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

حيث $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ، $f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$

ويعرف التقريب $f(x,y)\simeq L(x,y)$ بالتقريب الخطى القياسى ~~الإخطاطي~~ للدالة f عند النقطة (x_0,y_0).

ولحساب الخطأ فى التقريب الخط القياسى :

إذا كانت M هى الحد الأعلى (upper bound) لقيم $|f_{xx}|,\ |f_{yy}|,\ |f_{xy}|$ عند (x_0,y_0) فإن الخطأ الناتج عن إحلال $f(x,y)$ باخطاطها $L(x,y)$ يحقق العلاقة :

$$\boxed{|E(x,y)|\le\frac{1}{2}M[|x-x_0|+|y-y_0|]^2}$$

Ex: Find an upper bound for the error in the approximation:

$f(x,y)=L(x,y)$ [where $f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$, at $P_0(3,2)$]

over the rectangle: $R:|x-3|\le 0.1\ ,\ |y-2|\le 0.1$

Sol.

$$f=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\rightarrow f_x=2x-y,\ f_y=-x+y$$

$$f_{xx}=2,\ f_{xy}=-1,\ f_{yy}=1\rightarrow|f_{xx}|=|2|=2,\ f_{xy}=|-1|=1,\ f_{yy}=|1|=1$$

أكبر قيمة من هذه القيم هى 2 ، ولذلك يمكن أخذ $M=2$

باستخدام علاقة الخطأ :

$$|E(x,y)|\le\frac{1}{2}M[|x-x_0|+|y-y_0|]^2$$

وعلى المستطيل R حيث : $|x-3|\le 0.1\ ,\ |y-2|\le 0.1$

$$|E(x,y)|\le\frac{1}{2}(2)[|x-3|+|y-2|]^2=[|x-3|+|y-2|]^2$$

وبالتعويض عن قيمة $|y-2|$, $|x-3|$ نحصل على :

$$|E(x,y)| \le [0.1+0.1]^2 = 0.04$$

وكنسبة منوية : حيث أن $\leftarrow$ $f(3,2)=8$ فإن الخطأ لا يزيد عن :

$$\frac{0.04}{8} \times 100 = 0.5\%$$

التعميم للدوال ذات المتغيرات الثلاثة $f(x,y,z)$:

عرفنا الإخطاط للدالة $f(x,y,z)$ عند النقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ بالصورة :

$$L(x,y,z) = f|_{P_0} + f_x|_{P_0}(x-x_0) + f_y|_{P_0}(y-y_0) + f_z|_{P_0}(z-z_0)$$

وإذا كان لدينا مستطيلا R مركزه نقطة P ، وكانت :

$|f_{yz}|$,$|f_{xz}|$,$|f_{xy}|$,$|f_{zz}|$,$|f_{yy}|$,$|f_{xx}|$ كلها أقل من أو تساوى حد أعلى M خلال R ،

فإن الخطأ $E(x,y,z) = f(x,y,z) - L(x,y,z)$ فى تقريب f بواسطة L يكون محدودا خلال R بالعلاقة :

$$|E| \le \frac{1}{2} M [|x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|]^2$$

Ex: Find the Linearization $L(x,y,z)$ of $f(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$ at the point $(x_0,y_0,z_0) = (2,1,0)$. Find an upper bound for the error incurred in replacing f by L on the rectangle

$$R: |x-2| \le 0.01, \quad |y-1| \le 0.02, \quad |z| \le 0.01$$

Sol.

