الباب الثالث

الدوال الخاصة المتعامدة

(Orthogonal Special Functions)

مقدمة :

تشكل الدوال الخاصة حلولا لمعادلات تفاضلية ذات صور معينة تظهر كثيرا فى المسائل التطبيقية ، وتتميز تلك الدوال بخواص محددة ، وهى غالباً ماتكون على صورة كثيرات حدود (polynomials) ، ولها ما يسمى بالدوال المولدة (generating functions) والتى يستفاد منها كثيرا فى الحصول على خواص الدوال الأصلية .

كما أن لها صيغ تكرارية (recurrence relations) محددة ، ولها أيضاً خصائص تعامدية (orthogonal prop.) وخصائص عيارية (normalization prop.) تعطى بعلاقات معنية .

ومن هذه الدوال سوف ندرس الدوال الآتية :

(1) دوال لجندر (Legendre Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة لجندر التفاضلية ، وصورتها :

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

وهى نوعان : النوع الأول $P_n(x)$ والثانى $Q_n(x)$

(2) دوال لجندر المرافقة (Associated Legendre Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة لجندر التفاضلية المرافقة وصورتها :

$$(1-x^2)y''-2xy'+[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$$

وهى نوعان : النوع الأول $P_n^m(x)$ ، النوع الثانى $Q_n^m(x)$.

(3) دوال بسيل (Bessel Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة بسيل التفاضلية وصورتها :

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

أو :

$$y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{n^2}{x^2})y=0$$

وهى نوعان : النوع الأول $J_n(x)$ ، النوع الثانى $Y_n(x)$.

(4) دوال بسيل المعدلة (Modified Bessel Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة بسيل التفاضلية المعدلة وصورتها :

$$x^2y''+xy'-(x^2+n^2)y=0$$

أو :

$$y''+\frac{1}{x}y'-(1+\frac{n^2}{x^2})y=0$$

وهى نوعان : النوع الأول $I_n(x)$ ، النوع الثانى $K_n(x)$.

(5) دوال هيرميت (Hermite Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة هيرميت التفاضلية وصورتها :

$$y''-2xy'+2ny=0$$

ويرمز لها بالرمز $H_n(x)$

(6) دوال لاجير (Laguerre Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة لاجير التفاضلية وصورتها :

$$xy''+(1-x)y'+ny=0$$

ويرمز لها بالرمز $L_n(x)$

(7) دوال لاجير المرافقة (Associated Laguerre Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة لاجير التفاضلية المرافقة وصورتها :

$$xy''+(m+1-x)y'+(n-m)y=0$$

ويرمز لها بالرمز $L_n^m(x)$

(8) دوال جاوس (Gauss Functions) أو الدوال فوق الهندسية

(Hypergeometric Functions) :

وتمثل حلولا لمعادلة جاوس التفاضلية أو المعادلة فوق الهندسية وصورتها :

$$x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0$$

حيث α,β,γ بارامترات .

ويرمز لها بالرمز $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$.

وسنقوم بدراسة تلك الدوال ، من ناحية تعريفها وخواصها وأمثلة تطبيقية عليها ، فيما يلى :

obeikandl.com

أولا : دوال لجندر
Legendre Functions

تعطى معادلة لجندر التفاضلية بالصورة الآتية :-

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

حيث $n=0,1,2$

$$y'=\frac{dy}{dx} \quad , \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}$$

والحل العام لها يعطى بالصورة الآتية :

$$y=AP_n+BQ_n(x)$$

$P_n(x)$ تسمى كثيرة حدود لجندر من النوع الاول	$Q_n(x)$ تسمى دالة لجندر من النوع الثانى
Legendre polynomial of first kind	Legendre function 0f 2nd kind

الصورة العامة لكثيرات حدود لجندر :

تعرف،كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ بالصورة الآتية :-

$$P_n(x)=\frac{1.3.5...(2n-3)(2n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-.....\right] \qquad (1)$$

كما تعرف دالة لجندر من النوع الثانى $Q_n(x)$ بالصورة الآتية :-

$$Q_n(x)=\frac{n!}{1.3.5....(2n+1)}\left[x^{-n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-n-3}\right.$$

$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}x^{-n-5}+.....\right] \qquad (2)$$

ويمكن الحصول على تلك الصور بايجاد الحل العام لمعادلة لجندر التفاضلية فى صورة متسلسلة باستخدام مايعرف بطريقة فوربينيوس وذلك بان نفرض الحل فى صررة المتسلسلة

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{k-r}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \sum (k-r)a_r x^{k-r-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' == \sum (k-r)(k-r-1)a_r x^{k-r-2}$$

وبالتعويض فى معادلة لجندر التفاضلية واجراء سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) نحصل على العلاقتين (1) ، (2) . وبذلك يمكن كتابة الحل العام لمعادلة لجندر التفاضلية بالصورة الآتية :-

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان تتحدد قيمهما من الشروط الحدية المعطاه مع معادلة لجندر التفاضلية.

ملحوظة : إن كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ هى التى تظهر غالبا فى التطبيقات الفيزيائية ، بينما من النادر ظهور دالة لجندر من النوع الثانى $Q_n(x)$ فى تلك التطبيقات ، ولذلك سنركز هنا على خواص كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ علماً بأن خواص دالة لجندر من النوع الثانى $Q_n(x)$ تتفق فى أغلب الأحيان مع خواص $P_n(x)$.

امثلة محلولة

مثال (1) :

(أ) أوجد قيم $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ وذلك باستخدام علاقة وتعريف كثيرة الحدود $P_n(x)$.

(ب) أثبت أن : $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ وذلك باستخدام نفس العلاقة المذكورة .

الحل :

من تعريف كثيرة حدود لجندر :-

$$P_n(x) = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + ...\right]$$

وبكتابة :-

$$a_0 = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n!} = \frac{(2n)!}{(2.4.6...2n)n!}$$

حيث : $(2n)! = (2n).(2n-1).....5.4.3.2.1$

ولكن : $2^n n! = 2^n[n.(n-1).....3.2.1] = 2.4.6.....2n$

$$\therefore\ a_0 = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n!}$$

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \ldots.\right] \qquad (I)$$

بوضع $n = 0,1,2,3$ فى (I) نحصل على :-

$$P_0(x) = 1 \qquad \left| \ 0! = 1\ ,\ x^0 = 1 \right.$$

$$P_1(x) = \frac{2!}{2.1!1!}[x] = x$$

$$P_2(x) = \frac{4!}{2^2 2!2!}\left[x^2 - \frac{1}{3}\right] = \frac{4.3.2}{4.2.2}\left|\frac{3x^2 - 1}{3}\right| = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{6!}{2^3.3!3!}\left[x^3 - \frac{3.2}{2.5}x\right] = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

وهو المطلوب أولا .

ملحوظة : يلاحظ أن الدوال $P_0(x), P_2(x), P_4(x)$ هى دوال زوجية بينما $P_1(x), P_3(x), P_5(x), \ldots.$ هى دوال فردية .

ثانيا : باستبدال x بـ $-x$ فى (I) نحصل على :-

$$P_n(-x) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n!}\left[(-x)^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}(-x)^{n-2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n!}\left[(-1)^n x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(-1)^n}{(-1)^2}x^{n-2} + \ldots\right]$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \ldots\right] = (-1)^n P_n(x)$$

وهو المطلوب ثانيا .

مثال (2) : **صيغة رودريج للدالة** $P_n(x)$ **(Rodrigue's formula)** :

أثبت أنه يمكن التعبير عن كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ بالصيغة الآتية والتى تسمى صيغة رودريج

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n\, n!}D^n(x^2 - 1)^n \qquad (1)$$

حيث $n = 0,1,2,.....$

او بصورة أخرى : أثبت أن الدالة المعطاه بالصيغة (1) تحقق معادلة لجندر التفاضلية

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0$$

حيث : $y = p_n(x)$ ، $y' = p_n'(x)$ ، $y'' = p_n''(x)$

ملحوظة : قبل حل هذا المثال نذكر النظرية التالية التى سوف نستخدمها فى الحل :

نظرية ليبنتز : لتفاضل حاصل ضرب دالتين n من المرات وصورتها :

$$[uv]^{(n)} = uv^{(n)} + {}^nc_1u^{(1)}v^{(n-1)} + {}^nc_2u^{(2)}v^{(n-2)} + \dots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} {}^nc_r u^{(r)}v^{(n-r)}$$

حيث :

$${}^nc_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}^nc_1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$${}^nc_2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

حل المثال : من تعريف صيغة رودريج :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2-1)^n \qquad (1)$$

بوضع $(x^2-1)^n = z$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n z = \frac{1}{2^n n!} z^n$$

وحيث أن :

$$z = (x^2-1)^n \qquad (2)$$

فبتفاضل (2) بالنسبة إلى x نحصل على :

$$z' = n(x^2-1)^{n-1}.(2x)$$

وبضرب الطرفين فى (x^2-1)

$$\therefore (x^2-1)z' = n.(x^2-1)^n.(2x) = 2nxz \qquad (3)$$

وبتفاضل (3) مرة ثانية بالنسبة إلى x نحصل على :-

$$(x^2-1).z'' + 2xz' = 2n[xz' + z] = 2nxz' + 2nz$$

$$(x^2-1)z'' - 2x(n-1)z' - 2nz = 0 \qquad (4)$$

أيضاً بتفاضل العلاقة (4) عدد n من المرات باستخدام نظرية ليبنتز .

$$\therefore \left[(x^2-1)z^{(n+2)} + n.(2x).z^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2}(2)z^{(n)}\right]$$

$$-2(n-1)\left[xz^{(n+1)} + n(1).z^{(n)}\right] - 2nz^{(n)} = 0$$

$$\therefore (x^2-1)z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} - n(n-1)z^{(n)} = 0$$

وباعتبار أن :

$$D^2 z^{(n)} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) = z^{(n+2)} \quad , \quad Dz^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) = z^{(n+1)}$$

$$\therefore \left[(x^2-1)D^2 + 2xD - n(n-1)\right]z^{(n)} = 0$$

$$\therefore \left[(x^2-1)D^2 + 2xD - n(n-1)\right].\left(2^n n! P_n(x)\right) = 0$$

وبالقسمة على $2^n n!$ نحصل على :-

$$\therefore \left[(x^2-1)D^2 + 2xD - n(n-1)\right]P_n(x) = 0$$

$$\therefore (x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n-1)P_n(x) = 0$$

وهى معادلة لجندر التفاضلية .

ومن هذا يتضح أن $P_n(x)$ المعطاه بصيغة رودرج تحقق معادلة لجندر التفاضلية .

الدالة المولدة (Generating Function) لدالة لجندر $P_n(x)$

تسمى الدالة :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n \qquad (1)$$

بالدالة المولدة لكثيرة الحدود $P_n(x)$

ومنها يتضح أن $P_n(x)$ هى معامل h^n فى مفكوك

$(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}}$

الاثبات : قبل الاثبات نذكر العلاقتين الهامتين الآتيتين للتذكرة :

(1) نظرية ذات الحدين :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...$$

(2) نظرية ليبنتز :

$$(u+v)^n = u^n + {}^nc_1 u^{n-1}v + {}^nc_2 u^{n-2}v^2 + ... + {}^nc_n v^n$$

حيث :-

$${}^nc_1 = n \ , \quad {}^nc_2 = \frac{n(n-1)}{2},..., \quad {}^nc_n = 1$$

نعود إلى الاثبات : باستخدام نظرية ذات الحدين :

$$(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[1-h(2x-h)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}h(2x-h) + \frac{1.3}{2.4}h^2(2x-h)^2$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}h^3(2x-h)^2 + ...$$

$$+ \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}h^n(2x-h)^n + ...$$

ولايجاد معامل h^n فى مفكوك $(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}}$:

ندرس الحد النونى فى هذا المفكوك :-

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}h^n(2x-h)^n \qquad \left| \ \alpha = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \right.$$

$$= ah^n\left[(2x)^n + {}^nc_1(2x)^{n-1}(-h) + {}^nc_2(2x)^{n-2}(-h)^2 + ...\right]$$

$$= ah^n\left[(2x)^n - {}^nc_1(2x)^{n-1}h + {}^nc_2(2x)^{n-2}h^2 + ...\right]$$

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}h^n[.....]$$

$$= h^n \left[\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}(2x)^n - \frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n-2)} \ {}^{n-1}c_1 (2x)^{n-2} \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5...(2n-5)}{2.4.6...(2n-4)} \ {}^{n-2}c_2 (2x)^{n-4} + ... \right]$$

ولكن :

$${}^{n-1}c_1 = (n-1) \quad , \quad {}^{n-2}c_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

ويصبح الحد النونى مساويا

$$= h^n \left[\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} (2x)^n - \frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n-2)}(n-1)(2x)^{n-2} \right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5...(2n-5)}{2.4.6...(2n-4)} \frac{(n-2)(n-3)}{2}(2x)^{n-4} + ... \right]$$

وبعد الاختصار ، واعتبار أن :-

$$2.4.6....2n = 2^n n!$$

نحصل على معامل h^n فى مفكوك $(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ بالصورة :-

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + ... \right]$$

والذى هو $P_n(x)$ أى كثيرة حدود لجندر .

وهو المطلوب .

أمثلة على الدالة المولدة :-

مثال (1) : باستخدام تعريف الدالة المولدة لكثيرة حدود لجندر ، اثبت أن : $P_n(1) = 1$

الحل : حيث أن $P_n(x)$ هى معامل h^n فى مفكوك $(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ فبأخذ $x = 1$

$\therefore$ $P_n(1)$ تكون هى معامل h^n فى مفكوك $(1-2h+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ أى فى مفكوك $(1-h)^{-1}$ أى فى مفكوك $(1+h+h^2+...+h^n+...)$ أى يساوى الواحد ، وبذلك فإن :

$$\boxed{P_n(1)=1}$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود لجندر أثبت أن :-

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1.3.5.(2n-1)}{4.6...(2n)}\left[\cos n\theta+\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\theta\right.$$

$$\left.+\frac{1.3.n.(n-1)}{2!(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta+....\right]$$

الحل :

نضع $x=\cos\theta$ في الدالة المولدة فنحصل على .

$$\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(\cos\theta)=\left\{1-2(\cos\theta)h+h^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})h+e^{i\theta}e^{-i\theta}h^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{(1-he^{i\theta})(1-he^{-i\theta})\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(1-he^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}.(1-he^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}he^{i\theta}+\frac{1.3}{2.4}h^2e^{2i\theta}+\frac{1.3.5}{2.4.6}h^3e^{3i\theta}+...+\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}h^ne^{in\theta}\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{1}{2}he^{-i\theta}+\frac{1.3}{2.4}h^2e^{-2i\theta}+\frac{1.3.5}{2.4.6}h^3e^{-3i\theta}+...+\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}h^ne^{-in\theta}\right]$$

بمساواة معاملات h^n في كلا الطرفين نحصل على :-

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}(e^{in\theta}+e^{-in\theta})+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n-2)}\left\{e^{i(n-2|\theta}+e^{-i(n-2)\theta}\right\}+$$

$$+\frac{1.2}{2.4}\frac{1.3.5...(2n-5)}{2.4.6...(2n-4)}\left\{e^{i(n-4)\theta}+e^{-i(n-4)\theta}\right\}+....$$

obeikandi.com

$$= 2.\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4...2n}\left[\cos n\theta + \frac{1}{2}\frac{2n}{2n-1}\cos(n-2)\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1.3}{2.4}.\frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta + ...\right]$$

$$= \frac{1.3.5....(2n-1)}{4...2n}\left[\cos n\theta + \frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1.3}{2!}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta + ...\right]$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : صورة لابلاس التكاملية (Integral Laplace form) لكثيرة حدود لاجندر :

باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ ، ونتيجة التكامل $\left[\int_0^{\pi} \frac{d\phi}{a \pm b\cos\phi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$ ، أثبت أن $P_n(x)$ تعطى بالصورة التكاملية الآتية التى تسمى صورة لابلاس لكثيرة حدود لجندر.

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x \mp \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^n d\phi$$

الحل :

الدالة المولدة هى :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$$

فبوضع

$$a = 1 - xh \quad , \quad b = h\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (1-xh)^2 - h^2(x^2-1)$$

$$= (1 - 2xh + x^2h^2) - (h^2x^2 - h^2) = (1 - 2xh + h^2$$

$$\therefore \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{1-2xh+h^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$$

ولكن :

obeikandl.com

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}=\int_0^{\pi}\frac{d\phi}{a\pm b\cos\phi}$$

$$\therefore \frac{\pi}{\sqrt{1-2x+h^2}}=\int_0^{\pi}\frac{d\phi}{(1-xh)\pm h\sqrt{x^2-1}\cos\phi}$$

$$\therefore (1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[1-h\left\{x\mp\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right\}\right]^{-1}d\phi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}h^2\left\{x\mp\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right\}^n\right]d\phi$$

حيث h صغيرة صغرا كافيا ، وحيث أن

$$(1-x)^{-1}=1+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\therefore\left[1-h\left\{x\pm\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right\}\right]^{-1}=\sum h^n\left\{x\mp\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right\}^n$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}h^n\left\{x\mp\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right\}^n\right]d\phi$$

وبمساواة معاملات h^n فى الطرفين نحصل على :-

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x\mp\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^n d\phi$$

والذى يسمى بتكامل لابلاس (Laplace's Integral) ويمكن كتابتة أيضاً بالصورة الآتية ، وذلك بعد وضع

$$x^2-1=-\sin^2\theta\ \leftarrow\ x^2=\cos^2\theta\ \leftarrow\ x=\cos\theta$$

$$\therefore P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\theta\mp\sqrt{-\sin^2\theta}\cos\phi\right]^n d\phi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\theta\mp i\sin\theta\cos\phi\right]^n d\phi$$

وهو المطلوب .

obeikandl.com

تعامد (Orthogonality) وعيارية (Normalization) كثيرات حدود لجندر -

(1) **التعامد (Orthogonality)** :

يمكن إثبات أن أى كثيرتى حدود مختلفتين من كثيرات حدود لجندر يكونان متعامدان فى الفترة $-1 < x < 1$ وذلك طبقا للعلاقة :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \qquad , \qquad (m \neq n) \qquad (1)$$

وتحدد هذه العلاقة مايسمى بتعامد كثيرات حدود لجندر .

