الباب الرابع

مبادىء حساب التغاير

(Calculus of Variation)

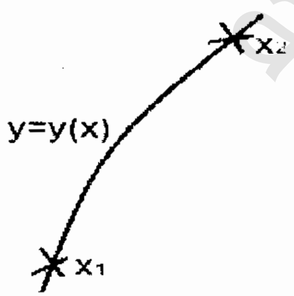
[١] المسألة الأساسية فى حساب التغاير :

[مسألة التغاير - Variational Problem]

إذا كان لدينا الدالة (Function) : $F = F[x, y, y']$ حيث $y = y(x),\ y' = y'(x)$

وكان لدينا الدالية (Functional) : $U[F(x, y, y')]$ فى الدالة F والتى هى عبارة عن التكامل المحدود للدالة F أى :

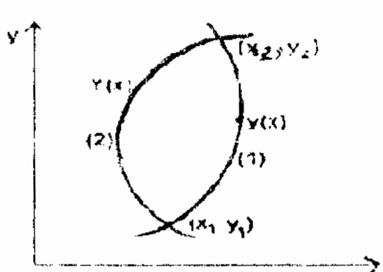
$$U[F(x, y, y')] = I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$



فإن مسألة إيجاد المنحنى $y = y(x)$ الواصل بين النقطتين x_1 ، x_2 بحيث يكون للدالية (أو التكامل) I نهاية قصوى (سواء كانت صغرى أم عظمى) ، تعرف بالمسألة الرئيسية فى حساب التغير أو مسألة التغاير.

ويعرف المنحنى الذى يحقق هذا الشرط (أى الذى يعطى للتكامل المذكور قيمة أو نهاية قصوى بمنحنى النهاية القصوى (Extremum curve) .

ملحوظة : الدالة هى $y = y(x)$ أى دالة فى المتغير x (تعتمد على المتغير x) ، بينما الدالية $U = U[y(x)]$ هى دالية فى الدالة $y(x)$ أى تعتمد على الدالة $y(x)$.



تعريف التغاير أو التغير (Variation)

إذا كان لدينا منحنيان متجاوران لهما نفس نقطتى البداية والنهاية فإن الزيادة (inceament) فى الدالة $y(x)$ للدالية $U[y(x)]$ تعرف بالعلاقة :

$$\delta y = Y(x) - y(x) \qquad (1)$$

وتسمى δy عادة بالتغير (أو التغاير) فى y.

حساب التغير فى y (δy) :

نفرض أن معادلة المنحنى $Y(x)$ المجاور للمنحنى $y(x)$ ويمر بنقطتى البداية والنهاية له هى :

$$Y(x) = y(x) + \in \eta(x) \qquad (2)$$

حيث $\in$ بارامتر اختيارى (صغير للغاية) $\eta(x)$ دالة اختيارية فى x .

وشرط مرور المنحنى (2) بالنقطة $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هو انطباق (أو تطابق) المنحنين عندهما :

$$\eta(x_1) = 0 \quad , \quad \eta(x_2) = 0$$

التغير فى y : من (1) , (2)

$$\delta y = Y(x) - y(x)$$

$$= y(x) + \in \eta(x) - y(x) = \in \eta(x)$$

$$\therefore \boxed{\delta y = \in \eta} \qquad (3)$$

أيضا : **التغير فى مشتقة y** (أى y')

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \boxed{\delta y' = \in \eta'} \qquad (4)$$

التغير فى الدالة F [أى δF] :

تعتبر الدالة : $F = F(x, y, y')$

وهى الدالة الأساسية فى حساب التغاير .

عند المنحنى (1) $[y(x)]$: $F = F(x, y, y')$

عند المنحنى (2) $[Y(x)]$:

$$F = F(x, y + \in \eta, y' + \in \eta')$$

يعرف التغاير أو التغير فى الدالة F أى δF بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'} \qquad (5)$$

حيث $F = F(x, y, y')$

وإذا كانت : $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$

$$\therefore \boxed{\delta F = F_y \delta y + F_{y'} \delta y'} \tag{6}$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أثبت أن :

$$\delta(Dy) = D(\delta y) \tag{1}$$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$ المشتقة التفاضلية .

معنى العلاقة (1) : تغير المشتقة = مشتقة التغير (أو التغاير)

أو أن : التغير δ يتبادل مع المشتقة D .

الحل : حيث أن :

$$\delta y = \in \eta \quad , \quad \delta y' = \in \eta'$$

$$\therefore \quad \delta y' = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

$$\delta y' = \in \eta' = \in \frac{d\eta}{dx} = \frac{d(\in \eta)}{dx} = \frac{d(\delta y)}{dx} \tag{2}$$

بمساواة (2) , (1) :

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(\delta y)}{dx}$$

$$\therefore \quad \delta(Dy) = D(\delta y) \qquad \left| \; D = \frac{d}{dx} \right.$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : يمكن كتابة العلاقة السابقة بالصورة :

$$\delta(y') = (\delta y)'$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\delta(y'') = (\delta y)''$$

وبوجه عام فإن :

$$\delta[y^{(n)}] = [\delta y]^{(n)}$$

حيث (n) تدل على المشتقة النونية .

مثال (2) : من تعريف التغير فى y ، أثبت العلاقة

$$\delta[y^{(n)}]=[\delta y]^{(n)}$$

[التغير فى المشتقة = المشتقة النونية للتغير]

الحل : من التعريف

$$\delta y=\in\eta$$

$$\delta y'=\in\eta'\ ,\ \delta y''=\in\eta''\ \ ,\ \ldots\ ,\ \delta y^{(n)}=\in\eta^{(n)}$$

$$\therefore\ \delta[y^{(n)}]=\delta\left[\frac{d^n y}{dx^n}\right]=\in\eta^{(n)}=\in\frac{d^n\eta}{dx^n}$$

$$=\frac{d^n(\in\eta)}{dx^n}=\frac{d^n(\delta y)}{dx^n}=[\delta y]^{(n)}$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : أثبت أن التغير δ له نفس خصائص المشتقة $D=\frac{d}{dx}$ بمعنى أن :

(i) $\delta(F^n)=nF^{n-1}\delta F$

(ii) $\delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2$

(iii) $\delta(F_1F_2)=F_1\delta F_2+F_2\delta F_1$

(iv) $\delta\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)=\dfrac{F_2\delta F_1-F_1\delta F_2}{F_2^2}$

الإثبات : **أولا** : من تعريف التغير فى الدالة F :

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

وبتطبيقة على F^n

$$\delta(F^n)=\frac{\partial(F^n)}{\partial y}\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}(F^n)\delta y'$$

$$=\left(nF^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y+\left(nF^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y'$$

$$= nF^{n-1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]$$

$$= nF^{n-1}\delta F$$

وهو طلوب .

ثانيا : بتطبيق تعريف δF على $\delta(F_1 + F_2)$

$$\delta(F_1 + F_2) = \frac{\partial}{\partial y}(F_1 + F_2)\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}(F_1 + F_2)\delta y'$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y'} + \frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)\delta y'$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'}\delta y'\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y'}\delta y'\right)$$

$$= \delta F_1 + \delta F_2$$

وهو المطلوب ثانيا .

ثالثا : يترك حلها للطالب ، **رابعا** : يترك حلها للطالب .

والنتيجة : هى أن التغير δ له نفس خواص المشتقة $D = \frac{d}{dx}$.

وهو المطلوب .

مثال (4) : أثبت أن مؤثر التغير (δ) يتبادل مع مؤثر التكامل $(\int)$

الحل : نستخدم قاعدتين مهمين فى حل المثال :

(1) إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

(2) إذا كانت x, t متغيران مستقلان فإن

$$\frac{\partial}{\partial x}[\int F dt] = \int \frac{\partial F}{\partial x} dt$$

[قاعدة التفاضل تحت علامة التكامل]

المطلوب : إثبات أن :

$$\delta\int (F dx) = \int \delta F dx$$

الإثبات : من القاعدة (1) حيث أن : $F=F(x,y,y')$

$$\delta[\int Fdx]=\frac{\partial}{\partial y}[\int Fdx]\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}[\int Fdx]\delta y' \qquad (1)$$

ومن القاعدة (2) وتطبيقها على العلاقة (1) :

$$\delta[\int Fdx]=\left[\int \frac{\partial F}{\partial y}dx\right]\delta y+\left[\int \frac{\partial F}{\partial y'}dx\right]\delta y'$$

$$=\int\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx$$

$$=\int \delta F dx$$

وهو المطلوب .

مثال (5) : إذا كان التكامل الدالى

$$I=\int_a^b F(x,y,y')\eta(x)dx=0$$

حيث $\eta(x)$ دالة اختيارية فإن :

$$F(x,y,y')=0$$

الحل : نفرض عكس المطلوب أى نفرض أن :

$$F(x,y,y')\neq 0$$

وهذا يعنى أن $F>0$ أو $F<0$ وبوضع

$$h=F(x,y,y')\eta(x)$$

$$I=\int_a^b hdx$$

وحيث أن η دالة اختيارية فيمكن اختيارها بحيث تكون :

$\eta=+$	عندما	$F>0$
$\eta=-$	عندما	$F<0$

وفى كلتا الحالتين فإن :

$$h=F\eta>0$$

$$I=\int_a^b hdx>0 \rightarrow I\neq 0$$

وهذا يتناقض مع الفرض أن $I = 0$ (المعطى فى رأس المسألة) وهذا يعنى أن : $F = 0$

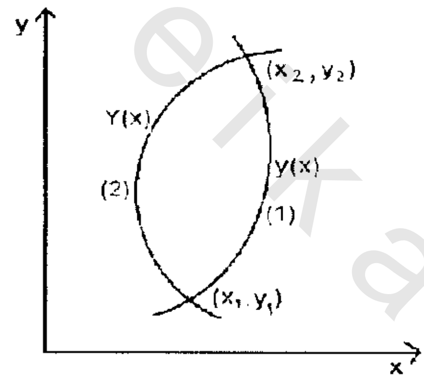
وهو المطلوب .

<u>مثال (٦)</u> : أثبت أن الشرط الضرورى لكى يكون للتكامل الدالى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

نهاية قصوى (صغرى أو عظمى) هو أن يكون :

$$\boxed{\delta I = 0}$$



<u>الحل</u> :

نعتبر أن المنحنى $y = y(x)$ هو منحنى النهاية القصوى أى المنحنى الذى يعطى التكامل $I = \int_{x_1}^{x_2} F dx$ قيمة نهاية قصوى .

نأخذ منحنى مجاور (2) يصل بين النقطتين (x_1, y_1), (x'_2, y_2) اللتان يمر المنحنى (1) بهما . ولتكن معادلته

$$Y(y) = y(x) + \in \eta(x) \qquad (2)$$

وحيث أن :

$$\eta(x_1) = 0, \quad \eta(x_2) = 0$$

وأن :

$$\delta y = \in \eta$$

$$\therefore \delta y(x_1) = 0 \quad , \quad \delta y(x_2) = 0 \qquad (3)$$

التكامل الدالى(1) على طول المنحنى المجاور $Y(x)$:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \in \eta \,,\, y' + \in \eta')dx = I(\in) \qquad (4)$$

$$\therefore I(\in) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \in)dx \qquad (5)$$

شرط أن يكون لهذا التكامل نهاية قصوى (عظمى أو صغرى) هو :

$$\left.\frac{dI(\in)}{d\in}\right|_{\in = 0} = 0 \qquad (6)$$

ومن قاعدة ليبنتز للتكامل تحت علامة التفاضل

$$\frac{dI(\in)}{d\in}=\frac{d}{d\in}\int Fdx=\int \frac{\partial F}{\partial \in}dx$$

وحيث أن :

$$\delta F \equiv dF$$

$$\delta y \equiv dy = \in \eta$$

$$\delta y' \equiv dy' = \in \eta'$$

$$dF=\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial y'}dy'$$

$$=\frac{\partial F}{\partial y}\in\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\in\eta'$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial \in}=\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \tag{8}$$

بالتعويض من (8) فى (7) :

$$\frac{dI}{d\in}=\int\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right]dx$$

وبتطبيق الشرط (6) [شرط النهايات القصوى] :

$$\left.\frac{dI}{d\in}\right|_{\in=0}=\int\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right]dx=0$$

بضرب الطرفين فى $\in$:

$$\int\left[\frac{\partial F}{\partial y}\in\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\in\eta'\right]dx=0$$

$$\int\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx=0$$

$$\int \delta F\ dx=0$$

<u>**ومن المثال (4)**</u> :

$$\therefore \delta\int F\ dx=0$$

$$\therefore\ \delta I=0$$

أى أن الشرط الضرورى لكى يكون للتكامل الدالى I نهاية قصوى هو أن يكون :

$$\boxed{\delta I=0}$$

وهو المطلوب .

[2] المعادلة الأساسية فى حساب التغاير (معادلة أويلر – لاجرانج)

سوف نثبت أن الشرط الضرورى لوجود قيمة نهاية قصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

هو أن يحقق المنحنى $y(x)$ [منحنى النهاية القصوى] المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0}$$

وتعرف هذه المعادلة بالمعادلة الأساسية فى حساب التغاير أو معادلة أويلر – لاجرانج .

الإثبات : من مثال (6) نجد أن :

التكامل الدالى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \tag{1}$$

يكون له نهاية قصوى على المنحنى $y = y(x)$ الواصل بين x_1, x_2 إذا كان :

$$\delta I = 0 \rightarrow \delta \int F(x, y, y')dx = 0$$

ومن المثال (4) :

$$\therefore \int \delta F(x, y, y')dx = 0 \tag{2}$$

ومن تعريف التغير (أو التغاير) فى F :

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx = 0 \tag{3}$$

وباجراء عملية التكامل بالتجزئ على الحد الثانى :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)' dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)dx$$

$$\delta y' = (\delta y)'$$

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y) \qquad \left| \; u = \frac{\partial F}{dy'}, \quad v = \delta y \right.$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta(y) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \, d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \, d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \qquad \left| \; \delta(y)|_{x_1} = 0, \; \delta(y)|_{x_2} = 0 \right.$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right] \delta y dx \qquad (4)$$

بالتعويض فى (3) :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx\right] + \left[- \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y dx\right] = 0$$

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y dx = 0$$

بضرب الطرفين فى (-) :-

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\right] \delta y dx = 0$$

وحيث أن δy دالة اختيارية فمن المثال (5) نحصل على :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \qquad (5)$$

وهى معادلو أويلر – لاجرانج المطلوبة .

المعادلة (5) هى المعادلة التفاضلية التى يحققها المنحنى $y = y(x)$ بحيث يكون للتكامل الدالى $I = \int Fdx$ قيمة نهاية قصوى (extremum value) على هذا المنحنى والذى يعرف بمنحنى النهاية القصوى (extremum value)

∴ المعادلة (5) هى معادلة منحنيات النهاية القصوى (extremum curve) .

