الباب الثامن

الجبر البولياني

Boolean Algebra

مقدمة

الجبريات البوليانية ظهرت بعد الرياضي الانجليزي جورج بول (١٨١٥-١٨٦٤) George Boole الذي نشر في عام ١٨٥٤ أطروحته " إستقصاء قوانين التفكير" An Investigation of the laws of Though. في عام ١٩٣٨ طور كلاود شانون Claude Shannon جبر دوال التحويلات (المفاتيح) وبين أن تركيبته لها علاقة بما قدمه بول. الجبريات لها أهمية خاصة لعلوم الحاسب بسبب تطبيقها المباشر على نظرية المفاتيح (التحويلات) switching theory والتصميم المنطقي للحاسبات الرقمية.

بصورة أساسية، شبكية المكملات التوزيعية التي تحتوي العنصرين 0 و 1 تسمى جبر بولياني. حيث أنه في شبكة المكملات التوزيعية مكملة كل عنصر تكون وحيدة فإن عملية التكميل يمكن إعتبارها عملية أحادية أصيلة على نطاق هذه الشبكية.

كاهتمام خاص للمتخصصين في علوم الحاسب، هو أصغر جبر بولياني والذي نطاقه المجموعة المكونة من عنصرين $\{0,1\}$. التعبيرات البوليانية المولدة بـ n متغير بولياني على هذا الجبر البولياني المعين تتجسد بشبكات توافقية وتستخدم في تصميم الحاسبات. حيث أن الحواسيب الرقمية تبنى أساسا من مكونات ثنائية- بمعنى- مكونات تفترض فقط وضعين ممكنين مختلفين، مختلف الوحدات الدالية في الحواسيب الرقمية يمكن النظر إليها باعتبارها شبكة محولات (شبكة مفاتيح).

في هذا الباب سوف نبدأ بمناقشة مفصلة للجبر البولياني والدوال البوليانية وبعد ذلك نوضح نظرية آلية المفاتيح ونناقش عملية تبسيط الدوال البوليانية.

٨-١ الجبر البولياني Boolean algebra

الجبر البولياني هو شبكية مكملات توزيعية بها على الأقل عنصرين مختلفين بالإضافة إلى العنصر الصفري 0 والوحدة 1.

بتعبير آخر، الجبر البولياني هو نظام $(B,+,\cdot,\bar{\ },0,1)$ مكون من مجموعة B، عمليتان ثنائيتان $+$ ، $\cdot$ وعملية أحادية $\bar{\ }$ وهي التكميل بحيث تتحقق المسلمات التالية:

١- يوجد على الأقل عنصران $a,b \in B$ بحيث $a \neq b$.

٢- لكل $a,b \in B$، $a+b \in B$،
$a \cdot b \in B$.

٣- لكل $a,b \in B$، $a+b=b+a$،
$a \cdot b = b \cdot a$.

٤- يوجد $0 \in B$ بحيث $a+0=a$ لكل $a \in B$، أي وجود الصفر،
يوجد $1 \in B$ بحيث $a \cdot 1 = a$ لكل $a \in B$ ، أي وجود الوحدة.

٥- لكل $a,b,c \in B$

$$a+(b \cdot c)=(a+b)\cdot(a+c),$$

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c).$$

أي تحقق قوانين التوزيع.

٦- لكل $a \in B$ يوجد $\bar{a} \in B$ بحيث
$a+\bar{a}=1$ و $a \cdot \bar{a}=0$، أي وجود المكملة.

عندما لا توضع الأقواس فإن العملية $\cdot$ تجرى قبل العملية $+$. أيضا قد نكتب ab بدلا عن $a \cdot b$.

B تسمى **نطاق** الجبر االبولياني.

أبسط مثال للجبر البولياني هو المجموعة التي تتكون من عنصرين فقط 0 و 1، نعرف

$$1+1=1\cdot 1=1+0=0+1=1$$

$$0+0=0\cdot 0=1\cdot 0=0\cdot 1=0$$

$$\bar{1}=0$$

$$\bar{0}=1$$

واضح أن كل مسلمات الجبر البولياني محققة.

يمكن تعريف علاقة ترتيب على أي جبر بولياني كما يلي:

$x \le y$ إذا وفقط إذا كان $x + y = y$ و $x \cdot y = x$.

المكملة، الجمع البولياني، والضرب البولياني تناظر العمليات المنطقية ~، $\vee$ و $\wedge$ ، على الترتيب، حيث 0 تناظر F (كاذب) و 1 تناظر T (صادق). نتائج الجبر البولياني يمكن أن تترجم مباشرة إلى نتائج عن التقارير والعكس أيضا صحيح

يمكننا بسهولة ملاحظة أن المسلمات في تعريف الجبر البولياني قد صيغت في ثنائيات، كل واحدة من هذه الثنائيات يمكن الحصول عليها من الأخرى بتبديل العملية "+" مع العملية "·" وتبديل 0 مع 1، وهذا هو **مبدأ التناظر** principle of duality. على سبيل المثال

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

تناظر (نظير) $$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

مبدأ التناظر: كل نظرية يمكن إثباتها للجبريات البوليانية يكون النظير لها صحيح.

الآن نعطي بعض النظريات الهامة في معالجة الجبريات البوليانية. سوف نستخدم في البرهان المسلمات ومبدأ التناظر والتعويض.

متطابقات الجبر البولياني

الآن نبرهن بعض النظريات التي تعطي متطابقات الجبر البولياني. في كل من النظريات التالية نفرض $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ جبر بولياني.

نظرية ٨-١-١. لكل $a \in B$، $a + a = a$،
$a \cdot a = a$.

البرهان:

$$\begin{aligned} a + a &= (a + a) \cdot 1 \\ &= (a + a) \cdot (a + \bar{a}) \\ &= a + a \cdot \bar{a} \\ &= a + 0 = a \end{aligned}$$

من مبدأ التناظر ينتج أن $a \cdot a = a$.

نظرية ٨-١-١ تسمى **قوانين تساوي القوى** idempotent laws للجبريات البوليانية.

نظرية ٨-١-٢. العنصران 0 و 1 يكونا وحيدان.

البرهان: نفرض أنه يوجد صفران 0 و $0'$. لكل $a,b \in B$ يكون

$$a+0=a \text{ و } b+0'=b$$

بوضع $a=0'$ و $b=0$ نحصل على

$$0'+0=0' \text{ و } 0+0'=0$$

ولكن $0+0'=0'+0$ ومن ثم يكون $0=0'$.

باستخدام مبدأ التناظر يمكننا إثبات أن العنصر 1 يكون وحيد.

نظرية ٨-١-٣. لكل $a \in B$ يكون $a+1=1$ و $a \cdot 0=0$.

البرهان:

$$\begin{aligned} a+1 &= (a+1)\cdot 1 \\ &= (a+1)\cdot(a+\overline{a}) \\ &= a+1\cdot\overline{a} \\ &= a+\overline{a} = 1 \end{aligned}$$

من مبدأ التناظر ينتج أن $a \cdot 0=0$.

نظرية ٨-١-٤. العنصران 0 و 1 مختلفان ، $\overline{1}=0$ و $\overline{0}=1$.

البرهان: نفرض $a \in B$ ، من مسلمة (٤) في التعريف ، $a \cdot 1=a$.

من نظرية ٨-١-٣، $a \cdot 0=0$.

إذا كان $1=0$ فإن $a=a\cdot 1=a\cdot 0=0$. ولكن من الفرض B تحتوي على الأقل عنصرين. لذلك $0 \neq 1$.

من مسلمة ٦ يكون $\overline{0}=\overline{0}+0=1$ و $\overline{1}=\overline{1}\cdot 1=0$.

نظرية ٨-١-٥. لكل $a \in B$ توجد مكملة وحيدة $\overline{a}$.

البرهان: نفرض أن a له مكملتان $\overline{a_1}$ و $\overline{a_2}$. من مسلمة ٦،

$$a\cdot\overline{a_1}=0 \text{ و } a\cdot\overline{a_2}=0 \text{ و } a+\overline{a_1}=1 \text{ و } a+\overline{a_2}=1$$

لذلك

$$\begin{aligned} \overline{a_1} &= 1\cdot\overline{a_1} \\ &= (a+\overline{a_2})\cdot\overline{a_1} \\ &= a\overline{a_1}+\overline{a_2}\overline{a_1} \\ &= 0+\overline{a_2}\overline{a_1} \\ &= a\overline{a_2}+\overline{a_2}\overline{a_1} \\ &= (a+\overline{a_1})\cdot\overline{a_2} \end{aligned}$$

$$=1\cdot\overline{a_2}\ =\overline{a_2}$$

نظرية ٨-١-٦. قانون الامتصاص Absorption law

نفرض $a,b\in B$، إذن $a\cdot(a+b)=a$ و $a+a\cdot b=a$.

البرهان:

$$a+a\cdot b=a\cdot 1+a\cdot b$$
$$=a(1+b)$$
$$=a\cdot 1=a$$

من مبدأ التناظر يكون $a\cdot(a+b)=a$.

نظرية ٨-١-٧. قانون الالتفاف Involution law

لكل $a\in B$ يكون $\bar{\bar{a}}=a$.

البرهان: حيث أن $\bar{\bar{a}}=\overline{(\bar{a})}$، نبحث عن مكملة $\bar{a}$. لدينا

$$\bar{a}+a=1 \quad \text{و} \quad a\bar{a}=0$$

لذلك a تكون هي مكملة لـ $\bar{a}$. وحيث أن المكملة تكون وحيدة، من نظرية ٨-١-٥، فإن $\bar{\bar{a}}=a$.

نظرية ٨-١-٨. الجبر البولياني يكون دامج مع العمليتان + و . ، أي أنه لكل $a,b,c\in B$ يكون

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

و

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

البرهان: نفرض

$$\alpha=[(a+b)+c]\cdot[a+(b+c)]$$
$$=[(a+b)+c]\cdot a+[(a+b)+c]\cdot(b+c)$$
$$=[(a+b)\cdot a+c\cdot a]+[(a+b)+c]\cdot(b+c)$$
$$=a+[(a+b)+c]\cdot(b+c)$$
$$=a+\{[(a+b)+c]\cdot b+[(a+b)+c]\cdot c\}$$
$$=a+(b+c)$$

ولكن أيضا

$$\alpha=(a+b)[a+(b+c)]+c[a+(b+c)]$$
$$=(a+b)[a+(b+c)]+c$$
$$=\{a[a+(b+c)]+b[a+(b+c)]+c\}$$
$$=(a+b)+c$$

ومن ثم $a+(b+c)=(a+b)+c$.

من مبدأ التناظر يكون $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

نظرية ٨-١-٩. (قوانين دي مورجان)

لأي $a,b\in B$ يكون

$\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ و $\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$.