(2) **العيارية (Normalization)** :

إذا كانت $m = n$ فإنه يمكن إثبات أن :

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (2)$$

وتحدد هذه العلاقة مايسمى بعيارية كثيرات حدود لجندر

بوجه عام : فإن العلاقتين (2) ,(1) يمكن جمعهما فى العلاقة :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \qquad , (3)$$

حيث δ_{mn} هى دلتا كرونيكر (Kronecker delta)

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

تحدد العلاقة (3) عيارية وتعامد الدالة $P_n(x)$ (orthonormalization)

مثال (1) : أثبت العلاقة :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

الحل :

حيث أن $P_m(x), P_n(x)$ تحقق معادلة لجندر التفاضلية فإن :-

$$(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0 \qquad (1)$$

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \qquad (2)$$

بضرب (1) فى P_n ، (2) فى P_m والطرح نحصل على :-

$$(1-x^2)\left[P_nP_m'' - P_mP_n''\right] - 2x\left[P_nP_m' - P_mP_n'\right]$$
$$= \left[n(n+1) - m(m+1)\right]P_mP_n$$

$$\therefore (1-x^2)\frac{d}{dx}\left[P_nP_m' - P_mP_n'\right] - 2x\left[P_nP_m' - P_mP_n'\right]$$
$$= \left[n(n+1) - m(m+1)\right]P_mP_n$$

حيث

$$\frac{d}{dx}\left[P_nP_m' - P_mP_n'\right] = P_nP_m'' + P_m'P_n' - P_mP_n'' - P_n'P_m' = P_nP_m'' - P_mP_n''$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left[P_nP_m' - P_mP_n'\right]\right\} = \left[n(n+1) - m(m+1)\right]P_mP_n$$

وباجراء التكامل بالنسبة إلى x للطرفين فى الفترة من 1- إلى 1 نحصل على :

$$\therefore (1-x^2)\left[P_nP_m' - P_mP_n'\right]_{-1}^{1} = \left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_mP_n dx$$

ولكن

$$P_n(1) = P_m(1) = 1 \quad , \quad P_n(-1) = P_m(-1) = -1$$

$$\therefore 0 = \left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_mP_n dx$$

وحيث أن $m \neq n$ فإن : $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ ، وهو المطلوب .

مثال (2) : إثبت العلاقة $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$

الحل : نستخدم الدالة المولدة فى اثبات هذه العلاقة كالتالى :-

حيث أن

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)h^m$$

بضرب العلاقتين نحصل على نحصل على :-

$$\therefore \frac{1}{1-2hx+h^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx\right]h^{m+n} \qquad (1)$$

وباجراء التكامل بالنسبة إلى x على الطرفين من 1- إلى 1

$$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2hx+h^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)h^{m+n}$$

ولكن

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2hx+h^2} = -\frac{1}{2h}\int_{-1}^{1}\frac{-2h}{1-2hx+h^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2h}\ln(1-2hx+h^2)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2h}\left[\ln(1-h)-\ln(1+h)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}h^{2n} \qquad (2)$$

وذلك حيث أن :-

$$\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right) = \frac{1}{h}[\ln(1+h)-\ln(1-h)]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\ldots\ldots\right)-\left(-h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}-\ldots\ldots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[2h+\frac{2h^3}{3}+\frac{2h^5}{5}+\ldots\ldots+\frac{2h^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots\right]$$

$$= 2\left[1+\frac{h^2}{3}+\frac{h^4}{5}+\ldots+\frac{h^{2n}}{2n+1}+\ldots\right] = \sum_{n=0}^{\infty}2\frac{h^{2n}}{2n+1}$$

بالتعويض من (2) فى (1) ووضع $m=n$ نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}h^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx\right]h^{2n} \qquad (3)$$

وبمساواة معاملات h^{2n} فى الطرفين نجد أن :

$$\boxed{\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}}$$

مثال (3) : بين أن :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)dx = 0 \quad , \quad n = 1,2,...$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)dx = 2 \quad , \quad n = 0$$

الحل :

مع ملاحظة أن $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ نجد من العلاقة $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$

عندما $n = 0$ فإن :

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2(0)+1} = 2$$

ومن العلاقة :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \text{ حيث } n \neq m \text{ فعندما } n = 1,2,... \text{ فإن}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} P_0(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)dx = 0$$

وهو المطلوب .

مسائل :

(1) بين أن :

(i) $\int_{-1}^{1} xP_n(x)dx = 0 \quad , \quad n = 0,2,3,...$

(ii) $\int_{-1}^{1} xP_n(x)dx = \frac{2}{3} \quad , \quad n = 1$

(2) أوجد :

$$\int_{-1}^{1} xP_6(x)dx \quad , \quad \int_{-1}^{1} P_3(x)P_7(x)dx$$

العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر (Recurrence Relations) :

هناك عدد من العلاقات التى تربط بين كثيرات حدود لجندر وتفاضلاتها لأدلة مختلفة $(n, n-1, n+1, ...)$ ومن أشهر تلك العلاقات التكرارية وأهمها :-

openkandl.com

$$(1)\ (2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

$$(2)\ P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

$$(3)\ (x^2-1)P'_n(x) = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]$$

$$(4)\ xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$$

وسنقوم فيما يلى باثبات هذه العلاقات الأربعة :-

إثبات العلاقة التكرارية (1) :

باستخدام الدالة المولدة : مثلا $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^2 = u$,

$$\therefore u.\sqrt{1-2xh+h^2} = 1 \qquad \therefore u^2.(1-2xh+h^2) = 1$$

بالتفاضل بالنسبة إلى h نحصل على :

$$u^2.(-2x+2h) + (1-2xh+h^2).2u\frac{du}{dh} = 0$$

وبقسمة الطرفين على $2u$ نحصل على :-

$$\therefore \frac{du}{dh}(1-2xh+h^2) + u(h-x) = 0 \qquad (1)$$

ولكن :

$$\therefore \frac{du}{dh} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} \leftarrow u = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^2$$

بالتعويض فى (1) :

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1}.(1-2x+h^2) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n(h-x) = 0$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)h^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)h^n = 0 \qquad (2)$$

بمساواة معامل h^n فى الطرفين نجد أن :-

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x) = 0$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

obeikandl.com

$$\therefore \boxed{(2n+1)(x)P_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)} \qquad (I)$$

وهو المطلوب .

ملاحظات :

ملحوظة (1) : العلاقة (I) يمكن وضعها ايضا بالصورة الآتية

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}(x)P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

ملحوظة (2) : بوضع $(n-1)$ بدلا من (n) فى تلك العلاقة نحصل على

$$P_{(n-1)+1}(x) = \frac{2(n-1)+1}{(n-1)+1}xP_{(n-1)}(x) - \frac{(n-1)}{(n-1)+1}P_{(n-1)-1}(x)$$

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x)$$

وهى صورة أخرى لعلاقة التكرارية (I) .

ملحوظة (3) : يمكن استخدام العلاقة التكرارية (I) مثلا فى إيجاد $P_2(x)$, $P_3(x)$ إذا علم أن $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$

الحل :

قبوضع $n = 1$ فى الصورة الآتية للعلاقة (I)

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

نحصل على :

$$P_2(x) = \frac{3}{2}xP_1(x) - \frac{1}{2}P_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

وبوضع $n = 2$ فى نفس الصورة السابقة نحصل على :

$$\therefore P_3(x) = \frac{5}{3}xP_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x)$$

$$= \frac{5}{3}x\left(\frac{3x^2-1}{2}\right) - \frac{2}{3}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

openkandi.com

إثبات العلاقة التكرارية (2) : باستخدام الدالة المولدة أيضاً حيث أن :

$$(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$h.(1-2xh+h^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^n$$

وبضرب الطرفين فى $(1-2xh+h^2)$

$$\therefore (1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)h^n = h\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n \qquad (1)$$

بمقارنة معامل h^{n+1} فى الطرفين نجد أن :

$$P_{n+1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = P_n(x) \qquad (2)$$

ومن العلاقة التكرارية (I) :

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

فبالتفاضل بالنسبة إلى x وضرب الناتج فى 2 نحصل على :

$$2\left[(2n+1)\{xP_n' + P_n\} - (n+1)P_{n+1}' - nP_{n-1}'\right] = 0 \qquad (3)$$

وبضرب العلاقة (2) فى $(2n+1)$

$$\therefore (2n+1)\left[P_{n+1}' - 2xP_n' + P_{n-1}' - P_n\right] = 0 \qquad (4)$$

بجمع (4) , (3) نحصل على :

$$(2n+1)P_n(x) - \left[2(n+1) - (2n+1)\right]P_{n+1}' + \left[-2n + (2n+1)\right]P_{n-1}' = 0$$

$$\therefore \boxed{(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)} \qquad (II)$$

وهو المطلوب .

إثبات العلاقة التكرارية (3) :

يمكن إثبات هذه العلاقة باستخدام تكامل لابلاس فى الصورة :

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^n d\phi$$

obeikandl.com

$$xP_n = \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^n d\phi \qquad (1)$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^{n-1} d\phi \qquad (2)$$

من (1) , (2) بالطرح نجد أن :-

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^n d\phi$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^{n-1} d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^{n-1}\left[x\left\{x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right\} - 1\right] d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^{n-1}\left[(x^2-1) + x\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right] d\phi$$

$$= \frac{(x^2-1)}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right]^{n-1}\left[1 + \frac{x\cos\phi}{\sqrt{x^2-1}}\right] d\phi$$

$$= \frac{(x^2-1)}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d}{dx}\frac{[x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi]^n}{n} d\phi$$

$$= \frac{(x^2-1)}{n}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi]^n d\phi\right]$$

$$= \frac{(x^2-1)}{n}\frac{d}{dx}\left[P_n(x)\right] = \frac{(x^2-1)}{n}P_n'(x)$$

$$\therefore \boxed{(x^2-1)P_n'(x) = n\left[xP_n(x) - P_{n-1}(x)\right]}$$

وهى العلاقة التكرارية (3) المطلوبة .

أثبات العلاقة التكرارية (4) :

لإثبات العلاقة (4) وصورتها :

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$$

نستخدم معادلة لجندر التفاضلية بالصورة :

$$(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0$$

$$\therefore\ (x^2-1)\frac{d^2P_n}{dx^2}+2x\frac{dP_n}{dx}-n(n+1)P_n=0$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dP_n}{dx}\right]=n(n+1)P_n$$

ومن العلاقة التكرارية (3) فإن :

$$(x^2-1)P_n'=n\left[xP_n-P_{n-1}\right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[n\{xP_n-P_{n-1}\}\right]=n(n+1)P_n$$

$$\therefore x\frac{dP_n}{dx}+P_n-\frac{dP_{n-1}}{dx}=(n+1)P_n$$

$$\therefore xP_n'+P_n-P_{n-1}'=(n+1)P_n$$

$$\therefore \boxed{xP_n'-P_{n-1}'=nP_n}$$

وهى العلاقة (4) المطلوبة .

متسلسلة لجندر Legendre series: حيث أن حدوديات ليجندر $P_0(x),P_1(x),...$ تكون متعامدة فى الفترة $x\in[-1,1]$ فإنه يمكن وضع مفكوك الدالة $f(x)$ على هيئة متسلسلة لانهائية لهذه الحدوديات بالعلاقة :

$$f(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)+...=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x) \qquad (1)$$

وتعرف بمتسلسلة لجندر ، والمعاملات c_n يمكن تعيينها بالطرق العاديه ، فبضرب طرفى المعادلة (1) فى $P_n(x)$ والتكامل من $x=-1$ إلى $x=1$ نحصل على :

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_m(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx$$

ونلاحظ أن تكامل الطرق الأيمن = صفر عندما $n\neq m$ وفى حالة $n=m$ فإن

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_m(x)dx=c_m\int_{-1}^{1}P_m^2(x)dx=c_m\frac{2}{2m+1}$$

$$\therefore\ c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx \qquad (2)$$

مثال (1) : اكتب مفكوك الدالة $f(x)=x^2$ فى متسلسلة على الصورة $\sum c_n P_n(x)$ حيث $P_n(x)$ كثيرة حدود لجندر .

الحل :

حيث أنه يمكن كتابة أى دالة كثيرة حدود من الدرجة m بدلالة متسلسلة كثيرة الحدود لجندر" على النحو :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m} c_n P_n(x)$$

حيث

$$c_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

وحيث أن $f(x)=x^2$ كثيرة حدود من درجة 2 أى أن $n=2$

$$\therefore x^2 = \sum_{n=0}^{2} c_n P_n(x) = c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x) \qquad (1)$$

حيث

$$c_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)dx$$

وحيث أن : $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ ، $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$\therefore c_0 = \left(0+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} x^2.1dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{3}$$

$$c_1 = \left(1+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} x^2 x dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

$$c_2 = \left(2+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} x^2.\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx = \frac{5}{2}.\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(3x^2-1)dx$$

$$= \frac{5}{4}\left[3\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}\right]=\frac{2}{3}$$

بالتعويض فى معادلة (1) نحصل على :

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

$$\therefore F(x) = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : عبر عن الدالة كثيرة الحدود التالية :

$$F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

بدلالة كثيرات حدود لجندر .

الحل : نعلم من الخصائص الأساسية لكثيرة حدود لجندر من النوع الأول $P_n(x)$ أن :

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

وسوف نستخدم تلك الخصائص فى كتابة حدود الدالة $F(x)$ وعلى ذلك يمكن كتابة الحد x^3 من الدالة $F(x)$ بالطريقة التالية

$$\because P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$\therefore 5x^3 = 2P_3(x) + 3x$$

سنعوض عن x بقيمتها $P_1(x)$

$$\therefore 5x^3 = 2P_3(x) + 3P_1(x)$$

$$\therefore x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) \qquad (1)$$

$$\because P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore 3x^2 = 2P_2(x) + 1 = 2P_2(x) + P_0(x)$$

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \qquad (2)$$

$$\because x = P_1(x) \qquad (3)$$

$$\because 1 = P_0(x) \qquad (4)$$

obeikandl.com

من المعادلات (1), (2), (3), (4) يمكن كتابة $F(x)$ على النحو الآتى :

$$F(x)=\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{4}{3}P_2(x)+\frac{2}{3}P_0(x)+3P_1(x)+P_0(x)$$

$$=\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{4}{3}P_2(x)+\frac{18}{5}P_1(x)+\frac{5}{3}P_0(x)$$

مثال (3) : اوجد مفكوك الدالة $f(x)$ على هيئة متسلسلة لمجموعة حدود ليجندر حيث :

$$f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad -1\le x<0\\ 1 & , \quad 0<x\le 1\end{cases}$$

الحل : باستخدام علاقة c_m (بأخذ $m=n$)

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{0}-P_n(x)dx+\int_{0}^{1}P_n(x)dx\right]$$

وبملاحظة أن $P_n(x)$ تكون داله زوجيه عندما $n=0,2,4,..$ وتكون دالة فردية عندما $n=1,3,5,..$ لذلك فعندما تكون n عددا زوجيا فإن

$$\int_{0}^{1}P_n(x)dx=\int_{-1}^{0}P_n(x)dx$$

وعندما تكون n عددا زوجيا فإن

$$\int_{0}^{1}P_n(x)dx=-\int_{-1}^{0}P_n(x)dx$$

وحيث أن $c_n=0$ عندما تكون n عدد زوجى فبالاختصار على قيم c_n عندما يكون n فردى فإن :

$$c_1=(2n+1)\int_{0}^{1}P_n(x)dx \quad , \quad n=1,3,5,...$$ ونجد أن :

$$c_n=\frac{3}{2},\ c_3=-\frac{7}{8},\ c_5=\frac{11}{16},...$$

وعليه فإن :

$$f(x)=\frac{3}{2}P_1(x)-\frac{(-7)}{8}P_3(x)+\frac{11}{16}P_5(x)+.....$$

مسائل :

مسألة (1) : أوجد مفكوك ليجندر للدالة $f(x)$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}2 & , \quad -1\le x<0\\ 1 & , \quad 0<x\le 1\end{cases}$$

مسألة (2) : عبر عن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad -1<x<0\end{cases}$$

على شكل متسلسلة لجندر .

حل المسألة (2) : بما أن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ حيث :

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)dx$$

$$\therefore \quad c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} P_n(x)dx \quad , \qquad n=0,1,2,3,...$$

$$\therefore \quad c_0=\frac{1}{2}\int_0^1 P_0(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{1}{2}, \quad c_1=\frac{3}{2}\int_0^1 P_1(x)dx=\frac{3}{2}\int_0^1 xdx=\frac{3}{4}$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_0^1 P_2(x)dx=\frac{5}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2-1)dx=0$$

$$c_3=\frac{7}{2}\int_0^1 P_3(x)dx=\frac{7}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3-3x)dx=-\frac{7}{16}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+.....$$

وهو المطلوب .

opelkandl.com

ثانيا : دوال لجندر المرافقة Associated Legendre functions

مقدمة :

تسمى المعادلة التفاضلية التى صورتها :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \qquad (1)$$

بمعادلة لجندر التفاضلية المرافقة .

إذا كانت $m = 0$ فإن المعادلة (1) تؤول إلى معادلة لجندر التى درسناها سابقا .

تسمى حلول المعادلة (1) بدوال لجندر المرافقة ، فإذا كانت n,m أعداد صحيحة موجبة فإن الحل العام للمعادلة (1) يمكن كتابتة بالصورة :

$$y = AP_n^m(x) + BQ_n^m(x)$$

$Q_n^m(x)$ تسمى دوال لجندر المرافقة من النوع الثانى من الرتبه m والدرجة n	$P_n^m(x)$ تسمى دوال لجندر المرافقة من النوع الاول من الرتبه m والدرجة n

وتعرف تلك الدوال بدلالة دوال لجندر المعتادة كالآتى :-

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x)$$

ونلاحظ أنه إذا كانت $m > n$ فإن $P_n^m(x) = 0$

الحل العام لمعادلة لجندر التفاضلية المرافقة :

لايجاد الحل العام للمعادلة (1) فى صورة متسلسلة نضع :-

$$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} u + (1-x^2)^{\frac{m}{2}} . \frac{du}{dx}$$

obeikandl.com

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\frac{du}{dx} - mu\left[(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} - (m-2)x^2.(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\right]$$
$$+(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^2u}{dx^2}$$

وتتحول المعادلة (1) إلى الصورة الآتية :

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{du}{dx} + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

ولأيجاد حل هذه المعادلة نضعها أولاً بالصورة الآتية ، وذلك بوضع $u = y$

$$\therefore (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dy}{dx} + [n(n+1) - m(m+1)]y = 0 \qquad (2)$$

وذلك حتى تأخذ صورة معادلة لجندر المرافقة المعروفة ، وهى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية فى y ، وحلها هو y.

نفرض الحل فى صورة متسلسلة كالآتى :-

$$y = \sum a_k x^k$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum k a_k x^{k-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum k(k-1)a_k x^{k-2}$$

وبالتعويض فى (2) وبعد اجراء سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) نحصل على الحلين الآتيين للمعادلة (1) فى صورة متسلسلة :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[x - \frac{(n-m)(n+m+1)}{2!}x^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-2)(n+m+1)(n+m+3)}{4!}x^4 + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[x - \frac{(n-m-1)(n+m+2)}{3!}x^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m-1)(n-m-3)(n+m+2)(n+m+4)}{5!}x^5 + \ldots\ldots\ldots\right]$$

حيث تعرف $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ بدالتى لجندر المرافقتين من الرتبة m والدرجة n .

obeikandl.com

إذا كانت n, m كلاهما عدد صحيح فإن : $y = \frac{2^n n!(n-m)!}{(2n)!} P_n^m(x)$

عندما $m = 0$: فإن y تصبح مكافئة لـ $P_n(x)$ وبذلك فإن : $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ تحقق المعادلة (2) ، ويكون حل المعادلة (1) هو :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

وهى العلاقة التى تربط كثيرات حدود لجندر المرافقة $P_n^m(x)$ بكثيرات حدود لجندر $P_n(x)$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : بين أنه إذا كانت m عدد صحيح موجب وكانت u_n هى أى حل لمعادلة لجندر التفاضلية ، فإن $\frac{d^m u_n}{dx^m}$ تمثل حلا لمعادلة لجندر التفاضلية المرافقة ، أكتب الحل العام لتلك المعادلة .