ملحوظة : بوضع

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$$

فتصبح المعادلة (5) بالصورة :

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y = 0$$

$$\boxed{(F_{y'})' - F_y = 0} \qquad (6)$$

<u>أمثلة محلولة</u> :

<u>مثال (1)</u> : إذا كانت $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ فإثبت أن معادلة أويلر – لاجرانج يمكن كتابتها بالصورة :

$$\boxed{(F - y'.F_{y'})' - F_x = 0}$$

<u>الحل</u> : من قواعد التفاضل الجزئى :

إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy'$$

بالقسمة على dx :

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{dy'}{dx} = y''$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' \qquad (1)$$

أيضاً :

$$\frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' \qquad (2)$$

من (2) , (1) بالطرح نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\left[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

[من معادلة أويلر – لاجرانج : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$]

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \left(F - y'.F_{y'}\right)' - F_x = 0 \qquad (3)$$

حيث

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \; F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$$

المعادلة (3) هى المعادلة المطلوبة [صورة أخرى لمعادلة أويلر – لاجرانج]

<u>مثال (2)</u> : باستخدام الصورة (مثال رقم (1))

$$\left(F - y'.F_{y'}\right)' - F_x = 0 \qquad (1)$$

لمعادلة أويلر – لاجرانج ، أثبت أن التكامل الأول لهذه المعادلة فى الحالة الخاصة عندما لاتعتمد الدالة F على المتغير x صراحة يكون بالصورة :

$$\boxed{F - y' F_{y'} = c}$$

حيث c ثابت

<u>الحل</u> : فى الحالة الخاصة عندما لاتعتمد الدالة F صراحة على المتغير x فإن :

$$F_x = 0 \leftarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

وتصبح المعادلة (1) :

$$\left(F - y'F_{y'}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = 0$$

وبالتكامل :

$$\left(F - y'F_{y'}\right) = \text{const.} = c$$

$$\therefore \boxed{F - y'F_{y'} = c} \qquad (2)$$

المعادلة (2) تمثل التكامل الأول لمعادلة أويلر- لاجرانج فى الحالة الخاصة عندما F لاتعتمد صراحة على x أى عندما $F = F(y, y')$ وتطبق فى حل المسائل التى لاتظهر x فيها فى الدالة F صراحة أى التى تكون فيها

$$F = F(y, y')$$

[3] **إيجاد منحنيات النهاية القصوى للتكاملات الدالية** :

مثال (1) : طبق معادلة أويلر – لاجرانج للحصول على منحنيات النهاية القصوى التى تعطى للتكامل الدالى الآتى :

$$I=\int_{x_1}^{x_2}(y^2-y'^2)dx$$

قيمة نهاية قصوى .

الحل : نكتب التكامل I بالصورة :

$$I=\int_{x_1}^{x_2}F(y,y')dx \qquad (1)$$

حيث :

$$F(y,y')=y^2-y'^2 \qquad (2)$$

نلاحظ أن F لاتعتمد صراحة على x (أى لاتظهر فيها x بصورة صريحة) .

نستخدم الصورة الخاصة لمعادلة أويلر – لاجرانج وهى :

$$F-y'F_{y'}=c \qquad (3)$$

من (2) :

$$F=y^2-y'^2$$

$$F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y'}=-2y' \qquad (4)$$

بالتعويض فى (3) :

$$(y^2-y'^2)-y'(-2y')=c$$

$$\therefore y^2-y'^2+2y'^2=c$$

$$y^2+y'^2=c=a^2 \ , \quad \text{مثلا}$$

$$\therefore y'^2=a^2-y^2 \rightarrow y'=\sqrt{a^2-y^2}=\frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات و التكامل :

$$\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\int dx$$

$$\sin^{-1}\frac{y}{a} = x + b \quad ,$$
حيث b ثابت التكامل

$$\therefore \frac{y}{a} = \sin(x+b) \rightarrow \boxed{y = a\sin(x+b)}$$

وهى معادلة منحنى النهاية القصوى الذى يحقق شرط أن التكامل I له نهاية قصوى .

ملحوظة :

(1) الثابتان a, b فى معادلة المنحنى يمكن إيجادهما من الشروط التى تعطى فى رأس المسألة

(2) فى المثال (1) لم تعطى أى شروط فتترك معادلة المنحنى كما حصلنا عليها .

مثال (2) : أوجد معادلة المنحنى الذى يصل بين النقطتين a, b ويجعل للتكامل الدالى

$$I = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

نهاية قصوى .

الحل : نكتب I بالصورة :

$$I = \int_a^b F(y, y')dx \qquad (1)$$

حيث :

$$F(y, y') = y\sqrt{1+y'^2} \qquad (2)$$

نلاحظ أن F لاتعتمد على x صراحة فنستخدم الصورة الخاصة لمعادلة أويلر – لاجرانج :

$$F - y'F_{y'} = c \qquad (3)$$

من (2)

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} \cdot (2y')$$

$$= \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad (4)$$

بالتعويض من (2), (4) فى (3)

$$y\sqrt{1+y'^2} - y'\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = c$$

$$\frac{y(1+y'^2)-yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

$$\therefore \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

بتربيع الطرفين نحصل على : $\frac{y^2}{1+y'^2}=c^2$

$$\therefore y^2=c^2(1+y'^2)=c^2+c^2y'^2$$

$$c^2y'^2=y^2-c^2 \rightarrow y'^2=\frac{y^2-c^2}{c^2}$$

$$\therefore \quad y'=\frac{1}{c}\sqrt{y^2-c^2}=\frac{dy}{dx}$$

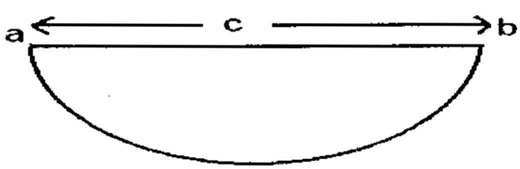
بفصل المتغيرات والتكامل : $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}=\frac{1}{c}\int dx$

$$\therefore \cosh^{-1}\frac{y}{c}=\frac{x}{c}+b=\frac{x+bc}{c}=\frac{x+d}{c}$$

$$\frac{y}{c}=\cosh\frac{x+d}{c} \qquad \Big| bc=d$$

$$\therefore y=c\ \cosh\frac{x+d}{c} \tag{5}$$

وهى معادلة المنحنى المطلوب (منحنى النهاية القصوى) يعرف هذا المنحنى بمنحنى السلسلة أو الكتينة (catenary) وهو عبارة عن سلسلة معلقة من النقطتين a, b الواقعتين فى نفس المستوى الأفقى والمسافة بينهما $= c$:



<u>مثال (٣)</u> : أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I=\int_c^b (y^2+y'^2+2y\sin x)dx$$

<u>الحل</u> : نكتب I بالصورة :

$$I=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (1)$$

حيث

$$F(x,y,y')=y^2+y'^2+2y\sin x \qquad (2)$$

فى هذه الحالة نطبق معادلة أويلر – لاجرانج فى صورتها الأصلية :

$$F_y-(F_{y'})'=0 \qquad (3)$$

فمن (2) :

$$F_y=\frac{\partial F}{\partial y}=2y+2\sin x$$

$$F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$$

بالتعويض فى (3) :

$$(2y+2\sin x)-(2y')'=0$$

$$\therefore y+\sin x-y''=0$$

$$\therefore y''-y=\sin x \qquad (4)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ، الحل العام لها يأخذ الصورة الآتية [سوف نحصل عليه بالتفصيل بعد قليل] .

$$y=Ae^x+Be^{-x}-\frac{1}{2}\sin x \qquad (5)$$

ملحوظة : الحل (5) يجب أن يحقق المعادلة (4) حتى يكون حلاً لها ، ولاثبات ذلك :

من (5) :

$$y'=Ae^x-Be^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$$

$$y''=Ae^x+Be^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$$

$$\therefore y''-y=\left(Ae^x+Be^{-x}+\frac{1}{2}\sin x\right)-\left(Ae^x+Be^{-x}-\frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x=\sin x$$

وهى المعادلة رقم (4)

$\therefore$ الحل (5) يحقق المعادلة التفاضلية (4) فهو بذلك يكون حلاً لها .

<u>إيجاد الحل (5)</u> :

من المعادلات التفاضلية فإن حل المعادلة (4) يتكون من جزئين [أنظر الملحق (1) ، (2) فى نهاية الكتاب] .

(1) الحل المتمم y_c للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$

(2) الحل الخاص y_p للمعادلة غير المتجانسة $y'' - y = \sin x$

$$\therefore y = y_c + y_p \tag{6}$$

لإيجاد y_c : المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة

$$y'' - y = 0$$

هى :

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \quad \begin{cases} \lambda_1 = +1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

ويأخذُ الحل الصورة العامة :

$$y_c = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x} = A e^{x} + B e^{-x} \tag{7}$$

إيجاد y_p : يوجد لدينا أكثر من طريقة لإيجاد y_p وسوف نقتصر هنا على طريقة استخدام خواص المؤثر D كالآتى :

$$y'' = D^2 y \qquad D = \frac{d}{dx} \qquad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$y'' - y = \sin x$$

$$(D^2 - 1)y = \sin x$$

$$\therefore \ y_p = \frac{1}{D^2 - 1}(\sin x)$$

وبأستخدام العلاقة الآتية للمؤثر العكسى $\left(\dfrac{1}{D^2 + m^2}\right)$ [أنظر ملحق (2) فى آخر الكتاب]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + m^2}(\sin ax) = \begin{cases} \dfrac{1}{m^2 - a^2}\sin ax & (a \neq m) \\ \dfrac{-x}{2a}\cos ax & (a = m) \end{cases}$$

فى المسألة :

$$m^2=-1 \quad , \quad a=1$$

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{-1-(1)}\sin x=-\frac{1}{2}\sin x \qquad (8)$$

بالتعويض من (8) , (7) فى (6) نحصل على الحل المطلوب .

$$y=y_c+y_p=Ae^{x}+Be^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$$

وهى المعادلة رقم (5) . [الحل المطلوب]

مثال (4) : أوجد معادلة المنحنى الواصل بين النقطتين a, b والذى يجعل للتكامل الدالى :

$$I=\int_a^b (y^2+y'^2+2ye^x)dx$$

نهاية قصوى

الحل : نكتب I بالصورة :

$$I=\int_a^b F(y,y,y')dx \qquad (1)$$

حيث :

$$F(y,y,y')=y^2+y'^2+2ye^x \qquad (2)$$

نستخدم معادلة أويلر – لاجرانج فى صورتها الأصلية (العامة) : $F_y-(F_{y'})'=0$

ومن (2) نحصل على : $F_y=\frac{\partial F}{\partial y}=2y+2e^x$

$$F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$$

بالتعويض فى (3) : $(2y+2e^x)-(2y')'=0$

$$\therefore y+e^x-y''=0$$

$$y''-y=e^x \qquad (4)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ، حلها العام هو :

$$y=Ae^x+Be^{-x}+\frac{1}{2}xe^x \qquad (5)$$

ملحوظة : الحل (5) يجب أن يحقق المعادلة (4) حتى يكون حلاً لها ، ولإثبات ذلك :

من (5) :

$$y' = Ae^{x} - Be^{-x} + \frac{1}{2}(xe^{x} + e^{x})$$

$$y'' = Ae^{x} + Be^{-x} + \frac{1}{2}(xe^{x} + 2e^{x})$$

$$\therefore y'' - y = \left(Ae^{x} + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x} + e^{x}\right) - \left(Ae^{x} + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}\right) = e^{x}$$

$\therefore$ الحل (5) يحقق المعادلة (4) فهو بذلك يكون حلاً لها

إيجاد الحل (5) :

هذا الحل عبارة عن مجموع جزئين .

(1) الحل المتمم y_c للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$

(2) الحل الخاص y_p للمعادلة غير المتجانسة $y'' - y = e^{x}$

$$\therefore y = y_c + y_p \qquad (6)$$

لإيجاد y_c : المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$

هي : $\lambda^2 - 1 = 0$

$$\lambda^2 = 1 \quad \to \quad \lambda = \pm 1 \quad \begin{cases} \lambda_1 = +1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

ويأخذ الحل الصورة العامة :

$$y_c = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{x} + Be^{-x} \qquad (7)$$

إيجاد y_p : توجد أكثر من طريقة وسوف نقتصر هنا على طريقة استخدام خواص المؤثر D كالآتى :

$$y'' - y = e^{x} \quad \to \quad (D^2 - 1)y = e^{x}$$

$$\therefore\ y_p = \frac{1}{D^2 - 1}(e^{x}) = \frac{1}{(D-1)(D+1)}(e^{x})$$

$$= \frac{1}{D-1}\left[\frac{1}{D+1}(e^{x})\right]$$

وباستخدام العلاقة الآتية للمؤثر العكسى $\left(\frac{1}{D \pm m}\right)$ [أنظر الملحق (2) فى نهاية الكتاب]

$$\frac{1}{D \pm m}[\phi(x)] = e^{\mp mx} \int e^{\pm mx} \phi(x) dx$$

$m = 1$

$\phi(x) = e^{x}$

$$\therefore \frac{1}{D+1}(e^{x}) = e^{-x} \int e^{x} e^{x} dx$$

$$= e^{-x} \int e^{2x} dx$$

$$= e^{-x}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right] = \frac{1}{2}e^{x}$$

$$y_p = \frac{1}{D-1}\left[\frac{1}{2}e^{x}\right] = \frac{1}{2}e^{x} \int e^{-x} e^{x} dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{x} \int dx = \frac{1}{2}xe^{x} \qquad (8)$$

بالتعويض من (8) , (7) فى (6) :

$$y = y_c + y_p = Ae^{x} + e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}$$

وهى العلاقة رقم (5) [الحل المطلوب] .