البرهان: طريقة البرهان هنا هي لبيان ان

$(a+b)\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=0$ و $(a+b)+\bar{a}\cdot\bar{b}=1$.

هذا يبين أن $a+b$ و $\overline{ab}$ يكونا متكاملان، ومن نظرية ٨-١-٧، تنتج قوانين دي مورجان. الآن

$$\begin{aligned}(a+b)+\bar{a}\cdot\bar{b}&=[(a+b)+\bar{a}]\cdot[(a+b)+\bar{b}]\\&=[\bar{a}+(a+b)]\cdot[a+(b+\bar{b})]\\&=[(\bar{a}+a)+b]\cdot[a+(b+\bar{b})]\\&=(1+b)\cdot(a+1)\\&=1\cdot 1=1\end{aligned}$$

واضح أنه من مبدأ التناظر يكون $\overline{a\cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$.

الجدول التالي يعطي معظم المتطابقات في الجبر البولياني

الاسم	المتطابقة
قانون مكملة المكملة	$\bar{\bar{x}} = x$
Idempotent laws قوانين تساوي القوة	$x + x = x$ $x . x = x$
Identity laws قوانين المحايد	$x + 0 = x$ $x . 1 = x$
Commutative laws قوانين الابدال	$x + y = y + x$ $x\, y = y\, x$
Associative laws قوانين الدمج	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x\,(y\, z) = (x\, y)\, z$
Distributive laws قوانين التوزيع	$x + y\, z = (x + y)\,(x + z)$ $x\,(y + z) = x\, y + x\, z$
De Morgan's laws قوانين دي مورجان	$\overline{(x\, y)} = \bar{x} + \bar{y}$ $\overline{(x + y)} = \bar{x}\,\bar{y}$
Absorption laws قوانين الامتصاص	$x + x\, y = x$ $x\,(x + y) = x$
Unit property خاصية الوحدة	$x + \bar{x} = 1$
Zero property خاصية الصفر	$x\,\bar{x} = 0$

جدول ٨-١-١

قبل أن نختم هذا الجزء نعطي بعض الملاحظات.

أولا، إذا كانت $(B,+,\cdot,\bar{},0,1)$ جبربولياني و A مجموعة جزئية من B مغلقة بالنسبة للعمليات $+$، $\cdot$ و $\bar{}$ وكان $0,1\in A$ فإن $(A,+,\cdot,\bar{},0,1)$ تكون جبر بولياني، يسمى جبر بولياني جزئي.

ثانيا، يمكننا ملاحظة أن نظرية المجموعات هي مثال لجبر بولياني. نفرض A أي مجموعة، $\bar{}$ ترمز إلى المكملة للمجموعة. لذلك $(P(A),\cup,\cap,\bar{},\phi,A)$ تكون جبر بولياني حيث $P(A)$ هي مجموعة القوة للمجموعة A.

مثال آخر للجبر البولياني هو مجموعة كل الدوال من مجموعة U إلى مجموعة مكونة من عنصرين، مثلا $\{0,1\}$، حيث إذا كان f و g دالتان من هذه الدوال فإن $f+g$ هو الدالة المعرفة بالصورة

$$(f+g)(u)=\max\{f(u),g(u)\} \quad \text{لكل} \quad u\in U$$

و $f\cdot g$ و $\overline{f}$ تعرفان بالصورة

$$(f\cdot g)(u)=\min\{f(u),g(u)\}$$

$$\overline{f}(u)=1-f(u) \quad \text{لكل} \quad u\in U.$$

تعريف ٨-١-١٠. إذا كان $(A,+,\cdot,\bar{},0,1)$ و $(B,\vee,\wedge,\sim,0',1')$ جبرين بوليانيين، فإن الراسم $h:A\to B$ يسمى **تشاكل جبر بولياني** إذا كان يحافظ على العمليات الثنائية والعملية الأحادية بالمعنى التالي:

١- $h(a+b)=h(a)\vee h(b)$.

٢- $h(a\cdot b)=h(a)\wedge h(b)$.

٣- $h(\overline{a})=\tilde{h}(a)$.

تشاكل الجبر البولياني يسمى **تماثل بولياني** إذا كان تناظر أحادي.

إذا كان $(B,+,\cdot,\bar{},0,1)$ جبر بولياني فإن الضرب الكارتيزي B^n لـ n نسخة من B يمكن تحويله إلى جبر بولياني بالعمليات

$$(b_1,b_2,\dots,b_n)+(c_1,c_2,\dots,c_n)=$$
$$(b_1+c_1,b_2+c_2,\dots,b_n+c_n)$$

$$(b_1,b_2,\dots,b_n)(c_1,c_2,\dots,c_n)=(b_1c_1,b_2c_2,\dots,b_nc_n)$$

$$\overline{(b_1,b_2,...,b_n)} = (\overline{b_1},\overline{b_2},...,\overline{b_n})$$

هذا الجبر البولياني يسمى المجموع المباشر direct sum لـ n نسخة من B.

من المهم ملاحظة أنه يوجد تماثل طبيعي بين جبر بولياني المجموعة $(P(U),\cup,\cap,\bar{},\phi,U)$، حيث $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$، والمجموع المباشر لـ n نسخة من الجبر البولياني B_2 الذي يتكون من عنصرين $\{0,1\}$. هذا التماثل يعطى بالصورة

$$h: P(U)\rightarrow B_2^n$$

حيث

$$h(S)=(b_1,b_2,...,b_n)$$

و $b_i = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ لقيم $i=1,2,...,n$.

على سبيل المثال في حالة $n=4$ فإن $h(\{u_1,u_2,u_4\})=(1,1,0,1)$.

إثبات أن h تماثل يترك كتمرين للقارئ.

التعبيرات البوليانية والدوال البوليانية

Boolean expressions and Boolean Functions

نفرض $B=\{0,1\}$. إذن

$$B^n=\{(x_1,x_2,...,x_n): x_i\in B \text{ for } i\le 1\le n\}$$

هي مجموعة كل النونيات الممكنة من 0s و 1s. المتغير x يسمى **متغير البولياني** Boolean variable إذا كانت قيمه فقط من B، أي إذا كانت قيمه الممكنة هي 0 و 1. الدالة من B^n إلى B تسمى **دالة بوليانية من درجة** n Boolean function of degree.

مثال ٨-١-١١. الدالة $f(x,y)=x\bar{y}$ من مجموعة الثنائيات المرتبة من المتغيرات البوليانية إلى المجموعة $\{0,1\}$ تكون دالة البوليانية من درجة 2 حيث $f(1,1)=0$، $f(1,0)=1$، $f(0,1)=0$، $f(0,0)=0$.

الدوال البوليانية يمكن أن تمثل بالتعبيرات البوليانية التي تنتج من المتغيرات والعمليات البوليانية.

التعبيرات البوليانية في المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تعرف إرتداديا، مثل $0\,,1\,, x_1\,, x_2\,,\ldots\,, x_n$ تكون تعبيرات بوليانية؛ إذا كان E_1 و E_2 تعبيران بوليانيان ، فإن $\bar{E_1}$ ، $(E_1 E_2)$ و $(E_1 + E_2)$ تكون تعبيرات بوليانية.

كل تعبير بولياني يمثل دالة بوليانية. قيم هذه الدالة نحصل عليها بالتعويض بـ 0 و 1 في المتغيرات في التعبير.

مثال ٨-١-١٢. أوجد قيم الدوال البوليانية الممثلة بـ $f(x,y,z) = x\,y + \bar{z}$.

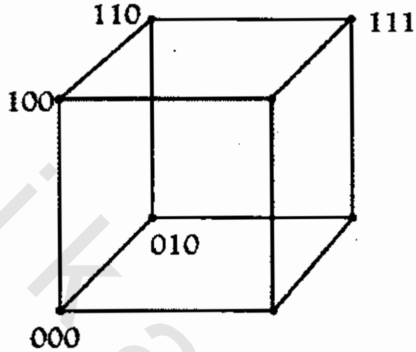
الحل: قيم الدالة هي الموضحة في جدول ٨-١-٢.

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$f(x,y,z) = x\,y + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

جدول ٨-١-٢

لاحظ أنه يمكننا تمثيل الدالة البوليانية بيانيا عن طريق تمييز رؤوس المكعب النوني التي تناظر النونيات من البتات حيث تأخذ الدالة القيمة 1.

مثال ٨-١-١٣. الدالة $f(x,y,z)=x\,y+\overline{z}$ من B^3 إلى B من مثال ٨-١-٣ يمكن أن تمثل بتمييز الرؤوس التي تناظر الثلاثيات الخمس $(1,1,1)$، $(1,1,0)$، $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,0)$، حيث $f(x,y,z)=1$ كما هو مبين في شكل ٨-١-١.



شكل ٨-١-١

الدالتان البوليانيتان f و g في n متغير تكونا متساويتان إذا وفقط إذا كان $f(b_1,b_2,\ldots,b_n)=g(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ كلما كان $b_1,b_2,\ldots,b_n$ تنتمي إلى B. التعبيران البوليانيان اللذان يمثلان نفس الدالة يقال أنهما **متكافئان** equivalent. على سبيل المثال، التعبيرات البوليانية xy، $xy+0$ و $xy-1$ تكون متكافئة. **مكملة** complement الدالة البوليانية f هي الدالة $\overline{f}$ حيث $\overline{f}(x_1,\ldots,x_n)=f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$. نفرض f و g دالتان بوليانيتان من درجة n. **الجمع البولياني** Boolean sum $f+g$ و**الضرب البولياني** Boolean product fg يعرفان كما يلي

$$(f+gG)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)+g(x_1,\ldots,x_n)$$
$$(fg)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)g(x_1,\ldots,x_n).$$

الدالة البوليانية من درجة 2 هي دالة من مجموعة بها أربعة عناصر، وهي ثنائيات من عناصر B، إلى B، وهي مجموعة بها عنصران. لذلك

توجد 16 دالة بوليانية مختلفة من درجة 2. في جدول ٨-١-٣ نوضح قيم هذه الدوال الستة عشر المختلفة من درجة 2، والتي نشير إليها بـ $f_1 ، f_1 ، \ldots ، f_{16}$.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

جدول ٨-١-٣

مثال ٨-١-١٤. كم يوجد دالة بوليانية مختلفة من درجة n.

الحل: من قاعدة الضرب في العد، يوجد 2^n من النونيات المختلفة من 0s و 1s. وحيث أن الدالة البوليانية تعين 0 أو 1 لكل نوني مختلف، من قاعدة الضرب نجد أنه يوجد 2^{2^n} دالة بوليانية من درجة n مختلفة.