الحل : إذا كانت u_n تمثل حلا لمعادلة لجندر التفاضلية فإن :

$$(1-x^2)u_n'' - 2xu_n' + n(n+1)u_n = 0$$

بتفاضل هذه المعادلة m من المرات ، وكتابة $v_n^m = \frac{d^m u_n}{dx^m}$ فإن :-

$$(1-x^2)\frac{d^2(v_n^m)}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{d(v_n^m)}{dx} + [n(n+1) - m(m+1)]v_n^m = 0$$

وبوضع $v_n^m = (1-x^2)^p y$ فى تلك المعادلة فإنها تصبح :

$$(1-x^2)^2 y'' - [2(m+1)x(1-x^2) + 4Px(1-x^2]y' +$$

$$+\left\{4(m+1)Px^2 + (4P^2 - 2P)x^2 - 2P + [n(n+1) - m(m+1)](1-x^2)\right\}y = 0$$

وأذا أخترنا $P = -\frac{m}{2}$ فإن هذه المعادلة تصبح بعد القسمة على $(1-x^2)$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

وهى معادلة لجندر التفاضلية المرافقة .

وحيث أن $v_n^m = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} y$ فإن $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} v_n^m$ أو $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m u_n}{dx^m}$

هى حل للمعادلة (1) .

ويكون حل معادلة لجندر المرافقة هو :

$$y = c_1 P_n^m(x) + c_2 Q_n^m(x)$$

حيث :

$$P_n^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

$$Q_n^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{dx^m}$$

وذلك لأن u_n هو حل معادلة لجندر كما هو معطى ، فتكون $u_n = P_n$ وأيضاً فإن $u_n = Q_n$

مثال (2) : أوجد قيم دوال لجندر المرافقة الآتية :-

$$P_1^1(x),\ P_2^1(x),\ P_2^2(x),\ P_3^2(x),\ P_2^3(x)$$

الحل : من العلاقة

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

$$(1)\ P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_1(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d(x)}{dx} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

حيث $P_1(x) = x$

$$(2)\ P_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_2(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{2}\right) = 3x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

حيث $P_2(x) = \left(\frac{3x^2-1}{2}\right)$

$$(3)\ P_2^2(x) = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} P_2(x) = \left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1)$$

oberkandi.com

$$(4)\ P_3^2(x)=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_3(x)=\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{5x^3-3x}{2}\right)$$

$$=15x-15x^3=15x(1-x^2),$$

حيث $$P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$$

$$(5)\ P_2^3(x)=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^3}{dx^3}P_2(x)=0$$

مثال (3) : تحقق من أن $P_3^2(x)$ المحسوبة فى مثال (2) تكون حلا لمعادلة لجندر المرافقة

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

عندما $n=3\ ,\ m=2$

الحل : من مثال (2) فإن :

$$P_3^2(x)=15x(1-x^2)=y$$

$$\therefore y'=15-45x^2\quad ,\quad y''=90x$$

فبالتعويض فى معادلة لجندر المرافقة المذكورة ، نجد أن الطرف الأيسر يساوى :

$$=(1-x^2)(-90x)-2x(15-45x^2)+\left[12-\frac{4}{1-x^2}\right](15x-15x^2)$$

$$=(1-x^2)(-90x)-(30x-90x^3)+\frac{12(1-x^2)-4}{1-x^2}.15x.(1-x^2)$$

$$=-90x+90x^3-30x+90x^3+8.15x-12.15x^3$$

$$=180x^3-120x+120x-180x^3=0=\text{الطرف الأيمن}$$

وعلى ذلك فإن $P_3^2(x)$ تكون حلا لمعاملة لجندر المرافقة .

العلاقة بين معادلة لجندر المرافقة ومعادلة لابلاس :

بكتابة معادلة لابلاس فى الاحداثيات القطبية الكرويه بالصورة :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0 \qquad (1)$$

وبالضرب فى r^2 :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0 \qquad (2)$$

بوضع $u=R\Theta\Phi$ حيث $R=R(r)\ ,\ \Theta=\Theta(\theta)\ ,\ \Phi=\Phi(\phi)$

$$\therefore\ \Theta\,\Phi\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{R\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{R\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

وبالقسمة على $R\Theta\Phi$ نحصل على :

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

$$\therefore\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

وحيث أن الطرف الأيسر يعتمد فقط على r والأيمن يعتمد فقط على θ,ϕ فإن كل طرف يجب أن يساوى ثابتاً وليكن $(-\lambda^2)$

$$\therefore\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\lambda^2 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=\lambda^2 \qquad (4)$$

المعادلة (3) تسمى معادلة R ولحلها نكتبها بالصورة :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\lambda^2 R$$

$$\therefore r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+\lambda^2R=0 \qquad (5)$$

الحل العام للمعاملة (5) يمكن كتابته بالصورة :

$$R=r^{-\frac{1}{2}}\left[Ar^{\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}}+Br^{-\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}}\right]=Ar^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}}+Br^{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}} \qquad (6)$$

وبوضع

$$-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}=n \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}=-(n+1) \qquad (8)$$

$$\therefore R=Ar^n+Br^{-(n+1)}=Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}} \qquad (9)$$

وبضرب (7) فى (8) نحصل على :

$$\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}\right)=-n(n+1)$$

$$\therefore \ \lambda^2=-n(n+1) \qquad (10)$$

<u>ونعود إلى المعادلة (4)</u> : فبضربها فى $\sin^2\theta$ والتعويض عن $\lambda^2=-n(n=1)$

$$\therefore \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-n(n+1)\sin^2\theta$$

الطرف الأيسر يعتمد على ϕ فقط والأيسر على θ فقط فيجب أن يساوى كل طرف مقدار ثابت ، وليكن $(-m^2)$ ، ونحصل على المعادلتين :

$$\therefore \ \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0 \qquad (11)$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)[n(n+1)\sin^2\theta-m^2]\Theta=0 \qquad (12)$$

المعادلة (11) تسمى معادلة Φ ، والمعادلة (12) تسمى معادلة Θ .

يلاحظ أن المعادلة (12) (معادلة Θ يمكن إثبات أنها تكافىء معادلة لجندر المرافقة وذلك كالآتى :

بوضع $z=\cos\theta$ فإن :

$$\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{d\Theta}{dz}\frac{dz}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d\Theta}{dz}$$

$$\therefore \sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}=-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dz}=(z^2-1)\frac{d\Theta}{dz}$$

حيث : $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-z^2$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]=\frac{d}{d\theta}\left[(z^2-1)\frac{d\Theta}{dz}\right]$$

$$= \frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\frac{d\Theta}{dz}\right]\frac{dz}{d\theta}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d\Theta}{dz}\right]\sin\theta$$

بالتعويض فى (12) نحصل على :-

$$\sin^2\theta\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d\Theta}{dz}\right]+\left[n(n+1)\sin^2\theta-m^2\right]\Theta=0$$

بالقسمة على $\sin^2\theta$ والتى تساوى $(1-z^2)$

$$\therefore \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d\Theta}{dz}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\Theta=0$$

$$\therefore (1-z^2)\frac{d^2\Theta}{dz^2}-2z\frac{d\Theta}{dz}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\Theta=0 \qquad (13)$$

وبوضع $z=x$ ، $\Theta=y$ نحصل على :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

$$\therefore (1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \qquad (14)$$

وهى معادلة لجندر المرافقة ، وحلها العام هو :

$$y=\Theta=cP_n^m(z)+DQ_n^m(z) \quad , \quad \text{حيث } z=\cos\theta$$

$$P_n^m(z)=P_n^m(\cos\theta)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)$$

$$Q_n^m(z)=Q_n^m(\cos\theta)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z)$$

هى دوال لجندر المرافقة من النوع الأول والثانى على التوالى .

وهذا يعنى أن معادلة لجندر المرافقة يمكن الحصول عليها من الجزء المعتمد θ من معادلة لابلاس فى الاحداثيات القطبية ، أو أن هذا الجزء (الجزء المعتمد على θ من معادلة لابلاس) يكافىء معادلة لجندر المرافقة .

ملحوظة : فى حالة $m = 0$ فإن الحل $u(r,\theta,\phi)$ لايكون معتمدا على ϕ ويعطى فى هذه الحالة بدلالة دوال لجندر العادية .

وبصورة أخرى : فإن حل معادلة لابلاس الغير معتمدة على ϕ فى الاحداثيات القطبية الكروية يؤدى إلى معادلة لجندر العادية .

الإثبات : فى هذه الحالة تكون الدالة $u = R(r)\,\Theta(\theta)$ وتؤول معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ فى الاحداثيات القطبية (r,θ) [فى بعدين] إلى :-

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (1)$$

ويؤدى حلها إلى المعادلتين :

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+\lambda^2R=0. \qquad [R \text{ معادلة}] \qquad (2)$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\lambda^2\sin\theta.\ \Theta=0. \qquad [\Theta \text{ معادلة}] \qquad (3)$$

وحل المعادلة (2) (معادلة R) هو : $R = Ar^n + \dfrac{B}{r^{n+1}}$

حيث : $\lambda^2 = -n(n+1)$

وتصبح المعادلة (3) (معادلة Θ) بالصورة الآتية بعد وضع $z = \cos\theta$ ، $\lambda^2 = -n(n+1)$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d\Theta}{dz}\right]\sin\theta=-n(n+1)\sin\theta\Theta$$

والقسمة على $\sin\theta$ نحصل على :-

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d\Theta}{dz}\right]+n(n+1)\Theta=0$$

$$(1-z^2)\frac{d^2\Theta}{dz^2}-2z\frac{d\Theta}{dz}+n(n+1)\,\Theta=0 \qquad (5)$$

وبوضع $z = x$ ، $\Theta = y$ نحصل على :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dr}+n(n+1)y=0$$

$$\therefore (1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

وهى معادلة لجندر العادية ، وحلها العام هو :

$$y = FP_n(x)+GQ_n(x)$$

الدالة المولدة لكثيرات حدود لجندر المرافقة :

يمكن اشتقاق الدالة المولدة لكثيرات حدود لجندر المرافقة من الدالة المرافقة لكثيرات حدود لجندر $P_n(x)$ وذلك فى الصورة :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{m+1}^{m}(x)h^k = \frac{2m!(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m m!(1-2hx+h^2)^{m+1}}$$

العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر المرافقة :

يمكن اشتقاق العديد من العلاقات التكرارية للدوال $P_n^m(x)$ ، ومن تلك العلاقات نذكر :

(1) العلاقة الأولى :

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-2}^{m+1}(x)$$

الإثبات : من العلاقة التكرارية الآتية للدوال $P_n(x)$:

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$$

$$\therefore (2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}P_{n+1}(x) - \frac{d}{dx}P_{n-1}(x)$$

بالتفاضل m من المرات بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\therefore (2n+1)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n+1}(x) - \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n-1}(x)$$

بالضرب فى $(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ واعتبار أن :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-2}^{m+1}(x) \qquad (1)$$

أيضا وبنفس الطريقة يمكن اثبات العلاقات الثلاث الآتية :

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n-m+1)P_{n+1}^m(x) \qquad (2)$$

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}P_n^m(x) = [m(m-1) - n(n+1)]P_n^{m-1}(x) \qquad (3)$$

$$2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n^m(x) = P_n^{m+1}(x) - (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x) \qquad (4)$$

تعامد وعيارية دوال لجندر المرافقة :

مثل كثيرات حدود لجندر $P_n(x)$ فإن دوال لجندر المرافقة $P_n^m(x)$ تكون متعامدة فى الفترة $-1 < x < 1$ بالصورة الآتية :

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = 0 \quad , \quad (n \neq \ell) \qquad (1)$$

وتحدد هذه العلاقة تعامد دوال لجندر المرافقة .

وإذا كانت $n = \ell$ فإن :

$$\int_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

وتحدد هذه العلاقة عيارية دوال لجندر المرافقة .

وبوجه عام فإن :

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n\ell} \qquad (3)$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : تحقق من العلاقة (1) بالنسبة للدوال $P_2^1(x),\ P_3^1(x)$

الحل : حيث أن :

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_3^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_3(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2-3x}{2}\right)$$

$$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{15x^2-3}{2}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} P_2^1(x) P_3^1(x) dx = \int_{-1}^{1} 3x(1-x^2)\left(\frac{15x^2-3}{2}\right) dx = 0$$

(تكامل دالة فردية من -1 إلى +1 يساوى صفراً)

مثال (2) : تحقق من العلاقة (2) بالنسبة للدالة $P_2^1(x)$

الحل : حيث أن :

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} [P_2^1(x)]^2 dx = 9\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = 9\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{12}{5}$$

وطبقا للعلاقة (2) فإن النتيجة المطلوبة تكون :

$$\frac{2}{2(2)+1}\frac{(2+1)!}{(2-1)!} = \frac{2}{5}\frac{3!}{1!} = \frac{12}{5}$$

وهو المطلوب .

التوافقيات الكرية Spherical Harmonics :

بوضع $x = \cos\theta$ فى العلاقة (3) السابقة نحصل على :

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta)P_\ell^m(\cos\theta).\sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{n\ell}$$

والأن : نعرف الدالة :

$$\tilde{P}_\ell^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\theta) \quad ; \quad (-1 \le m \le 1)$$

والتى تخضع للخاصية العيارية التعامدية الآتية :-

$$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_\ell^m(x)\tilde{P}_{\ell'}^m(x)dx = \delta_{\ell\ell'}$$

أيضاً : بإدخال الدالة :

$$\Phi_m(\iota) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

والتى تخضع أيضاً للخاصية العيارية التعامدية الآتية :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\phi)\Phi_{m'}(\phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\phi}e^{im'\phi}d\phi = \delta_{mm'}$$

تعرف التوافقيات الكرية (Spherical Harmonics) بأنها حاصل ضرب الدالتين $\tilde{P}_\ell^m, \Phi_m(\phi)$ ويرمز لها وكالتالى :

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \tilde{P}_\ell^m(\cos\theta)\Phi(\phi)$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi} \qquad (I)$$

وهى تمثل دوال متعامدة أيضاً ، وتخضع للخاصية العيارية التعامدية الآتية :

obeikandl.com

$$(Y_{\ell'}^{m'}, Y_{\ell}^{m}) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

ويمكن إثبات العلاقة الآتية :-

$$Y_{\ell}^{-m} = (-1)^m Y_{\ell}^{m}$$

وهى علاقة هامة تفيد فى حل كثير من المسائل التطبيقية وباستخدام العلاقة (I) يمكن حساب عدد من التوافقيات الكرية مثل :

(1) $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

(2) $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

(3) $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$

(4) $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$

(5) $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$

(6) $Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}$

obeikandl.com

ثالثاً دوال بسيل Bessel's Functions

معادلة بسيل التفاضلية (Bessel's Differential Equations)

تنشأ دوال بسل كحلول للمعادلة :

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \quad , \quad n\geq 0$$

التى تسمى معادلة بسيل التفاضلية

ويعطى الحل العام لهذه المعادلة بالصورة :

$$y=AJ_n(x)+BY_n(x)$$

حيث يسمى الحل $J_n(x)$ الذى له نهايو محدودة عند $x\to 0$ بدالة بسيل من النوع الأول والرتبة n .

كما يسمى الحل $Y_n(x)$ الذى ليس له نهاية محدودة (أو أنه غير محدود) عنده $x\to 0$ بدالة بسيل من النوع الثانى ذات الرتبة n ، أو دالة نيومان (Neumaun function) .

ويمكن حل معادلة بسيل التفاضلية فى صورة متسلسلة باستخدام طريقة فروبينوس المشهورة فى المعادلات التفاضلية وذلك بكتابتها فى الصورة :

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (1)$$

ولحل هذه المعادلة فى صورة متسلسلة :

نفرض أن :

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^{k+r}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\sum_{r=0}^{\infty}a_r(k+r)x^{k+r-1}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{r=0}^{\infty}a_r(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}$$

وبعد سلسلة من الحسابات المطوله (تعطى كمسألة) نحصل على الحل y والذى يتكون من حلين:

الحل الاول : يرمز له بالرمز $J_n(x)$ ويسمى دالة بسيل من النوع الأول ومن الرتبة n

(Bessel function of the first kind and order n)

وصورتها :

$$\therefore J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} - \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{2^{2r} r!.(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \qquad (2)$$

حيث :

$$\Gamma(n+r+1) = (n+r)! = (n+r)(n+r-1).....(n+2)(n+1)$$

ملاحظة : عندما $n = 0$ فإن $\Gamma(1) = 1$ وتؤول العلاقة (2) إلى :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots\ldots \qquad (3)$$

وتسمى الدالة $J_0(x)$ دالة بسيل من الرتبة الصفرية وهى تمثل حلاً لمعادلة بسيل فى حالة $n = 0$ والتى صورتها :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

والتى تسمى معادلة بسيل الصفرية (Zeroth Bessel equation)

الحل الثانى : ويرمز له بالرمز $J_{-n}(x)$ وصورته :

$$\therefore J_{-n}(x) = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(-2n+2)(-2n+4)}\right.$$

$$\left. - \ldots + (-1)^r \frac{x^{2r}}{2.4\ldots 2r.(-2n+2)\ldots.(-2n+2r)} + \ldots.\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)} \qquad (4)$$

وهذا الحل يؤول إلى الصفر عندما $-n + r + 1 = 0$ أى عندما $r = n - 1$ وذلك لأن $\Gamma(0) = \infty$.

ويلاحظ أن : إذا كانت $n = 0$ فإن المتسلسلتين J_n, J_{-n} تتطابقان .

وإذا كانت $n = 1, 2, \ldots$ فإن المتسلسلة $J_{-n}(x)$ لاتتواجد ، بمعنى أن :

المتسلسلة أو الحل $J_{-n}(x)$ يتواجد فقط لقيم n غير الصحيحة أى عندما $n \neq 0, 1, 2, \ldots$.

وإذا كانت n تمثل عدداً صحيحا فإنه يمكن إثبات العلاقة الآتية :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

التى تعنى أن J_n, J_{-n} غير مستقلتين خطياً (أى تربطهما علاقة خطية) .

الملخص : (1) فى حالة n تمثل عدداً صحيحاً أى $n = 0,1,2,...$ فإن J_n, J_{-n} تكونان مرتبطتين خطيا (لأن بينهما علاقة خطية).

(2) فى حالة n لاتمثل عدداً صحيحاً أى $n \neq 0,1,2,...$ فإن J_n, J_{-n} تكونان مستقلتين خطيا (أى ليس بينهما علاقة خطية) بمعنى أن الدالتين J_n, J_{-n} تكونان متواجدتان .

ويصبح الحل العام فى حالة قيم n الغير صحيحة هو

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \qquad (5)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

دالة نيومان (أو دالة بسيل من النوع الثانى $[Y_n(x)]$:

وجدنا أن الحل العام لمعادلة بسيل التفاضلية فى حالة n عدد غير صحيح (أى عندما $n \neq 0,1,2,...$) هو :

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

وبوضع :

$$A = C + D\frac{\cos n\pi}{\sin n\pi}$$

$$B = -\frac{D}{\sin n\pi}$$

نحصل على :

$$y = CJ_n(x) + D\left[\frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}\right]$$

$$= CJ_n(x) + DY_n(x)$$

حيث :

$$\Psi_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

تسمى دالة نيومان (Neumann's Function) أو دالة بسيل من النوع الثانى من الرتبة n حيث n عدد غير صحيح $n \neq 0,1,2,...$.