مسألة :

أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \cosh x) dx$$

حل المسألة :

الحل العام للمعادلة

$$y'' + y = \cosh x \qquad (1)$$

عبارة عن مجموع حلين :

(i) الحل المتمم y_c [حل المعادلة المتجانسة $y'' + y = 0$]

(ii) الحل الخاص y_p [حل المعادلة غير المتجانسة $y'' + y = \cosh x$]

أولا : إيجاد y_c :

$$y'' + y = 0$$

المعادلة المساعدة :

$$\lambda^2+1=0$$

$$\lambda^2=-1 \to \lambda=\pm\sqrt{-1}=\pm i \quad \begin{cases}\lambda_1=+i\\ \lambda_2=-i\end{cases}$$

ويأخذ الحل أحد صورتين :

$$y_c=ae^{\lambda_1 x}+be^{\lambda_2 x}=ae^{ix}+be^{-ix} \qquad (2)$$

$$y_c=A\cos x+B\sin x \qquad (2)'$$

ثانيا : **إيجاد** y_p :

حل المعادلة غير المتجانسة $y''+y=\cosh x$

بالطريقة المعتادة : إن الحل المناسب للمعادلة (1) يمكن كتابته بالصورة :

$$y_p=c_1e^x+c_2e^{-x} \qquad (3)$$

لإجاد c_1,c_2 : بتفاضل (3) مرتين :

$$y_p'=c_1e^x-c_2e^{-x} \qquad (4)$$

$$y_p''=c_1e^x+c_2e^{-x} \qquad (5)$$

بالتعويض فى (1) واعتبار أن : $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$$(c_1e^x+c_2e^{-x})+(c_1e^x+c_2e^{-x})$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$\therefore 2c_1e^x+2c_2e^{-x}=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$$

بمقارنة المعاملات :

$$2c_1=\frac{1}{2} \quad , \quad 2c_2=\frac{1}{2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{c_1=\frac{1}{4}} \qquad \boxed{c_2=\frac{1}{4}}$$

بالتعويض فى (3) نحصل على :

$$y_p = \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{2}\cosh x$$

ويصبح الحل النهائى :

$$y = y_c + y_p = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}\cosh x$$

وهذا الحل يجب أن يحقق المعادلة الأصلية (1) ولاثبات ذلك :

$$y = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}\cosh x$$

$$y' = -A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}\sinh x$$

$$y'' = -A\cos x - B\sin x + \frac{1}{2}\cosh x$$

$$y'' + y = \left(-A\cos x - B\sin x + \frac{1}{2}\cosh x\right)$$

$$+\left(A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}\cosh x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cosh x + \frac{1}{2}\cosh x = \cosh x$$

<u>حل آخر لإيجاد</u> y_p : باستخدام خواص المؤثر D :

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}[\cosh x] = \frac{1}{2}\frac{1}{D^2+1}(e^{x} + e^{-x}) \qquad (4)$$

نستخدم النظرية الآتية [أنظر الملحق (2) آخر الكتاب] :

$$\frac{1}{F(D)}[e^{ax}] = \frac{1}{F(a)}[e^{ax}]$$

$$\frac{1}{D^2+1}[e^{x}] = \frac{1}{(1)^2+1}[e^{x}] = \frac{1}{2}e^{x}$$

$$\frac{1}{D^2+1}[e^{-x}]=\frac{1}{(-1)^2+1}[e^{-x}]=\frac{1}{2}e^{-x}$$

وتصبح المعادلة (4) :

$$y_p=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right]=\frac{1}{2}\cosh x$$

وهو المطلوب .

<u>تطبيق الشروط الحدية</u> : <u>لإيجاد ثوابت التكامل فى معادلة المنحنى</u> :

<u>مثال (1)</u> : أثبت أن المنحنى الذى يصل بين النقطتين $a(0,0),\ b\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ والذى يجعل

التكامل : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2-y'^2)dx$ نهاية قصوى هو المنحنى $y=\sin x$.

<u>الحل</u> : سبق حل هذا المثال وكانت النتيجة هى

$$y=a\sin(x+b) \qquad (1)$$

وهنا توجد شروط حديه تستخدم لايجاد الثابتين a, b .

هذه الشروط هى : $y(0)=0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطتين $a(0,0)\ ,\ b\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ فهما تحققان معادلته ، فبالتعويض

فى (1) نجد أن :

$$0=a\sin b \qquad (2)$$

$$1=a\sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right) \qquad (2)$$

من (2) : حيث أن

$$\sin b=0 \quad \leftarrow \quad a\neq 0$$

$$\therefore \boxed{b=0}$$

بالتعويض عن b فى (3) : $1 = a\sin\frac{\pi}{2} = a$ ومنها :

$$\therefore \boxed{a = 0}$$

وتصبح معادلة المنحنى (المعادلة (1)) بالصورة :

$$y = \sin x$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (2)</u> : أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 + y'^2 + 2y\sin x)dx$$

فى وجود الشرطين الحديين :

$$y(0) = 0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

<u>الحل</u> : سبق حل هذا المثال وكانت النتيجة :

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}\sin x \qquad (1)$$

ومن الشروط الحدية المعطاه نجد أن المنحنى يمر بالنقطتين

$$a = (0,0) \quad , \quad b = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

هاتين النقطتين يجب أن تحقق معادلة المنحنى فبالتعويض فى (1) نحصل على :

$$0 = A + B - \frac{1}{2}\sin 0 = A + B \rightarrow A + B = 0 \qquad (2)$$

$$0 = Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \qquad (3)$$

من (2) بضرب الطرفين فى $e^{\frac{\pi}{2}}$

$$\therefore Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (4)$$

من (4) , (3) بالطرح :

$$Be^{\frac{\pi}{2}} - Be^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$B\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\rightarrow B\left(2\sinh\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore B=-\frac{1}{4\sinh\frac{\pi}{2}} \qquad \Bigg| \quad \sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$

ومن (2) نجد أن :

$$A=-B=\frac{1}{4\sinh\frac{\pi}{2}}$$

وتصبح معادلة المنحنى (المعادلة 1) بعد التعويض عن A, B بالصورة الآتية :

$$y=\frac{1}{4\sinh\frac{\pi}{2}}(e^{x}-e^{-x})-\frac{1}{2}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sinh x}{\sinh\frac{\pi}{2}}-\sin x\right]$$

وهى مَعادلة المنحنى المطلوبة .

مثال (3) : أوجد معادلة المنحنى الواصل بين النقطتين $a(0,0),\ b(1,e)$ والذى يجعل التكامل :

$$I=\int_{0}^{1}(y^{2}+y'^{2}+2ye^{x})dx$$

نهاية قصوى :

الحل : هذا المثال سبق حله أيضاً ، والنتيجة هى :

$$y=Ae^{x}+Be^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x} \tag{1}$$

ومن رأس المثال نجد أن المنحنى يخضع للشروط الحدية :

$$y(0)=0 \quad , \quad y(1)=e$$

المنحنى يمر بالنقطتين $a(0,0),\ b(1,e)$ فهما تحققان معادلته ، فبالتعويض فى (1) :

$$0=A+B \tag{2}$$

$$e = Ae + Be^{-1} + \frac{1}{2}e \qquad (3)$$

بحل (3) , (2) توجد A , B كالاتى :

من (3) نجد أن :

$$\frac{1}{2}e = Ae + Be^{-1} \qquad (4)$$

ومن (4) بالضرب فى e^{-1} نحصل على :

$$\frac{1}{2} = A + Be^{-2} \qquad (5)$$

ومن (5) , (2) بالطرح نجد أن :

$$-\frac{1}{2} = B(1-e^{-2})$$

$$\therefore B = -\frac{1}{2(1-e^{-2})} = -\frac{e^2}{2(e^2-1)} \qquad (6)$$

[بضرب البسط والمقام فى e^2]

ومن (2) :

$$\therefore A = -B = \frac{e^2}{2(e^2-1)} \qquad (7)$$

بالتعويض من (7) , (6) فى معادلة المنحنى (1) نحصل على :

$$y = \frac{e^2}{2(e^2-1)}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x$$

ولكن :

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\therefore y = \frac{e^2}{e^2-1}\sinh x + \frac{1}{2}xe^x$$

وهى المعادلة المطلوبة .

<u>مثال (4)</u> : أوجد المنحنى الواصل بين النقطتين :

$a(0,0)$, $b(1,1)$ والذى يجعل التكامل :

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx$$

نهاية قصوى بالصورة :

$$y = \frac{2e}{e^2 - 1}\sinh x$$

<u>الحل</u> :

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx = \int_0^1 F(y, y')dx$$

حيث :

$$F(y, y') = y^2 + y'^2 \qquad (1)$$

هنا F لاتعتمد صراحة على x فنستخدم الصورة الخاصة لمعادلة أويلر – لاجرانج :

$$F - y' F_{y'} = c \qquad (2)$$

فمن (1) نجد أن :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) , (1) فى (2) تحصل على :

$$y^2 + y'^2 - y'(2y') = c$$

$$\therefore y'^2 - y^2 = -c = a^2 \quad , \quad \text{مثلا}$$

$$\therefore y'^2 = a^2 + y^2 \to y' = \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{dy}{dx} \qquad (4)$$

وهو التكامل الأول لمعادلة أويلر – لاجرانج .

<u>ولإيجاد التكامل الثانى</u> :

من (4) بفص المتغيرات والتكامل نحصل على :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \int dx$$

$$\therefore \sinh^{-1}\frac{y}{a} = x + b$$

حيث b ثابت التكامل

$$\therefore \frac{y}{a} = \sinh)(x + b) \to y = a\sinh(x + b) \qquad (5)$$

وهى معادلة منحنى النهاية القصوى بدلالة الثابتين a, b

ولإيجاد الثابتان a, b : نستخدم الشروط الحدية المعطاه فى المثال

$$y(0)=0,\ y(1)=1$$

وبالتعويض بهذين الضرطين فى (5) :

$$0=a\sinh b \quad\to\quad \sinh b=0 \quad\to\quad \boxed{b=0}$$

$$1=a\sinh(1+b)=a\sinh(1)$$

$$\therefore \boxed{a=\frac{1}{\sinh(1)}}$$

ولكن :

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$

$$\sinh(1)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-1})$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{e^2-1}{2e}$$

$$\therefore a=\frac{2e}{e^2-1} \qquad (7)$$

وبالتعويض عن a, b فى معادلة المنحنى (المعادلة 5) نحصل على :

$$y=\frac{2e}{e^2-1}\sinh x$$

وهى المعادلة المطلوبة .

مثال (5) : أوجد المنحنى الواصل بين النقطتين $a(1,1),\ b\left(2,\frac{1}{2}\right)$ والذى يجعل التكامل :

$$I=\int_1^2 x^2y'^2dx$$

نهاية قصوى ، وذلك بالصورة : $y=\frac{1}{x}$

الحل :

$$I=\int_1^2 x^2y'^2dx=\int_1^2 F(x,y,y')dx$$

حيث :

$$F(x, y, y') = x^2 y'^2 \tag{1}$$

فى هذه الحالة ، لكى يكون التكامل I نهاية قصوى نطبق معادلة أويلر – لاجرانج فى صورتها العامة :

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \tag{2}$$

فمن (1) نجد أن :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y'$$

بالتعويض فى (2) :

$$-(2x^2 y')' = 0$$

$$\frac{d}{dx}[2x^2 y'] = 0 \rightarrow 2x^2 y' = \text{const.} = A$$

وهو التكامل الأول

$$\therefore y' = \frac{A}{2x^2} = \frac{dy}{dx} \quad ,$$

وباجراء التكامل مرة ثانية نحصل على :

$$\int dy = \int \frac{A}{2x^2} dx$$

$$\therefore \boxed{y = -\frac{A}{2x} + B} \tag{3}$$

وهى معادلة المنحنى المطلوب ، حيث A, B ثابتان .

<u>**ولإيجاد الثابتان A, B**</u> :

من الشروط الحدية للمسألة :

$$y(1) = 1 \ , \quad y(2) = \frac{1}{2}$$

وبالتعويض فى (3) :

$$1 = -\frac{A}{2} + B \tag{4}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{A}{4} + B \tag{5}$$

من (5) , (4) بالطرح نحصل على :

$$\frac{1}{2}=-\frac{A}{4} \qquad \therefore 1=-\frac{A}{2} \;\rightarrow\; A=-2$$

وبالتعويض عن A فى (4) نجد أن :

$$1=1+B \;\rightarrow\; B=1-1=0$$

وتصبح معادلة المنحنى بالصورة :

$$y=\frac{1}{x}+0 \;\rightarrow\; y=\frac{1}{x}$$

وهو المطلوب .

<u>إيجاد القيمة العددية للنهاية القصوى للتكامل I</u> :

فى الأمثلة السابقة أوجدنا معادلة المنحنى الذى يجعل التكامل I نهاية قصوى ، وفى الأمثلة التالية سوف نوجد القيمة العددية لتلك النهاية القصوى .

<u>مثال (1)</u> : إذا كان المنحنى $y=\sin x$ هو منحنى النهاية القصوى للتكامل :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-y^2)dx$$

تحت الشروط الحديه $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ ، $y(0)=0$ ، فاوجد القيمة العددية للنهاية القصوى للتكامل I .

<u>الحل</u> : حيث أن :

$$y=\sin x$$

[سبق حل هذا المثال بالتفصيل]

$$\therefore y'=\cos x$$

$$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-y^2)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}[\sin\pi-\sin 0]=0$$

وهى القيمة العددية للتكامل I .

مثال (2) : إذا كان المنحنى $y = \frac{2e}{e^2-1}\sinh x$ هو منحنى النهاية القصوى للتكامل

$$\therefore I = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx$$

تحت الشروط الحديه :

$$y(0) = 0 \ , \ y(1) = 1$$

فاثبت أن القيمة العددية للنهاية القصوى للتكامل I هي : $\frac{e^2+1}{e^2-1}$

الحل : من معادلة المنحنى :

$$y = \frac{2e}{e^2-1}\sinh x$$

[سبق حل هذا المثال بالتفصيل]

$$y' = \frac{2e}{e^2-1}\cosh x$$

$$\therefore I = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx = \frac{4e^2}{(e^2-1)^2}\int_0^1 (\sinh^2 x + \cosh^2 x)dx$$

$$= \frac{4e^2}{(e^2-1)^2}\int_0^1 \cosh 2x\, dx$$

$$= \frac{4e^2}{(e^2-1)^2}\left[\frac{\sinh 2x}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2e^2}{(e^2-1)^2}\left[\sinh 2 - \sinh 0\right]$$

$$= \frac{2e^2}{(e^2-1)^2}\sinh 2 \qquad \left|\ \sinh x = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})\right.$$

$$= \frac{2e^2}{(e^2-1)^2}\cdot\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})$$

$$= \frac{e^4-1}{(e^2-1)^2} = \frac{(e^2-1)(e^2+1)}{(e^2-1)^2} = \frac{e^2+1}{e^2-1}$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : إذا كان المنحنى $y = \frac{1}{x}$ هو منحنى النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_1^2 x^2 y'^2 dx$$

تحت الشروط الحدية $y(1) = 1 , y(2) = \frac{1}{2}$ فاوجد القيمة العددية للتكامل I .

الحل : حيث أن $y = \frac{1}{x}$ [سبق حل هذا المثال بالتفصيل] .

$$\therefore y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore I = \int_1^2 x^2 y'^2 dx = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^2 = -\left[\frac{1}{2} - 1\right] = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad ,$$

وهو المطلوب .

مثال (4) : عين منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)dx$$

فى وجود الشروط الحديه $y(0) = 0 , y(1) = 1$ ، ثم أوجد قيمة النهاية القصوى لهذا التكامل.