$f_x = 2x - y$, $f_y = -x$, $f_z = 3\cos z$, $f|_{P_0} = f(2,1,0) = 2$

$f_x|_{P_0} = f_x(2,1,0) = 3$, $f_y|_{P_0} = f_y(2,1,0) = -2$, $f_z|_{P_0} = f_z(2,1,0) = 3$

$$\begin{aligned} \therefore L(x,y,z) &= f|_{P_0} + f_x|_{P_0}(x-x_0) + f_y|_{P_0}(y-y_0) + f_z|_{P_0}(z-z_0) \\ &= 2 + 3(x-2) + (-2)(y-1) + 3(z-0) \\ &= 3x - 2y + 3z - 2 \end{aligned}$$

$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 0$, $f_{zz} = -3\sin z$, $f_{xy} = -1$, $f_{xz} = 0$, $f_{yz} - 0$

$$|f_{xx}|=|2|=2,\quad |f_{zz}|=|-3\sin z|,\quad |f_{xy}|=|-1|=1$$

أكبر قيمة هى قيمة : $|f_{zz}|=|-3\sin z|=|-3|=3$ ولذلك نأخذها : $M=3$ ويصبح الخطأ الحادث من إحلال f بـ L على R هو :

$$|E|\le\frac{1}{2}(3)[0.01+0.02+0.01]^2=0.0024$$

أى أن الخطأ لايزيد عن 0.0024 . وهو المطلوب .

(3) علاقة (مفكوك) تيلور فى متغيرين Taylor's formula for two variables

يمكن تعميم مفكوك تيلور لمتغير واحد (x) للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ وصورته :

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n$$

حيث $R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+cx)$ ، $0\le c<1$

للدالة $f(x,y)$ حول النقطة (a,b) وذلك فى قوى $(x-a)$ ، $(y-b)$ التصاعدية وذلك فى الصورة :

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}[(x-a)f_x+(y-b)f_y]|_{(a,b)}$$

$$+\frac{1}{2!}[(x-a)^2f_{xx}+2(x-a)(y-b)f_{xy}+(y-b)^2f_{yy}]|_{(a,b)}+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}[(x-a)f_x+(y-b)f_y]^n|_{(a,b)}+\ldots.$$

حالة خاصة :

بأخذ $(a,b)=(0,0)$ نحصل على علاقة مفكوك تيلور للدالة $f(x,y)$ عند نقطة الأصل ، وصورتها :

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}[xf_x(0,0)+yf_y(0,0)]$$

$$+\frac{1}{2!}[x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)]$$

$$+\frac{1}{3!}[x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy}]|_{(0,0)}$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)+R_n$$

حيث : $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(cx,cy)$ ، $0<c<1$

ويسمى هذا المفكوك (أو هذه العلاقة) بعلاقة ماكلورين Maclaurin's formula وهى حالة خاصة من علاقة تيلور عند النقطة (0, 0) [نقطة الأصل] .

(4) الخطأ التقريبى والتقريب التربيعى والتكعيبى :

Approximation error and quadratic and cubic approximation :

ملحوظة (1) : تمثل علاقة تيلور تقريب كثيرة حدود (polynomial approximation) للدالة ذات المتغيرين بحيث أن الحدود الأولى التى عددها n تعطى كثيرة الحدود بينما الحد الأخير يعطى الخطأ التقريبى (approximation error) .

ملحوظة (2) : تشكل الحدود الثلاثة الأولى فى علاقة تيلور إخطاط (أو خطية) الدالة (functions linearization) ولتحسين هذا الاخطاط نضيف الحدود ذات القوى الأعلى ، وبأخذ الحدود الثلاثة الأولى نحصل على مايعرف بالتقريب التربيعى (quadratic approximation) ، كما يشكل الحد التالى للحدود الثلاثة الأولى أى الحد :

$$\frac{1}{6}[x^3 f_{xxx}(0,0)+3x^2 y f_{xxy}(0,0)+3xy^2 f_{xyy}(0,0)+y^3 f_{yyy}(0,0)]$$

مقدار الخطأ فى التقريب أى $|E(x,y)|$ ، وباضافة هذا الخطأ إلى التقريب التربيعى نحصل على مايعرف بالتقريب التكعيبى (cubic approximation) كما يتضح من الأمثلة التالية .