في حالة إذا كانت n عددا صحيحا $(n = 0,1,2,\ldots)$:

تصبح دالة نيومان $Y_n(x) = \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$ كمية غير محددة (غير معينة)

على الصورة $\dfrac{0}{0}$ وذلك لأن :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$\cos n\pi = (-1)^n \quad , \qquad \sin n\pi = 0$$

$$\therefore Y_n(x) = \frac{(-1)^n J_n(x) - (-1)^n J_n(x)}{\sin n\pi} = \frac{0}{0}$$

هذه الصورة غير المحددة (أو غير المعينة) يمكن إيجاد قيمتها باستخدام قاعدة لوبيتال . وبذلك فإنه فى حالة n عدد صحيح يمكن كتابة :

$$Y_n(x) = \lim_{p\to n}\left[\frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}\right]$$

$$= \lim_{p\to n}\frac{\dfrac{\partial}{\partial p}[J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)]}{\dfrac{\partial}{\partial p}[\sin p\pi]}$$

والتى يمكن إثبات أنها تكتب فى الصورة الآتية والتى حصل عليها العالمان نيومان وفيبر (Neumann & Weber) ، وتعرف بعلاقة نيومان – فيبر

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left[\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}[\Phi(k) + \Phi(n+k)]$$

حيث γ يسمى ثابت أويلر (Euler constant) الذى يعرف كالآتى :

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m\right) = 0.57722$$

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} \quad , \qquad \Phi(0) = 0$$

فى حالة $n = 0$: فإنه يمكن إثبات أن دالة نيومان الصفرية تأخذ الصورة الآتية :

$$\Psi_0(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\Gamma(r+1)}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - \Phi(r)\right],$$

(أنظر مثال (6) بعد ذلك) .

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أثبت أنه فى حالة n تمثل عدداً صحيحا فإن :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$(n = 1,2,3,\ldots)$$

الحل : حيث أن :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}$$

فباحلال $(-n)$ محل n فى هذه العلاقة نجد أن :

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}}{r!\Gamma(-n+r+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}}{r!\Gamma(-n+r+1)} + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}}{r!\Gamma(-n+r+1)}$$

ولكن عندما $r = n-1$ فإن :

$$\Gamma(-n+r+1) = \Gamma(0) = \infty$$

وبذلك فإن المجموع الأول فى الطرف الأيمن يساوى صفرا .

وبوضع $r = n + k$ فى المجموع الثانى نحصل على :

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!\Gamma(k+1)}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)} = (-1)^n J_n(x)$$

obeikandl.com

وهو المطلوب .

مثال (2) : اثبت أن المعادلة التفاضلية

$$x^2y'' + xy' + 4(x^4 - n^2)y = 0 \qquad (1)$$

يمكن أن تتحول إلى معادلة بسيل التفاضلية باستخدام التحويلة $x^2 = t$.

الحل : بالتحويلة المعطاه تتغير المعادلة (1) حيث $y = y(x)$ إلى معادلة جديدة حيث $y = y(t)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = 2\sqrt{t}\,\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{t}\,\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{t}\,\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \left(2\sqrt{t}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dy}{dt}\right)(2\sqrt{t}) = 4t\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

وتأخذ المعادلة (1) الصورة الآتية :

$$t\left(4t\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) + \sqrt{t}\left(2\sqrt{t}\,\frac{dy}{dt}\right) + 4(t^2 - n^2)y = 0$$

وبعد الاختصار نحصل على معادلة بسيل التفاضلية بالصورة

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0$$

وحلها يكون بالصورة :

$$y(t) = AJ_n(t) + BY_n(t)$$

وحيث أن $x^2 = t$ فإن حل المعادلة (1) يأخذ الصورة الآتية :

$$y(x) = AJ_n(x^2) + BY_n(x^2)$$

مثال (3) : بين أن المعادلة التفاضلية

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^4 - n^2)y = 0$$

يمكن أن تتحول إلى معادلة بسيل التفاضلية باستخدام التحويل $\lambda x = t$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\lambda\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\lambda\frac{d^2y}{dt^2}$$

وتأخذ المعادلة (1) الصورة الآتية :

$$\frac{t^2}{\lambda^2}\left(\lambda^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{1}{\lambda}\left(\lambda\frac{dy}{dt}\right)+(t^2-n^2)y=0$$

وبعد الاختصار نحصل على معادلة بسيل التفاضلية بالصورة :

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-n^2)y=0$$

وحلها يكون بالصورة :

$$y(t)=AJ_n(t)+BY_n(t)$$

وحيث أن $t=\lambda x$ فيأخذ حل المعادلة (1) الصورة الآتية :

$$y(x)=AJ_n(\lambda x)+BY_n(\lambda x)$$

مثال (4) : باستخدام تعريف دالة بسيل $J_n(x)$ بالصورة :

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\Gamma(n+r+1)} \qquad (1)$$

$$\text{(i) } J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$\text{(ii) } J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

علما بان $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

الحل : بوضع $n=\frac{1}{2}$ في (1) نحصل على :

$$\text{(i) } J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2r}}{r!\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{1!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{1!\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x}\right)\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}[\sin x] = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x = \sqrt{\frac{4}{2\pi x}}\sin x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

حيث مفكوك $\sin x$ يعطى بالصورة :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$$

(ii) $$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2r}}{r!\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{1!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}{2!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

حيث مفكوك $\cos x$ يعطى بالصورة :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots$$

مثال (5) : **العلاقة بين معادلة بسيل ومعادلة لابلاس**

اثبت أن معادلة بسيل التفاضلية

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

يمكن الحصول عليها من معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ فى الاحداثيات الاسطوانية (r, ϕ, z)

الحل : معادلة لابلاس فى الاحداثيات الاسطوانية هى :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

نفرض أن الحل يعطى بالصورة :

$$u = R(r)\Phi(\phi)Z(z) = R\phi Z$$

بالتعويض فى (1) :

$$\therefore R'\Phi Z + \frac{1}{r}R'\Phi Z + \frac{1}{r^2}RZ\Phi'' + R\Phi Z'' = 0 \qquad (2)$$

بالقسمة على $R\Phi Z$ فإن (2) تصبح :-

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\therefore \frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-\frac{Z''}{Z}$$

حيث أن الطرف الايمن يعتمد على Z فقط والأيسر على r,ϕ فقط.

$\therefore$ كل طرف يجب أن يساوى ثابت ، وليكن $(-\lambda^2)$:

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda^2 \qquad (3)$$

$$-\frac{Z''}{Z}=-\lambda^2 \quad \therefore Z''-\lambda^2 Z=0 \qquad (4)$$

لفصل المتغيرات فى (3) : بضرب الطرفين فى r^2 نحصل على :

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}+\lambda^2 r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi} \qquad (5)$$

وحيث أن الطرف الأيمن يعتمد على Φ فقط والأيسر على r فقط فإن كل طرف يجب أن يساوى ثابت ، ليمكن (μ^2)

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}+\lambda^2 r^2=\mu^2 \qquad (6)$$

$$\Phi''+\mu^2\Phi=0 \qquad (7)$$

المعادلة (6) [معادلة r] هى :

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2 r^2-\mu^2)R=0 \qquad (8)$$

بوضع $\mu=n \quad , \quad x=\lambda r \quad , \quad y=R$

فان المعادلة (8) تؤول إلى :

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

وهى معادلة بسيل التفاضلية .

الأثبات :

بوضع $y=R$ ، $x=\lambda r$ ، $\mu=n$ فى (8) نحصل على :

$$r^2\frac{d^2y}{dr^2}+r\frac{dy}{dr}+(\lambda^2 r^2-n^2)y=0 \qquad (9)$$

ولكن

$$\frac{dy}{dr}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{rt}=y'.\lambda$$

$$\frac{d^2y}{dr^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dr}\right)=\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dy}{dx}\right).\frac{dx}{dr}=\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dy}{dx}\right).\lambda=\lambda^2\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2y''$$

بالتعويض فى (9) نحصل على :-

$$\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2.\lambda^2y''+\frac{x}{\lambda}(\lambda y')+(x^2-n^2)y=0$$

$$\therefore\ x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \qquad (10)$$

وهذا يعنى أن الجزء r فى معادلة لابلاس فى الاحداثيات الاسطوانية يمثل معادلة بسيل التفاضلية (10) .

وهو المطلوب .

مثال (6) : أثبت أن الصيغة التكاملية

$$y=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\phi)d\phi$$

تحقق معادلة بسيل الصفرية

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0$$

أى أن $y=J_0(x)$

الحل : حيث أن :

$$y=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\phi)d\phi \qquad (1)$$

فبالتفاضل بالنسبة إلى x تحت علامة التكامل نحصل على :-

$$y'=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\cos\phi\sin(x\cos\phi)\right]d\phi \qquad (2)$$

$$y''=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\cos^2\phi\cos(x\cos\phi)\right]d\phi \qquad (3)$$

ومن (2) باجراء التكامل بالتجزىء نحصل على :-

$$y'=-\frac{1}{\pi}[\{\sin(x\cos\phi).\sin\phi\}_0^{\pi}$$

openkandl.com

$$-\int_0^{\pi} \{-x\sin\phi\cos(x\cos\phi).\sin\phi\}d\phi]$$

$$=-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\phi\cos(x\cos\phi)d\phi$$

$$=-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\cos(x\cos\phi)d\phi$$

$$=-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos\phi)d\phi+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\phi\cos(x\cos\phi)d\phi=-xy-xy''$$

(باستخدام (1) ، (3))

$$\therefore y''+\frac{1}{x}y'+y=0$$

وهى معادلة بسيل الصفرية .

ومن ذلك نرى أن $y=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos\phi)d\phi$ تحقق هذه المعادلة والتى حلها هو $J_0(x)$،

أى أن $y=J_0(x)$ هى حل لمعادلة بسيل التفاضلية من الرتبة صفر .

مثال (7) : أثبت أن دالة نيومان (أو دالة بسيل من النوع الثانى) ذات الرتبة الصفرية $Y_0(x)$ تأخذ الصورة الآتية :

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\Gamma(r+1)}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma-\Phi(r)\right]$$

حيث γ هو ثابت أويلر $\gamma=0.57722$ و $\Phi(r)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{r}$

$$\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)}=\Phi(r)-\gamma$$

الحل :

فى حالة n عدد صحيح فان تعريف دالة نيومان وصورته :

$$Y_n=\frac{J_n\cos n\pi-J_{-n}}{\sin n\pi}$$

يعطى كمية غير معرفة على الصورة $\frac{0}{0}$ ولذلك يجب إستخدام قاعدة لوبيتال لايجاد قيمة Y_n فى هذه الحالة ، وذلك بايجاد قيمة النهاية :

$$\lim_{p\to n}\frac{J_p\cos p\pi - J_{-p}}{\sin p\pi}$$

ثم إجراء التفاضل للبسط والمقام بالنسبة إلى p فتصبح تلك النهاية :

$$Y_n(x)=\lim_{p\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial p}\left[J_p(x)\cos p\pi - J_{-n}(x)\right]}{\frac{\partial}{\partial p}\left[\sin p\pi\right]}$$

وبوضع $n=0$ (حالة معادلة بسيل الصفرية) فإن :

$$Y_0=\lim_{p\to 0}\left[\frac{\frac{\partial J_p}{\partial p}\cos p\pi - \frac{\partial J_{-p}}{\partial p}}{\pi\cos p\pi]}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p}{\partial p}-\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}\right]_{p=0}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial J_p}{\partial p}\right]_{p=0} \qquad (1)$$

حيث

$$\frac{\partial J_p}{\partial p}=\frac{\partial J_{-p}}{\partial(-p)}=-\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}$$

ولايجاد $\frac{\partial J_p}{\partial p}$: نفاضل المتسلسلة

$$J_p(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2r}}{r!\Gamma(p+r+1)}$$

بالنسبة إلى p فنحصل على :

$$\frac{\partial J_p}{\partial p}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2r}}{\Gamma(p+r+1)}\right\} \qquad (2)$$

obeikandl.com

وبوضع $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2r}}{\Gamma(p+r+1)}=G$ فإن :

$$\ln G=(p+2r)\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\ln\Gamma(p+r+1)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى p نحصل على :

$$\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial p}=\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\Gamma'(p+r+1)}{\Gamma(p+r+1)}$$

وعندما $p=0$ فإن :

$$\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{p=0}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{\Gamma(r+1)}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)}\right] \qquad (3)$$

ومن (3) ، (2) نحصل على :

$$\left.\frac{\partial J_p}{\partial p}\right|_{p=0}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{p=0}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\Gamma(r+1)}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)}\right]$$

ولكن :

$$\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)}=\Phi(r)-\gamma$$

حيث $\Phi(r)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{r}$ و γ هو ثابت أويلر

$$\therefore\left.\frac{\partial J_p}{\partial p}\right|_{p=0}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\Gamma(r+1)}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\Phi(r)\right]$$

وبالتعويض فى (1) نحصل على دالة نيومان (أو بسيل من النوع الثانى) الصفرية بالصورة المطلوبة وهى :

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\Gamma(r+1)}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\Phi(r)\right]$$

وهو المطلوب .

العلاقات التكرارية (Recurrence Relation) لدالة بسيل من النوع الأول $J_n(x)$

باستخدام تعريف دالة بسيل $J_n(x)$ الآتى :

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \qquad (1)$$

يمكن استنتاج عدد من العلاقات التكرارية ، وهى :

(i) $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]=x^n J_{n-1}(x)$

(ii) $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)]=-x^{-n} J_{n+1}(x)$

(iii) $xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$

(iv) $xJ_n'(x)=-nJ_n(x)+xJ_{n-1}(x)$

(v) $J_n'(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]$

(vi) $J_n(x)=\frac{x}{2n}[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)]$

الاثبات :

لاثبات العلاقة الأولى :

من (1) بضرب الطرفين فى x^n :

$$\therefore x^n J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{2n+2r}}{2^{n+2r}r!\Gamma(n+r+1)}$$

حيث :

$$\Gamma(n+r+1)=(n+r)!$$

وباجراء التفاضل بالنسبة لـ x نحصل على :

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r.(2n+2r)x^{2n+2r-1}}{2^{n+2r}r!.(n+r)\Gamma(n+r)}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^{2n+2r-1}}{2^{n+2r-1}r!\Gamma(n+r)}$$

حيث

openkandil.com

$$\Gamma(n+r+1)=(n+r)\Gamma(n+r)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{n}J_{n}(x)]=x^{n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}x^{(n-1)+2r}}{2^{(n-1)+2r}\,r!\Gamma\{(n-1)+r+1\}}$$

$$=x^{n}J_{n-1}(x) \qquad \text{(i)}$$

اثبات العلاقة الثانية :

من (1) بضرب الطرفين فى x^{-n} نحصل على :-

$$x^{-n}J_{n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}x^{2r}}{2^{n+2r}\,r!\Gamma(n+r+1)}$$

وباجراء التفاضل بالنسبة لـ x نحصل على :

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_{n}(x)]=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r}x^{2r-1}}{2^{n+2r-1}(r-1)!\Gamma(n+r+1)}$$

حيث أن الحد المناظر لـ $r=0$ يتلاشى فنستبدل $r=0$ بـ $r=1$ وبذلك تبدأ المتسلسلة بالحد $r=1$.

ثم بوضع $r-1=k$ نحصل على مجموع المتسلسلة يدئاً من $k=0$ إلى ∞

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{-n}J_{n}(x)]=x^{-n}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r}x^{n+2r-1}}{2^{n+2r-1}(r-1)!\Gamma(n+r+1)}$$

$$=x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{n+2k+1}}{2^{n+2k+1}\,k!\Gamma(n+k+2)}$$

$$=-x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{(n+1)+2k}}{2^{(n+1)+2k}\,k!\Gamma\{(n+1)+k+1\}}$$

$$=-x^{-n}J_{n+1}(x) \qquad \text{(ii)}$$

لاثبات العلاقة الثالثة :

العلاقة هى :

$$xJ_{n}'(x)=nJ_{n}(x)-xJ_{n+1}(x)$$

ولاثباتها :

نستخدم العلاقة التكرارية (ii) :

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_{n}(x)]=-x^{n}J_{n+1}(x)$$

$$\therefore x^{-n}J_{n}'(x)+J_{n}(x).\{-nx^{-n-1}\}=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

obeikandl.com

$$\therefore x^{-n}J_n'(x) = nx^{-n-1}J_n(x) - x^{-n}J_{n+1}(x)$$

وبضرب الطرفين فى x^{n+1} نحصل على :

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - J_{n+1}(x) \qquad \text{(iii)}$$

وهى العلاقة المطلوبة .

اثبات العلاقة الرابعة :

العلاقة هى :

$$xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$$

ولاثباتها نستخدم العلاقة التكرارية (i)

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\therefore x^n J_n'(x) + J_n(x).nx^{n-1} = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\therefore x^n J_n'(x) = -nx^{n-1}J_n(x) + x^n J_{n-1}(x)$$

وبضرب الطرفين فى x^{-n+1} نحصل على :

$$xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) \qquad \text{(iv)}$$

اثبات العلاقة الخامسة :

العلاقة هى :

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

ولاثباتها : يجمع العلاقتين التكراريتين (iv) , (iii)

$$\therefore 2xJ_n'(x) = x[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

وبالقسمة على $2x$ نحصل على

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \qquad \text{(v)}$$

وهى العلاقة المطلوبة .

لاثبات العلاقة السادسة :

العلاقة هى :

$$J_n(x) = \frac{x}{2n}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

ولاثباتها : من العلاقتين التكراريتين (iv) , (iii) بالطرح نحصل على :

$$0 = 2nJ_n(x) - x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

$$\therefore 2nJ_n(x) = x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

وبالقسمة على 2n نحصل على :

$$J_n(x) = \frac{x}{2n}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \qquad \text{(vi)}$$

وهى العلاقة المطلوبة .

أمثلة محلولة :

مثال (1) : إذا كان

$$xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$$ (العلاقة التكرارية الرابعة)

فاثبت أن :

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$ (العلاقة التكرارية الأولى)

الحل :

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_n'(x) + nx^{n-1} J_n(x)$$

$$= x^{n-1}[nJ_n(x) + xJ_n'(x)]$$

$$= x^{n-1}[nJ_n(x) + \{-nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)\}]$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

مثال (2) : من تعريف دالة بسيل من النوع الاول :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \qquad (1)$$

أثبت العلاقتين التكراريتين :

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \qquad (2)$$

$$xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) \qquad (3)$$

(العلاقتين الثالثة والرابعة)

الحل :

لاثبات الثالثة (2) :

بتفاضل (1) بالنسبة إلى x نحصل على :

$$J_n'(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r.\frac{1}{r!(n+r)!}(n+2r)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}.\left(\frac{1}{2}\right)$$

بضرب الطرفين فى x نحصل على :

$$xJ_n'(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(n+2r)}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$=n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{2r}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}.\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$$

$$=nJ_n(x)+x\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r r}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}$$

$$=nJ_n(x)+x\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{(r-1)!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}$$

حيث أن الحد الثانى فى الطرف الأيمن يتلاشى لقيمة $r=0$ ولذا فإن حد $r=0$ يستبدل بـ $r=1$.