الحل :

$$I = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)dx = \int_0^1 F(x, y, y')dx$$

حيث :

$$F(x, y, y') = y'^2 + 12xy \qquad (1)$$

وهنا نستخدم معادلة أويلر – لاجرانج فى صورتها العامة :

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \qquad (2)$$

فمن (1) نجد أن : $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 12x \quad , \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$

بالتعويض فى (2) :

$$12x - (2y')' = 0$$

$$\therefore 12x = 2y'' \rightarrow y'' = 6x \qquad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية بسيطة نحلها بايجاد التكامل مرتين :

$$y' = 6\frac{x^2}{2} + a = 3x^2 + a \qquad (4)$$

$$y = 3\frac{x^3}{3} + ax + b = x^3 + ax + b \qquad (5)$$

حيث a, b ثابتا التكامل .

المعادلة (5) هى معادلة المنحنى المطلوب (منحنى النهاية القصوى) ولكن بدلالة الثابتين a, b ، ولايجادهما نطبق الشروط الحدية كالآتى :

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + 0 + b \rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$y(1) = 1 \rightarrow 1 = 1 + a + 0 = 1 + a \rightarrow \boxed{a = 0}$$

وتصبح معادلة المنحنى بالصورة : $\boxed{y = x^3}$

<u>**ولإيجاد القيمة العددية للنهاية القصوى للتكامل I :**</u>

$$y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2$$

$$\therefore I = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)dx$$

$$= \int_0^1 (9x^4 + 12x^4)dx = \int_0^1 (21x^4)dx$$

$$= 21\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 21\left[\frac{1}{5} - 0\right] = \frac{21}{5}$$

وهو المطلوب .

[4] حالات خاصة من معادلة أويلر – لاجرانج :

الحالة الأولى : **الدالة F لاتحتوى على y صراحة أى أن** $F = F(x, y')$:

مثال : (أ) إذا كانت الدالة F لاتحتوى على y صراحة ، بين أن منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى $I = \int_a^b F dx$ هى حلول للمعادلة التفاضلية $F_{y'} = c$ ، حيث c ثابت .

(ب) أثبت أن منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى $I = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$ هى مجموعة دوائر نصف قطرها ثابت .

الحل :

الجزء(أ) : فى هذه الحالة فإن : $F = F(x, y')$ ويكون : $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ وتصبح معادلة أويلر- لاجرانج بالصورة : $(F_{y'})' = 0$ ومنها : $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ وبالتكامل نحصل على : $F_{y'} = c$

وهى معادلة تفاضلية لاتحتوى على y ، وتعطى منحنيات النهاية القصوى فى هذه الحالة ، ويمكن حلها بالطرق العادية للمعادلات التفاضلية .

الجزء (ب) : $I = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx = \int F(x, y') dx$

حيث :

$$F(x, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} \qquad (1)$$

الدالة F لاتعتمد على y صراحة ، وتصبح معادلة أويلر – لاجرانج بالصورة $(F_{y'})' = 0$

ومنها : $F_{y'} = c$

ومن (1) :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} \cdot (2y')$$

$$= \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = c$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية :

توجد أكثر من طريقة ، وسوف نستخدم هنا طريقة التعويض :

بوضع : $y' = \tan\theta \quad \leftarrow \quad \frac{dy}{dx} = \tan\theta$

(2) $\therefore\ dy = \tan\theta dx$

ولكن :

$$c = \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\tan\theta}{x\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\tan\theta}{x\sec\theta}$$

$$\therefore\quad x = \frac{\tan\theta}{c\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{c}$$

وبأخذ : $\frac{1}{c} = a$ نجد أن :

(3) $x = a\sin\theta$

من (3) بتفاضل الطرفين : $dx = a\cos\theta\, d\theta$

وبالتعويض في (2) :

$$dy = \tan\theta(a\cos\theta\, d\theta)$$
$$= a\sin\theta\, d\theta$$

وبالتكامل نحصل على :

(4) $\therefore\ y = -a\cos\theta + b$

المعادلتان (4) , (3) هما المعادلتان البارامتريتان لمنحنيات النهاية القصوى المطلوبة .

من (3) بالتربيع :

(5) $x^2 = a^2\sin^2\theta$

ومن (4) : $y - b = -a\cos\theta$

وبالتربيع :

(6) $(y-b)^2 = a^2\cos^2\theta$

بجمع (6) , (5) : $x^2 + (y-b)^2 = a^2$

وهي معادلة مجموعة دوائر مركزها $(0, b)$ ونصف قطرها a ثابت .

وهو المطلوب .

الحالة الثانية : الدالة F دالة فى y' فقط أى أن $F = F(y')$:

مثال : (أ) إذا كانت الدالة F فى التكامل الدالى $I = \int_a^b F dx$ هى دالة فى y' فقط فاثبت أن منحنيات النهاية القصوى هى خطوط مستقيمة .

(ب) أوجد القيمة القصوى لطول المنحنى $y = y(x)$ الواصل بين النقطتين $a(0,0),\ b(2,4)$ والمعرف بواسطة العلاقة :

$$\ell[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

الحل :

الجزء (أ) : فى هذه الحالة : $F = F(y')$ وبالتالى فإن : $F_y = 0$ وتصبح معادلة أويلر-لاجرانج بالصورة $(F_{y'})' = 0$

$$\therefore \frac{dF_{y'}}{dx} = 0 \rightarrow \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\therefore F_{y'y'} y'' = 0 \qquad \Bigg| \quad F_{y'y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}$$

ومن ذلك يتضح أن : $y'' = 0$ أو $F_{y'y'} = 0$ ولكن :

$$\therefore \quad y'' = 0 \quad \leftarrow \quad F_{y'y'} \neq 0$$

$$\therefore \frac{dy'}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad y' = B \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = B$$

$$\therefore dy = B dx \quad \rightarrow \quad y = Bx + A \qquad (1)$$

وهى معادلة مجموعة خطوط مستقيمة بدلالة الثابتين A, B

الجزء (ب) :

$$\ell[y(x)] = I = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_a^b F(y')dx$$

$$\therefore \quad F(y') = \sqrt{1+y'^2} \qquad (2)$$

من (2) يتضح أن الدالة F تعتمد على y' فقط وبالتالى فإن منحنيات النهاية القصوى تكون مجموعة الخطوط المستقيمة $y = A + Bx$ [المعادلة (1)]

ولأيجاد A, B :

حيث أن المنحنى يمر بالنقطتين $(2, 4)$ ، $(0, 0)$

$$\therefore \quad 0 = A + 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

$$4 = A + 2B = 0 + 2B \quad \rightarrow \quad \boxed{B = 2}$$

وتصبح معادلة المنحنى :

$$y = 2x$$

وهو منحنى النهاية القصوى ، ولايجاد القيمة العددية لهذه النهاية القصوى (أى طول المنحنى):

$$y = 2x \quad \rightarrow \quad y' = 2$$

$$\therefore \ell[y(x)] = \int_0^2 \sqrt{1+4}\, dx = \int_0^2 \sqrt{5}\, dx$$

$$= \sqrt{5}[x]_0^2 = 2\sqrt{5}$$

وهو المطلوب .

الحالة الثالثة : **الدالة F لا تعتمد على x صراحة أى أن** : $F = F(y, y')$

مثال : (أ) إذا كانت الدالة F لاتعتمد صراحة على x فاثبت أن معادلة أويلر – لاجرانج يمكن كتابتها بالصورة :

$$F - y' F_{y'} = c$$

(ب) أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_a^b \frac{1 + y^2}{y'^2} dx$$

الحل :

الجزء (أ) : نبدأ الحل من معادلة أويلر – لاجرانج :

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \qquad (1)$$

ولكن :

$$(F_{y'})' = \frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{d}{dx} F_{y'}(y, y')$$

$$= \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

$$= F_{y'y}\, y' + F_{y'y'}\, y'' \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) فى (1) نجد أن :

$$F_y - F_{y'y}\, y' - F_{y'y'}\, y'' = 0 \qquad (3)$$

وحيث أن :

$$\frac{d}{dx}[F - y'\, F_{y'}] = \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}(y'\, F_{y'})$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}\right) - \left(y'\frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + y''\, F_{y'}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}\right) - y'\left(\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}\right) - y''\, F_{y'}$$

$$= (F_y\, y' + F_{y'}\, y'') - y'(F_{y'y}\, y' + F_{y'y'}\, y'') - y''\, F_{y'}$$

$$= y'(F_y - y'\, F_{y'y} - y''\, F_{y'y'}) = y'(0) = 0 \,, \qquad \text{من } (3)$$

وبالتكامل نحصل على :

$$F - y'\, F_{y'} = c \qquad (4)$$

حيث c ثابت التكامل ، وهو امطلوب الأول .

الجزء (ب) :

$$I = \int_a^b \frac{1 + y^2}{y'^2}\, dx = \int_a^b F(y, y')\, dx$$

$$F(y, y') = \frac{1 + y^2}{y'^2} \qquad (5)$$

وهنا الدالة F لا تعتمد على x صراحة ، فنستخدم العلاقة رقم (4) [الحالة الخاصة من معادلة أويلر – لاجرانج]

فمن (5) نجد أن :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = (1 + y^2).(-2y'^{-3}) = \frac{-2(1 + y^2)}{y'^3}$$

بالتعويض فى (4) نحصل على :

$$\frac{1 + y^2}{y'^2} - y'\left[\frac{-2(1 + y^2)}{y'^3}\right] = c$$

$$\therefore \frac{1+y^2}{y'^2}+2\frac{(1+y^2)}{y'^2}=c \rightarrow \frac{3(1+y^2)}{y'^2}=c$$

$$1+y^2=\frac{c}{3}y'^2=a^2y'^2 \rightarrow y^2=a^2y'^2-1 \qquad \Bigg| \quad \frac{c}{3}=a^2$$

$$\therefore \; a^2y'^2=y^2+1 \rightarrow y'^2=\frac{y^2+1}{a^2}$$

$$\therefore \; y'=\frac{1}{a}\sqrt{y^2+1}=\frac{dy}{dx}$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية :

توجد أكثر من طريقه ، وسوف نستخدم هنا طريقه الحل البارامترى وذلك بكتابة :

$$y=\sinh\theta \tag{6}$$

$$y^2=\sinh^2\theta=\cosh^2\theta-1=a^2y'^2-1$$

$$\therefore \cosh^2\theta=a^2y'^2 \quad \rightarrow \quad \cosh\theta=ay' \tag{7}$$

ومن $(6)'$ نجد أن :

$$dy=\cosh\theta\, d\theta$$

ومن (7) أيضاً نجد أن :

$$dy=\frac{1}{a}\cosh\theta\, d\theta \quad \leftarrow \quad y'=\frac{1}{a}\cosh\theta$$

$$\therefore \cosh\theta\, d\theta=\frac{1}{a}\cosh\theta dx \quad \rightarrow \quad dx=ad\theta$$

وبالتكامل نحصل على :

$$x=a\theta+b \tag{8}$$

المعادلتان (8) , (6) هما المعادلتان البارامتريتان لمنحنيات النهاية القصوى ، ولايجاد المعادلة الكرتيزية :

نحذف البارامتر θ بين المعادلتين (8) , (6) كالآتى :

من (8) :

$$\theta=\frac{x-b}{a}$$

وبالتعويض فى (6) نحصل على :

$$y = \sinh \frac{x - b}{a}$$

وهو المطلوب .

<u>**الحالة الرابعة**</u> : <u>**معادلة أويلر – لاجرانج للدوال الخطية**</u> :

إذا كانت الدالة $F(x,y,y')$ دالة خطية فى المتغير y' فإنها تكتب بالصورة :

$$F(x,y,y') = P(x,y) + y' Q(x,y) \tag{1}$$

حيث P, Q دالتان فى x, y فقط .

<u>**المطلوب**</u> : إثبات أن معادلة أويلر – لاجرانج للدالة الخطية (1) تكون بالصورة :

$$P_y - Q_x = 0$$

حيث :

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

<u>**الإثبات**</u> : نعتبر التكامل :

$$I = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

حيث F دالة خطية فى y' (المعادلة (1)) فإذا كان التكامل I نهاية قصوى ، فيجب تطبيق معادلة أويلر – لاجرانج بالصورة :

$$F_y - (F_{y'})' = 0$$

ولكن : من (1) :

$$F = P + y' Q$$

$$\therefore\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + y' \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{2}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = Q$$

$$\therefore\ (F_{y'})' = \frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{dQ}{dx} \tag{3}$$

وتصبح معادلة أويلر – لاجرانج :

$$\frac{\partial P}{\partial y}+y'\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{dQ}{dx}=0 \qquad (4)$$

وحيث أن :

$$Q=Q(x,y$$

$$\therefore dQ=\frac{\partial Q}{\partial X}dx+\frac{dQ}{dy}dy$$

$$\therefore \frac{dQ}{dx}=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial Q}{\partial x}+y'\frac{\partial Q}{\partial y} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5) فى (4) :

$$\frac{\partial P}{\partial y}+y'\frac{\partial Q}{\partial y}-\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+y'\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=0$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{xy}=0$$

$$\therefore P_y-Q_x=0$$

وهى صورة معادلة أويلر – لاجرانج للدالة الخطية :

$$F=P+y'Q$$

وهو المطلوب .

[5] المسائل ذات القيم المثلى : **Optimal Problems**

فى المسائل ذات التطبيقات العملية ، عادة ما يكون المطلوب هو : إيجاد قيم النهاية الصغرى ، لأنها الأكثر ملائمة للواقع العملى بسبب قيمتها المحدودة . وأشهر تلك المسائل 3 مسائل نعرف بالمسائل ذات القيم المثلى ، وهى :

(1) **مسألة أقصر مسافة** : وفيها نوجد أقصر مسافة (أو بعد) بين نقطتين .

(2) **مسألة أقل مساحة** : وفيها نوجد أقل مساحة لسطح ينتج عن دوران منحنى .

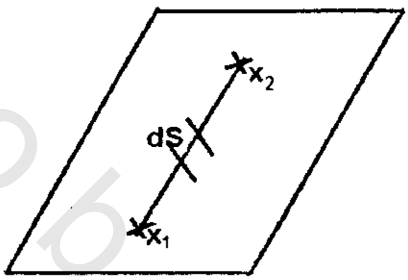
(3) **مسألة أقصر زمن** : وفيها نوجد أقل زمن يتحرك فيه جسيم على منحنى معين ولمسافة معينة . وتعرف المسألة الاخيرة بمسألة برنولى أو مسألة البراخيستوكرون (Brachistocron)

[كلمة يونانية معناها : براخيستوس = أقصر ، كرونوس = زمن]

المسألة الأولى :مسألة أقصر بعد

أثبت أن أقصر مسافة بين نقطتين فى المستوى تمثل بخط مستقيم

الحل :



عنصر الطول فى المستوى (xy)

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (1)$$

ويكون الطول الكلى لأى منحنى يصل بين النقطتين x_1, x_2 هو :

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} F dx \qquad (2)$$

حيث :

$$F = \sqrt{1 + y'^2} \qquad (3)$$

شرط أن تكون ℓ أقل ما يمكن (أقصر مسافة) هو أن يكون التكامل الدالى فى (2) نهاية صغرى ، وذلك يأتى بتطبيق معادلة أويلر – لاجرانج على الدالة F .