تمثيل الدوال البوليانية Representing Boolean Functions

مسألتان هامتان في الجبر البولياني سوف نتعرض لدراستهما في هذا الفصل. المسألة الأولى: إذا أعطينا قيم لدالة بوليانية، كيف يمكن إيجاد التعبيرات البوليانية التي تمثل هذه الدالة ؟ حل هذه المسألة يتم ببيان أن كل دالة بوليانية يمكن تمثيلها باستخدام ثلاث عمليات ثنائية . ، + و $\bar{}$. المسألة الثانية هي: هل توجد أصغر مجموعة عمليات يمكن استخدامها لتمثيل كل الدوال البوليانية ؟ سوف نجيب على هذه المسألة ببيان أن كل الدوال البوليانية يمكن تمثيلها باستخدام مؤثر واحد فقط. كلا المسألتين لها تطبيقات هامة في تصميم الدوائر.

تعبيرات مجموع حواصل الضرب

Sum-of-products Expansions

سوف نستخدم أمثلة لتوضيح طريقة مهمة لإيجاد التعبير البولياني الذي يمثل دالة بوليانية.

مثال ٨-١-١٥. أوجد التعبيرات البوليانية التي تمثل الدوال $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$، المعطاه في جدول ٨-١-٤.

x	y	z	f	g
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

جدول ٨-١-٤

الحل: التعبير الذي له القيمة 1 عندما $x=z=1$ و $y=0$، والقيمة 0 غير ذلك، تمثل f. مثل هذا التعبير يمكن ايجادة بأخذ الضرب البولياني لـ x، $\bar{y}$ و z. هذا الضرب $x\,\bar{y}\,z$، له القيمة 1 إذا وفقط إذا كان $x=\bar{y}=z=1$ إذا وفقط إذا كان $x=z=1$ و $y=0$.

لتمثيل g، نحتاج إلى تعبير يساوي 1 عندما $x=y=1$ و $z=0$ أو عندما $x=z=0$ و $y=1$. يمكننا تكوين تعبير بهذه القيم بأخذ الجمع البولياني لحاصلي ضرب بولياني مختلفين. الضرب البولياني $x\,y\,\bar{z}$ له القيمة 1 إذا وفقط إذا كان $x=y=1$ و $z=0$. بالمثل الضرب $\bar{x}\,y\,\bar{z}$ له القيمة 1 إذا وفقط إذا كان $x=z=0$ و $y=1$.

الجمع البولياني لهذان التعبيران $x\,y\,\bar{z}+\bar{x}\,y\,\bar{z}$ ، يمثل g ، حيث أنه يأخذ القيمة 1 إذا وفقط إذا كان $x=y=1$ و $z=0$ أو $x=z=0$ و $y=1$.

تعريف ٨-١-١٦. **الحرف** literal هو متغير بولياني أو مكملته. **الحد الأصغر** minterm من المتغيرات البوليانية $x_1,x_2,...,x_n$ هو حاصل ضرب بولياني $y_1y_2...y_n$ ، حيث $y_i=x_i$ أو $y_i=\bar{x}_i$.
إذن الحد الأصغر هو حاصل ضرب n حرف، حرف لكل متغير.

الحد الأصغر له القيمة 1 لواحد وواحد فقط من مركبات قيم متغيراته. بتعبير أكثر دقة، الحد الأصغر $y_1y_2...y_n$ يكون 1 إذا وفقط إذا كان كل y_i هو 1 وهذا يحدث إذا وفقط إذا كان $x_i=1$ عندما $y_i=x_i$ و $x_i=0$ عندما $y_i=\bar{x}_i$.

مثال ٨-١-١٧. أوجد الحد الأصغر الذي يساوي 1 إذا كان $x_1=x_3=0$ و $x_2=x_4=x_5=1$ ويساوي 0 فيما عدا ذلك.

الحل: الحد الأصغر $\bar{x}_1\,x_2\,\bar{x}_3\,x_4\,x_5$ له القيم المطلوبة.

بأخذ المجموع البولياني للحدود غير المطلوبة المختلفة يمكننا بناء تعبير بولياني بمجموعة معينة من المتغيرات. على وجه الخصوص، المجموع البولياني للحدود الصغرى له القيمة 1 عندما، تحديدا، واحد من الحدود الصغرى في المجموع له القيمة 1. وتأخذ القيمة 0 لكل المكونات الأخري لقيم المتغيرات. نتيجة لذلك إذا اعطينا دالة بوليانية، المجموع البولياني للحدود الصغرى يمكن تكوينة بحيث يأخذ القيمة 1 عندما هذه الدالة البوليانية تأخذ القيمة 1، وتأخذ القيمة 0 عندما تأخذ الدالة القيمة 0. الحد الأصغر في هذا المجموع البولياني يناظر تلك التركيبات من القيم التي عندها الدالة تاخذ القيمة 1. مجموع الحدود الصغرى الذي يمثل الدالة يسمى **مفكوك مجموع حواصل ضرب** the sum-of-products expansion أو **صيغة الفصل الطبيعية** disjunctive normal form للدالة البوليانية.

مثال ٨-١-١٨. أوجد صيغة الفصل الطبيعية للدالة $f(x,y,z)=(x+y)\bar{z}$.

الحل: سوف نوجد صيغة الفصل الطبيعية للدالة $f(x,y,z)$ بطريقتين.
أولا سوف نستخدم المتطابقات البوليانية لفك الضرب وتبسيطة. نجد أن

$$f(x,y,z)=(x+y)\bar{z}$$
$$=x\bar{z}+y\bar{z}$$
$$f(x,y,z)=x1\bar{z}+1y\bar{z}$$
$$=x(y+\bar{y})\bar{z}+(x+\bar{x})y\bar{z}$$
$$=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$$

ثانيا، يمكننا إنشاء مفكوك مجموع حواصل ضرب بتحديد قيم f لكل القيم الممكنة للمتغيرات x، y و z. هذه القيم توجد في جدول ٨-١-٥.

x	y	z	$x+y$	$\bar{z}$	$(x+y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

جدول ٨-١-٥

مفكوك مجموع حواصل ضرب لـ f هو المجموع البولياني لثلاثة حدود صغيرة التي تناظر الصفوف الثلاثة في الجدول التي تعطي القيمة 1 للدالة. هذا يعطي

$$f(x\ y,z)=xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$$

من الممكن إيجاد التعبير البولياني الذي يمثل الدالة البوليانية بأخذ الضرب البولياني لمجاميع بوليانية. التعبير الناتج يسمى **حاصل ضرب**

مجـــاميع product-of-sums أو **صـــيغة العطـــف الطبيعيـــة** conjunctive normal form. هذه التعبيرات يمكن ايجادها من مفكوكات مجموع حواصل الضرب بأخذ النظائر. التعبيرات البوليانية على شكل مجموع n حرف مختلف تسمى **حد أعلى** maxterm .

مثال ٨-١-١٩. للتعبير البولياني

$$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2)(\overline{x_1}+\overline{x_2})$$

نكتب جدول القيم الدالية لقيم المتغيرات x_1,x_2 الممكنة

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ٨-١-٦

إذن تمثيل الدالة f في صيغة الفصل الطبيعي هي

$$f(x_1,x_2)=0\cdot(\overline{x_1}\cdot\overline{x_2})+1\cdot(\overline{x_1}\cdot x_2)+1\cdot(x_1\cdot\overline{x_2})+0\cdot(x_1\cdot x_2)$$

$$=\overline{x_1}x_2+x_1\overline{x_2}$$

لاحظ أن صيغة الفصل الطبيعي ماهي إلا مجموع الحدين الأصغرين الذين يناظرا تركيبات قيم x_1,x_2 التي تجعل الدالة f تأخذ القيمة 1.

مثال ٨-١-٢٠. للتعبير البولياني

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{(x_1x_2)}\cdot(x_1+x_3)$$

نكتب جدول القيم الدالية لقيم المتغيرات x_1,x_2,x_3 الممكنة

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

جدول ٨-١-٧

إذن صيغة الفصل الطبيعي لـ f تكون

$$f(x_1,x_2,x_3)=0\cdot(\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3})+1\cdot(\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3)$$
$$+0\cdot(\overline{x_1}x_2\overline{x_3})+0\cdot(\overline{x_1}x_2x_3)+1\cdot(x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3})$$
$$+1\cdot(x_1\overline{x_2}x_3)+1\cdot(x_1x_2\overline{x_3})+1\cdot(x_1x_2x_3)$$
$$=\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3+x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}+x_1\overline{x_2}x_3+x_1x_2\overline{x_3}+x_1x_2x_3$$

لاحظ أن صيغة الفصل الطبيعي ماهي إلا مجموع الحدود الصغرى الخمس التي تناظر تركيبات قيم x_1,x_2,x_3 التي تجعل الدالة f تأخذ القيمة 1.

بالمثل صيغة العطف الطبيعي لـ f تكون هي حاصل ضرب الحدود العليا الثلاث التي تناظر قيم x_1,x_2,x_3 التي تجعل الدالة f تأخذ القيمة 0. لذلك صيغة العطف الطبيعي لـ f تكون

$$f(x_1,x_2,x_3)=$$
$$(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})$$

مثال ٨-١-٢١. نفرض x، y و z متغيرات بوليانية، أوجد صيغة للدوال $f,g,h:B^2\to B$ الممثلة بالأعمدة في جدول ٨-١-٨

x	y	z	f	g	h
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

جدول ٨-١-٨

من العمود أسفل f نريد النتيجة التي لها 1 فقط عندما $x = y = 0$ و $z = 1$. الدالة $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}z$ هي واحدة من مثل تلك الدالة. بنفس الطريقة $g(x,y,z) = x\overline{y}\,\overline{z}$ تعطي القيمة 1 عندما $x = 1$ و $y = z = 0$ و 0 في كل الحالات الأخرى. حيث أن كل من f و g تأخذ القيمة 1 فقط في حالة واحدة وهاتان الحالتان منفصلتان عن بعضهما البعض، المجموع $f + g$ يأخذ القيمة 1 في هاتان الحالتان تحديدا. لذلك

$$h(x,y,z) = f(x,y,z) + g(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z}$$

تأخذ قيم العمود أسفل h.

مثال ٨-١-٢٢. أوجد صيغة الفصل الطبيعي للدالة $f : B^3 \to B$ حيث $f(x,y,z) = xy + \overline{x}z$.