Ex(1): use Taylor formula to find the expansion of the function $f(x,y)=e^{xy}$ at the point (1, 1), neglecting the terms of 3 de degree in x,y .

Sol. Taylor's formula in this case take the form:

$$f(x,y)=f(1,1)+[(x-1)f_x(1,1)+(y-1)f_y(1,1)]$$

$$+\frac{1}{2}[(x-1)^2 f_{xx}(1,1)+2(x+1)(y-1)f_{xy}(1,1)+(y-1)^2 f_{yy}(1,1)] \qquad (1)$$

$$f(x,y)=e^{xy}\to f(1,1)=e \quad , \qquad f_x=ye^{xy}\to f_x(1,1)=e$$

$$f_y = xe^{xy} \to f_y(1,1) = e \quad , \quad f_{xx} = y^2 e^{xy} \to f_{xx}(1,1) = e$$

$$f_{yy} = x^2 e^{xy} \to f_{yy}(1,1) = e \quad , \quad f_{xy} = xye^{xy} + e^{xy} \to f_{xy}(1,1) = 2e$$

بالتعويض فى (1) :

$$\therefore e^{xy} = e + (x-1)e + (y-1)e + (x-1)^2 \frac{e}{2}$$

$$+ \frac{2}{2}(x-1)(y-1)(2e) + \frac{(y-1)^2}{2} e$$

$$= e[1 + (x-1) + (y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2]$$

وهو المطلوب .

Ex(2): Use Taylor's formula to find a quadratic approximation of the function $f(x,y) = \sin x \sin y$ at the origin. Estimate the error in the approximation if $|x| \le 0.1$ and $|y| \le 0.1$

Sol.

تأخذ علاقة تيلور فى هذه الحالة الصورة الآتية :-

$$f(x,y) = f(0,0) + (xf_x + yf_y)_{(0,0)} + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy})|_{(0,0)}$$

$$f(x,y) = \sin x \sin y \to f(0,0) = \sin(0)\sin(0) = 0$$

$$f_x(0,0) = \cos x \sin y\,|_{(0,0)} = 0 \quad , \quad f_y(0,0) = \sin x \cos y\,|_{(0,0)} = 0 \ ,$$

$$f_{xx}(0,0) = -\sin x \sin y\,|_{(0,0)} = 0 \quad , \quad f_{xy}(0,0) = \cos x \cos y\,|_{(0,0)} = 1 \ ,$$

$$f_{yy}(0,0) = -\sin x \sin y\,|_{(0,0)} = 0$$

$$\therefore f(x,y) \simeq 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0) = xy$$

وهو مايمثل التقريب التربيعى (quadratic approximation) ، ولايجاد الخطأ فى التقريب نعتبر التقريب التكعيبى (cubic approximation) حيث :

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]_{(0,00}$$

وبحساب المشتقات الثالثة للدالة $f(x,y)=\sin x \sin y$ وباعتبار أن قيمتها المطلقة لا تزيد عن 1 [تنحصر بين 0 ، 1] لاحتوائهما على حواصل ضرب $\sin$, $\cos$ ، وأيضا حيث أن: $|x|\le 0.1$, $|y|\le 0.1$ فإننا نحصل على أقل قيمة للخطأ بالصورة :

$$|E(x,y)|\le \frac{1}{6}[(0,1)^3+3(0.1)^3+3(0.1)^3+(0,1)^3]=\frac{8}{6}(0.1)^3\le 0.00134$$

أى أن الخطأ لايزيد عن 0.00134 إذا كانت $|x|\le 0.1$, $|y|\le 0.1$

وهو المطلوب .

Ex(3): Use Taylor's formula to find the quadratic approximation of the function $f(x,y0=e^x \sin y$ at the origin. Estimate the error in the approximation if $|x|\le 0.1$, $|y|\le 0.1$.