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \qquad (4)$$

ومن (3) :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2\sqrt{1 + y'^2}}(2y') = \frac{y'}{2\sqrt{1 + y'^2}}$$

بالتعويض فى (4) : $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \quad \rightarrow \quad (F_{y'})' = 0$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right] = 0$$

وبأجراء التكامل نحصل على :

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \qquad (5)$$

حيث c ثابت التكامل .

المعادلة (5) تمثل التكامل الأول لمعادلة أويلر – لاجرانج

ولإيجاد التكامل الثانى : بتربيع طرفى (5)نجد أن :

$$\frac{y'^2}{1+y'^2}=c^2 \to y'^2=c^2(1+y'^2)=c^2+c^2y'^2$$

$$\therefore y'^2(1-c^2)=c^2 \to y'^2=\frac{c^2}{1-c^2}$$

$$\therefore\ y'=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}=\text{const.}=a=\frac{dy}{dx}\ \therefore dy=adx$$

$$\therefore \int dy=a\int dx \quad \to \quad y=ax+b \tag{6}$$

حيث b ثابت التكامل .

المعادلة (6) هى معادلة المنحنى المطلوب ، وهى معادلة خط مستقيم وهذا يعنى أن أقصر بعد بين النقطتين فى المستوى هو خط مستقيم .

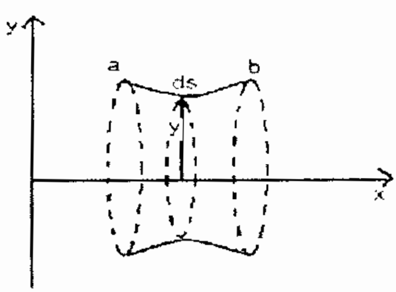
وهو المطلوب .

المسألة الثانية : مسألة أقل مساحة :

إذا دار منحنى يصل بين نقطتين حول أحد المحورين x أو y فإن المنحنى الذى يجعل المساحة الناتجة عن الدوران أقل مساحة ممكنة هو منحنى السلسلة (الكتينة) ومعادلته هى :

(i) إذا كان الدوران حول محور x :
$$y=a\cosh\frac{x+b}{a}$$

(ii) إذا كان الدوران حول محور y :
$$x=a\cosh\frac{y+b}{a}$$



الحل :

أولا : إذا كان الدوران حول محور x :

المساحة الناتجة عن دوران العنصر ds من المنحنى حول محور x هى :

$$dA = (2\pi y)\ .\ (ds)$$

المساحة = المحيط × السمك

المساحة الكلية (مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى حول محور x) :

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

عنصر الطول

$$A = \int dA = \int 2\pi y \; ds$$

$$= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_a^b F dx \quad \rightarrow \quad F = y\sqrt{1+y'^2} \tag{1}$$

ولكى تكون المساحة A أقل ما يمكن ، يجب تطبيق معادلة أويلر – لاجرانج على الدالة F ، حيث التكامل فى A نهاية صغرى .

ومن (1) نجد أن F لا تعتمد صراحة على x فنطبق عليها الحالة الخاصة من معادلة أويلر-لاجرانج وصورتها :

$$F_y - y' F_{y'} = c \tag{2}$$

ومن (1) :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = y\,\frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}}(2y') = \frac{yy'}{2\sqrt{1+y'^2}}$$

بالتعويض فى (2) :

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\therefore \; \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{1+y'^2} = c^2$$

$$y^2 = c^2(1+y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

$$y'^2 = \frac{y^2-c^2}{c^2} \rightarrow y' = \frac{1}{c}\sqrt{y^2-c^2} = \frac{dy}{dx}$$

<u>بفصل المتغيرات والتكامل</u> :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \frac{1}{c}\int dx$$

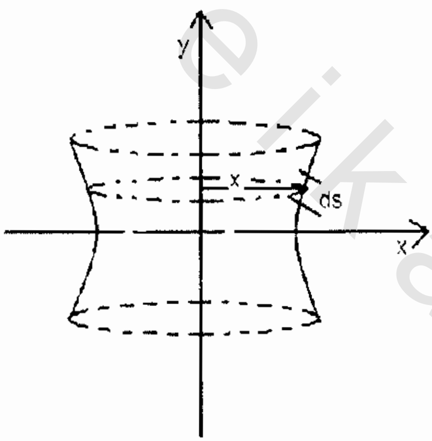
$$\therefore \cosh^{-1}\frac{y}{c}=\frac{x}{c}+d=\frac{x+cd}{c}=\frac{x+b}{c} \quad , \quad b=cd$$

$$\therefore \frac{y}{c}=\cosh\left(\frac{x+b}{c}\right)\rightarrow y=c\ \cosh\frac{x+b}{c}$$

وهى معادلة المنحنى المطلوب .
وهو منحنى السلسلة (الكتينة)

$\therefore$ منحنى السلسلة هو المنحنى الذى يعطى أقل مساحة عند دورانه حول محور x .

ثانيا : إذا كان الدوران حول محور y:



المساحة الناتجة عن دوران العنصر ds حول محور y وهى :

$$dA=(2\pi x).(ds)=2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

المساحة الكلية :

$$A=2\pi\int x\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int F dx$$

$$F=x\sqrt{1-y'^2}$$

ولكى تكون المساحة A أقل ما يمكن نطبق معادلة أويلر – لاجرانج وحيث أن : $F=x\sqrt{1+y'^2}$ أى أنها تعتمد على x,y,y' فنستخدم معادلة أويلر – لاجرانج فى صورتها العامة :

$$F_y-(F_{y'})'=0 \qquad (1)$$

حيث :

$$F_y=\frac{\partial F}{\partial y}=0 \quad , \quad F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

بالتعويض فى (1) :

$$\therefore \quad (F_{y'})'=0\rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}=0 \qquad (2)$$

وهو التكامل الأول للمعادلة (1) .

ولإيجاد التكامل الثانى : من (2) بالتربيع :

$$\therefore \frac{x^2 y'^2}{1+y'^2}=c^2$$

$$\therefore x^2y'^2=c^2(1+y'^2)=c^2+c^2y'^2$$

$$\therefore y'^2(x^2-c^2)=c^2 \quad \rightarrow \quad y'^2=\frac{c^2}{x^2-c^2}$$

$$\therefore y'=\frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{dy}{dx}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dy=c\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}}$$

$$\therefore y+b=c\cosh^{-1}\frac{x}{c}\rightarrow \cosh^{-1}\frac{x}{c}=\frac{y+b}{c},$$ حيث b ثابت التكامل

$$\therefore \frac{x}{c}=\cosh\frac{y+b}{c} \quad \rightarrow \quad x=c\cosh\frac{y+b}{c}$$

وهى معادلة المنحنى المطلوب (وهو منحنى السلسلة) .

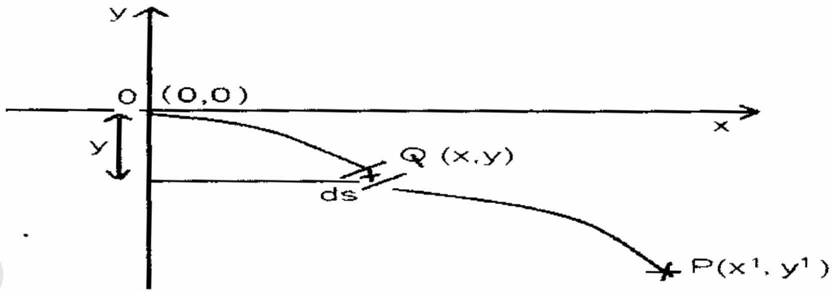
<u>المسألة الثالثة</u> : <u>مسألة أقل زمن (البراخيستوكرون)</u>

ينزلق جسيم (من السكون) تحت تأثير الجاذبية على منحنى يصل بين نقطتين ثابتتين فى المستوى .

<u>المطلوب</u> : إستخدام معادلة أويلر – لاجرانج لإيجاد شكل المنحنى بحيث يكون الزمن اللازم لهبوط الجسيم هو أقل زمن ممكن .

الحل :

المنحنى يصل بين النقطتين الثابتتين $0, p$



الزمن اللازم لكي يقطع الجسيم المسافة ds على المنحنى

$$dt = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{ds}{v} \qquad (1)$$

حيث : ds عنصر الطول ويعطى بالعلاقة :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad (2)$$

ولإيجاد v (السرعة عند Q) :

نستخدم قانون حفظ الطاقة فى الديناميكا .

$$(\text{الطاقة الكلية})_Q = (\text{الطاقة الكلية})_0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$(\text{طاقة الحركة} + \text{طاقة الجهد})_Q = (\text{طاقة الحركة} + \text{طاقة الجهد})_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-mgy) = 0 + 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mgy \;\rightarrow\; v^2 = 2gy \;\rightarrow\; v = \sqrt{2gy} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) , (2) فى (1) :

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

ويكون الزمن الكلى للوصول من 0 إلى P هو :

$$T=\int_0^T dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^T \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int F\,dx$$

$$F=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \qquad (4)$$

لكى يكون الزمن T أقل مايمكن (نهاية صغرى) يجب أن تحقق الدالة F معادلة أويلر-لاجرانج .

وحيث أن F لا تعتمد على x صراحة فنطبق الحالة الخاصة وصورتها :

$$F-y'F_{y'}=c \qquad (5)$$

ومن (4) :

$$F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

بالتعويض فى (5) نحصل :

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}=c$$

$$\therefore \frac{(1+y'^2)-y'^2}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}=c$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}=c \rightarrow \sqrt{y\,(1+y'^2)}=\frac{1}{c}=\sqrt{d}=\text{const.} \qquad \text{(ثابت)}$$

$$\therefore y\,(1+y'^2)=d \quad\rightarrow\quad 1+y'^2=\frac{d}{y} \quad\rightarrow\quad y'^2=\frac{d}{y}-1=\frac{d-y}{y}$$

$$\therefore y'=\sqrt{\frac{d-y}{y}}=\frac{dy}{dx}\rightarrow \int dx=\int\sqrt{\frac{y}{d-y}}\,dy \qquad (6)$$

<u>ولإيجاد التكامل فى (6)</u> : نستخدم التعويض الآتى (لازالة الجذر) :

$$y=d\sin^2\theta$$

$$dy=2d\sin\theta\,.\,\cos\theta\,d\theta$$

$$\therefore \int \sqrt{\frac{y}{d-y}}\,dy = \int \sqrt{\frac{d\sin^2\theta}{d(1-\sin^2\theta)}}(2d\sin\theta\cos\theta\,d\theta)$$

$$= \int \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}(2d\sin\theta\cos\theta\,d\theta)$$

$$= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(2d\sin\theta\cos\theta\,d\theta)$$

$$= 2d\int \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= 2d\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$= d\int (1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$= d\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + \alpha$$

$$= \frac{d}{2}[2\theta - \sin 2\theta] + \alpha$$

وتصبح (6) بالصورة :

$$x = \frac{d}{2}[2\theta - \sin 2\theta] + \alpha$$

ولإيجاد α : فى البداية :

$$x = 0 \quad , \quad \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore \alpha = 0$$

$$\therefore x = \frac{d}{2}[2\theta - \sin 2\theta]$$

وبكتابة : $\frac{d}{2} = a$ ، $2\theta = \phi$ نحصل على :

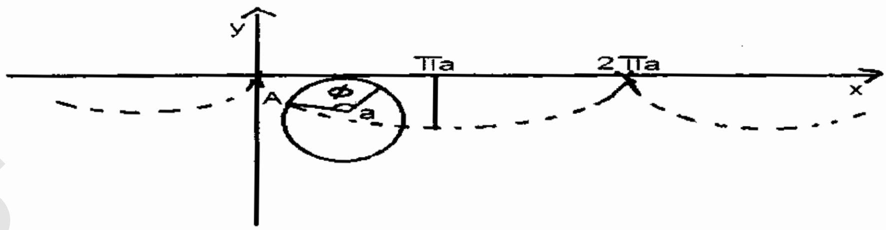
$$\therefore x = a(\phi - \sin\phi) \tag{7}$$

أيضاً : حيث أن

$$y = d\sin^2\theta = d \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$= \frac{d}{2}(1-\cos 2\theta) = a(1-\cos\phi) \tag{8}$$

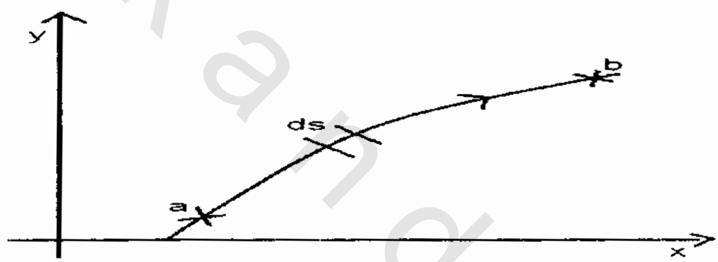
المعادلتان (8) , (7) هما المعادلتان البارامتريتان للمسار (المنحنى الذى يجعل الزمن T أقل ما يمكن) ، ويعرف هذا المنحنى بمنحنى السيكلويد (الدويرى) ، وهو مسار نقطة ثابتة A على محيط دائرة تتحرك على محور x.



[٦]تطبيق حساب التغاير فى علم الضوء : (مبدأ فيرمات)

ينص مبدأ فيرمات فى علم الضوء على الآتى :

" ينتقل شعاع الضوء فى وسط ما بين نقطتين فى المستوى بحيث يكون زمن انتقاله أقل زمن ممكن " .



نفرض أن شعاع الضوء ينتقل فى وسط معين بين النقطتين a, b فى المستوى (xy) بسرعة v ، حيث : $v = v(x, y)$ بوجه عام .

زمن انتقال شعاع الضوء من a إلى b هو :

$$T = \int_a^b \frac{ds}{v}$$

حيث المسافة ds هى عنصر الطول فى المستوى (xy)

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx = \int_a^b F(z, y, y')\, dx \qquad (1)$$

حيث :

$$F(z, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} \qquad (2)$$

وطبقاً لقاعدة فيرمات : فإن الزمن T يكون أقل ما يمكن ، أى أن التكامل فى (1) يكون نهاية صغرى ، وشرط ذلك فى حساب التغاير أن الدالة F التى تكاملها يجب أن تحقق معادلة أويلر – لاجرانج وصورتها :

$$(F_{y'})' - F_y = 0$$

ونكمل الحل كما سبق فى الأمثلة المختلفة التالية .