الحل: من جدول ٨-١-٩ نجد أن العمود الذي يمثل f يحتوي أربع 1's وهذا يشير إلى أنه مطلوب أربع حدود صغرى لصيغة الفصل الطبيعي. لذلك

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$$

x	y	z	xy	$\bar{x}z$	f
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

جدول ٨-١-٩

طريقة أخرى لحل هذه المسألة. نأخذ كل حد ضرب ظهر في f وهي xy و $\bar{x}z$ و نضمنه المتغيرات التي يفقدها باستخدام خواص هذه المتغيرات، كما يلي

$$xy+\bar{x}z=xy(z+\bar{z})+\bar{x}(y+\bar{y})z$$
$$=xyz+xy\bar{z}+\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z$$

مثال ٨-١-٢٣. أوجد صيغة الفصل الطبيعي للدالة $g(w,x,y,z)=wx\bar{y}+wy\bar{z}+xy$.

الحل: نختبر كل حد كمايلي

$$wx\bar{y}=wx\bar{y}(z+\bar{z})=wx\bar{y}z+wx\bar{y}\bar{z}$$
$$wy\bar{z}=w(x+\bar{x})y\bar{z}=wxy\bar{z}+w\bar{x}y\bar{z}$$
$$xy=(w+\bar{w})xy(z+\bar{z})$$
$$=wxyz+wxy\bar{z}+\bar{w}xyz+\bar{w}xy\bar{z}$$

من خاصية تساوي القوة لـ +، نجد أن صيغة الفصل الطبيعي تكون

$$g(w,x,y,z)=wx\bar{y}z+wx\bar{y}\bar{z}+wxy\bar{z}$$
$$+w\bar{x}y\bar{z}+wxyz+\bar{w}xyz+\bar{w}xy\bar{z}$$

اعتبر الأعمدة الثلاثة الأول في جدول ٨-١-١٠ إذا اتفقنا على ترتيب المتغيرات البوليانية حسب الترتيب الأبجدي، نجد أن قيم x,y,z في أي صف تحدد ترقيم ثنائي (علامة ثنائية). هذه العلامات الثنائية لـ

$0,1,2,3,...,7$ تظهر في الصفوف $1,2,3,...,8$ على الترتيب كما هو مبين في العمودين الرابع والخامس في جدول ٨-١-١٠ (نلاحظ على سبيل المثال أن الصف الأول يأخذ رقم الصف 1 ولكن العلامة الثنائية $000(=0)$. بالمثل الصف السابع حيث $x=1$، $y=1$ و $z=0$، له رقم الصف 7 والعلامة الثنائية $110(=6)$). كنتيجة، صيغة الفصل الطبيعي للدالة البوليانية يمكن التعبير عنها بصورة أكثر إحكاما. على سبيل المثال الدالة f في مثال ٨-١-٢٣ يمكن التعبير عنها بالصورة $f=\sum m(1,3,6,7)$، حيث m تشير إلى الحدود الصغرى في الصفوف $2,4,7,8$ بعلامات ثنائية $1,3,6,7$، على الترتيب.

x	y	z	العلامات الثنائية	رقم الصف
0	0	0	000(=0)	1
0	0	1	001(=1)	2
0	1	0	010(=2)	3
0	1	1	011(=3)	4
1	0	0	100(=4)	5
1	0	1	101(=5)	6
1	1	0	110(=6)	7
1	1	1	111(=7)	8

جدول ٨-١-١٠

بإهمال الجدول يمكننا تمثيل صيغة الفصل الطبيعي للدالة g في مثال ٨-١-٢٣ على سبيل المثال، كمجموع حدود صغري. لكل حد أصغر $c_1c_2c_3c_4$ حيث c_1 تساوي w أو $\overline{w}$، ...، c_4 تساوي z أو $\overline{z}$، تستبدل كل c_i، $1\le i\le 4$، بـ 0 إذا كان c_i هو مكمل المتغير و 1 خلاف ذلك. بهذه الطريقة، نحصل على العلامة الثنائية التي تصاحب كل حد أصغر. كمجموع حدود صغرى نجد أن $g=\sum m(6,7,10,12,13,14,15)$.

نظير صيغة الفصل الطبيعي هي صيغة العطف الطبيعي.

مثال ٨-١-٢٤. نفرض $f:B^3\to B$ الدالة البوليانية المعطاة بجدول ٨-١-١١ الحد في الصورة $c_1+c_2+c_3$، حيث c_1 تساوي x أو $\overline{x}$ و

c_2 تساوي y أو $\overline{y}$ و c_3 تساوي z أو $\overline{z}$ تسمى العطف الأساسي. العطف الأساسي يأخذ القيمة 1 في جميع الحالات ما عدا حالة واحدة عندما كل من x, y, z تأخذ القيمة 0. بالمثل $x + y + \overline{z}$ تأخذ القيمة 1 في كل الحالات ماعدا عندما $x = z = 0$ و $y = 1$. حيث أن كلا من حدي العطف الأساسية هذه تأخذ القيمة 0 في حالة واحدة فقط وهاتان الحالتان لاتحدث في آن واحد فإن حاصل الضرب $(x + y + z)(x + \overline{y} + z)$ يأخذ القيمة 0 تحديدا في حالتين كما هو معطى. بالاستمرار في هذا السلوك يمكن تمثيل الدالة f على الصورة

$$f = (x + y + z)(x + \overline{y} + z)(\overline{x} + \overline{y} + z)$$

هذه هي صيغة العطف الطبيعي للدالة البوليانية f.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ٨-١-١١

باستخدام العلامات الثنائية لترقيم الصفوف في الجدول يمكننا كتابة

$$f = \prod M(0,2,6)$$

مثال ٨-١-٢٥. نفرض $g : B^4 \to B$ حيث

$$g(w, x, y, z) = (w + x + y)(x + \overline{y} + z)(w + \overline{y})$$

أوجد صيغة العطف الطبيعي للدالة g.

الحل: نعيد كتابة كل عطف (كل قوس) في الضرب كما يلي

$$w + x + y = w + x + y + 0 = w + x + y + z\overline{z}$$
$$= (w + x + y + z)(w + x + y + \overline{z})$$
$$x + \overline{y} + z = w\overline{w} + x + \overline{y} + z$$

$$=(w+x+\bar{y}+z)(\bar{w}+x+\bar{y}+z)$$

$$w+\bar{y}=w+x\bar{x}+\bar{y}=(w+x+\bar{y})(w+\bar{x}+\bar{y})$$
$$=(w+x+\bar{y}+z\bar{z})(w+\bar{x}+\bar{y}+z\bar{z})$$
$$=(w+x+\bar{y}+z)(w+x+\bar{y}+\bar{z})\cdot$$
$$(w+\bar{x}+\bar{y}+z)(w+\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$$

نتيجة لذلك ومن خاصية تساوي القوة لـ"." نحصل على

$$g(w,x,y,z)=(w+x+y+z)(w+x+y+\bar{z})\cdot$$
$$(w+x+\bar{y}+z)(\bar{w}+x+\bar{y}+z)\cdot$$
$$(w+x+\bar{y}+\bar{z})(w+\bar{x}+\bar{y}+z)\cdot$$
$$(w+\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$$

للحصول على g كحاصل ضرب حدود عليا، نصاحب مع كل فصل أساسي $d_1+d_2+d_3+d_4$ عدد ثنائي $b_1b_2b_3b_4$ حيث $b_1=0$ إذا كان $d_1=w$ و $b_1=1$ إذا كان $d_1=\bar{w}$ ،...، $b_4=0$ إذا كان $d_4=z$ و $b_4=1$ إذا كان $d_4=\bar{z}$. كنتيجة لذلك

$$g=\prod M(0,1,2,3,6,7,10)$$

مثال ٨-١-٢٦. إذا كان $h(w,x,y,z)=wx+\bar{w}y+\bar{x}yz$ فيمكننا إعادة كتابة كل حد في هذا المجموع كما يلي

$$wx=wx(y+\bar{y})(z+\bar{z})$$
$$=wxyz+wxy\bar{z}+wx\bar{y}z+wx\bar{y}\bar{z}$$
$$\bar{w}y=\bar{w}(x+\bar{x})y(z+\bar{z})$$
$$=\bar{w}xyz+\bar{w}xy\bar{z}+\bar{w}\bar{x}yz+\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$$
$$\bar{x}yz=(w+\bar{w})\bar{x}yz=w\bar{x}yz+\bar{w}\bar{x}yz$$

باستخدام خاصية تساوي القوة لـ + ، نجد أن صيغة الفصل الطبيعي لـ h تكون

$$wxyz+wxy\bar{z}+wx\bar{y}z+wx\bar{y}\bar{z}+$$

$$\bar{w}xyz+\bar{w}xy\bar{z}+\bar{w}\bar{x}yz+\bar{w}\bar{x}y\bar{z}+w\bar{x}yz$$

باعتبار كل حد أصغرفي صيغة الفصل الطبيعي لـ h نحصل على العلامات التالية وأرقام الحدود الصغرى

$wxyz : 1111(=15)$ $\qquad$ $wx\bar{y}\bar{z} : 1100(=12)$

$wxy\bar{z} : 1110(=14)$ $\qquad$ $\bar{w}xyz : 0111(=7)$

$wx\bar{y}z : 1101(=13)$ $\qquad$ $\bar{w}xy\bar{z} : 0110(=6)$

$\bar{w}\bar{x}yz : 0011(=3)$ $\qquad$ $\bar{w}\bar{x}y\bar{z} : 0010(=2)$

$w\bar{x}yz : 1011(=11)$

لذلك قد نكتب $\qquad h=\sum m(2,3,6,7,11,12,13,14,15)$

ومن هذا التمثيل باستخدام الحدود الصغرى نحصل على

$$h=\prod M\,(0,1,4,5,8,9,10)$$

حاصل ضرب حدود عليا.

أخيرا نأخذ العلامات الثنائية لكل حد أعلى ونحدد الحد الأعلى المناظر

$0=0000 : w+x+y+z$ $\qquad$ $8=1000 : \bar{w}+x+y+z$

$1=0001 : w+x+y+\bar{z}$ $\qquad$ $9=1001 : \bar{w}+x+y+\bar{z}$

$4=0100 : w+\bar{x}+y+z$ $\qquad$ $10=1010 : \bar{w}+x+\bar{y}+z$

$5=0101 : w+\bar{x}+y+\bar{z}$

وهذا يخبرنا بأن صيغة العطف الأساسي لـ h تكون

$$(w+x+y+z)(\bar{w}+x+y+z)(w+x+y+\bar{z})\cdot$$
$$(\bar{w}+x+y+\bar{z})(w+\bar{x}+y+z)(\bar{w}+x+\bar{y}+z)\cdot$$
$$(w+\bar{x}+y+\bar{z})$$

التمام الدالي Functional Completeness

كل دالة بوليانية يمكن التعبير عنها كمجموع بولياني لحدود صغرى. كل حد أصغر يكون حاصل ضرب بولياني لمتغيرات بوليانية أو مكملاتها. هذا يبين أن كل دالة بوليانية يمكن التعبير عنها باستخدام المؤثرات البوليانية $\cdot$ ، $+$ و $\overline{}$. حيث أن كل دالة بوليانية يمكن تمثيلها

باستخدام هذه المؤثرات، نقول أن المجموعة $\{\,\bar{\ },+,.\}$ **تامة داليا** functionally complete. هنا ينشأ سؤال، هل يمكننا إيجاد مجموعة أصغر من المؤثرات تكون تامة داليا؟ والاجابة، يمكننا فعل ذلك إذا أمكن التعبير عن أحد هذه المؤثرات الثلاث بدلالة المؤثرين الآخرين. هذا يمكن فعلة باستخدام أحد قانوني دي مورجان. يمكننا حذف الجمع البولياني باستخدام المتطابقة

$$x+y=\overline{\bar{x}\,\bar{y}}$$

والتي نحصل عليها بأخذ المكملة لطرفي قانون دي مورجان الثاني $\overline{(x+y)}=\bar{x}\,\bar{y}$ ومن ثم نطبق قانون مكملة المكملة. هذا يعني أن المجموعة $\{\,\bar{\ },.\}$ تكون تامة داليا. لاحظ أن المجموعة $\{+,.\}$ ليست تامة داليا، حيث أنه من غير الممكن التعبير عن الدالة الثنائية $F(x)=\bar{x}$ باستخدام هذه المؤثرات.