والآن : بوضع $r-1=k$ حتى نحصل على المتسلسلة لمجموع من $k=0$ إلى ∞

$$\therefore xJ_n'(x)=nJ_n(x)+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k+1}}{k!(n+1+k)!}$$

$$=nJ_n(x)-x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k+1}}{k!(n+1+k)!}$$

$$=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$$

وهو المطلوب .

لاثبات العلاقة (3) :

بتفاضل (1) بتلنسبة إلى x وضرب الطرفين فى x نحصل على :

$$xJ_n'(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(n+2r)}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{-n + 2(n+r)}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$= -n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r .2(n+r)}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$= -nJ_n(x) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r .2(n+r)}{r!(n+r)(n+r-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$$

$$= -nJ_n(x) + x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2r}}{r!(n-1+r)!}$$

$$= -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : بين أن :

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x + x\sin x}{x}\right)$$

الحل : باستخدام العلاقة التكرارية السادسة

$$J_n(x) = \frac{x}{2n}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right]$$

$$\therefore J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \qquad (1)$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \qquad (2)$$

بوضع $n = \frac{1}{2}$ في (1) نحصل على :

$$\therefore J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

وحيث أن :

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$\therefore J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{1}{x}\sin x-\cos x\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x}\right)$$

وبوضع $n=-\frac{1}{2}$ في (2) نحصل على :

$$\therefore J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{1}{x}\cos x+\sin x\right]$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x+x\sin x}{x}\right)$$

وهو المطلوب .

مثال (4) : أثبت أن :

(i) $J_0'(x)=-J_1(x)$

(ii) $J_0''(x)=\frac{1}{2}[J_2(x)-J_0(x)]$

الحل :

من العلاقة التكرارية الثالثة :

$$xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$$

بوضع $n=0$ نحصل على :

$$xJ_0'(x)=-xJ_1(x)$$

$$\therefore J_0'(x)=-J_1(x) \qquad (1)$$

ويمكن استخدام هذه العلاقة أيضاً بالصورة

$$J_1(x)=-J_0'(x) \qquad (2)$$

أيضا : بتفاضل العلاقة (1) والضرب فى 2 نحصل على :

$$2J_0''(x) = -2J_1'(x) \qquad (3)$$

وحيث أن :

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

فبوضع $n = 1$:

$$\therefore J_1'(x) = \frac{1}{2}[J_0(x) - J_2(x)]$$

بالتعويض فى (3) نحصل على :

$$2J_0''(x) = -[J_0(x) - J_2(x)]$$

$$\therefore J_0''(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)]$$

وهو المطلوب ثانيا .

مثال (5) : أثبت أن :

$$(1) \int xJ_1(x)dx = -xJ_0(x) + \int J_0(x)dx$$

$$(2) \int x^2 J_2(x)dx = -x^2 J_1(x) - 3xJ_0(x) + 3\int J_0(x)dx$$

الحل :

يمكن إثبات هذه العلاقات باستخدام التكامل بالتجزىء والعلاقة التكرارية الثانية كالتالى :

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$

العلاقات التكرارية الثانية

$$x^{-n}J_{n+1} = \frac{d}{dx}[x^{-n}J_n]$$

$$(1) \int xJ_1(x)dx = -xJ_0'(x)dx$$

$$= -\int xd[J_0(x)]$$

$$= -\left[xJ_0(x) - \int J_0(x)dx\right]$$

$$= -xJ_0(x) + \int J_0(x)dx \qquad (1)$$

$$(2) \int x^2 J_2(x)dx = \int x^3[x^{-1}J_2(x)]dx$$

$$= \int x^3\left[-\frac{d}{dx}(x^{-1}J_2)\right]dx$$

$$= \int x^3 d[-x^{-1}J_1]$$

$$= x^3[-x^{-1}J_1] - \int [-x^{-1}J_1].(3x^2dx)$$

$$= -x^2 J_1(x) + 3\int x J_1(x)dx \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) فى (2) نحصل على :

$$\therefore \int x^2 J_2(x)dx = -x^2 J_1(x) + 3[-xJ_0(x) + \int J_0(x)dx]$$

$$= -x^2 J_1(x) - 3xJ_0(x) + 3\int J_0(x)dx \qquad (3)$$

مسألة : أثبت أن :

$$\int x^3 J_3(x)dx = -x^3 J_2(x) - 5x^2 J_1(x) - 15xJ_0(x) + 15\int J_0(x)dx$$

الحل :

$$\int x^3 J_3(x)dx = \int x^5 [x^{-2} J_3(x)dx]$$

$$= \int x^5 [-\frac{d}{dx}(x^{-2} J_2)]dx$$

$$= \int x^5 d(-x^{-2} J_2)$$

$$= x^5(-x^{-2} J_2) - \int (-x^{-2} J_2).(5x^4 dx)$$

$$= -x^3 J_2(x) + 5\int x^2 J_2(x)dx \qquad (4)$$

بالتعويض من (3) [علاقة : $\int x^2 J_2(x)dx$] فى (4) نحصل على :

$$\int x^3 J_3(x)dx = -x^3 J_2(x) + 5[-x^2 J_1(x) - 3xJ_0(x) + 3\int J_0(x)dx]$$

$$= -x^3 J_2(x) - 5x^2 J_1(x) - 15xJ_0(x) + 15\int J_0(x)dx$$

وهو المطلوب .

مثال (6) : أثبت أن :

$$J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

الحل :

حيث أن $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ هما حلان لمعادلة بسيل التفاضلية التى صورتها :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad (1)$$

فهما يحققان هذه المعادلة

فإذا كانت $y = J_n(x)$ ، $y' = J_n'(x)$ ، $y'' = J_n''(x)$

فبالتعويض فى (1) :

$$\therefore J_n''(x)+\frac{1}{x}J_n'(x)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J_n(x)=0 \qquad (2)$$

وبالمثل بوضع $y=J_{-n}(x)$ فإن (1) تأخذ الصورة :

$$J_{-n}''(x)+\frac{1}{x}J_{-n}'(x)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J_{-n}(x)=0 \qquad (3)$$

بضرب (2) فى $J_{-n}(x)$ ، (3) فى $J_n(x)$ والطرح نحصل على :

$$J_n''(x(J_{-n}(x)-J_{-n}''(x)J_n(x)+\frac{1}{x}[J_n'(x)J_{-n}(x)-J_{-n}'(x)J_n(x)]=0 \quad (4)$$

وبوضع

$$z=J_n'J_{-n}-J_{-n}'J_n$$

$$\therefore z'=J_n''J_{-n}+J_n'J_{-n}'-J_{-n}'J_n'-J_{-n}''J_n$$

$$=J_n''J_{-n}-J_{-n}''J_n$$

وتؤول المعادلة (4) إلى :

$$\therefore z'+\frac{1}{x}z=0 \qquad \therefore \frac{z'}{z}=-\frac{1}{x}$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\therefore \ln z=-\ln x+\ln c=\ln\frac{c}{x} \qquad \therefore z=\frac{c}{x}$$

$$\therefore J_n'J_{-n}-J_{-n}'J_n=\frac{c}{x} \qquad (5)$$

ولتحديد قيمة c : بمساواة معاملات x^{-1} (أى $\frac{1}{x}$) فى الطرفين واستخدام متسلسلات مفكوك J_n , J_{-n} , ... وصورها :

$$J_n=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}-\ldots\ldots, \quad J_n'=\frac{x^{n-1}}{2^n\Gamma(n)}-\ldots\ldots$$

$$J_{-n}=\frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}-\ldots\ldots, \quad J_{-n}'=\frac{x^{-n-1}}{2^{-n}\Gamma(-n)}-\ldots\ldots$$

نحصل على :

$$\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(-n+1)} - \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n)} = c$$

ولكن :

$$\Gamma(n+1)\Gamma(-n) = n\Gamma(n).\frac{\Gamma(-n+1)}{-n}$$

$$= -\Gamma(n)\Gamma(-n+1)$$

$$\therefore \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(-n+1)} + \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(-n+1)} = c$$

$$\therefore c = \frac{2}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} = \frac{2}{\frac{\pi}{\sin n\pi}} = \frac{2\sin n\pi}{\pi}$$

وبالتعويض فى (5) نحصل على :

$$J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

وهو المطلوب .

الدالة المولدة لكثيرة الحدود $J_n(x)$:

تسمى الدالة $e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$ بالدالة المولدة لدوال بسيل من النوع الأول حيث تكون الرتبة عدداً صحيحاً ، وهى مفيدة جداً فى الحصول على خواص تلك الدوال عندما تكون n عدداً صحيحاً ، ومن ذلك يمكن إثبات الخاصية لجميع قيم n .

الاثبات : لاثبات أن

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$$

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = e^{\frac{xh}{2}} . e^{-\frac{x}{2h}}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xh}{2}\right)^r}{r!} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2h}\right)^k}{k!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xh}{2}\right)^r}{r!} \frac{\left(-\frac{x}{2h}\right)^k}{k!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{r+k} h^{r-k}}{r!k!}$$

وبوضع $r-k=n$ حيث تتغير n من $-\infty$ إلى ∞ فيصبح المجموع فى الصورة :

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} h^n}{(n+k)!k!}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \right] h^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

وهو المطلوب .

أمثلة محلولة على الدالة المولدة

مثال (1) : باستخدام الدالة المولدة ، أثبت أن :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

الحل :

نفرض أن :

$$f(x,h) = e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})}$$

$$f(x,-\frac{1}{h}) = e^{\frac{x}{2}[-\frac{1}{h}+h)} = f(x,h)$$

$$\therefore \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)(-\frac{1}{h})^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

وبوضع $k=-n$ نحصل على :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(x)(-\frac{1}{h})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

obeikandl.com

$$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{-n}(x)h^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$$

بمقارنة معامل h^n في الطرفين نجد أن :

$$(-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x)$$

$$\therefore J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : باستخدام الدالة المولدة ، أثبت العلاقتين التكراريتين الآتيتين :

$$\text{(i)}\ J_n(x) = \frac{x}{2n}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

$$\text{(ii)}\ J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

الحل : لإثبات العلاقة الأولى :

بتفاضل طرفي الدالة المولدة :

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$$

بالنسبة إلى h نحصل على :

$$\therefore e^{(\frac{x}{2})(h-\frac{1}{h})}.\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{h^2}\right) = \sum nJ_n(x)h^{n-1}$$

$$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{h^2}\right)\sum J_n(x)h^n = \sum nJ_n(x)h^{n-1}$$

$$\therefore \sum \left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{h^2}\right)J_n(x)h^n = \sum nJ_n(x)h^{n-1}$$

وهذه يمكن كتابتها بالصورة :

$$\sum \left(\frac{x}{2}\right)J_n(x)h^n + \sum \left(\frac{x}{2}\right)J_n(x)h^{n-2} = \sum nJ_n(x)h^{n-1}$$

$$\therefore \sum \left(\frac{x}{2}\right)J_{n-1}(x)h^{n-1} + \sum \left(\frac{x}{2}\right)J_{n+1}(x)h^{n-1} = \sum nJ_n(x)h^{n-1}$$

وبمساواة معامل h^{n-1} في الطرفين نحصل على :

$$\left(\frac{x}{2}\right)[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)]=nJ_n(x)$$

$$\therefore J_n(x)=\frac{x}{2n}[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)]$$

وهو المطلوب أولا :

ولاثبات العلاقة الثانية :

حيث أن :

$$e^{(\frac{x}{2})(h-\frac{1}{h})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$$

فبتفاضل طرفى هذه العلاقة بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(h-\frac{1}{h}\right)e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})}=\sum J_n'(x)h^n$$

$$\therefore\left(h-\frac{1}{h}\right)\sum J_n(x)h^n=2\sum J_n'(x)h^n$$

بمساواة معاملى h^n فى الطرفين نجد أن :

$$\sum J_n h^{n+1}-\sum J_n h^{n-1}=2\sum J_n'(x)h^n$$

$$\therefore \sum J_{n-1}h^n-\sum J_{n+1}h^n=2\sum J_n'(x)h^n$$

$$\therefore J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$$

وهو المطلوب ثانيا .

مثال (3) : باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود بسيل $J_n(x)$

أثبت أن :

$$(1)\quad \cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2J_2(x)\cos 2\theta+2J_4(x)\cos 4\theta+.....$$

$$=J_0(x)+2\sum_{n\ even}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta$$

$$(2)\quad \sin(x\sin\theta)=2J_1(x)\sin\theta+2J_3(x)\sin 3\theta+2J_5(x)\sin 5\theta+.....$$

$$=2\sum_{n\ odd}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta$$

ومن ذلك أوجد الصيغة التكاملية لدالة بسيل من النوع الأول بالصورة :

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta$$

حيث

$$n=0,1,2,...$$

الحل :

باستخدام الدالة المولدة

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)h^n$$

فبوضع $h=e^{i\theta}$ نحصل على :

$$e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}=e^{ix\sin\theta}=\sum J_n(x)e^{in\theta}$$

$$\therefore\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(x)[\cos n\theta+i\sin n\theta]$$

$$=\sum_{-\infty}^{-1}J_n(x)[\cos n\theta+i\sin n\theta]+J_o(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)[\cos n\theta+i\sin n\theta]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}(x)[\cos n\theta+i\sin n\theta]+J_o(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)[\cos n\theta+i\sin n\theta]$$

$$=J_0(x)+J_{-1}(x)[\cos\theta+i\sin\theta]+J_{-2}(x)[\cos 2\theta+i\sin n\theta]+.....$$

$$+J_1(x)[\cos\theta+i\sin\theta]+J_2(x)[\cos 2\theta+i\sin n\theta]+.....$$

$$=J_0(x)+\{[J_{-1}(x)+J_1(x)]\cos\theta+[J_{-2}(x)+J_2(x)]\cos 2\theta+.....\}$$

$$+i\{[J_1(x)-J_{-1}(x)]\sin\theta+[J_2(x)-J_{-2}(x)]\sin 2\theta+.....\}$$

$$=J_0(x)+\{2J_2(x)\cos 2\theta+...\}+i\{2J_1(x)\sin\theta+2J_3(x)\sin 3\theta+.....\}$$

وقد استخدمنا العلاقة $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$.

وبمساواة الأجزاء الحقيقة والأجزاء التخيلية فى الطرفين نحصل على :

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2J_2(x)\cos 2\theta+2J_4(x)\cos 4\theta+.....$$

(1)

$$\sin(x\sin\theta)=2J_1(x)\sin\theta+2J_3(x)\sin 3\theta+.....\qquad(2)$$

والآن لايجاد الصيغة التكاملية لكثيرة حدود بسيل :

بضرب (1) فى $\cos n\theta$ و (2) فى $\sin n\theta$ والتكامل من 0 إلى π واستخدام النتيجة

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{\pi}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{\pi}{2} & (m = n \neq 0) \end{cases}$$

نحصل على :

الحالة الأولى : إذا كانت n زوجية أو تساوى صفراً فإن :

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta = \int_0^{\pi} [J_0 + 2J_2\cos 2\theta + \ldots]\cos n\theta d\theta$$

$$= 2J_n.\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi J_n(x)$$

(حيث $m = n$)

$$\therefore J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta \qquad (3)$$

أيضاً :

$$\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta).\sin n\theta d\theta = \int_0^{\pi} [2J_1\sin\theta + \ldots..]\sin n\theta d\theta = 0$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta d\theta \qquad (4)$$

بجمع (4) , (3) نحصل على :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(x\sin\theta)\cos n\theta + \sin(x\sin\theta)\sin n\theta]d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta \qquad (I)$$

الحالة الثانية : إذا كانت n فردية فإن :

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta = \int_0^{\pi} [J_0 + 2J_2\cos 2\theta + \ldots..]\cos n\theta d\theta = 0$$

(حيث $m \neq n$)

$$\therefore 0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta \qquad (5)$$

أيضاً :

$$\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta d\theta = \int_0^{\pi} [2J_1\sin\theta + ...]\sin n\theta d\theta$$

$$= 2J_n \cdot \frac{\pi}{2} = \pi J_n(x)$$

(حيث $m = n \neq 0$)

$$\therefore J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta d\theta \qquad (6)$$

بجمع (6) , (5) نحصل على :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta + \sin(x\sin\theta)\sin n\theta]d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta \qquad , (I)$$

وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة (I) سواء كانت n زوجية أو تساوى صفراً أو كانت n فردية .

<u>صيغ التعامد والعيارية لدوال بسيل</u> :

إذا كانت λ, μ ثابتين مختلفين فإنه يمكن إثبات أن :

$$\int_0^1 xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = \frac{\mu J_n(\lambda)J_n'(\mu) - \lambda J_n(\mu)J_n'(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \qquad (I)$$

حيث $\lambda \neq \mu$.

الصيغة (I) تسمى صيغة العيارية (normalization) لدالة بسيل وإذا كانت λ, μ أى جذرين مختلفين للمعادلة :

$$RJ_n(x) + SxJ_n'(x) = 0$$

حيث R, S ثابتان ، فإنه يمكن إثبات العلاقة :

$$\int_0^1 xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = 0 \qquad (II)$$

حيث $\mu \neq \lambda$. وتسمى الصيغة (II) بصيغة التعامد (orthogonality) لدالة بسيل .

إثبات العلاقة (I) [صيغة العيارية لدوال بسيل] :

معادلة بسيل التفاضلية يمكن كتابتها بالصورة :

$$r^2\frac{d^2y}{dr^2}+r\frac{dy}{dr}+(r^2-n^2)y=0\,,\qquad n\geq 0 \tag{1}$$

إذا تغيرت r إلى λx حيث λ ثابت فإن تلك المعادلة تصبح :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-n^2)y=0 \tag{2}$$

الاثبات :

$$\therefore x=\frac{r}{\lambda} \qquad \leftarrow r=\lambda x \quad \text{بوضع}$$

$$\frac{dy}{dr}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dr}=\frac{dy}{dx}.\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}y'$$

$$\frac{d^2y}{dr^2}=\frac{1}{\lambda}\frac{dy'}{dr}=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d(\lambda x)}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\lambda^2}y''$$

بالتعويض فى (1) نحصل على :

$$\lambda^2x^2\left(\frac{1}{\lambda^2}y''\right)+\lambda x.\left(\frac{1}{\lambda}y'\right)+(\lambda^2x^2-n^2)y=0$$

$$\therefore x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-n^2)y=0$$

وهى المعادلة (2)

بالمثل : إذا كانت $r=\mu x$ فإن المعادلة (1) تصبح

$$x^2y''+xy'+(\mu^2x^2-n^2)y=0 \tag{3}$$

الدالة $y_1=J_n(\lambda x)$ تحقق المعادلة (2)

الدالة $y_2=J_n(\mu x)$ تحقق المعادلة (3)

$$\therefore x^2y_1''+xy_1'+(\lambda^2x^2-n^2)y_1=0 \tag{4}$$

$$x^2y_2''+xy_2'+(\mu^2x^2-n^2)y_2=0 \tag{5}$$

بضرب (4) فى y_2 ، (5) فى y_1 والطرح نحصل على :

$$\therefore x^2[y_2y_1''-y_1y_2'']+x[y_2y_1'-y_1y_2']=(\mu^2-\lambda^2)x^2y_1y_2$$

وبالقسمة على x نحصل على :

$$x.\frac{d}{dx}[y_2y_1' - y_1y_2'] + [y_2y_1' - y_1y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2)xy_1y_2$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{x[y_2y_1' - y_1y_2']\} = (\mu^2 - \lambda^2)xy_1y_2$$

وبالتكامل نحصل على

$$x[y_2y_1' - y_1y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2)\int xy_1y_2dx$$

وبكتابة $y_1 = J_n(\lambda x),\ y_2 = J_n(\mu x)$ والقسمة على $(\mu^2 - \lambda^2)$ نحصل على :

$$\int_0^1 xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = \frac{x[\lambda J_n(\mu x)J_n'(\lambda x) - \mu J_n(\lambda x)J_n'(\mu x)]}{\mu^2 - \lambda^2} \qquad (6)$$

وبأخذ حدود التكامل من 0 إلى 1 نحصل على

$$\int_0^1 xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = \frac{[\lambda J_n(\mu)J_n'(\lambda) - \mu J_n(\lambda)J_n'(\mu)]}{\mu^2 - \lambda^2} \qquad (7)$$

وهى الصيغة المطلوبة .