أمثلة محلولة على مبدأ فيرمات :

مثال (1) : باعتبار أن زمن انتقال شعاع الضوء بين نقطتين فى المستوى (xy) هو :

$T = \int F dx$ حيث $F = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}$ ، وبتطبيق مبدأ فيرمات فى علم الضوء ، أثبت أن: مسار حركة شعاع الضوء يعطى بالمعادلة التفاضلية الآتية :

$$vy'' + (1+y'^2)^2 v_y - y'(1+y'^2)v_x = 0$$

حيث :

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

الحل : حيث أن :

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} \tag{1}$$

شرط أن يكون الزمن T أقل مايمكن هو أن الدالة $F(x,y,y')$ تحقق معادلة أويلر – لاجرانج

$$(F_{y'})' - F_y = 0 \tag{2}$$

فمن (1) نجد أن :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2}\left(-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2}v_y \tag{3}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}}.2y'\right)$$

$$= \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}} \tag{4}$$

$$(F_{y'})' = \frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

$$= \frac{v\sqrt{1+y'^2}.(y'') - y'\left[v.\frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}}(2y'y'') + 2\sqrt{1+y'^2}.\frac{\partial v}{\partial x}\right]}{v^2(1+y'^2)}$$

$$= \frac{vy''\left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] - y'\sqrt{1+y'^2}.\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2(1+y'^2)}$$

$$= \frac{vy''\left[\frac{(1+y'^2)-y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] - \frac{y'(1+y'^2)}{(1+y'^2)}\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2(1+y'^2)}$$

$$= \frac{vy'' - y'(1+y'^2)v_x}{v^2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

بالتعويض من (5) , (3) في (2) نجد أن :

$$\frac{vy'' - y'(1+y'^2)v_x}{v^2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2}v_y = 0$$

بالضرب في $v^2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ نحصل على :

$$vy'' - y'(1+y'^2)v_x + (1+y'^2)v_y = 0 \tag{6}$$

وهي معادلة المسار المطلوبة .

مثال (2) : باعتبار معادلة المسار لشعاع الضوء (المعادلة رقم (6)) ، وبأخذ $v = y$ أثبت أن مسار شعاع الضوء هو عبارة عن مجموعة دوائر ذات نصف قطر ثابت .

الحل : هنا : $v = y$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

بالتعويض فى معادلة المسار (6) نحصل على :

$$yy'' - y'(1+y'^2).y' + (1+y'^2)^2 = 0$$

$$\therefore yy'' - y'^2(1+y'^2) + (1+2y'^2+y'^4) = 0$$

$$\therefore yy'' + y'^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

<u>ولإيجاد معادلة المسار المطلوبة (علاقة بين y, x):</u>

يجب حل المعادلة التفاضلية رقم (1) وذلك بوضع :

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy}$$

$$\left[y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dy} \right]$$

وتصبح المعادلة (1) بالصورة :

$$yy'\frac{dy'}{dy} + (y'^2 + 1) = 0$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{y'dy'}{(1+y'^2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{2y'dy'}{(1+y'^2)}$$

$$\therefore \ln y = -\frac{1}{2}\ln(1+y'^2) + c$$

$$= \ln(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$\therefore \ln \frac{y}{(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}} = c = \ln a$$

$$\therefore \frac{y}{(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}} = a \;\rightarrow\; y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = a$$

بتربيع الطرفين :

$$y^2(1+y'^2)=a^2$$

$$\therefore y^2y'^2=a^2-y^2$$

$$\therefore\ y'^2=\frac{a^2-y^2}{y^2}\ \rightarrow\ y'=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \qquad (2)$$

وهو التكامل الأول للمعادلة (1) .

<u>ولإيجاد التكامل الثاني</u> :

من (2) :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على :

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\int dx$$

$$-\frac{1}{2}\int (-2ydy)(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}=\int dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\left[\frac{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]=x+b$$

$$\therefore -(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}=x+b$$

بالتربيع :

$$(a^2-y^2)=(x+b)^2$$

$$\therefore (x+b)^2+y^2=a^2$$

وهي معادلة مجموعة دوائر ذات نصف قطر ثابت (a) .

وهو المطلوب .

مسألة :

باعتبار معادلة المسار لشعاع الضوء (المعادلة رقم (6) فى المثال (1)) وبأخذ $v=\dfrac{1}{y}$ ،

أثبت أن مسار شعاع الضوء هو عبارة عن منحنيات السلسلة (الكتينة) وصورتها :

$$y=a\cosh\frac{x+b}{a}$$

حيث a, b ثابتان .

حل المسألة : بأخذ $v=\dfrac{1}{y}$ والتعويض فى معادلة المسار نحصل على :

$$\frac{y''}{y}-y'(1+y'^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right)+(1+y'^2)^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

$$\therefore \frac{y''}{y}-y'(1+y'^2)\left(-\frac{1}{y^2}y'\right)+(1+y'^2)^2\left(-\frac{1}{y^2}\right)=0$$

بالضرب فى y^2 :

$$yy''+y'^2(1+y'^2)-(1+y'^2)^2=0$$

$$\therefore yy''+y'^2+y'^4-(1+2y'^2+y'^4)=0 \;\rightarrow\; yy''-1-y'^2=0 \qquad (1)$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية : نضع

$$yy'\frac{dy'}{dy}-1-y'^2=0 \;\leftarrow\; y''=y'\frac{dy'}{dy}$$

$$\therefore yy'\frac{dy'}{dy}=1+y'^2 \rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{y'dy'}{1+y'^2}$$

وباجراء التكامل نحصل على :

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(1+y'^2)+c=\ln(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}+\ln a$$

$$\therefore \ln\frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=\ln a \quad\rightarrow\quad \frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=a$$

$$\therefore y=a(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad\rightarrow\quad y^2=a^2(1+y'^2)=a^2+a^2y'^2$$

$$\therefore a^2 y'^2 = y^2 - a^2 \quad \rightarrow \quad a y' = \sqrt{y^2 - a^2}$$

$$\therefore y' = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} = \frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\therefore \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \int dx$$

$$\therefore \cosh^{-1} \frac{y}{a} = \frac{1}{a}(x + b) \quad \rightarrow \quad \frac{y}{a} = \cosh \frac{x + b}{a}$$

$$\therefore y = a \cosh \frac{x + b}{a}$$

وهى معادلة منحنيات السلسلة (الكتينة) المعروفة :

وهو المطلوب .

مثال (3) : باعتبار أن زمن انتقال شعاع الضوء بين نقطتين فى المستوى هو : $T = \int F dx$

حيث : $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}$ ، v سرعة شعاع الضوء ، وبتطبيق مبدأ فيرمات ، أدرس الحالتين الخاصتين :

(i) $v = y$ (ii) $v = \frac{1}{y}$

وذلك بدون استخدام المعادلة التفاضلية لمسار شعاع الضوء (المعادلة (6) – مثال (1)).

الحل :

الحالة الأولى : عندما $\boxed{v = y}$

$$\therefore F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} = F(y, y') \tag{1}$$

أى أن F لاتعتمد صراحة على x ، فنستخدم الحالة الخاصة من معادلة أويلر – لاجرانج وصورتها :

$$F - y' F_{y'} = c \tag{2}$$

ومن (1) نجد أن :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{y}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

وبالتعويض فى (2) نحصل على :

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c$$

بضرب الطرفين فى $y\sqrt{1+y'^2}$ نحصل على :

$$(1+y'^2) - y'^2 = cy\sqrt{1+y'^2}$$

$$\therefore 1 = cy\sqrt{1+y'^2}$$

بالتربيع :

$$\therefore y^2(1+y'^2) = \frac{1}{c^2} = a^2$$

$$\therefore y^2 + y^2y'^2 = a^2 \;\rightarrow\; y^2y'^2 = a^2 - y^2$$

$$\therefore y'^2 = \frac{a^2-y^2}{y^2} \;\rightarrow\; y' = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} = \frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\therefore \int \frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \int dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\int (-2ydy)(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} = \int dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\left[\frac{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] = x + b$$

$$\therefore -(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}} = x + b$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :

$$(a^2 - y^2) = (x + b)^2$$

$$\therefore (x + b)^2 + y^2 = a^2$$

وهى المعادلة المطلوبة (معادلة مسار شعاع الضوء فى هذه الحالة) ، وواضح أنها تمثل مجموعة دوائر ذات نصف قطر a .

الحالة الثانية : عندما $\boxed{v = \dfrac{1}{y}}$

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\frac{1}{y}} = y\sqrt{1 + y'^2} = F(y, y') \qquad (1)$$

وهنا نستخدم أيضاً الحالة الخاصة من معادلة أويلر – لاجرانج وهى :

$$F - y' F_{y'} = c \qquad (2)$$

ومن (1) :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

وبالتعويض فى (2) :

$$y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

وبالضرب فى $\sqrt{1 + y'^2}$ نحصل على :

$$y(1 + y'^2) - yy'^2 = c\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\therefore y = c\sqrt{1 + y'^2}$$

وبالتربيع نجد أن :

$$\therefore y^2 = c^2(1 + y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

$$\therefore c^2 y'^2 = y^2 - c^2$$

$$\therefore y'^2 = \frac{y^2 - c^2}{c^2} \rightarrow y' = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - c^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c}\int dx$$

$$\therefore \cosh^{-1}\frac{y}{c} = \frac{1}{c}(x + b)$$

$$\therefore \frac{y}{c} = \cosh\frac{x + b}{c}$$

$$\therefore y = c \cosh\frac{x + b}{c}$$

وهى معادلة مسار شعاع الضوء فى هذه الحالة ، وواضح أنها تمثل معادلة منحنيات السلسلة (الكتينة) .

[7] تعميمات معادلة أويلر – لاجرانج :

(1) حالة وجود مشتقة ثانية للدالة y:

مثال : إذا كانت الدالة F هى دالة فى x, y, y', y'' أى أذا كانت

$$F = F(x, y, y', y'')$$

حيث :

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

فإن معادلة أويلر – لاجرانج تأخذ الصورة الآتية :

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \qquad (1)$$

أى الصورة :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

ملحوظة : إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن : $F_y - (F_{y'})' = 0$ وهى معادلة أويلر – لاجرانج فى صورتها المعتادة وتعتبر حالة خاصة من (1) :

إثبات (1):

نعتبر التكامل الدالى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')dx$$

شرط أن يكون لهذا التكامل نهاية قصوى هو : $\delta I = 0$

$$\therefore \delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = 0$$

ومن تعريف δF حيث $F = F(x, y, y', y'')$ فإن :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'' \qquad (3)$$

بالتعويض فى (2) نحصل على :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\right] dx = 0$$

وباجراء عمليتى تكامل بالتجزئ على الحدين الثانى والثالث نحصل على :

<u>أولا</u> : <u>التكامل على الحد الثاني</u> :

باعتبار أن :

$$\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y) \quad , \quad \delta y\,|_{x_1} = \delta y\,|_{x_2} = 0$$

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y\, d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \delta y\, d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx \qquad (5)$$

ثانيا : التكامل على الحد الثالث :

باعتبار أن :

$$\delta y'' = \frac{d}{dx}(\delta y') \quad , \quad \delta y'|_{x_1} = \delta y'|_{x_2} = 0$$

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\frac{d}{dx}(\delta y')dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} d(\delta y')$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y' d\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \delta y' d\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \delta y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y' dx \qquad (6)$$

للتخلص من $\delta y'$ [تحويلها إلى δy] :

نعوض بالعلاقة $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$ فى (6) فنحصل على :

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'' dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\frac{d}{dx}(\delta y)dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)d(\delta y)$$

$$= -\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y\, d\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}\right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta y\, d\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta y \cdot \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y dx \qquad (7)$$

بالتعويض من (7) , (5) فى (4) نحصل على :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y dx = 0$$

ومن نظرية سابقة : حيث أن δy إختيارية فإن :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0$$

وهو المطلوب .

(2) <u>حالة وجود مشتقات أعلى من الثانية للدالة</u> y :

[معادلة أويلر – بواسون]

إذا كانت الدالة F تعطى بالصورة :

$$F = F(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)})$$

حيث $y^{(n)}$ هى المشتقة النونية للدالة y فإن شرط أن يكون للتكامل الدالى : $I = \int_{x_1}^{x_2} F dx$ نهاية قصوى هو أن تتحقق المعادلة الآتية :

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' - (F_{y'''})''' + \ldots + (-1)^n (F_{y^{(n)}})^{(n)} = 0$$

وهذه المعادلة تمثل الصورة العامة لمعادلة أويلر – لاجرانج فى حالة وجود مشتقات أعلى من الثانية للدالة y ، وتعرف بمعادلة أويلر – بواسون (Euler-Poisson Equation)

<u>حالة خاصة</u> : إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن $F_{y''}$ والمشتقات الأعلى تتلاشى ، ونحصل على :

$$F_y - (F_{y'})' = 0$$

وهى معادلة أويلر – لاجرانج .

مثال : بإستخدام معادلة أويلر – بواسون ، أوجد منحنى النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_0^1 (1 + y''^2)dx$$

مع الشروط الحدية :

$$y(0) = 0 \;,\; y(1) = 1 \;,\; y'(0) = 1 \;,\; y'(1) = 1$$

الحل : معادلة أويلر – بواسون

$$F = F(x, y, y', y'') \leftarrow F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \qquad (1)$$

$$I = \int_0^1 F dx \;,\; F = 1 + y''^2 = F(x, y'') \qquad (2)$$

(لايوجد اعتماد على y, y' فى الدالة F)

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \;,\; F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

وتؤول المعادلة (1) إلى :

$$(F_{y''})'' = 0 \qquad (3)$$

ومن (2) نجد أن :

$$F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

بالتعويض فى (3) نحصل على :

$$(2y'')'' = 0$$

$$\therefore 2y^{(4)} = 0 \rightarrow y^{(4)} = 0 \rightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \qquad (4)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الرابعة يمكن حلها بالتكامل أربع مرات للحصول على y وينتج لدينا 4 ثوابت .

بالتكامل بالنسبة إلى x :

التكامل الأول : $y^{(3)} = y''' = c_1$

التكامل الثانى : $y^{(2)} = y'' = c_1 x + c_2$

التكامل الثالث : $y^{(1)} = y' = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

التكامل الرابع : $y = c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$

وبكتابة الثوابت بالصورة الآتية :

$$\frac{c_1}{6} = a \ , \ \frac{c_2}{2} = b \ , \ c_3 = c \ , \ c_4 = d$$

$$\therefore y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (5)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (4) وهى فى نفس الوقت معادلة منحنى النهاية القصوى المطلوبة ولكن بدلالة الثوابت a, b, c, d .