نحن أوجدنا مجموعة تحتوي مؤثرين وتكون تامة داليا. هل يمكننا إيجاد مجموعة أصغر من المؤثرات تكون تامة داليا، أي مجموعة تحتوي مؤثر واحد فقط ؟ مثل هذه المجموعة موجودة. نعرف مؤثرين، الأول يرمز له بالرمز | ويعرف بالصورة $1|1=0,\ \ 1|0=0|1=1,$ $0=0|0$ ويسمى مؤثر **نفي العطف** NAND؛ الثاني يرمز له بالرمز $\downarrow$ ويعرف بالصورة $0 = 1\downarrow 0 = 0\downarrow 1 = 1\downarrow 1$ و $1 = 0\downarrow 0$ ويسمى مؤثر **نفي الفصل** NOR. كلا المجموعتين $\{|\}$ و $\{\downarrow\}$ تامة داليا. لبيان أن $\{|\}$ تامة داليا، حيث أن $\{\,\bar{\ },.\}$ تامة داليا، كل مانفعله هو بيان أن المؤثرات . و $\bar{\ }$ يمكن التعبير عنها باستخدام | فقط. وهذا يمكن فعله كما يلي

$$x\,|\,x=\overline{xx}=\bar{x}$$

$$x\,|\,y=\overline{xy}$$

$$(x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y)=\bar{x}\,|\,\bar{y}=\overline{\bar{x}\,\bar{y}}=x+y$$

كذلك $x\downarrow y=\overline{x+y}$ تكون تامة داليا حيث أن

$$x \downarrow x = \overline{x + x} = \overline{x}$$

و $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = \overline{x} \downarrow \overline{y} = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = xy$

تمارين ٨-١

١- بين أنه في أي جبر بولياني إذا كان $a \cdot x = 0$ و $a + x = 1$ فإن $x = \overline{a}$.

٢- بين أنه في أي جبر بولياني المعادلات الأربع التالية تكون متكافئة $a \cdot b = a, a + b = b, \overline{a} + b = 1, a \cdot \overline{b} = 0$.

٣- أوجد القيمة، إذا وجدت، للمتغير البولياني x التي تحقق المعادلة

(أ) $x \cdot 1 = 0$. (ب) $x + x = 0$.

(ج) $x \cdot 1 = x$. (د) $x \cdot \overline{x} = 1$.

٤- أوجد صيغة الفصل الطبيعية للتعبيرات البوليانية التالية:

(أ) $x_1 \overline{x_2} + x_3$.

(ب) $\overline{x_1} + [(x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_2 x_3})](x_1 + x_2 \overline{x_3})$.

٥- استخدم جدول للتعبير عن قيم كل من الدوال البوليانية التالية

(أ) $f(x, y) = \overline{x} y$.

(ب) $f(x, y, z) = x + yz$

(ج) $f(x, y, z) = x\overline{y} + \overline{xyz}$

(د) $f(x, y, z) = x(yz + \overline{yz})$

٦- أكتب نظير كل من المعادلات البوليانية التالية:

(أ) $x + \overline{x}y = x + y$. (ب) $(x \cdot 1)(0 + \overline{x}) = 0$.

٧- نفرض $f(x, y, z) = x\overline{y} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$ فبين أن

(أ) $f(x, y, z) + x\overline{z} = f(x, y, z)$.

(ب) $f(x, y, z) + x \neq f(x, y, z)$.

(ج) $f(x,y,z)+\bar{z}\neq f(x,y,z)$.

(حل(ج) $f(x,y,z)+\bar{z}=x\bar{y}+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{z}$
$(=x\bar{y}+\bar{z}\neq f(x,y,z))$

٨- نفرض $D_{110}=\{1,2,5,10,11,22,55,110\}$ مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة قواسم 110. بين أن $(D_{110},lcm,\gcd,\bar{\ },1,110)$ يكون جبر بولياني، حيث $\bar{x}=\frac{110}{x}$ لأي $x\in D_{110}$. العنصر الصفري هو 1 والوحدة 110. ماذا تعني $a\leq b$ في هذه الجبرية؟

٩- أوجد قيمة كل من التعبيرات البوليانية التالية إذا كانت قيم المتغيرات البوليانية w,x,y,z هي 1,1,0,0 على الترتيب

(أ) $\overline{x\,y}+x\,\bar{y}$.   (ب) $w+\bar{x}y$.

(ج) $wx+\bar{y}+yz$.

(د) $(wx+y\bar{z})+w\,\bar{y}+\overline{(w+y)(\bar{x}+y)}$.

١٠-(أ) أوجد الحدود الصغرى التي تتكون من المتغيرات w,x,y,z أو مكملاتها، حيث قيمة الحد الأصغر تعطي 1 عندما

(i) $y=z=1$ ، $w=x=0$.

(ii) $x=y=1$ ، $w=z=0$.

(iii) $x=y=z=1$ ، $w=0$.

(iv) $w=x=y=0$.

(ب) أجب عن الجزء (أ) ولكن للحدود العليا حيث قيمة الحد الأعلى تعطي 0 لقيم w,x,y,z المعطاة في (أ).

١١- نفرض $f:B^3\to B$ معرفة بالصورة

$$f(x,y,z)=\overline{\overline{(x+y)}+(\bar{x}z)}$$

(أ) أوجد صيغة الفصل الطبيعية لـ f.

(ب) أكتب f كمجموع حدود صغرى وحاصل ضرب حدود عليا (باستخدام العلامات الثنائية).

١٢- نفرض $f : B^4 \to B$. أوجد صيغة العطف الطبيعية لـ f إذا كان
(أ) $f^{-1}(1) = \{0101, 0110, 1000, 1011\}$ (0101 تعنـــــي أن $w = 0$، $x = 1$، $y = 0$، $z = 1$، وهكذا).
(ب) $f^{-1}(0) = \{0000, 0001, 0010, 0100, 100, 1001, 0110\}$.

١٣- بسط التعبيرات البوليانية
(أ) $xy + (x + y)\bar{z} + y$.
(ب) $x + y + \overline{(\bar{x} + y + z)}$.
(ج) $yz + wx + z + (wz\,\overline{(xy + wz)})$.

١٤- باستخدام قوانين الجبر البولياني بسط التعبيرات البوليانية التالية
(أ) $xy + x\bar{y}$.
(ب) $(x + y)(x + \bar{y})$.
(ج) $xz + xy\bar{z}$.
(د) $\overline{(x + y)} + \overline{(\bar{x} + \bar{y})}$.
(هـ) $x + \bar{x}y + \overline{x\,y}$.

١٥- برهن مايلي باستخدام قوانين الجبر البولياني
(أ) $xy + x\bar{y} = x$.
(ب) $(x + y)(x + \bar{y}) = x$.
(ج) $x(\bar{x} + y) = xy$.
(د) $xyz + \bar{x}y + xy\bar{z} = y$.
(هـ) $y(w\bar{z} + wz) + xy = y(w + x)$.
(و) $\bar{x}\,\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz = z$.

١٦- أوجد صيغة مجموع حواصل الضرب للدوال التالية
(أ) $f(x, y, z) = (x + \bar{y})(z + \bar{x})$.
(ب) $f(x, y, z)$، حيث $f = 1$ إذا وفقط إذا كان عدد فردي من المتغيرات الداخلة يساوي 1.

٨-٢ البوابات المنطقية وشبكات البوابات

Logic Gates and Gating Networks

الجبريات البوليانية في غاية الأهمية للاعتبارات النظرية، ولكن الأهمية الأكثر تظهر في تطبيقات مهمة في مجال الهندسة الكهربائية وتصميمات الحاسب. مثل هذه التطبيقات ليس من المستغرب أن تكون مثل الاشارات الرقمية، المحولات الميكانيكية، الأقطاب الثنائية الممغنطة، والترانزيستورات والتي جميعها أجهزة من حالتين. هاتان الحالتان يمكن ان توصفا على أن التيار يمر أو لايمر؛ ممغنط أو غير ممغنط؛ جهد عالي أو جهد منخفض، و مغلق أو مفتوح. من السهل بيان أن يوجد تناظر أحادي بين المتغيرات البوليانية والإشارات الرقمية حيث 0 و 1 يمثلان الحالتان.

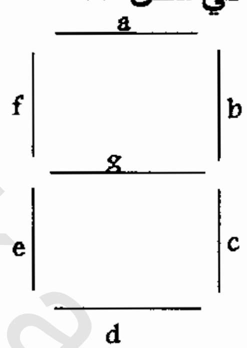
طبقا لذلك، العديد من الوحدات الدالية في الحواسيب الرقمية يمكن اعتبارها محولات ميكانيكية (دوائر مركبة أو شبكات منطقية) والتي تقبل تجمع من المدخلات وتولد تجمع من المخرجات. كل مدخل ومخرج يكون "ثنائي" بمفهوم أنه مؤهل لأن يفترض فقط قيمتين مختلفتين والتي تشير إليها 0 و 1 .آلية المفاتيح التي لها n مدخل و m مخرج هي تحقيق لدالة $f : B_2^n \to B_2^m$ حيث إذا كان $(z_1,z_2,\dots,z_m) = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ فإن $x_1,x_2,\dots,x_n$ تكون هي n مدخل و $z_1,z_2,\dots,z_m$ تكون هي m مخرج. الدالة f تسمى دالة التحويل، وعادة f تعين بجدول صدق حيث كل صف من الجدول يكتب فيه المخرج $(z_1,z_2,\dots,z_m)$ لأحد المدخلات $(x_1,x_2,\dots,x_n)$. محولان آليان يكون متكافئان إذا كان لهما نفس جدول الصدق، أي إذا كان يحققان نفس دالة التحويل.