اثبات العلاقة (II) [صيغة التعامد لدوال بسيل] :

حيث أن λ, μ هما جذران للمعادلة

$$RJ_n(x) + SxJ_n'(x) = 0$$

فإن :

$$RJ_n(\lambda) + S\lambda J_n'(\lambda) = 0 \qquad (8)$$

$$RJ_n(\mu) + S\mu J_n'(\mu) = 0 \qquad (9)$$

من (8) : $RJ_n(\lambda) = -S\lambda J_n'(\lambda)$

ومن (9) : $RJ_n(\mu) = -S\mu J_n'(\mu)$

وبالضرب نحصل على :

$$-RS\lambda J_n(\mu)J_n'(\lambda) = -RS\mu J_n(\lambda)J_n'(\mu)$$

$$\therefore \lambda J_n(\mu)J_n'(\lambda) = \mu J_n(\lambda)J_n'(\mu)$$

$$\therefore \lambda J_n(\mu)J_n'(\lambda) - \mu J_n(\lambda)J_n'(\mu) = 0$$

وبالتعويض فى (7) نحصل على :

$$\int_0^1 xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = 0$$

وهى العلاقة المطلوبة .

مثال : أثبت أن

$$\int_0^a J_n(\lambda r)J_n(\mu r).rdr = 0 \qquad \text{(صيغة التعامد)}$$

حيث λ, μ هما جذران مختلفان للمعادلة $J_n(xa) = 0$

الحل :

حيث أن $J_n(x)$ هى حل لمعادلة بسيل التى صورتها :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad (1)$$

فبوضع $x = \lambda r \quad \leftarrow \quad r = \frac{x}{\lambda}$

$$y' = \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dr} \quad , \quad y'' = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2y}{dr^2}$$

وتؤول المعادلة (1) إلى :

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{\lambda r}.\frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2 r^2}\right)y = 0$$

$$\therefore r^2\frac{d^2y}{dr^2} + r\frac{dy}{dr} + \left(\lambda^2 r^2 - n^2\right)y = 0 \qquad (2)$$

وبوضع $x = \mu r$ نحصل على المعادلة :

$$\therefore r^2\frac{d^2y}{dr^2} + r\frac{dy}{dr} + \left(\mu^2 r^2 - n^2\right)y = 0 \qquad (3)$$

فى (2) : $y = J_n(\lambda r) = J_\lambda$ ، فى (3) : $y = J_n(\mu r) = J_\mu$

$$\therefore r^2\frac{d^2J_\lambda}{dr^2} + r\frac{dJ_\lambda}{dr} + \left(\lambda^2 r^2 - n^2\right)J_\lambda = 0 \qquad (4)$$

$$r^2\frac{d^2J_\mu}{dr^2} + r\frac{dJ_\mu}{dr} + \left(\mu^2 r^2 - n^2\right)J_\mu = 0 \qquad (5)$$

بضرب (4) فى $\left(\frac{1}{r}J_{\mu}\right)$ و (5) فى $\left(\frac{1}{r}J_{\lambda}\right)$ والطرح نحصل على :

$$\therefore [rJ_{\mu}J_{\lambda}'' - rJ_{\lambda}J_{\mu}''] + [J_{\mu}J_{\lambda}' - J_{\lambda}J_{\mu}'] + (\lambda^2 - \mu^2)rJ_{\lambda}J_{\mu} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\{r[J_{\mu}J_{\lambda}' - J_{\lambda}J_{\mu}']\} + (\lambda^2 - \mu^2)rJ_{\lambda}J_{\mu} = 0$$

بالتكامل بالنسبة إلى r من 0 إلى a نحصل على :

$$\{r[J_{\mu}J_{\lambda}' - J_{\lambda}J_{\mu}']\}|_0^a + \int_0^a (\lambda^2 - \mu^2)rJ_{\lambda}J_{\mu}dr = 0$$

ولكن :

$$J_{\lambda}|_a = J_n(\lambda a) = 0,\ J_{\mu}|_a = J_n(\mu a) = 0,\ \ldots$$

$$\therefore (\lambda^2 - \mu^2)\int_0^a rJ_{\lambda}J_{\mu}dr = 0$$

$$\therefore \int_0^a rJ_{\lambda}J_{\mu}dr = 0 \quad , \qquad (\lambda^2 - \mu^2) \neq 0$$

$$\therefore \int_0^a rJ_n(\lambda r)J_n(\mu r)dr = 0$$

وهو المطلوب .

obeikandl.com

رابعا : كثيرة حدود هيرميت Hermite polynomial

معادلة هيرميت التفاضلية من الرتبة n (حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$) هى :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة يعطى بدلالة كثيرة حدود هيرميت $H_n(x)$ وتعرف بصيغة رودريج الآتية :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} = (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{x^2}) \qquad (1)$$

ويمكن تلخيص أهم خواص كثيرة حدود هيرميت كالتالى :

(1) الدالة المولدة (Generating function)

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود هيرميت بالصورة :

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n \qquad (2)$$

وهى صيغة مفيدة فى الحصول على خواص الدالة $H_n(x)$

(2) الصيغ التكرارية (Recurrence formulas)

هناك العديد من الصيغ التكرارية التى تتحقق بواسطة كثيرة حدود هيرميت ، وأهم تلك الصيغ :

(1) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

(2) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$

(3) الخاصية التعامدية (Orthogonal property)

يمكن إثبات الخاصية الآتية لكثيرة حدود هيرميت :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \qquad (3)$$

حيث $m \neq n$

ومنها يتضح أن كثيرة حدود هيرميت تكون متعامدة بالنسبة للدالة e^{-x^2} التى تسمى دالة الكثافة (density function) .

(4) الخاصية العيارية (Normalization property)

فى حالة $m = n$ فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

obeikandl.com

وهى الخاصية العيارية لدوال هيرميت .

ويمكن جميع الخاصيتين التعامدية والعيارية فى خاصية واحدة كالتالى :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

حيث δ_{mn} دلتا كرونيكر .

الحل العام لمعادلة هيرميت التفاضلية :

يمكن ايجاد الحل العام لمعادلة هيرميت على هيئة متسلسلة بطريقة فوربينوس .

حيث أن معادلة هيرميت التفاضلية هى :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad (1)$$

نفرض الحل فى صورة متسلسلة كالاتى :

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \quad , \quad a_0 \neq 0$$

$$y' = \sum a_r (k+r) x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum a_r (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$

وبعد سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) نحصل على الحل الكامل لمعادلة هيرميت التفاضلية (1) بالصورة

$$y = A H_1(x) + B H_2(x)$$

حيث A, B ثابتان اختياران

$$H_1(x) = 1 - \frac{2n}{2!} x^2 + \frac{2^2 n(n-2)}{4!} x^4 - \ldots + \frac{(-1)^r 2^r}{2r!} n(n-2)\ldots(n-2r+2) x^{2r} + \ldots$$

$$H_2(x) = x - \frac{2(n-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2 (n-1)(n-3)}{5!} x^5 - \ldots + \frac{(-1)^r 2^r (n-1)(n-3)\ldots(n-2r+1)}{(2r+1)!} x^{2r+1} + \ldots$$

وهذا الحل العام يرمز له بالرمز $H_n(x)$ ويسمى بكثيرة حدود هيرميت

(Hermite polynomial)

$$\therefore H_n(x) = A H_1(x) + B H_2(x)$$

امثلة محلولة :

مثال (1) : باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود هيرميت

$$e^{2hx-h^2}=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{h^n}{n!}$$

أثبت أن $H_n(x)$ تعرف بالعلاقة :

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$ (صيغة رودريج)

الحل :

حيث أن :

$$e^{2hx-h^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}h^n=f(x,h)$$

لكل قيم n الصحيحة وكل قيم x الحقيقية .

$$f(x,h)=e^{x^2-(x-h)^2}=e^{x^2}e^{-(x-h)^2}$$

$$=\frac{H_0(x)}{0!}+\frac{H_1(x)}{1!}h+\frac{H_2(x)}{2!}h^2+\ldots+\frac{H_n(x)}{n!}h^n+\ldots.$$

$$\left[\frac{\partial^n f(x,h)}{\partial h^n}\right]_{h=0}=\frac{H_n(x)}{n!}n!=H_n(x)=\left[\frac{\partial^n}{\partial h^n}e^{-(x-h)^2}\right]_{h=0}e^{x^2} \qquad (1)$$

وبوضع $x-h=p$ أى $h=x-p=0$ عندما $h=0$ فإن $x=p$.

$$\therefore \frac{\partial}{\partial h}=-\frac{\partial}{\partial p}\ ,\ \ldots..\ ,\ \frac{\partial^n}{\partial h^n}=(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial p^n}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial h^n}\left[e^{-(x-h)^2}\right]=(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial p^n}[e^{-p^2}]$$

$$\therefore\left[\frac{\partial^n}{\partial h^n}e^{-(x-h)^2}\right]_{h=0}=(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{-x^2})=(-1)^n\frac{d^n}{\partial x^n}(e^{-x^2}) \qquad (2)$$

من (2) , (1) نحصل على :

$$H_n(x)=e^{x^2}(-1)^n\frac{d^n}{\partial x^n}(e^{-x^2}) \qquad (I)$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : باستخدام التعريف (I) فى مثال (1) وباستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود هيرميت e^{2hx-h^2} احسب قيم دوال هيرميت الآتية :

$H_0(x)\ ,\ H_1(x)\ ,\ H_2(x)\ ,\ H_3(x)$

الحل :

أولا : من التعريف (I) : بأخذ $n = 0\ ,1,2,3$ نحصل على :

$n = 0$:

$$H_0(x) = e^{x^2}.(-1)^0 \frac{d^0}{dx^0}(e^{-x^2}) = e^{x^2}.(1)e^{-x^2} = 1$$

$n = 1$:

$$H_1(x) = e^{x^2}.(-1)\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = e^{x^2}.(-1)(-2x).\ e^{-x^2} = 2x$$

$n = 2$:

$$H_2(x) = e^{x^2}.(-1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = e^{x^2}.(1)\frac{d}{dx}[-2xe^{-x^2}]$$

$$= e^{x^2}[-2x.(-2x)e^{-x^2} + e^{-x^2}.(-2)]$$

$$= e^{x^2}[4x^2 - 2]e^{-x^2} = 4x^2 - 2$$

$n = 3$:

$$H_3(x) = e^{x^2}.(-1)^3 \frac{d^3}{dx^3}(e^{-x^2})$$

$$= e^{x^2}.(-1).\frac{d}{dx}[(4x^2 - 2)e^{-x^2}]$$

$$= e^{x^2}.(-1).[(4x^2 - 2).(-2x)e^{-x^2} + e^{-x^2}.(8x)]$$

$$= e^{x^2}[8x^3 - 4x - 8x]e^{-x^2} = 8x^3 - 12x$$

ثانيا : استخدام الدالة المولدة :

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}h^n$$

$$= H_0(x) + H_1(x)h + \frac{H_2(x)}{2!}h^2 + \frac{H_3(x)}{3!}h^3 + \ldots.$$

ولكن :

$$e^{2hx-h^2} = 1 + (2hx - h^2) + \frac{(2hx - h^2)^2}{2!} + \frac{(2hx - h^2)^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + (2x)h + (2x^2 - 1)h^2 + \left(\frac{4x^3 - 6x}{3}\right)h^3 + \ldots.$$

بمقارنة المتسلسلتين نحصل على :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : أثبت العلاقات التكرارية الآتية لكثيرات حدود هيرميت :

(i) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

(ii) $2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$

(iii) $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$

الحل :

باستخدام الدالة المولدة

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n$$

أولا : بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$2he^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)\frac{h^n}{n!}$$

$$\therefore 2h\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(x)h^{n+1}}{n!}$$

بمساواة معاملات h^n في الطرفين نحصل على :

$$\frac{H_n'(x)}{n!} = \frac{H_n'(x)}{n(n-1)!} = \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

$$\therefore H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad \text{(i)}$$

وهو المطلوب أولا .

obeikandl.com

ثانيا : بالتفاضل جزئياً بالنسبة لـ h فى كلا طرفى علاقة الدالة المولدة نحصل على :

$$2(x-h)e^{2hx-h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}.nh^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

حيث الحد المناظر لـ $n=0$ يتلاشى فى الطرف الأيمن .

$$\therefore 2(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}h^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

$$\therefore 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}h^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}h^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

بمساواة معاملات h^n فى الطرفين نجد ان :

$$2x\frac{H_n(x)}{n!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{(n)!}$$

$$\therefore 2x\frac{H_n(x)}{n(n-1)!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n(n-1)!}$$

بضرب الطرفين فى $n(n-1)!$

$$\therefore 2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \qquad \text{(ii)}$$

وهو المطلوب ثانيا :

ثالثا : بحذف $H_{n-1}(x)$ بين (i), (ii) نحصل على :

من (i) : $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

ومن (ii) : $2xH_n(x) - H_{n+1}(x) = 2nH_{n-1}(x)$

فبمساواة الطرفين :

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \qquad \text{(iii)}$$

وهو المطلوب ثالثا .

مثال (4) : أثبت أن $y = H_n(x)$ هى حل لمعادلة هيرميت التفاضلية .

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

وذلك باستخدام العلاقات التكرارية لكثيرة الحدود $H_n(x)$.

الحل : من العلاقة التكرارية (iii) :

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

بتفاضل كل من الطرفين بالنسبة لـ x نحصل على :

$$H_n''(x) = 2xH_n'(x) + 2H_n(x) - H_{n+1}^1(x) \qquad (1)$$

وباستخدام العلاقة التكرارية (i) :

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

ووضع $(n+1)$ مكان n نحصل على :

$$H_{n+1}'(x) = 2(n+1)H_n(x)$$

وبالتعويض فى (1) :

$$\therefore H_n''(x) = 2xH_n'(x) + 2H_n(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

$$\therefore H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

وهى معادلة هيرميت التفاضلية التى صورتها

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

ومن ذلك نرى أن $y = H_n(x)$ هى حل لمعادلة هيرميت التفاضلية لانها تحققها .

وهو المطلوب .

مثال (5) : أثبت الخاصية العيارية التعامدية لكثيرة حدود هيرميت بالصورة :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{mn}$$

حيث δ_{mn} هى دلتا كرونيكر ، وتعرف بالصورة :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

الحل :

أولا : **إثبات الخاصية العيارية** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n H_n dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

باستخدام الدالة المولدة نحصل على :

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n, \qquad e^{2tx-t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{m!} t^m$$

بضرب العلاقتين نحصل على :

$$e^{2hx-h^2+2xt-t^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_m(x)H_n(x)}{m!n!}t^m h^n$$

بضرب الطرفين فى e^{-x^2} وإجراء التكامل من $-\infty$ إلى ∞ نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x+t+h)^2-2th]}dx=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m h^n}{m!n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx$$

الطرف الأيسر يساوى :

$$e^{-2th}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+t+h)^2}dx$$

$$=e^{2th}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=e^{2th}\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2th)^m}{m!}$$

حيث $u=x+t+h \quad \rightarrow \quad du=dx$

أيضاً :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\therefore\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m t^m h^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m h^n}{m!n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m H_n dx$$

بمساواة المعاملات فى الطرفين نحصل على :

$$\sqrt{\pi}2^m h^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m H_n dx$$

وبوضع $m=n$ فإن :

$$\sqrt{\pi}2^n h^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx$$

بمقارنة معاملات h^n :

$$\therefore\sqrt{\pi}2^n=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)dx$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)dx=2^n n!\sqrt{\pi}$$

وهى الخاصية العيارية

ولاثبات الخاصية التعامدية :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \qquad \text{حيث } m \neq n .$$

حيث أن $H_m(x), H_n(x)$ تحقق معادلة هيرميت التفاضلية فإن :

$$H_m'' - 2xH_m' + 2mH_m = 0 \qquad (1)$$

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \qquad (2)$$

(معادلة هيرميت التفاضلية : $y'' - 2xy' + 2ny = 0$)

والآن : بكتابة :

$$y_m = e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)$$

$$y_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

حيث y_m, y_n دوال هيرميت Hermite functions ، بينما $H_m(x), H_n(x)$ كثيرات حدود هيرميت Hermite polynomials

$$\therefore H_m = y_m e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore H_m' = y_m' e^{\frac{x^2}{2}} + x y_m e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$H_m'' = y_m'' e^{\frac{x^2}{2}} + 2x y_m' e^{\frac{x^2}{2}} + y_m (1 + x^2) e^{\frac{x^2}{2}}$$

بالتعويض فى (1) والاختصار نحصل على :

$$y_m'' + (2m + 1 - x^2) y_m = 0 \qquad (3)$$

أيضا فإن :

$$H_n = y_n e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore H_n' = y_n' e^{\frac{x^2}{2}} + x y_n e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore H_n'' = y_n'' e^{\frac{x^2}{2}} + 2x y_n' e^{\frac{x^2}{2}} + y_n (1 + x^2) e^{\frac{x^2}{2}}$$

بالتعويض فى (2) والاختصار نحصل على :

$$y_n'' + (2n + 1 - x^2) y_n = 0 \qquad (4)$$

obeikandl.com

بضرب (3) فى y_n و (4) فى y_m والطرح نحصل على :

$$y_n y_m'' - y_m y_n'' = 2(m-n) y_m y_n$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[y_n y_m' - y_m y_n'] = 2(m-n) y_m y_n$$

بالتكامل من $-\infty$ إلى $+\infty$ واعتبار أن $y_n(x) = y_m(x) \to 0$ عندما $|x| \to \infty$ لكل قيم n, m الصحيحة فإن :

$$y_n y_m' - y_m y_n' \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2(m-n) \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n dx$$

$$\therefore \quad 0 = 2(m-n) \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n dx = 0$$

وفى حالة $m \neq n$ فإن :

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx = 0$$

وهى الخاصية التعامدية .