Sol.

$$f(x,y)\simeq f(0,0)+(xf_x+yf_y)_{(0,0)}+\frac{1}{2}(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy})|_{(0,0)} \quad (1)$$

$$f(x,y)=e^x\sin y \to f(0,0)=e^0\sin 0=0\,,\, f_x=e^x\sin y \to f_x(0,0)=0$$

$$f_y=e^x\cos y \to f_y(0,0)=e^0\cos=1\,,\, f_{xx}=e^x\sin y \to f_{xx}(0,0)=0$$

$$f_{xy}=e^x\cos y \to f_{xy}(0,0)=1\,,\, f_{yy}=-e^x\sin y \to f_{yy}(0,0)=0$$

بالتعويض فى (1) نحصل على :-

$$f(x,y)\simeq 0+x(0)+y(1)+\frac{1}{2}[x^2(0)+2xy(1)+y^2(0)]=y+xy=y(1+x)$$

وهو ما يشكل التقريب التربيعى ، ولايجاد الخطأ :-

$$|E(x,y)|\le \frac{1}{6}[x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy}]|_{(0,0)} \quad (2)$$

$$f_{xxx}=e^x\sin y\,,\; f_{xxy}=e^x\cos y\,,\; f_{xyy}=-e^x\sin y\,,\; f_{yyy}=-e^x\cos y$$

وحيث أن $|x|\le 0.1$, $|y|\le 0.1$ فإن :

$$|e^x\sin y|\le |e^{0.1}\sin(0.1)|\simeq 0.11$$

$$\left|e^x \cos y\right| \le \left|e^{0.1} \cos(0.1)\right| \simeq 1.11$$

وبالتعويض فى (2) نحصل على :-

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{6}[(0,1)^3(0.11) + 3(0.1)^3(1.11) + 3(0.1)^3(0.11) + (0,1)^3(1.11)]$$
$$\le 0.00814$$

أى أن الخطأ لايزيد عن 0.000814 وهو المطلوب .

Problems

Use Taylor's formula for the following function at the origin, to find the quadratic and cubic approximation of (f) near the origin

(1) $f(x,y) = xe^y$, (2) $f(x,y) = \sin x \cos y$, (3) $f(x,y) = \sin(x^2 y^2)$

(4) $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$, (5) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x-y}$

Solutions:

Problem(1) :

$$f(x,y) = xe^y \rightarrow f_y = e^y, f_y = xe^e, f_{xx} = 0, f_{xy} = e^y, f_{yy} = xe^y$$

The quadratic approximation:

$$f(x,y) \simeq f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0)$$
$$+\frac{1}{2}[x^2 f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)]$$

$$\simeq 0 + x(1) + y(0) + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)] = x + xy = (1+y)$$

The cubic approximation:

$$f_{xxx} = 0 \ , \ f_{xxy} = 0 \ , \ f_{xyy} = e^y \ , \ f_{yyy} = xe^y$$

$$\therefore f(x,y) \simeq \text{quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx}(0,0) + 3x^2 y f_{xxy}(0,0)$$
$$+ 3xy^2 f_{xyy}(0,0) + y^3 f_{yyy}(0,0)]$$

$$=(x+xy)+\frac{1}{6}[x^3(0)+3x^2y(0)+3xy^2(1)+y^3(0)]=x+xy+\frac{1}{2}xy^2$$

Problem(2): $f(x,y)=\sin x\cos y\rightarrow f_x=\cos x\cos y$, $f_y=-\sin x\sin y$,

$f_{xx}=-\sin x\cos y$, $f_{xy}=-\cos x\sin y$, $f_{yy}=-\sin x\cos y$

The quadratic approximation:

$$f(x,y)\simeq f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)$$
$$+\frac{1}{2}[x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)]$$
$$\simeq 0+x(1)+y(0)+\frac{1}{2}[x^2(0)+2xy(0)+y^2(0)]=x$$

The cubic approximation:

$f_{xxx}=-\cos x\cos y$, $f_{xxy}=\sin x\sin y$, $f_{xyy}=-\cos x\cos y$, $f_{yyy}=\sin x\sin y$

$$\therefore f(x,y)\simeq \text{ quadratic}+\frac{1}{6}[x^3f_{xxx}(0,0)+3x^2yf_{xxy}(0,0)$$
$$+3xy^2f_{xyy}(0,0)+y^3f_{yyy}(0,0)]$$
$$=x+\frac{1}{6}[x^3(-1)+3x^2y(0)+3xy^2(-1)+y^3(0)]=x-\frac{1}{6}(x^3+3xy^2)$$

Problem(3): $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)\rightarrow f_x=2x\cos(x^2+y^2)$,

$f_y=2y\cos(x^2+y^2)$, $f_{xx}=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)$,

$f_{xy}=-4xy\sin(x^2+y^2)$, $f_{yy}=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)$

The quadratic approximation:

$$f(x,y)\simeq f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)$$
$$+\frac{1}{2}[x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)]$$
$$\simeq 0+x(0)+y(0)+\frac{1}{2}[x^2(2)+2xy(0)+y^2(2)]=x^2+y^2$$

The cubic approximation:

$f_{xxx}=-12x\sin(x^2+y^2)-8x^3\cos(x^2+y^2)$,

$$f_{xxy} = -4y\sin(x^2+y^2) - 8x^3y\cos(x^2+y^2),$$

$$f_{xyy} = -4x\sin(x^2+y^2) - 8xy^2\cos(x^2+y^2)\ ,$$

$$f_{yyy} = -12y\sin(x^2+y^2) - 8y^3\cos(x^2+y^2)$$

$$\therefore f(x,y) \simeq \text{ quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f x_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]|_{(0,0)}$$

$$= x^2 + y^2 + \frac{1}{6}[x^3(0) + 3x^2y(0) + 3xy^2(0) + y^3(0)] = x^2 + y^2$$

Problem(4): $f(x,y) = e^x \ln(1+y) \to f_x = e^x \ln(1+y),\ f_y = \dfrac{e^x}{1+y}$,

$$f_{xx} = e^x \ln(1+y),\ f_{xy} = \frac{e^x}{1+y},\ f_{yy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2},$$

The quadratic approximation:

$$f(x,y) \simeq f(0,0) + x f_x(0,0) + y f_y(0,0) + \frac{1}{2}[x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}]|_{(0,0)}$$

$$\simeq 0 + x(0) + y(1) + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(1) + y^2(-1)] = y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$$

The cubic approximation:

$$f_{xxx} = e^x \ln(1+y),\ f_{xxy} = \frac{e^x}{1+y},\ f_{xyy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2},\ f_{yyy} = \frac{2e^x}{(1+y)^3}$$

$$\therefore f(x,y) \simeq \text{ quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]|_{(0,0)}$$

$$= y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}[x^3(0) + 3x^2y(1) + 3xy^2(-1) + y^3(0)]$$

$$= y + \frac{1}{2}y(2x - y) + \frac{1}{6}[3x^2y - 3xy^2 + 2y^3]$$

Problem(5): $f(x,x) = \dfrac{1}{1-x-y},\ f_x = \dfrac{1}{(1-x-y)^2} = f_y$,

$$f_{xx} = \frac{2}{(1-x-y)^3} = f_{xy} = f_{yy}$$

The quadratic approximation:

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \frac{1}{2}[x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy}]|_{(0,0)}$$

$$= 1 + x(1) + y(1) + \frac{1}{2}[x^2(2) + 2xy(2) + y^2(2)]$$

$$= 1 + (x+y) + (x^2 + 2xy + y^2) = 1 + (x+y) + (x+y)^2$$

The cubic approximation:

$$f_{xxx} = \frac{6}{(1-x-y)^4} = f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy}$$

$$f(x,y) = \text{ quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]|_{(0,0)}$$

$$= 1 + (x+y) + (x+y)^2 + \frac{1}{6}[x^3(6) + 2x^2 y(6) + 3xy^2(6) + y^3(6)]$$

$$= 1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3)$$

$$= 1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3$$

وهو المطلوب .