البوابة gate هي محول آلي بمخرج واحد، أي أن البوابة تحقق الدالة البوليانية $f : B_2^n \to B_2$.

آلية المفاتيح Switching mechanism

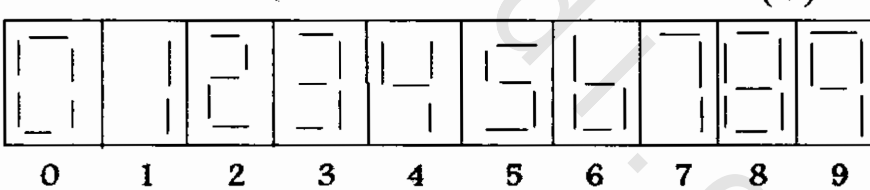
فيما يلي سوف نعطي مجموعة من التقنيات لميكانيكية التحويل باستخدام أمثلة تصميم محددة.

الخطوة الأولى في تصميم ميكانيكية التحويل هو تعريف المشكلة. هذا يتم بتحويل الوصف العام للمشكلة إلى معادلة منطقية أو صيغة جدول صدق. كمثال، نعتبر جهاز الاخراج الذي يستخدم لإظهار الأعداد العشرية. هذا الجهاز يعرف بعرض القطع السبع seven-segment display الموضح في شكل ٨-٢-١. القطع السبع يرمز لها بالحروف من a إلى g كما هو مبين في شكل ٨-٢-١ (أ)



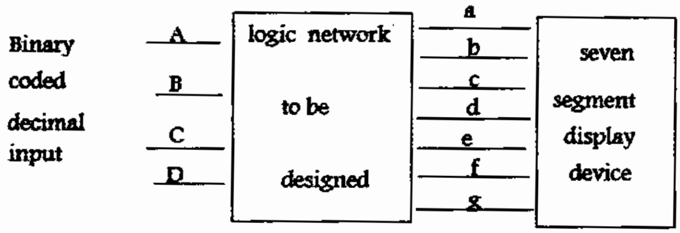
(أ)

العروض العشرة التي تمثل الأرقام العشرية من 0 إلى 9 مبينة في شكل ٨-٢-١ (ب)



(ب)

لنبحث الآن مسألة تصميم نظام منطقي الذي يعطي القطع الصحيحة استجابة لمدخلات شفرة عشري ثنائي. في شكل ٨-٢-١ (ج)، الخطوط الأربع الداخلة تشير إلى الرقم الذي نريد إظهارة على شاشة العرض. المخرجات السبع للنظام المنطقي تشير إلى النمط الخالص الذي يظهر الرقم المطلوب



(ج)

الرقم المراد إظهاره	المدخل ABCD	المخرج a	b	c	d	e	f	g
0	0000	1	1	1	1	1	1	0
1	0001	0	1	1	0	0	0	0
2	0010	1	1	0	1	1	0	1
3	0011	1	1	1	1	0	0	1
4	0100	0	1	1	0	0	1	1
5	0101	1	0	1	1	0	1	1
6	0110	0	0	1	1	1	1	1
7	0111	1	1	1	0	0	0	0
8	1000	1	1	1	1	1	1	1
9	1001	1	1	1	0	0	1	1

(د)

شكل ٨-٢-١

من الوصف والرسم الموضح في شكل ٨-٢-١ (ب)، يمكننا جدولة المخرجات المطلوبة لكل تركيبة صحيحة من المدخلات. كل صف في الجدول يمثل إظهار رقم مختلف وكل عمود يمثل إشارة إدخال أو إخراج.

من الناحية الفعلية جدول الصدق في شكل ٨-٢-١ (د) غير كامل، حيث أنه يوجد 16 تركيبة ممكنة لأربع مدخلات، يمكننا عمل جدول أكثر تعقيدا يمثل بتوليد 16 صف ونكتب X's في أعمدة المخارج في الصفوف الستة الأخيرة التي تشير إلى عدم الاهتمام بمخارج هذه الصفوف. حذفها من الجدول يشير إلى عدم الاهتمام بها.

طريقة أخرى مفيدة جدا للتعبير عن الدوال المنطقية وهي المعادلات المنطقية. المعادلة المنطقية تعبر فقط عن دالة واحدة، لذلك، على سبيل

المثال، معادلة منطقية منفصلة يمكن كتابتها لكل دالـة مخـرج (a-g) فـي جدول الصدق في شكل ٨-٢-١ (د).
حيث أن المعادلات المنطقية متشابهة في الشكل، فإنها تكون مهمـة عنـدما يتم ميكنـة المحـولات ببوابـات منطقيـة. الرمـوز المنطقيـة "¯" ، "+" و "." علـى الترتيـب تـستخدم لتـشير إلـى "لـيس NOT"، "أو OR"، و"و AND". بـالنظر إلـى شـكل ٨-٢-١ (أ) نجـد أن القطعـة d فـي نظـام إظهار القطع السبع يجب أن تكون موجودة عندما تظهر الأرقام 0 أو 2 أو 3 أو 5 أو 6 أو 8. باسـتخدام + بـدلا عـن "أو" يمكننـا كتابـة المعادلـة المنطقية للمتغير d كمايلي

$$d = 0 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8$$

هذه المعادلة بدلالـة الأرقـام التـي تظهر، ولكن فـي الواقع نريد أن تكون المعادلـة بدلالـة المـدخلات A، B، C و D. شـفرة الإدخـال لــ 0 هــي "not-A" و "not-B" و "not-C" و "not-D" ، لـذلك يمكننـا كتابـة المعادلة

$$\text{digit}\,0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$

بالمثل

$$\text{digit}\,1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$$
$$\text{digit}\,2 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$$
$$\text{digit}\,3 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$$
$$\text{digit}\,4 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$
$$\text{digit}\,5 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$$
$$\text{digit}\,6 = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$$
$$\text{digit}\,7 = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D$$
$$\text{digit}\,8 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$$
$$\text{digit}\,9 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$$

الآن يمكننا التعويض بهذه التعبيرات للارقام فـي حدود المدخل للمعادلـة الأصلية لـ d كما يلي

$$d = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$$

$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

الان لدينا معادلة منطقية للمخرج d كدالة في المدخلات A,B,C,D.
يمكننا كتابة معادلات مماثلة لكل من المخرجات الأخرى. على سبيل المثال

$$a=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$
$$+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$$
$$b=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$
$$+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$
$$c=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$$
$$e=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$
$$f=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$$
$$g=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$
$$+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$$

هذه المعادلات لاظهار القطع السبع ممثلة في صيغة الفصل الطبيعي.
يوجد $16=2^4$ حد أصغر في أربع متغيرات، على سبيل المثال

$$m_0=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$
$$m_1=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$$
$$m_2=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$$
$$m_5=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$$
$$m_{14}=A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$$
$$m_{15}=A\cdot B\cdot C\cdot D$$

هذه الحدود الصغرى المرقمة تكون مفيدة في تبسيط كتابة الدوال في الصورة القانونية. على سبيل المثال

$$a = m_0 + m_2 + m_3 + m_5 + m_7 + m_8 + m_9$$
$$= \sum m\,(0,2,3,5,7,8,9)$$

حيث أن عدد الحدود الصغرى يناظر مباشرة الصفوف في جدول الصدق والأرقام التي تظهر ، هذه الصيغة لكتابة المعادلة ليست فقط أقصر ولكنها أيسر للكتابة مباشرة من الجدول في شكل ٨-٢-١ (د).

الصيغة القانونية الأخرى، صيغة العطف، تستخدم الحدود العليا المبينة فيما يلي

$$M_0 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$$
$$M_1 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D$$
$$\vdots$$
$$M_{15} = A + B + C + D$$

واضح أن كل حد أعلى يكون صادق لكل التركيبات ماعدا تركيبة واحدة من المتغيرات، وأي دالة يمكن كتابتها كحاصل ضرب حدود عليا. فعلى سبيل المثال

$$a = M_9 \cdot M_{11} \cdot M_{14} = \prod M\,(9,11,14)$$

البوابات المنطقية Logic Gates

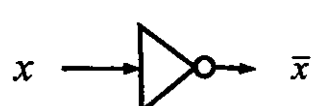
الجبر البولياني يستخدم لنمذجة الدوائر في الأجهزة الاليكترونية. كل مدخل input وكل مخرج output في مثل هذه الأجهزة يمكن التفكير فيه باعتباره عنصرا في المجموعة $\{0,1\}$. الحاسوب، أو أي جهاز إليكتروني آخر، يتكون من عدة دوائر. كل دائرة يمكن تصميمها باستخدام الجبر البولياني والذي سبقت دراسته في الفصل السابق. العناصر الأساسية في الدوائر تسمى **بوابات** gates. كل نوع من البوابات ينفذ عملية بوليانية. في هذا الفصل نعرف أنواع عديدة من البوابات. باستخدام هذه البوابات، نطبق قواعد الجبر البولياني لتصميم دوائر تؤدي مجموعة متنوعة من المهام. الدوائر التي سوف ندرسها في هذا الفصل تعطي المخرج بناء على المدخل فقط وليس على الوضع

الحالي للدائرة. مثل هذه الدوائر تسمى **الدوائر التوافقية** combinational circuits أو **شبكات البوابات** gating networks.

سوف نصمم الدوائر التوافقية باستخدام ثلاثة أنواع من العناصر. الأول هو **العاكس** inverter، الذي يقبل قيمة من متغير بولياني واحد كمدخل وينتج مكملة هذه القيمة كمخرج. الرمز المستخدم للعاكس مبين في شكل ٨-٢-٢ (أ). المدخل إلى العاكس مبين على اليسار إدخال العنصر والمخرج مبين على اليمين العنصر يغادر.

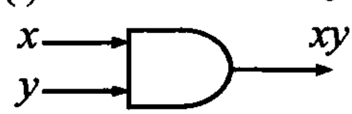
النوع التالي من العناصر التي سوف نستخدمها هو **بوابة أو** OR gate. الرمز المستخدم لبوابة OR مبين في شكل ٨-٢-٢ (ب). المدخل إلى هذه البوابة هي قيم لمتغيرين بوليانيين أو أكثر والمخرج هو المجموع البولياني لقيمها. المدخلات إلى بوابة OR كما هو مبين على اليسار إدخال العناصر، والمخرج مبين من جهة اليمين العنصر يغادر.