ولإيجاد هذه الثوابت : نستخدم الشروط الحديه المعطاه

$$y(0) = 0 \ , \ y(1) = 1 \ , \ y'(0) = 1 \ , \ y'(1) = 1$$

فمن (5) بالتفاضل نحصل على :

$$y^1 = 3ax^2 + 2bx + c \qquad (6)$$

بالتعويض بالشروط الحديه فى (5) , (6) :

$$y(0) = 0 \ \rightarrow \ 0 = 0 + 0 + 0 + d \ \rightarrow \ \boxed{d = 0} \qquad (7)$$

$$y(1) = 1 \ \rightarrow \ 1 = a + b + c \qquad (8)$$

$$y'(0) = 1 \ \rightarrow \ 1 = c \ \rightarrow \ \boxed{c = 1} \qquad (9)$$

$$y'(1) = 1 \ \rightarrow \ 1 = 3a + 2b + 1 \ \rightarrow \ 3a + 2b = 0 \qquad (10)$$

بالتعويض من (9) فى (8) :

$$1 = a + b + 1 \ \rightarrow \ a + b = 0 \qquad (11)$$

من (11) $\leftarrow$ $a = -b$

وبالتعويض فى (10) $\leftarrow$ $-3b + 2b = 0$ $\leftarrow$ $\boxed{b = 0}$

ولكن $a = -b$ $\leftarrow$ $\therefore \boxed{a = 0}$

$\therefore$ الثوابت الأربعة :

$$a = 0 \ , \ b = 0 \ , \ c = 1 \ , \ d = 0$$

وتصبح المعادلة (5) [معادلة المنحنى المطلوبة] بالصورة : $y = x$

وهى معادلة خط مستقيم . وهو المطلوب .

ملحوظة : يختلف شكل المنحنى باختلاف الشروط الحدية المعطاه ، لأنه كلما اختلفت الشروط الحدية اختلفت قيم الثوابت وبالتالى اختلف شكل معادلة المنحنى .

أمثلة محلولة على معادلة أويلر – بواسون :

مثال (1) : طبق معادلة أويلر – بواسون لايجاد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (16y^2 + 2x^2 y - y''^2)dx$$

الحل :

$$I = \int F dx$$

حيث :

(1) $$F = 16y^2 + 2x^2 y - y''^2$$

معادلة أويلر – بواسون :

(2) $$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0$$

ومن (1) :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 32y + 2x^2$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$F_{y''} = -2y''$$

بالتعويض فى (2) نحصل على :

$$32y + 2x^2 + (-2y'')'' = 0$$

$$32y + 2x^2 - 2y^{(4)} = 0$$

(3) $$\therefore \; y^{(4)} - 16y = x^2$$

وهى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة

الحل العام لها :

(4) $$y = \underbrace{y_c}_{\text{الحل المتمم}} + \underbrace{y_p}_{\text{الحل الخاص}}$$

لايجاد y_c : هو حل المعادلة المتجانسة :

$$y^{(4)} - 16y = 0$$

المعادلة المساعدة :

$$\lambda^4 - 16 = 0 \quad \to \quad (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$(\lambda^2 - 4) = 0 \quad ، \quad (\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\lambda^2 = 4 \qquad\qquad \lambda^2 = -4$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\lambda = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \qquad \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$+2 = \lambda_1, \ -2 = \lambda_2 \qquad +2i = \lambda_3, \ -2i = \lambda_4$$

هنا الجذور مختلفة وبعضها تخيلى فيكون الحل هو[أنظر الملحق (1) فى نهاية الكتاب] :

$$y_c = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_3 x} + De^{\lambda_4 x}$$

$$= Ae^{2x} + Be^{-2x} + Ce^{2ix} + De^{-2ix}$$

$$= Ae^{2x} + Be^{-2x} + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \qquad (5)$$

<u>لايجاد</u> y_p : هو حل المعادلة غير المتجانسة :

$$y^{(4)} - 16y = x^2$$

نستخدم طريقة المؤثر D كالتالى :

$$y^{(4)} - 16y = x^2 \quad \to \quad Dy^4 - 16y = x^2$$

$$\therefore (D^4 - 16)y = x^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$F(D)y = \phi(x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{F(D)}\phi(x)$$

$$= \frac{1}{D^4 - 16}(x^2) = \left(\frac{1}{-16}\right)(x^2) = \frac{-x^2}{16} \qquad (6)$$

ويصبح الحل المطلوب [بالتعويض من (6) , (5) فى (4)]

$$y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{x^2}{16}$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : باستخدام معادلة أويلر – بواسون

أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y\sin x)dx$$

الحل :

$$I = \int Fdx$$

حيث :

$$F = y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y\sin x \qquad (1)$$

معادلة أويلر – بواسون

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \qquad (2)$$

ومن (1) :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\sin x$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = -4y' \quad , \quad F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

بالتعويض فى (2) نحصل على :

$$2y - 2\sin x - (-4y')' + (2y'')'' = 0$$

$$2y - 2\sin x + 4y'' + 2y^{(4)} = 0$$

$$\therefore y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x \qquad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة حلها العام هو :

$$y = y_c + y_p \qquad (4)$$

لايجاد y_c (الحل المتمم) : هو حل المعادلة المتجانسة

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

المعادلة المساعدة :

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1) \quad (\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\lambda^2 = -1 \qquad \lambda^2 = -1 \qquad \lambda_1 = +i, \ \lambda_2 = -i$$

$$\therefore \lambda = \pm i \qquad \therefore \lambda^2 = \pm 1 \qquad \lambda_1 = +i, \ \lambda_2 = -i$$

∴ الجذور تخيلية ومتكررة فيكون الحل [أنظر الملحق (1) نهاية الكتاب]:

$$y_c = A\sin x + Bx\sin x + C\cos x + Dx\cos x \qquad (5)$$

لايجاد y_p (الحل الخاص) : هو حل المعادلة غير المتجانسة

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = \sin x$$

نستخدم طريقة المؤثر D [أنظر الملحق (2) فى نهاية الكتاب] .

$$(y^4 + 2y^2 + 1)y = \sin x \;\rightarrow\; (D^4 + 2D^2 + 1)y = \sin x$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{F(D)}\sin x = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1}\sin x$$

$$= \frac{1}{(D^2+1)^2}\sin x \qquad (6)$$

وباستخدام قواعد إيجاد y_p لمثل هذه الحالة نجد أن :

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\left[\frac{1}{D^2+1}(\sin x)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2+1}\left[-\frac{x}{2}\cos x\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{D^2+1}(x\cos x)$$

نستخدم القانون الآتى :

$$\frac{1}{D^2+1}(x\cos x) = \left[x\frac{1}{D^2+1}(\cos x) - \frac{2D}{(D^2+1)^2}\cos x\right]$$

$$\therefore y_p = -\frac{1}{2}\left[x\left(\frac{x}{2}\sin x\right) - \frac{2}{(D^2+1)^2}(-\sin x)\right]$$

$$= -\frac{x^2}{4}\sin x - \frac{1}{(D^2+1)^2}\sin x \qquad (7)$$

بمساواة (7) , (6) نجد أن :

$$\frac{1}{(D^2+1)^2}\sin x = -\frac{x^2}{4}\sin x - \frac{1}{(D^2+1)^2}\sin x$$

$$\frac{2}{(D^2+1)^2}\sin x = -\frac{x^2}{4}\sin x$$

وبالقسمة على 2 :

$$\frac{1}{(D^2+1)^2}[\sin x] = -\frac{x^2}{8}\sin x \qquad (8)$$

$$\therefore y_p = -\frac{x^2}{8}\sin x \qquad (9)$$

ويصبح الحل المطلوب :

$$y = y_c + y_p = A\sin x + Bx\sin x + C\cos x + Dx\cos x - \frac{x^2}{8}\sin x$$

$$= \left(A + Bx - \frac{x^2}{8}\right)\sin x + (C + Dx)\cos x$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : أوجد المنحنى الذى يجعل التكامل الدالى الآتى نهاية قصوى

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)dx$$

مع الشروط الحدية :

$$y(0) = 1,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad y'(0) = 0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

الحل :

$$I = \int F dx$$

حيث :

$$F = y''^2 - y^2 + x^2 \qquad (1)$$

معادلة أويلر – بواسون

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \qquad (2)$$

ومن (1) :

$$F_y = -2y,\quad F_{y'} = 0,\quad F_{y''} = 2y''$$

بالتعويض فى (2)

$$-2y - 0 + (2y'')'' = 0$$

$$-2y + 2y^{(4)} = 0 \rightarrow y^{(4)} - y = 0 \qquad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة ، ولايجاد الحل العام لها :

المعادلة المساعدة :

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda^2 = 1 \quad , \quad \lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm 1 \quad , \quad \lambda = \pm i$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = +i, \ \lambda_4 = -i$$

∴ الجذور مختلفة وبعضها تخيلى فيكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_3 x} + De^{\lambda_4 x}$$

$$= Ae^{x} + Be^{-x} + Ce^{ix} + De^{-ix}$$

$$= Ae^{x} + Be^{-x} + G\sin x + H\cos x \qquad (4)$$

وهى معادلة المنحنى المطلوب بدلالة الثوابت A, B, G, H

<u>ولإيجاد هذه الثوابت</u> : نستخدم الشروط الحدية

$$y(0) = 1 \ , \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \ , \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

فمن (4) :

$$y' = Ae^{x} - Be^{-x} + G\cos x - H\sin x \qquad (5)$$

نعوض بالشروط الحدية :

$$1 = A + B + H \qquad (6) \qquad \sin 0 = 0$$

$$0 = Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{-\frac{\pi}{2}} + G \qquad (7) \qquad \cos 0 = 1$$

$$0 = A - B + G \qquad (8) \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$-1 = Ae^{\frac{\pi}{2}} - Be^{-\frac{\pi}{2}} - H \qquad (9) \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

وهى 4 معادلات جبرية فى المجاهيل الأربعة A, B, G, H وبحل هذه المعادلات بالطرق الجبرية المعتادة نحصل على هذه المجاهيل بالصورة :

$$A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad G = 0 \quad , \quad H = 1$$

وتصبح الصورة النهاية لمعادلة المنحنى المطلوب :

$$y = \cos x$$

مسألة : حل المعادلات الأربعة (9) ,(8) ,(7) ,(6) لإيجاد الثوابت A, B, G, H :

الحل : بجمع (9) , (6) نحصل على :

$$0 = A(1 + e^{\frac{\pi}{2}}) + B(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) \qquad (10)$$

ومن (8) , (7) بالطرح نحصل على :

$$0 = A(1 - e^{\frac{\pi}{2}}) - B(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) \qquad (11)$$

من (11) , (10) بالجمع :

$$0 = 2A - 2Be^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore A = Be^{-\frac{\pi}{2}} \rightarrow B = Ae^{\frac{\pi}{2}} \qquad (12)$$

بالتعويض فى (9) , (6) :

$$1 = A + Ae^{\frac{\pi}{2}} + H$$

$$-1 = Ae^{\frac{\pi}{2}} - A - H$$

بالجمع نحصل على :

$$\boxed{A = 0} \leftarrow \quad 0 = 2Ae^{\frac{\pi}{2}}$$

ومن (12) $\leftarrow$ $\therefore \boxed{B = 0}$

وبالتعويض عن A, B فى (8) , (6) $\leftarrow$ $\boxed{G = 0}$, $\boxed{H = 1}$

مسألة : بإستخدام معادلة أويلر – بواسون

أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى الآتى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + y^2 - 2yx^3)dx$$

<u>حل المسألة</u> :

$$I = \int F dx$$

$$F = y'''^2 + y^2 - 2yx^3 \qquad (1)$$

معادلة أويلر – بواسون فى هذه الحالة تأخذ الصورة :

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' - (F_{y'''})''' = 0 \qquad (2)$$

ومن (1) نجد أن :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x^3, \quad F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = 0, \quad F_{y'''} = 2y'''$$

بالتعويض فى (2) نحصل على :

$$2y - 2x^3 - (2y''')''' = 0$$

$$2y - 2x^3 - 2y^{(6)} = 0 \rightarrow y^{(6)} - y = -x^3 \qquad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية غير متجانسة حلها العام :

$$y = y_c + y_p \qquad (4)$$

<u>لإيجاد</u> y_c : حل المعادلة المتجانسة

$$y^{(6)} - y = 0$$

المعادلة المساعدة $\lambda^6 - 1 = 0$ وهى معادلة جبرية من الدرجة السادسة (لها 6 جذور)
ويمكن كتابتها بالصورة :

$$(\lambda^3 - 1)(\lambda^3 + 1) = 0$$

$$[(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)][(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)] = 0$$

$$(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda = 1 \quad , \quad (\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$(\lambda^3 - 1)$
فرق بين مكعبين

$(\lambda^3 + 1)$
مجموع مكعبين

وهنا الجذور مختلفة وبعضها تخيلى فيكون الحل بالصورة :

$$y_c = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} + c_4 e^{\lambda_4 x} + \ldots\ldots$$

$$=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})x}+c_4e^{(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})x}+\dots\dots\dots$$

$$=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}x}+c_4e^{-\frac{i\sqrt{3}}{2}x}\right)+\dots\dots\dots$$

$$=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dots\dots\dots \tag{5}$$

لإيجاد y_p : الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

$$y^{(6)}-y=-x^{3}$$

$$(D^6-1)y=-x^3$$

$$y^{(6)}=\frac{d^6y}{dx^6}=D^6y$$

$$F(D)y=\phi(x)$$

$$y_p=\frac{1}{F(D)}\phi(x)=\frac{1}{D^6-1}(-x^3)$$

$$y_p=\frac{1}{F(D)}\phi(x)=\frac{1}{D^6-1}(-x^3)$$

$$=\frac{(-x^3)}{-1}=x^3 \tag{6}$$

وبالتعويض من (6) , (5) فى (4) نحصل على المنحنيات المطلوبة بالصورة الآتية :

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$+e^{\frac{1}{2}x}\left(C\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+D\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^3$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$$

الحل : المعادلة المساعدة هى :

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

وهى معادلة جبرية من الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بالصورة :

$$(\lambda + 1) \quad (\lambda - 2) \quad (\lambda - 3) = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\lambda = -1 = \lambda_1 \ , \ \lambda = 2 = \lambda_2 \ , \ \lambda = 3 = \lambda_3$$

وهى جذور حقيقية ومختلفة فيكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_3 x}$$

$$= Ae^{-x} + Be^{2x} + Ce^{3x}$$

(2) إذا كانت الجذور حقيقية وبعضها متكرر :

فإذا كان λ_1 مثلا جذرا متكررا فإن الحل يكون :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x} + \dots\dots\dots$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية :

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = 0$$

الحل : المعادلة المساعدة

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

وهى معادلة من الدرجة الرابعة (لها 4 جذور) و يمكن كتابتها بالصورة :

$$\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2 \quad [(\lambda + 1) \quad (\lambda - 2)] = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\lambda = 0, \quad 0 \ \Big| \ \lambda = -1 = \lambda_2 \ \Big| \ \lambda = -1 = \lambda_2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\lambda_1 \quad \lambda_1$$

وهنا الجذور حقيقية وبعضها متكرر فيكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_2 x} + Dxe^{\lambda_2 x}$$

$$= Ae^{0x} + Bxe^{0x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x}$$

$$= A + Bx + Ce^{-x} + Dxe^{-x}$$

(3) **إذا كانت الجذور مختلفة وبعضها تخيلي** :

في هذه الحالة يكون الحل بالصورة : $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + \dots\dots\dots$

مثال : حل المعادلة : $y'' + a^2 y = 0$

الحل : المعادلة المساعدة هي : $\lambda^2 + a^2 = 0$

$$\lambda^2 = -a^2 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-a^2} = \pm ia$$

$\lambda_1 = +ia, \ \lambda_2 = -ia$ $\leftarrow$ الجذران تخيليان ومختلفان ويكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{iax} + Be^{-iax} \qquad (1)$$

ويمكن كتابة (1) بدلالة sin, cos حيث أن :

$$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax \ , \ e^{-iax} = \cos ax - i \sin ax$$

وتصبح (1) بالصورة :

$$y = C \cos ax + D \sin ax \qquad (2)$$

(4) **الجذور تخيلية ومتكررة** :

تماما مثل الحالة (2) مع ظهور تركيبه من sin, cos [بظهوز الجذور التخيلية] .