مثال (6) : أثبت العلاقات الآتية :

(i) $$\frac{d^m}{dx^m}[H_n(x)] = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x) \quad , \quad n > m$$

(ii) $$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

(iii) $$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi}[2^{n-1} n! \delta_{m,n-1} + 2^n (n+1)! \delta_{n+1,m}]$$

حيث : $\delta_{n+1,m} = \delta_{n,m-1}$

الحل :

إثبات (i) : من العلاقة التكرارية :

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[H_n(x)] = 2nH_{n-1}(x)$$

$$\therefore \frac{d^2}{dx^2}[H_n(x)] = 2n \frac{d}{dx}[H_{n-1}(x)] = 2nH_{n-1}'(x)$$

$$= 2n[2(n-1)H_{n-2}(x)]$$

$$= 2^2 n.\ (n-1)H_{n-2}(x) \qquad (1)$$

(حيث استخدمنا العلاقة التكرارية (1) ووضعنا $(n-1)$ بدلا من n) بالمثل يمكن إثبات أن:

$$\frac{d^3}{dx^3}[H_n(x)] = 2^3.n(n-1)(n-2)H_{n-3}(x) \qquad (2)$$

وهكذا حتى نصل إلى التفاضل m فنحصل على :

$$\frac{d^m}{dx^m}[H_n(x)] = 2^m.n(n-1).....(n-m+1)H_{n-m}(x)$$

$$= 2^m \frac{n!}{(n-m)!}H_{n-m}(x)\ , \qquad n > m$$

<u>إثبات (ii)</u> : باستخدام الدالة المولدة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}h^n = e^{2hx-h^2} = e^{2hx}e^{-h^2}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n h^2}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)h^{2n}}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}h^2$$

بمساواة معامل $\frac{h^n}{n!}$ فى كلا الطرفين نحصل على :

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

وهى صورة مفيدة لكثيرة حدود هيرميت $H_n(x)$.

وباستبدال x بـ $-x$ فى هذه الصورة نحصل على :

$$H_n(-x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k n!(-2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k (-1)^{n-2k} n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k\, n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

$$= (-1)^n H_n(x)$$

وهو المطلوب ثانيا .

إثبات العلاقة (iii) :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d}{dx} [H_n(x) H_m(x)] dx$$

(باجراء التكامل بالتجزىء)

$$\therefore I = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n' H_m + H_n H_m'] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[2nH_{n-1} H_m + 2mH_n H_{m-1} \right] dx$$

(باستخدام العلاقة التكرارية : $H_n' = 2nH_{n-1}$

$$\therefore I = n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1} H_m dx + m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n H_{m-1} dx$$

$$= n\sqrt{\pi} 2^{n-1} (n-1)! \delta_{m,n-1} + m\sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m-1}$$

(باستخدام العلاقة العيارية التعامدية : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$

ولما كانت $\delta_{n,m-1} = \delta_{n+1,m}$ فإن :

$$\therefore I = \sqrt{\pi} [2^{n-1} n! \delta_{m,n-1} + 2^n (n+1)! \delta_{n+1,m}]$$

وهو المطلوب ثالثا .

مثال (7) : اثبت أن المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - x^2)\psi = 0$$

تؤول إلى معادلة هيرميت التفاضلية عند استخدام التعويض التالى :

$$\psi = y\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

الحل :

حيث أن :

$$\psi = e^{-\frac{x^2}{2}} y$$

$$\therefore \frac{d\psi}{dx} = e^{-\frac{x^2}{2}} y' - yxe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore \frac{d^2\psi}{dx^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} y'' - y'xe^{-\frac{x^2}{2}} - \left[yx\, e^{-\frac{x^2}{2}}.(-x) + e^{-\frac{x^2}{2}}(y + xy') \right]$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \left[y'' - y'x + yx^2 - y - y'x \right]$$

بالتعويض بهذه المعادلة فى المعادلة التفاضلية الاصلية مع استخدام التعويض $\psi = y\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ نحصل على

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \left[y'' - 2y'x + yx^2 - y \right] + (\lambda - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0$$

بحذف $e^{-\frac{x^2}{2}}$ من المعادلة الصفرية السابقة نحصل على

$$y'' - 2y'x + yx^2 - y + (\lambda - x^2)y = 0$$

والتى تؤول إلى :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y - y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (\lambda - 1)y = 0$$

وبوضع $2n = \lambda - 1$ ، فإن هذه المعادلة تؤول إلى معادلة هيرميت بالصورة :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

وهو المطلوب .

خامسا : كثيرة حدود لاجير (Laguerre polynomial)

تسمى المعادلة التفاضلية التى صورتها :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

حيث $n = 0,1,2,...$.

بمعادلة لاجير التفاضلية (Laguerre Equation) .

ويعطى الحل العام لتلك المعادلة بدلالة كثيرة حدود تسمى كثيرة حدود لاجير (Laguerre polynomial) من الرتبة n ، وتعرف بالعلاقة :

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = e^x D^n (x^n e^{-x})$$

وتعرف تلك الصيغة بصيغة رودريج لكثيرة حدود لاجير .

أهم خواص كثيرة حدود لاجير :

(1) **الدالة المولدة لكثيرة حدود لاجير :**

تكتب بالصورة

$$\frac{e^{-\frac{xh}{1-h}}}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

(2) **العلاقات التكرارية :**

ومن اهم تلك العلاقات :

(i) $L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$

(ii) $L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) = 0$

(iii) $xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$

(iv) $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$

العلاقة الأخيرة هى صورة معادلة لاجير التفاضلية بوضع $y = L_n(x)$.

(3) **الخاصية التعامدية العيارية (Orthonormalization propert.)**

وصورتها :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (n!)^2 \delta_{mn}$$

حيث :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

obeikandl.com

الحل العام لمعادلة لاجير التفاضلية :

يمكن ايجاد الحل العام لمعادلة لاجير التفاضلية

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \qquad (1)$$

فى صورة متسلسلة باستخدام طريقة فوربينوس .

حيث نفرض أن الحل فى صورة متسلسلة بالصورة الآتية :

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \quad , \qquad a_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r) x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$

وبعد سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) وفى حالة n عدد صحيح موجب ، فإن حل معادلة لاجير التفاضلية يسمى كثيرة حدود لاجير من الرتبة n ويرمز له بالرمز $L_n(x)$ وصورته :

$$L_n(x) = (-1)^n \left[x^2 - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \ldots + (-1)^n n! \right]$$

ويكون حل معادلة لاجير التفاضلية فى تلك الحالة هو :

$$y = A L_n(x)$$

حيث A ثابت اختيارى .

أمثلة محلولة :

مثال (1) : باستخدام صورة كثيرة حدود لاجير

$$L_n(x) = (-1)^n \left[x^2 - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \ldots + (-1)^n n! \right]$$

أوجد قيم $L_n(x)$ حيث $n = 0,1,2,3$ وكذلك قيمة $L_n(0)$ أى :

$$L_0(x),\ L_1(x),\ L_2(x),\ L_3(x),\ L_n(0)$$

الحل :

$$L_0(x) = (-1)^0 [x^0] = 1$$

$$L_1(x) = (-1)\left[x - \frac{1^2}{1!}x^0\right] = (-1)[x - 1] = 1 - x$$

$$L_2(x) = (-1)^2\left[x^2 - \frac{2^2}{1!}x + \frac{2^2.1^2}{2!}x^0\right] = [x^2 - 4x + 2]$$

$$L_3(x) = (-1)^3\left[x^3 - \frac{3^2}{1!}x^2 + \frac{3^2.2^2}{2!}x + \frac{3^2.2^2.1^2}{3!}x^0\right]$$

$$= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$$

$$L_n(0) = (-1)^n[0 + (-1)^n n!] = n!$$

مثال (2) : أثبت أن الصورة التفاضلية لكثيرة حدود لاجير تعطى بصورة رودريج الأتية :

حيث n عدد صحيح موجب ، x عدد حقيقى موجب

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

ومن ذلك أحسب كثيرات الحدود :

$$L_0(x),\ L_1(x),\ L_2(x),\ L_3(x)$$

الحل : باستخدام صورة الدالة المولدة لكثيرة حدود لاجير نجد أن :

$$\therefore (1-h)^{-1} e^{(1-\frac{1}{1-h})x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

$$\therefore (1-h)^{-1} e^x e^{-\frac{x}{1-h}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n \qquad (1)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى h وذلك عدد n من المرات باستخدام نظرية ليبنتز نحصل على :

$$e^x \frac{d^n}{dh^n}\left[(1-h)^{-1} e^{-\frac{x}{1-h}}\right] = L_n(x) + L_{n+1}(x).h + L_{n+2}(x).h^2 + ... \qquad (2)$$

حيث أن كل الحدود حتى الحد المشتمل على h^{n-1} تتلاشى عندما نفاضل n من المرات .

والآن :

$$\frac{d}{dh}\left[(1-h)^{-1} e^{-\frac{x}{1-h}}\right] = \frac{1 - x - h}{(1-h)^3} e^{-\frac{x}{1-h}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{d}{dh}\left[(1-h)^{-1}e^{-\frac{x}{1-h}}\right]=(1-x)e^{-x}=\frac{d}{dx}(xe^{-x})$$

وبالمثل فإن :

$$\lim_{h\to 0}\frac{d^2}{dh^2}\left[(1-h)^{-1}e^{-\frac{x}{1-h}}\right]=\frac{d^2}{dx^2}(x^2e^{-x})$$

وبوجه عام فإن :

$$\lim_{h\to 0}\frac{d^n}{dh^n}\left[(1-h)^{-1}e^{-\frac{x}{1-h}}\right]=\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

وبالتالى فعندما $h\to 0$ فإن (2) تعطى :

$$e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=L_n(x)$$

وهو المطلوب .

ولإيجاد كثيرات الحدود المطلوبة :

$$L_0(x)=e^x(x^0e^{-x})=1$$

$$L_1(x)=e^x\frac{d}{dx}(xe^{-x})=1-x$$

$$L_2(x)=e^x\frac{d^2}{dx^2}(x^2e^{-x})=2-4x+x^2$$

$$L_3(x)=e^x\frac{d^3}{dx^3}(x^3e^{-x})=6-18x+9x^2-x^3$$

مثال (3) : أكتب كثيرة الحدود التالية :

$$f(x)=3x^2+4x+5$$

بدلالة كثيرات حدود لاجير .

الحل : حيث أن :

$$\because L_0=1,\ L_1(x)=1-x,\ L_2(x)=x^2-4x+2$$

$$\therefore x^2=L_2+4x-2$$

$$\therefore 3x^2=3L_2+12x-6 \qquad (1)$$

obeikandl.com

$$\because\ L_1(x)=1-x \qquad \therefore\ x=1-L_1, \tag{2}$$

وتصبح معادلة (1) :

$$3x^2=3L_2+12(1-L_1)-6$$

العدد 6 يمكن كتابته $6L_0$ ، العدد $12L_0=12$ ، فنحصل على :

$$3x^2=3L_2+12-12L_1-6=3L_2-12L_1+6$$

$$3x^2=3L_2-12L_1+6L_0 \tag{3}$$

وايضاً الحد $4x$ الموجود فى $f(x)$ يمكن كتابته على الشكل الآتى :

$$4x=4(1-L_1)=4-4L_1$$

وبكتابة العدد 4 بالصورة : $4L_0$

$$\therefore 4x=4L_0-4L_1 \tag{4}$$

أيضا : العدد 5 فى $f(x)$ يمكن كتابته بالصورة : $5L_0$

وهكذا يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل الآتى :

$$f(x)=(3L_2-12L_1+6L_0)+(4L_0-4L_1)+(5L_0)$$
$$=3L_2-16L_1+15L_0$$

مثال (4) : أثبت أن كثيرة حدود لاجير $L_n(x)$ تكون متعامدة فى الفترة $(0,\infty)$ بالنسبة إلى الدالة e^{-x} والتى تسمى دالة الوزن أو الكثافة (Weight function) .

الحل :

من معادلة لاجير التفاضلية ، حيث أن كثيرتى حدود لاجير L_m, L_n تحققان هذه المعادلة فإن :

$$xL_m''+(1-x)L_m'+mL_m=0 \tag{1}$$

$$xL_n''+(1-x)L_n'+nL_n=0 \tag{2}$$

بضرب (1) فى L_n ، (2) فى L_m والطرح نجد أن :

$$x(L_nL_m''-L_mL_n'')+(1-x)[L_nL_m'-L_mL_n']=(n-m)L_mL_n$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[L_nL_m''-L_mL_n']+\frac{1-x}{x}[L_nL_m'-L_mL_n']=\frac{n-m}{x}L_mL_n$$

بالضرب فى عامل التكامل :

$$e^{\int \frac{(1-x)}{x}dx} = e^{\ln x - x} = xe^{-x}$$

فإن العلاقة السابقة تصبح :

$$\frac{d}{dx}\{xe^{-x}[L_n L_m' - L_m L_n']\} = (n-m)e^{-x}L_m L_n$$

وبالتكامل من 0 إلى ∞ نحصل على :

$$(n-m)\int_0^\infty e^{-x}L_m L_n dx = xe^{-x}[L_n L_m' - L_m L_n']\Big|_0^\infty = 0$$

ولذلك فإذا كانت $m \neq n$ فإن :

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = 0$$

وهى العلاقة التعامدية لكثيرات حدود لاجير .

مثال (5) : أثبت أن كثيرات حدود لاجير تخضع للخاصية العيارية الآتية :

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2 dx = (n!)^2$$

الحل :

حيث أن :

$$L_n(x) = (-1)^n\left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} + \ldots + (-1)^n n!\right]$$

فإن الحد ذو الرتبة n فى $L_n(x)$ هو $(-1)^n x^n$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2 dx = \int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_n(x)dx$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty e^{-x}x^n L_n(x)dx$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty e^{-x}x^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx$$

وبالتكامل بالتجزئ n من المرات ، نحصل على :

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2 dx = (-1)^{2n} n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (n!)^2$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : استخدما فى الحل العلاقة :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \Gamma(n-1) = n!$$

مثال (6) : أثبت العلاقتين التكراريتين الآتيتين لكثيرات حدود لاجير :

(i) $L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$

(ii) $L_n'(x) = n[L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x)]$

وذلك باستخدام الدالة المولدة بالصورة :

$$e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

ومن ذلك أثبت أن كثيرة حدود لاجير $L_n(x)$ تحقق المعادلة

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

(معادلة لاجير التفاضلية)

الحل :

الجزء (i) : باستخدام الدالة المولدة بالصورة :

$$e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n \qquad (1)$$

فبتفاضل الطرفين بالنسبة إلى h نحصل على :

$$-\frac{x}{(1-h)^2} e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{(n-1)!} h^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

وباستخدام (1) نحصل على :

$$-\frac{x}{(1-h)^2}(1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)h^n}{n!} = (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)h^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

وبضرب الطرفين فى $[-(1-h)]$ نحصل على :

$$\therefore x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n = -(1-h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)h^{n-1}}{(n-1)!} + (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

$$= -(1-2h+h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)h^{n-1}}{(n-1)!} + (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}h^n$$

$$= -\sum \frac{L_n(x)h^{n-1}}{(n-1)!} + 2\sum \frac{L_n(x)h^n}{(n-1)!} - \sum \frac{L_n(x)h^{n+1}}{(n-1)!}$$

$$+\sum \frac{L_n(x)h^n}{n!} - \sum \frac{L_n(x)h^{n+1}}{n!}$$

بمساواة معامل h^n فى الطرفين نجد أن :

$$\frac{xL_n(x)}{n!} = -\frac{L_{n+1}(x)}{n!} + 2\frac{L_n(x)}{(n-1)!} - \frac{L_{n-1}(x)}{(n-2)!} + \frac{L_n(x)}{n!} - \frac{L_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

وبالضرب فى $n!$ والاختصار نحصل على :

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \qquad \text{(I)}$$

الجزء (ii) : بتفاضل الدالة المولدة بالنسبة إلى x نحصل على :

$$-\left(\frac{h}{1-h}\right)e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n'(x)}{n!}h^n$$

[باستخدام (1)]

$$\therefore -\left(\frac{h}{1-h}\right)(1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}h^n = (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n'(x)}{n!}h^n$$

$$\therefore h\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}h^n + (1-h)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n'(x)}{n!}h^n = 0$$

بمساواة معامل h^n بالصفر نحصل على :

$$\frac{L_n'(x)}{n!} - \frac{L_{n-1}'(x)}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0$$

$$\therefore L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

$$\therefore L_n'(x) = n[L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x)] \qquad \text{(II)}$$

ولاثبات أن $L_n(x)$ تحقق معادلة لاجير التفاضلية :

بكتابة (I) بالصورة :

$$L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$L_{n+1}'(x) + (x-2n-1)L_n'(x) + L_n(x) + n^2 L_{n-1}'(x) = 0$$

وبالتفاضل مرة ثانية بالنسبة إلى x نحصل على :

$$L''_{n+1}(x)+(x-2n-1)L''_n(x)+2L'_n(x)+n^2L''_{n-1}(x)=0$$

وبوضع $n+1$ بدلا من n نحصل على :

$$\therefore L''_{n+2}(x)+(x-2n-3)L''_{n+1}(x)+(n+1)^2L''_n(x)+2L'_{n+1}(x)=0 \qquad (2)$$

وباستخدام (II) نحصل على :

$$L'_n(x)=n[L'_{n-1}(x)-L_{n-1}(x)]$$

وباحلال $n+1$ محل n :

$$L'_{n+1}(x)=(n+1)[L'_n(x)-L_n(x)] \qquad (3)$$

وبالتفاضل :

$$\therefore L''_{n+1}(x)=(n+1)[L''_n(x)-L'_n(x)] \qquad (4)$$

وباحلال $n+1$ محل n ثانية :

$$\therefore L''_{n+2}(x)=(n+2)[L''_{n+1}(x)-L'_{n+1}(x)] \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5) فى (2) نحصل على :

$$(n+2)[L''_{n+1}(x)-L'_{n+1}(x)]+(x-2n-3)L''_{n+1}(x)$$

$$+(n+1)^2L''_n(x)+2L'_{n+1}(x)=0$$

$$\therefore (x-n-1)L''_{n+1}(x)-nL'_{n+1}(x)+(n+1)^2L''_n(x)=0$$

وبحذف $L''_{n+1}(x)$, $L'_{n+1}(x)$ باستخدام (3) , (4) نحصل على

$$(x-n-1)(n+1)[L''_n(x)-L'_n(x)]-n(n+1)[L'_n(x)-L_n(x)]$$

$$+(n+1)^2L''_n(x)=0$$

وبالقسمة على $(n+1)$:

$$\therefore (x-n-1)[L''_n(x)-L'_n(x)]-n[L'_n(x)-L_n(x)]+(n+1)L''_n(x)=0$$

$$\therefore xL''_n(x)+(1-x)L'_n(x)+nL_n(x)=0$$

وبوضع $y=L_n(x)$ ، نحصل على معادلة لاجير بالصورة :

$$\therefore xy''+(1-x)y'+ny=0$$

أى أن $L_n(x)$ تمثل حلا لمعادلة لاجير التفاضلية ، وهو المطلوب .

openkanal.com

سادسا : دالة لاجير المرافقة (Associated Laguerre function)

تمثل دالى لاجير المرافقة حلا لمعادلة لاجير المرافقة والتى صورتها

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

وتعرف هذه الدالة بالعلاقة :

$$L_n^m(x) = \frac{d^m L_n(x)}{dx^m}$$

وتسمى بدالة لاجير المرافقة من الدرجة $(n-m)$

وإذا كانت $m > n$ فإن : $L_n^m(x) = 0$

الصيغة التعامدية لدالة لاجير المرافقة :

يمكن اثباتها بالصورة الآتية :

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^m(x) L_\ell^m(x) dx = 0 \qquad (\ell \neq n \text{ حيث})$$

الصيغة العيارية لدالة لاجير المرافقة :

يمكن اثباتها بالصورة الآتية : $$\int_0^\infty x^m e^{-x} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}$$

ويمكن دمج الصيغتين التعامدية والعيارية فى صورة واحدة هى :

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^m(x) L_\ell^m(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}\delta_{n\ell}$$

حيث : $$\delta_{n\ell} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq n) \\ 1 & (\ell = n) \end{cases}$$

الدالة المولدة لكثيرة حدود لاجير المرافقة :

يمكن اثباتها بالصورة الآتية :

$$\frac{(-h)^m}{(1-h)^{m+1}} e^{-\frac{xh}{1-h}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(x)}{n!} h^n$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أوجد كثيرات حدود لاجير المرافقة :

$$L_2^1(x),\ L_2^2(x),\ L_3^2(x),\ L_3^4(x)$$

الحل :

$$L_2^1(x)=\frac{d}{dx}L_2(x)=\frac{d}{dx}(2-4x+x^2)=2x-4$$

$$L_2^2(x)=\frac{d^2}{dx^2}L_2(x)=\frac{d^2}{dx^2}(2-4x+x^2)=2$$

$$L_3^2(x)=\frac{d^2}{dx^2}L_3(x)=\frac{d^2}{dx^2}(6-18x+9x^2-x^3)=18-6x$$

$$L_3^4(x)=\frac{d^4}{dx^4}L_3(x)=0$$

وبوجه عام فإن : $L_n^m(x)=0$ إذا كانت $m>n$

مثال (2) : حقق الصيغة العيارية لدالة لاجير المرافقة للحالة حيث $m=1,\ n=2$

الحل : يجب أن نثبت أن :

$$\int_0^\infty xe^{-x}[L_2^1(x)]^2dx=\frac{(2!)^3}{1!}=8$$

[الصيغة العيارية هي : $\int_0^\infty x^m e^{-x}[L_n^m(x)]^2dx=\frac{(n!)^3}{(n-m)!}$] ولاثبات ذلك :

حيث أن :

$$L_2^1(x)=2x-4$$

$$\therefore \int_0^\infty x\,e^{-x}(2x-4)^2dx=4\int_0^\infty x^3e^{-x}dx-16\int_0^\infty x^2e^{-x}dx+16\int_0^\infty x.e^{-x}dx$$

$$=4\Gamma(4)-16\Gamma(3)+16\Gamma(2)$$

$$=4(3!)-16(2!)+16(1!)=8$$

وهو مايعنى تحقيق النتيجة .