النوع الثالث من العناصر التي سوف نستخدمها هو **بوابة و** AND gate. المدخلات إلى هذه البوابة هي قيم لمتغيرين بوليانيين أو أكثر. المخرج هو حاصل الضرب البولياني لتلك القيم. الرمز المستخدم لبوابة AND مبين في شكل ٨-٢-٢ (ج). المدخلات إلى بوابة AND مبين على اليسار دخول العناصر. المخرج مبين على اليمين العنصر يغادر.



(أ) العاكس

(ب) بوابة أو OR



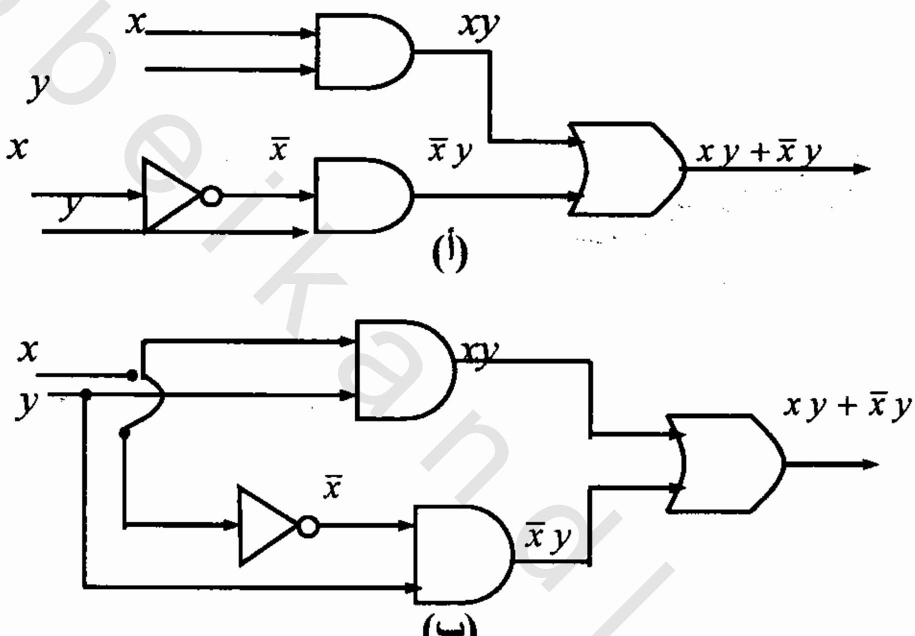
(ج) بوابة و AND

شكل ٨-٢-٢

مزج البوابات Combination of Gates

الدوائر التوافقية يمكن تصميمها باستخدام خليط من "العواكس"، "بوابات أو" ، و"بوابات و". عندما يتم عمل مزيج من الدوائر، بعض البوابات قد تشارك المدخلات. هذا يظهر في واحدة من طريقتين لتصوير

الدوائر. إحدى الطرق هو استخدام التفريعات التي تشير إلى كل البوابات التي تستخدم مدخل معطى. الطريقة الأخرى هي أن نشير إلى هذا المدخل منفصل لكل بوابة. شكل ٨-٢-٣ يوضح الطريقتين مع نفس قيم المدخلات. كلا الرسمين في شكل ٨-٢-٣ يصور الدائرة التي تنتج المخرج $x\,y+\bar{x}\,y$



شكل ٨-٢-٣

طريقتين لرسم نفس الدائرة

هناك خواص معينة لهذه الشبكات (الدوائر) تحتاج إلى تأكيد

١- خط المدخل يمكن أن يقسم لتزويد المدخل لأكثر من بوابة.

٢- خطوط المداخل والمخارج تكون مجمعة فقط عند بوابة واحدة.

٣- لايوجد رجوع مزدوج، أي أن المخرج من بوابة g لايمكن أن يستخدم كمدخل لنفس البوابة أو أي بوابة تؤدي إلى g بطريقة مباشرة أو غير مباشرة.

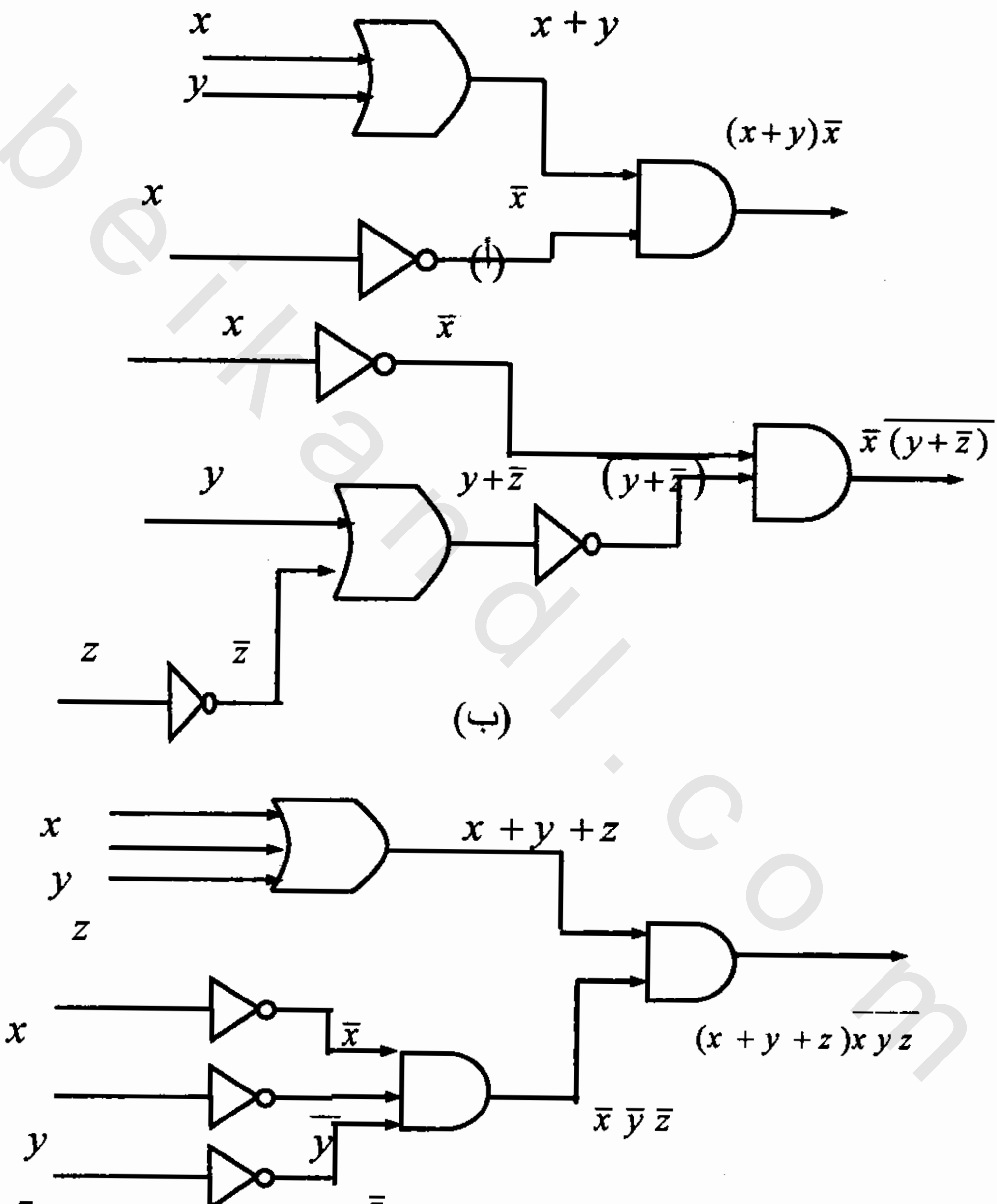
٤- نفترض أن المخرج للدائرة يكون دالة لحظية (آنية) للمدخل الحالي ولايوجد اعتماد على الزمن ولا نضع أي اعتبار للمدخلات السابقة.

مثال ٨-٢-١. صمم الدائرة التي تنتج المخرجات التالية

(أ) $(x+y)\,\bar{x}$.   (ب) $\bar{x}\,\overline{(y+\bar{z})}$.

(ج) $(x+y+z)\left(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\right)$.

الحل: الدوائر التي تنتج هذه المخرجات مبينة في شكل ٨-٢-٤.



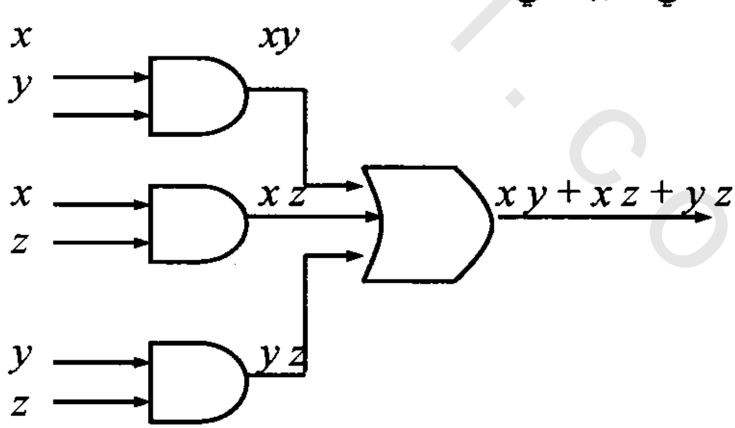
(ج)   شكل ٨-٢-٤

أمثلة للدوائر

سوف نقدم بعض الأمثلة لدوائر تؤدي وظائف مفيدة.

مثال ٨-٢-٢. لجنة مكونة من ثلاثة أفراد تتخذ القرارات في القضايا الخاصة لمنظمة. كل فرد يصوت بنعم أو لا لكل اقتراح يعرض. الاقتراح يمر إذا حصل على صوتين على الأقل نعم. صمم دائرة تحدد ما إذا كان الاقتراح يمر.

الحل: نفرض $x = 1$ إذا كان الشخص الأول يصوت بنعم و $x = 0$ إذا كان هذا الشخص يصوت بلا؛ نفرض $y = 1$ إذا كان الشخص الثاني يصوت بنعم ، $y = 0$ إذا كان هذا الشخص يصوت بلا ؛ نفرض $z = 1$ إذا كان الشخص الثالث يصوت بنعم و $z = 0$ إذا كان هذا الشخص يصوت بلا. إذن الدائرة يجب أن تصمم بحيث تنتج المخرج 1 من المدخلات x، y و z عندما يكون إثنين أو أكثر من x، y و z هو 1. أحد التمثيلات للدالة البوليانية التي لها هذه القيم للمخرج هي $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ يكون لها القيمة 1 إذا وفقط إذا كان على الأقل إثنين من المتغيرات x، y و z لها القيمة 1). الدائرة التي تمثل هذه الدالة هي المبينة في شكل ٨-٢-٥.