(5) جاكوبي التحويل (أو الجاكوبيان – Jacobian) من نظام للاحداثيات إلى نظام آخر :-

إذا كانت مجموعة الاحداثيات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تعتمد على عدد n من المتغيرات $u_1, u_2, \ldots, u_n$ فإن محدد جاكوبي (أو جاكوبيان التحويل) يكتب بالصورة

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

<u>في بعدين</u> : إذا كانت $x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v)$

$$\therefore J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

في ثلاثة أبعاد : $z=z(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $x=x(u,v,w)$

$$\therefore J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

من خواص الجاكوبيان :

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \qquad (1)$$

(2) إذا كانت (x,y,z) دوال فى (u,v,w) وكانت (u,v,w) دوال فى (r,s,t)

فإن :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}$$

(3) إذا تغيرت الاحداثيات الكرتيزية إلى احداثيات عامه (u,v,w) بمعنى أن :-

$$x=x(u,v,w) \quad , \quad y=y(u,v,w) \quad , \quad z=z(u,v,w)$$

فإن جاكوبى التحويل يكون بالصورة :

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

فى بعدين : إذا كان $y=y(u,v)$, $x=x(u,v)$ فإن :

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Ex(1): If $u = x - y, v = 2x + y$ find x, y in terms of u, v, then find the value of Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ from the system (x,y) to the system (u,v)

Sol. $\quad x - y = u \quad , \quad 2x + y = v$

بالجمع : $3x = u + v \quad \leftarrow \quad x = \dfrac{1}{3}(u+v)$

وبالطرح : $2y = v - u - x \leftarrow 2y = v - u - \dfrac{1}{3}(u+v) \leftarrow y = \dfrac{1}{3}(v - 2u)$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

Ex(2): For polar coordinates (r,θ), and if $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, find the Jacobian of transformation from (x,y) and (r,θ).

Sol.

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

Ex(3): For cylindrical coordinates (ρ,ϕ,z), find the transformation from Cartesian (x,y,z) space to the cylindrical (ρ,ϕ,z) space

Sol.

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad z = z$$

[معادلات التحويل من (x,y,z) إلى (ρ,ϕ,z)]

$$J(\rho,\phi,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho$$

Ex(4): For spherical coordinates (ρ,θ,ϕ), find the transformation from the Cartesian (x,y,z) space to the spherical (r,θ,ϕ) space.

Sol.

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad z = r\cos\theta$$

[(r,θ,ϕ) إلى (x,y,z) معادلات التحويل من]

$$J(r,\theta,\phi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta$$

Problems:

(1) Find the Jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ for the transformations:

(i) $x = u\cos v \quad , \quad y = u\sin v$

(ii) $x = u\sin v \quad , \quad y = u\cos v$

Solution:

(i) $x = u\cos v \quad , \quad y = u\sin v$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u$$

(ii) $x = u\sin v \quad , \quad y = u\cos v$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u\sin^2 v - u\cos^2 v = -u$$

(2) Find the area of an ellipse using the transformation $x = au$, $y = bv$, by evaluation the transformed integral over the disk $G : u^2 + v^2 \leq 1$ in the uv − plane.

Solution: $x = au$, $y = bv$

جاكوبيان التحويل من المستوى (xy) إلى المستوى (uv) :

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

وهذا التحويل يحول القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ فى المستوى xy إلى القرص G $(u^2 + v^2 \leq 1)$ والذى مساحته $= \pi(1)^2 = \pi$ ، وتصبح المساحة المطلوبة باستخدام هذا التحويل :

$$A = \iint_R dxdy = \iint_G J(u,v)dudv = \iint_G (ab)dudv = (ab)[\iint_G dudv]$$
$$= (ab)[\pi] = ab\pi ,$$

وهى مساحة القطع الناقص .