مثال (3) : حقق الصيغة التعامدية لدالة لاجير المرافقة للحالة التى فيها :

$$m=2,\ \ n=2,\ \ \ell=3$$

الحل : يجب أن نثبت أن :

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}L_2^2(x)L_3^2(x)dx=0$$

[الصيغة التعامدية هى : $\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_n^m(x) L_\ell^m(x) dx = 0$

ولاثبات ذلك : حيث أن :

$$L_2^2(x) = 2, \quad L_3^2(x) = 18 - 6x$$

فان الطرف الايسر من الصيغة التعامدية يؤول إلى :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} .(2).(18-6x) dx = 36\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx - 12\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$$

$$= 36.\Gamma(3) - 12.\Gamma(4) = 36.(2!) - 12.(3!) = 0$$

وهو المطلوب .

مثال (4) : أثبت أن دالة لاجير المرافقة $L_3^2(x)$ تحقق معادلة لاجير المرافقة

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

فى الحالة الخاصة عندما $m = 2, \ n = 3$

الحل : حيث أن $L_3^2(x) = 18 - 6x$

فإن معادلة لاجير المرافقة تؤول إلى (بوضع $m = 2, \ n = 3$) :

$$xy'' + (3-x)y' + y = 0$$

وبالتعويض عن :

$$y = L_3^2(x) = 18 - 6x$$

فى هذه المعادلة نحصل على :

$$x.(0) + (3-x)(-6) + (18-6x) = 0$$

أى أن الطرف الأيسر يساوى الطرف الأيمن وهذا يعنى أن $L_3^2(x)$ تحقق معادلة لاجير التفاضلية المرافقة .

مثال (5) : أثبت أن معادلة لاجير التفاضلية المرافقة :

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

يمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة لاجير :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

عدد m من المرات بالنسبة إلى x .

ثم بين أن $\frac{d^m L_n}{dx^m}$ تشكل حلا لمعادلة لاجير المرافقة .

الحل :

معادلة لاجير التفاضلية يمكن كتابتها بالصورة :

$$xy_2 + (1-x)y_1 + ny = 0$$

حيث :

$$y_1 = y' = \frac{dy}{dx}, \quad y_2 = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

بالتفاضل عدد m من المرات بالنسبة إلى x باستخدام نظرية ليبنتز ، نحصل على :

$$xy_{m+2} + {}^m c_1 y_{m+1} + (1-x)y_{m+1} + {}^m c_1 y_m(-1) + ny_m = 0$$

$$\therefore xy_{m+2} + (m+1-x)y_{m+1} + (n-m)y_m = 0 \qquad (1)$$

وبكتابة $y_m = D^m y = D^m L_n(x)$ ، حيث $n \geq m$

فإن المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة :

$$xD^2(y_m) + (m+1-x)D(y_m) + (n-m)y_m = 0 \qquad (2)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن :

مثلا $$y_m = D^m L_n(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \equiv L_n^m(x)$$

هي حل المعادلة :

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

حيث m عدد صحيح بحيث أن $n \geq m$.

كثيرة الحدود $L_n^m(x)$ هي كثيرة حدود لاجير المرافقة من الدرجة $(n-m)$.

وهو المطلوب .

مثال (6) : أثبت العلاقتين الآتيتين لدالة لاجير المرافقة :

(i) $\frac{d}{dx} L_n^m(x) = L_n^{m+1}(x)$

(ii) $L_n^m(x) = n[L_{n-1}^m(x) - L_{n-1}^{m-1}(x)]$

الحل :

(i) حيث أن : $L_n^m(x) = D^m L_n(x)$

$$\therefore D[L_n^m(x)] = D[D^m L_n(x)] = D^{m+1} L_n(x) = L_n^{m+1}(x)$$

وهو المطلوب أولا .

(ii) المطلوب اثبات أن :

$$L_n^m(x) - nL_{n-1}^m(x) + nL_{n-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$L.H.S. = D^m[e^x D^n(x^n e^{-x})] - nD^m[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$+nD^{m-1}[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$= D^{m-1}.D[e^x D^n(x^n e^{-x})] - nD^{m-1}.D[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$+nD^{m-1}[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$= D^{m-1}[e^x D^{n+1}(x^n e^{-x}) + e^x D^n(x^n e^{-x})]$$
$$-nD^{m-1}[e^x D^n(x^{n-1}e^{-x}) + e^x .D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$+nD^{m-1}[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$= D^{m-1}[e^x D^n(-x^n e^{-x} + nx^{n-1}e^x) + e^x D^n(x^n e^{-x})]$$
$$-nD^{m-1}[e^x D^n(x^{n-1}e^{-x}) + e^x .D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$+nD^{m-1}[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$= -D^{m-1}[e^x D^n(x^n e^{-x})] + nD^{m-1}[e^x D^n(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$+D^{m-1}[e^x D^n(x^n e^{-x})] - nD^{m-1}[e^x D^n(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$-nD^{m-1}[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})] + nD^{m-1}[e^x D^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})]$$
$$= 0$$

وهو المطلوب ثانيا .

مسألة : أثبت العلاقات الآتية لكثيرة حدود لاجير المرافقة :

(i) $L_n^m(x) - L_{n-1}^m(x) = L_n^{m-1}(x)$

(ii) $\frac{d}{dx} L_n^m(x) = -L_{n-1}^{m-1}(x)$

(iii) $nL_n^m(x) = (2n+m-1)L_{n-1}^m(x) - (n+m-1)L_{n-2}^m(x)$

مثال (7) : أثبت أن :

(i) $L_n(2x) = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m 2^{n-m}}{m!(n-m)!} L_{n-m}(x) \quad , \quad n > m$

حيث :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x D^n (x^n e^{-x})$$

(ii) $L_n^m(2x) = (m+n)! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{k!(m+n-k)!} L_{n-k}^m(x)$

الحل :

(i) حيث أن :

$$L_0(x) = 1 \ , \quad L_1(x) = \frac{1}{1!}(1-x) = (1-x)$$

فباحلال $2x$ مكان x نحصل على :

$$L_1(2x) = 1 - 2x = 2(1-x) - 1 = 2L_1(x) - 2^0 . \frac{1!}{1!} L_0(x)$$

$$= 1! \sum_{m=0}^{1} \frac{(-1)^m 2^{1-m}}{m!(1-m)!} L_{1-m}(x)$$

أيضاً :

$$L_2(2x) = \frac{1}{2!}(2 - 8x + 4x^2) = 1 - 4x + 2x^2$$

$$= 4\left(1 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) - 4(1-x) + 1$$

$$= 2^2 L_2(x) - 2\frac{2!}{1!1!} L_1(x) + \frac{2!}{0!2!} L_0(x)$$

$$= 2! \sum_{m=0}^{2} \frac{(-1)^m 2^{2-m}}{m!(2-m)!} L_{2-m}(x)$$

أيضاً :

$$L_3(2x) = \frac{1}{3!}(6 - 36x + 36x^2 - 8x^3) = 1 - 6x + 6x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

obeikandl.com

$$= 2^3\left(1-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{6}\right)-12\left(1-2x+\frac{x^2}{2}\right)+2.3(1-x)$$

$$= 2^3 L_3(x)-\frac{2^2.3!}{1!2!}L_2(x)+2\frac{3!}{2!1!}L_1(x)-2^0\frac{3!}{3!}L_0(x)$$

$$= 3!\sum_{m=0}^{3}\frac{(-1)^m 2^{3-m}}{m!(3-m)!}L_{3-m}(x)$$

وبالمثل فإنه يمكن إثبات أن :

$$L_4(2x)=4!\sum_{m=0}^{4}\frac{(-1)^m 2^{4-m}}{m!(4-m)!}L_{4-m}(x)$$

وبوجه عام فإن :

$$L_n(2x)=n!\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m 2^{n-m}}{m!(n-m)!}L_{n-m}(x)$$

(ii) لاثبات العلاقة (ii) تترك كمسألة للطلبة .

مسألة :

أثبت أن كثيرتى حدود لاجير المرافقة وهيرميت ترتبطان بالعلاقتين الآتيتين :

(i) $H_{2m}(x)=(-1)^m 2^{2m}.(m!)L_m^{-\frac{1}{2}}(x^2)$

(ii) $H_{2m+1}(x)=(-1)^m 2^{2m+1}.(m!)x\,L_m^{\frac{1}{2}}(x^2)$

تكاملات مشتملة على كثيرة حدود لاجير المرافقة :

هناك مجموعة من التكاملات المشتملة على كثيرات حدود لاجير المرافقة وتستخدم كثيرا فى الحسابات الخاصة ببعض الموضوعات فى الرياضيات التطبيقية (مثل نظرية الكم) وبعض المسائل الفيزيائية والهندسية ، ونذكر فيما يلى أهم تلك التكاملات :

(i) $\int_0^\infty e^{-x}x^m[L_n^m(x)]^2dx=\frac{(n!)^3}{(n-m)!}$

(الصيغة العيارية لكثيرة حدود لاجير المرافقة)

(ii) $\int_0^\infty e^{-x}x^{m+1}[L_n^m(x)]^2dx=\frac{(n!)^3}{(n-m)!}(2n-m+1)$

(iii) $\int_0^\infty e^{-x} x^{m-1}[L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}.\left(\frac{1}{m}\right)$

(iv) $\int_0^\infty e^{-x} x^{m+2}[L_n^m(x)]^2 dx$

$$= \frac{(n!)^3}{(n-m)!}[(n+1)(n+2)+4(n+1)(n-m)+(n-m)(n-m-1)]$$

$$= \frac{(n!)^3}{(n-m)!}[6n(n-m+1)+m(m-3)+2]$$

حيث : $L_n^m(x) = \frac{d^m L_n(x)}{dx^m} = D^m L_n(x) = D^m[e^x D^n(x^n e^{-x})]$

هى حل معادلة لاجير التفاضلية المرافقة :

$$x\frac{d^2 L_n^m}{dx^2} + (m+1-x)\frac{dL_n^m}{dx} + (n-m)L_n^m = 0 , \qquad (n \geq m \quad \text{حيث})$$

obeikandl.com

سابعا : دوال جاوس أو الدوال فوق الهندسية Hypergeometric Functions

تمثل تلك الدوال حلا للمعادلة التفاضلية المعروفة باسم المعادلة فوق الهندسية وصورتها :

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \qquad (1)$$

حيث α, β, γ ثوابت .

ويمكن إيجاد الحل العام لهذه المعادلة باستخدام طريقة فوربينوس ، ويكون أحد حلول تلك المعادلة بالصورة :

$$y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1}x^2 + \ldots\ldots \qquad (2)$$

ويرمز لهذه المتسلسلة عادة بالرمز الآتى : $_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$

والدليل 2 فى $_2F_1$ معناه أن هناك ثابتان α, β فى البسط والدليل 1 أن هناك ثابتاً واحداً فى المقام . وتعرف $_2F_1$ بالدالة فوق الهندسية أو دالة جاوس .

حالة خاصة : إذا كان $\alpha = 1$ ، $\beta = \gamma$ فإن المتسلسلة (2) تؤول إلى

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

وهى المتسلسلة الهندسية اللانهائية .

ومن أجل ذلك سميت (2) بالدالة فوق الهندسية حيث أنها تعتبر تعميما للمتسلسلة الهندسية العادية .

ملحوظة : إذا أدخلنا الرمزين الآتيين :

$$(\alpha)_0 = 1, \ (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1), \ \ldots\ldots$$

فإنه يمكن التعبير عن الدالة فوق الهندسية بالصورة :

$$_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أثبت أن :

$$_2F_1(1, 1; 2; -x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

الحل : بالتعويض عن $\alpha = 1$ ، $\beta = 1$ ، $\gamma = 2$ ، $x = -x$ فى (2) نحصل على:

$$ {}_2F_1(1,\ 1;\ 2;\ -x) = 1 + \frac{1.1}{1!2}(-x) + \frac{1.2.1.2}{2!2.3}x^2 + ... $$

$$ = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ... \qquad (1) $$

ولكن : مفكوك $\ln(1+x)$ يعطى بالعلاقة [أنظر الباب الأول] :

$$ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... $$

$$ \therefore \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \right) $$

$$ = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ... \qquad (2) $$

من (1) , (2) نجد أن :

$$ {}_2F_1(1,\ 1;\ 2;\ -x) = \frac{1}{x}\ln(1+x) $$

وهو المطلوب . ويمكن كتابته بالصورة :

$$ \ln(1+x) = x\ {}_2F_1(1,\ 1;\ 2;\ -x) $$

مثال (2) : أثبت أن :

$$ (1-x)^n = {}_2F_1(-n,\ 1;\ 1;\ x) $$

الحل : بكتابة مفكوك $(1-x)^n$ بالصورة :

$$ (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - ..... $$

$$ = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n+1)}{2!}x^2 + ... \qquad (1) $$

$$ {}_2F_1(-n,1;1;x) = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n+1)}{2!}x^2 + ... \qquad (2) $$

[بوضع $\alpha = -n$ ، $\beta = 1$ ، $\gamma = 1$ فى تعريف ${}_2F_1$] .

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$ (1-x)^n = {}_2F_1(-n,\ 1;\ 1;\ x) $$

وهو المطلوب .

obeikandl.com

مسألة : أثبت أن :

$$(1+x)^n = {}_2F_1(-n,\ 1;\ 1;\ -x)$$

مثال (3) : أثبت أن

$$\lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1(1,\ \beta;\ 1;\ \frac{x}{\beta}) = e^x$$

الحل : بوضع $\alpha = 1,\ \gamma = 1,\ x = \frac{x}{\beta}$ فى تعريف ${}_2F_1$ نحصل على :

$${}_2F_1 = 1 + \frac{1.\beta}{1!1}\ \frac{x}{\beta} + \frac{1.2\beta(\beta+1)}{2!1.2}\frac{x^2}{\beta^2} + ...$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\frac{x^2}{2!} + ...$$

$$\therefore \lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1(1,\ \beta;\ 1;\ \frac{x}{\beta}) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... \qquad (1)$$

ومن تعريف مفكوك e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... \qquad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج المطلوب .

مثال (4) : اثبت أن التكامل الناقصى من النوع الأول وصورته :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - k^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \qquad , \qquad |k| < 1$$

يمكن كتابة بدلالة الدالة فوق الهندسية بالصورة :

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

الحل :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\phi - \frac{1}{2}.\left(\frac{-3}{2}\right).\frac{1}{2!}k^4\sin^4\phi + ...\right] d\phi$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2!} k^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \ldots.$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1!1} k^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!1.2} k^4 + \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

وهو المطلوب .

مسألة : أثبت أن التكامل الناقصي من النوع الثاني وصورته :

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\phi)^{\frac{1}{2}} d\phi \qquad , \qquad |k| < 1$$

يمكن كتابته بدلالة الدالة فوق الهندسية بالصورة :

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

مثال (5) : أثبت أن

$$\tan^{-1} x = x\ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right)$$

الحل : مفكوك $\tan^{-1} x$ يعطى بالصورة :

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

$$= x\left[1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots.\right] \qquad (1)$$

أيضاً فإن :

$${}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n (-x^2)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!} x^n$$

$$=\frac{(1)_0(\frac{1}{2})_0(-x^2)^0}{\left(\frac{3}{2}\right)_0 0!}+\frac{(1)_1(\frac{1}{2})_1(-x^2)^1}{\left(\frac{3}{2}\right)_1 1!}+\frac{(1)_2(\frac{1}{2})_2(-x^2)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)_2 2!}+....$$

$$=1+\frac{1.\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}(-x^2)+\frac{1.2.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}\frac{x^4}{2!}+...$$

$$=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+.....$$

$$\therefore x\ {}_2F_1(1,\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2},\ -x^2)=x\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-.....\right] \qquad (2)$$

من (2) , (1) نجد أن :

$$\tan^{-1}x=x\ {}_2F_1\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2\right)$$

وهو المطلوب .

مسألة : أثبت أن $\sin^{-1}x=x\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)$

حل المسألة : مفكوك $\sin^{-1}x$ يكتب بالصورة :

$$\sin^{-1}x=x\left[1+\frac{1}{2.3}x^2+\frac{3}{4.5}\frac{x^4}{2!}+\frac{3.5}{2.4.7}\frac{x^6}{3!}+...\right] \qquad (1)$$

أيضاً فإن :

$${}_2F_1(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};x^2)=1+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{\left(\frac{3}{2}\right)(1!)}x^2+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)(2!)}(x^2)^2+.....$$

$$=1+\frac{1}{2.3}x^2+\frac{3}{4.5(2!)}x^4+\frac{3.5}{(2.4.7)(3!)}x^6+..... \qquad (2)$$

من (2) , (1) ينتج المطلوب .