مثال : حل المعادلة المتجانسة

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$$

الحل : المعادلة المساعدة هي :

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$$

وهى معادلة جبرية من الدرجة الرابعة (لها 4 جذور) ويمكن كتابتها بالصورة :

$$(\lambda^2 + 4) \ (\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$\lambda^2 = -4$	$\lambda^2 = -4$
$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$	$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$\lambda = +2i$,	$+2i$	$-2i$,	$-2i$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
λ_1	λ_1	λ_2	λ_2

ويكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x} + Ce^{\lambda_2 x} + Dxe^{\lambda_2 x}$$

$$= Ae^{2ix} + Bxe^{2ix} + Ce^{-2ix} + Dxe^{-2ix}$$

$$= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 x \sin 2x + C_4 x \cos 2x$$

$$\therefore y = C_1 \sin 2x + C_3 x \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_4 x \cos 2x$$

ملحق (2)

حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة [باستخدام المؤثر D]

تأخذ هذه المعادلة الصورة الآتية :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \phi(x) \qquad (1)$$

حيث :

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ معاملات (أعداد ثابتة)

إذا أخذنا $\phi(x) = 0$ نحصل على المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

وبادخال المؤثر التفاضلى D حيث :

$$D = \frac{d}{dx},\ D^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2},\ \dots,\ D^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}$$

تصبح المعادلة (1) بالصورة :

$$a_0 D^{(n)} y + a_1 D^{(n-1)} y + \dots + a_n y = \phi(x)$$

$$\therefore [a_0 D^{(n)} + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_n] y = \phi(x)$$

$$\therefore F(D) y = \phi(x) \qquad (2)$$

حيث :

$$F(D) = a_0 D^{(n)} + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_n$$

المعادلة (2) تمثل الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة .

<u>الحل العام للمعادلة (2)</u> :

هذا الحل هو مجموع حلين :

(1) الحل المتمم y_c وهو عبارة عن حل المعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$

(2) الحل الخاص y_p للمعادلة غير المتجانسة (2) ، ويأخذ هذا الحل صورا متعددة .

∴ الحل العام يكون :

$$y = y_c + y_p \tag{3}$$

إيجاد الصور المختلفة للحل الخاص y_p :

تعتمد هذه الصور على شكل الدالة $\phi(x)$

فمن المعادلة (2) نجد أن :

$$y_p = \frac{1}{F(D)}\phi(x)$$

يسمى المؤثر $\dfrac{1}{F(D)}$ بالمؤثر العكسى وله عدة صور منها :

$$\frac{1}{D \pm m}, \frac{1}{(D-m)^2}, \dots, \frac{1}{D^2+m^2}, \dots$$

حيث m عدد ثابت .

قواعد إيجاد y_p :

توجد لدينا عدة قواعد لايجاد y_p نلخصها فى الحالات الآتية :

الحالة الأولى : إذا كانت $\phi(x) = x^m$ وكانت $a_n \neq 0$ فى المؤثر $F(D)$ ، فإن :

$$y_p = \frac{1}{F(D)}x^m = \frac{x^m}{a_n}$$

مثال (1) :

$$y_p = \frac{1}{D^2+5}x = \frac{x}{5} \quad , \quad [a_n = 5]$$

مثال (2) :

$$y_p = \frac{1}{D^6-5}(-x^3) = \frac{(-x^3)}{(-1)} = x^3$$

مثال (3) :

$$y_p = \frac{1}{D^5+D^3+10}x^2 = \frac{x^2}{10}$$

[أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة :

$$[(D^5 + D^3 + 10)y = x^2 \rightarrow F(D)y = \phi(x)$$

الحالة الثانية : أذا كان المؤثر العكسى له الصورة :

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{D \pm m}$$

فإن الحل الخاص y_p يأخذ الصورة الآتية :

$$y_p = \frac{1}{D \pm m}\phi(x) = e^{\mp mx}\int e^{\pm mx}\phi(x)dx \qquad (3)$$

حيث $\phi(x)$ يمكن أن تأخذ الصور الآتية :

حيث $a \neq m$ ، $\phi(x) = A,\ e^{ax},\ e^{mx},\ \sin ax,\ \cos ax$

مثال (1) : إذا كانت $\phi(x) = A$ حيث A ثابت

$$\therefore y_p = \frac{1}{D-m}A = e^{mx}\int e^{-mx}A\,dx$$

$$= Ae^{mx}\left[\frac{e^{-mx}}{-m}\right] + C$$

$$= \frac{A}{-m} + C$$

مثال (2) : إذا كانت $\phi(x) = e^{ax}$ حيث $a \neq m$

$$y_p = \frac{1}{D-m}e^{ax} = e^{mx}\int e^{-mx}e^{ax}dx$$

$$= e^{mx}\int e^{(a-m)x}dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a-m} + c$$

مثال (3) : إذا كانت $\phi(x) = e^{mx}$

$$y_p = \frac{1}{D-m}e^{mx} = e^{mx}\int e^{-mx}e^{mx}dx$$

$$= e^{mx}\int dx = xe^{mx} + c$$

مثال (4) :

$$y_p = \frac{1}{(D-m)^2} e^{mx}$$

$$= \frac{1}{D-m}\left[\frac{1}{D-m} e^{mx}\right]$$

$$= \frac{1}{D-m}(xe^{mx})$$

$\phi(x) = xe^{mx}$

$$= e^{mx} \int e^{-mx}(xe^{mx})dx$$

$$= e^{mx} \int x dx = \frac{x^2}{2} e^{mx} + c = \frac{x^2}{2!} e^{mx} + c$$

وبوجه عام فإن :

$$y_p = \frac{1}{(D-m)^n} e^{mx} = \frac{x^n}{n!} e^{mx} + c$$

فمثلا :

$m = 3$

$n = 2$

$$y_p = \frac{1}{(D-3)^2} e^{3x} = \frac{x^2}{2!} e^{3x} + c$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + c$$

مثال (5) :

$$y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)}(3e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{D+1}\left[\frac{1}{D-2}(3e^{-2x})\right]$$

$$= \frac{1}{D+1}\left[e^{2x} \int e^{-2x}(3e^{-2x})dx\right] \quad ,$$

[من القانون (3)]

$$\downarrow$$

$$= \frac{1}{D+1}\left[e^{2x} .3\left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{D+1}\left[-\frac{3}{4}e^{-2x}\right]+c$$

$$= e^{-x}\int e^{x}\left(-\frac{3}{4}e^{-2x}\right)dx + c$$ [من القانون (3)]

$$= e^{-x}\left[-\frac{3}{4}\frac{e^{-x}}{-1}\right]+c = \frac{3}{4}e^{-2x} + c$$

<u>مثال (6)</u> : إذا كانت $\phi(x) = \sin ax$ ، نستخدم القانون :

$$y_p = \frac{1}{D-m}\sin ax = \frac{1}{m^2+a^2}[-a\cos ax - m\sin ax]$$

وإذا كانت $\phi(x) = \cos ax$ ، نستخدم القانون :

$$y_p = \frac{1}{D-m}\cos ax = \frac{1}{m^2+a^2}[a\sin x - m\cos ax]$$

<u>وكأمثلة على هذين القانونين</u> :

(1) $$= \frac{1}{D-3}\sin 5x = \frac{1}{9+25}[-5\cos 5x - 3\sin 5x]$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$m = 3 \quad a = 5$$

$$= -\frac{1}{34}[5\cos 5x + 3\sin 5x]$$

(2) $$\frac{1}{D+1}\sin x = \frac{1}{2}[-\cos x + \sin x]$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$m = -1 \quad a = 1$$

$$= \frac{1}{2}[\sin x - \cos x]$$

(3) $$\frac{1}{D+4}\cos 2x = \frac{1}{16+4}[2\sin 2x + 4\cos 2x]$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$m = -4 \quad a = 2$$

$$= \frac{1}{10}[\sin 2x + 2\cos 2x]$$

الحالة الثالثة : إذا كان المؤثر العكسي له الصورة الآتية :

$$\frac{1}{F(D)}=\frac{1}{D^2+m^2}$$

وكانت $\phi(x)=\sin ax\,,\cos ax$

القاعدة هي :

$$(1)\ y_p=\frac{1}{D^2+m^2}\sin ax=\begin{cases}-\dfrac{x}{2a}\cos ax & (a=m)\\ \dfrac{1}{m^2-a^2}\sin ax & (a\neq m)\end{cases}$$

$$(2)\ y_p=\frac{1}{D^2+m^2}\cos ax=\begin{cases}\dfrac{x}{2a}\sin ax & (a=m)\\ \dfrac{1}{m^2-a^2}\cos ax & (a\neq m)\end{cases}$$

$$\therefore y_p=\frac{1}{D^2+m^2}\begin{smallmatrix}\sin ax\\ \\ \cos ax\end{smallmatrix}=\begin{cases}\mp\dfrac{x}{2a}\begin{smallmatrix}\cos ax\\ \\ \sin ax\end{smallmatrix} & (a=m)\\ \dfrac{1}{m^2-a^2}\begin{smallmatrix}\sin ax\\ \\ \cos ax\end{smallmatrix} & (a\neq m)\end{cases}$$

مثال (1) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''+4y=\sin x$ بدلالة المؤثر D

الحل : نكتب المعادلة بالصورة :

$$(D^2+4)y=\sin x$$

$$\therefore y_p=\frac{1}{D^2+4}\sin x$$

$m=2$

$a=1$

$a\neq m$

وبتطبيق القاعدة :

$$y_p=\frac{1}{m^2-a^2}\sin x=\frac{1}{4-1}\sin x=\frac{1}{3}\sin x$$

مثال (2) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y''+4y=\cos x+\sin 2x$$

بدلالة المؤثر D .

حيث :

$$\frac{1}{D}\left(\frac{1}{x^2}\right)=D^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{D}\left(\frac{1}{x}\right)=D^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x$$

<u>مثال (2)</u> : أوجد الحل الخاص :

$$y_p=\frac{1}{(D-1)^2}(x-1)e^x$$

<u>الحل</u> : هنا : $F(D)=(D-1)^2$ ، $[a=1]e^{ax}=e^x$ ، $\phi(x)=(x-1)$

وبتطبيق نظرية إزاحة المؤثر نحصل على :

$$y_p=e^x\frac{1}{(D-1+1)^2}(x-1)$$

$$=e^x\frac{1}{D^2}(x-1)=e^x\frac{1}{D}\left[\frac{1}{D}(x-1)\right]$$

$$=e^x D^{-1}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]=e^x\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{D}(x)=D^{-1}x=\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{D}(1)=D^{-1}(1)=x$$

<u>الحالة السادسة</u> : **نظرية (3) [المؤثر العكسى مع دالة مضروبة فى x**

نستخدم القانون الآتى :

$$y_p=\frac{1}{F(D)}[x\,\phi(x)]$$

$$=x\frac{1}{F(D)}\phi(x)-\frac{F'(D)}{F^2(D)}\phi(x)$$

<u>مثال (1)</u> : أوجد الحل الخاص :

$$y_p=\frac{1}{D^2+1}[x\sin 2x]$$

] الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة :

$$[y''+y=x\sin 2x$$

الحل :

$$F(D)=D^2+1$$

$$F'(D)=2D$$

$$F^2(D)=(D^2+1)^2$$

$$D(\sin 2x)=2\cos 2x$$

بتطبيق القانون حيث $\phi(x)=\sin 2x$

$$y_p=x\frac{1}{D^2+1}\sin 2x-\frac{2D}{(D^2+1)^2}\sin 2x$$

$$=x\frac{1}{1-4}\sin 2x-\frac{2}{(D^2+1)^2}(2\cos 2x)$$

$$=-\frac{1}{3}x\sin 2x-4\frac{1}{D^2+1}\left[\frac{1}{D^2+1}\cos 2x\right]$$

$$=-\frac{1}{3}x\sin 2x-4\frac{1}{D^2+1}\left[\frac{1}{1-4}\cos 2x\right]$$

$$=-\frac{1}{3}x\sin 2x+\frac{4}{3}\left[\frac{1}{D^2+1}\cos 2x\right]$$

$$=-\frac{1}{3}x\sin 2x+\frac{4}{3}\left[\frac{1}{1-4}\cos 2x\right]$$

$$=-\frac{1}{3}x\sin 2x-\frac{4}{9}\cos 2x=-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\cos 2x+x\sin 2x\right)$$

استخدمنا الحالة الثالثة

في إيجاد :

$$\frac{1}{D^2+1}\sin 2x\ ,$$

$$\frac{1}{D^2+1}\cos 2x\ ,\ldots\ldots$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y''+y=x\cos x$$

الحل : باستخدام المؤثر D :

$$(D^2+1)y=x\cos x$$

$$\therefore y_p=\frac{1}{D^2+1}x\cos x \qquad (1)$$

بتطبيق القانون نحصل على :

$$F(D)=D^2+1$$

$$F'(D)=2D$$

$$y_p=x\frac{1}{D^2+1}\cos x-\frac{2D}{(D^2+1)^2}\cos x$$

$$=x\left[\frac{x}{2}\sin x\right]+2\frac{1}{(D^2+1)^2}\sin x$$

$$= \frac{x^2}{2}\sin x + 2\frac{1}{D^2+1}\left[\frac{1}{D^2+1}\sin x\right]$$

$$F^2(D) = (D^2+1)^2$$

$$= \frac{x^2}{2}\sin x + 2\frac{1}{D^2+1}\left[-\frac{x}{2}\cos x\right]$$

$$D(\cos x) = -\sin x$$

$$= \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{D^2+1}(x\cos x) \qquad (2)$$

بمساواة (2) , (1) :

$$\frac{1}{D^2+1}x\cos x = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{D^2+1}x\cos x$$

$$\therefore \frac{2}{D^2+1}x\cos x = \frac{x^2}{2}\sin x$$

بالقسمة على 2 :

$$\therefore \frac{1}{D^2+1}x\cos x = \frac{x^2}{4}\sin x$$

وبالتعويض فى (2) نحصل على :

$$y_p = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{x^2}{4}\sin x$$

$$= \frac{x^2}{4}\sin x$$

وهو المطلوب .

إنتهى الكتاب بحمد الله تعالى