شكل ٨-٢-٥

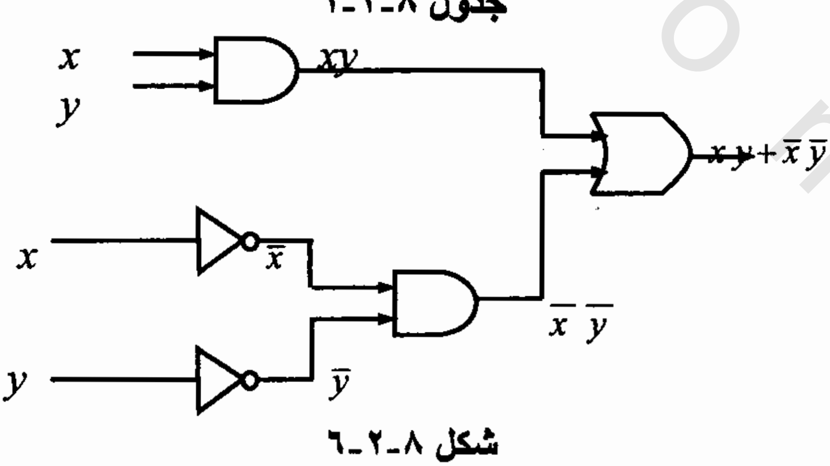
مثال ٨-٢-٣. أحيانا يتم التحكم في مصابيح الاضاءة من أكثر من مفتاح. نحتاج إلى تصميم دوائر بحيث أن أي من هذه المفاتيح يتم تحويله فإن

المصابيح تضيء إذا كان مطفأة وتطفأ إذا كان مضاءة. صمم دائرة تنفذ ذلك عندما يكون لدينا مفتاحين وعندما يكون لدينا ثلاثة مفاتيح.

الحل: نبدأ بتصميم الدائرة التي تتحكم في مصابيح الاضاءة عندما يكون لدينا مفتاحين. نفرض $x=1$ عندما يكون المفتاح الأول مغلق و $x=0$ عندما يكون المفتاح الأول مفتوح، ونفرض أن $y=1$ عندما يكون المفتاح الثاني مغلق و $y=0$ عندما يكون المفتاح الثاني مفتوح. نفرض $f(x,y)=1$ عندما يكون المصابيح مضاءة و $f(x,y)=0$ عندما تكون المصابيح غير مضاءة. يمكننا، قولا واحدا، تقرير أن المصابيح تكون مضاءة عندما يكون كلا المفتاحين مغلق، لذلك $f(1,1)=1$. وهذه تحدد القيم الأخرى لـ f. عندما يفتح أحد المفتاحين سوف تطفأ المصابيح، لذلك $f(1,0)=f(0,1)=0$. عندما يفتح المفتاح الآخر فإن المصابيح تضيء، لذلك $f(0,0)=1$. جدول ٨-٢-١ يظهر هذه القيم. نجد أن $f(x,y)=xy+\bar{x}\bar{y}$. هذه الدالة ممثلة بالدائرة الموضحة في شكل ٨-٢-٦.

x	y	$F(x,y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

جدول ٨-٢-١



شكل ٨-٢-٦

الآن سوف نصمم دائرة لثلاثة مفاتيح. نفرض أن x، y و z هي المتغيرات البوليانية التي تشير إلى أي من المفاتيح يكون مغلق. نفرض $x=1$ عندما يكون المفتاح الأول مغلق و $x=0$ عندما يكون المفتاح الأول مفتوح، ونفرض أن $y=1$ عندما يكون المفتاح الثاني مغلق و $y=0$ عندما يكون المفتاح الثاني مفتوح ونفرض أن $z=1$ عندما يكون المفتاح الثالث مغلق و $z=0$ عندما يكون المفتاح الثالث مفتوح. نفرض $f(x,y,z)=1$ عندما يكون المصابيح مضاءة و $f(x,y,z)=0$ عندما تكون المصابيح غير مضاءة. يمكننا، قولا واحدا، تقرير أن المصابيح تكون مضاءة عندما تكون كل المفاتيح مغلقة، لذلك $f(1,1,1)=1$. وهذه تحدد القيم الأخرى لـ f عندما يفتح أحد المفاتيح سوف تطفأ المصابيح، لذلك $f(1,1,0)=f(1,0,1)=f(0,1,1)=0$. عندما يفتح المفتاح الثاني، تضاء المصابيح ، لذلك $f(1,0,0)=f(0,1,0)=f(0,0,1)=1$. أخيرا، عندما يفتح المفتاح الثالث فإن المصابيح تطفأ مرة أخرى، لذلك $f(0,0,0)=0$. جدول ٨-٢-٢ يظهرقيم هذه الدالة.

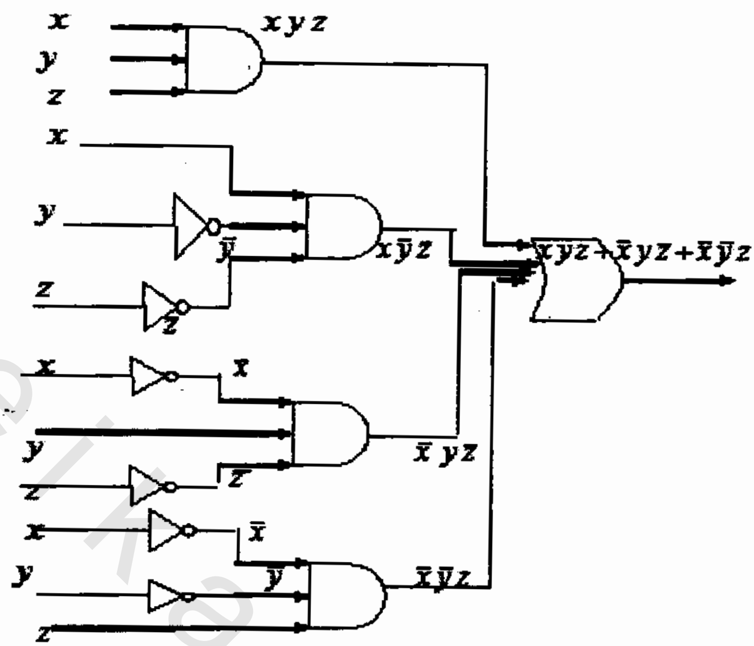
x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

جدول ٨-٢-٢

الدالة f يمكن أن تمثل بتعبير مجموع حواصل الضرب لها، لذلك

$$f(x,y,z)=xyz+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$$

الدائرة الموضحة في شكل ٨-٢-٧ تمثل هذه الدالة.



شكل ٨-٢-٧

مثال ٨-٢-٤. أوجد الدائرة التي تمثل الدالة البوليانية

$$f(w,x,y,z)=\sum m(4,5,7,8,9,11)$$

الحل: نعتبر ترتيب المتغيرات هو w,x,y,z. يمكننا تحديد صيغة الفصل الطبيعي لـ f بكتابة كل عدد حد أصغر بالرمز الثنائي ثم نوجد الحدود الصغرى المناظرة. على سبيل المثال

(أ) $5=0101$ تشير إلى الحد الأصغر $\bar{w}x\bar{y}z$،

(ب) $7=0111$ تشير إلى الحد الأصغر $\bar{w}xyz$.

بالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على

$$f(w,x,y,z)=\bar{w}x\bar{y}z+\bar{w}xyz+w\bar{x}\bar{y}\bar{z}+w\bar{x}\bar{y}z+w\bar{x}yz+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$$

باستخدام خواص المتغيرات البوليانية، نجد أن

$$\begin{aligned} f&=\bar{w}xz(\bar{y}+y)+w\bar{x}\bar{y}(z+\bar{z})+w\bar{x}yz+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}\\ &=\bar{w}xz+w\bar{x}\bar{y}+w\bar{x}yz+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}\\ &=\bar{w}x(z+\bar{y}\bar{z})+w\bar{x}(\bar{y}+yz) \end{aligned}$$

$$=\bar{w}\,x\,(z+\bar{y})+w\,\bar{x}\,(\bar{y}+z)$$
$$=\bar{w}\,x\,(\bar{y}+z)+w\,\bar{x}\,(\bar{y}+z)$$

لذلك (أ) $f(w,x,y,z)=\bar{w}\,xz+\bar{w}\,x\,\bar{y}+w\,\bar{x}\,\bar{y}+w\,\bar{x}z$

أو (ب) $.f(w,x,y,z)=\bar{w}\,x\,(\bar{y}+z)+w\,\bar{x}\,(\bar{y}+z)$

في مثال ٨-٢-٤، النتيجة تكون

$$f(w,x,y,z)=\bar{w}\,xz+\bar{w}\,x\,\bar{y}+w\,\bar{x}\,\bar{y}+w\,\bar{x}z$$

تسمى تمثيل أصغر مجموع حواصل ضرب للدالة

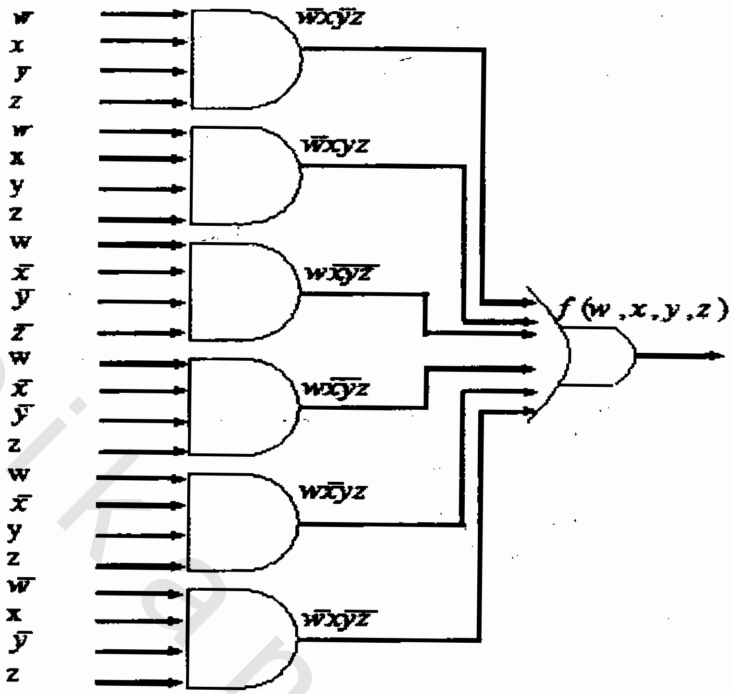
$$f(w,x,y,z)=\sum m(4,5,7,8,9,11)$$

رأينا أن هذا التمثيل هو مجموع أربعة حواصل ضرب، كل حاصل ضرب مكون من ثلاثة حروف. عندما نسمي مثل هذا التمثيل أصغر فإننا نعني أمرين

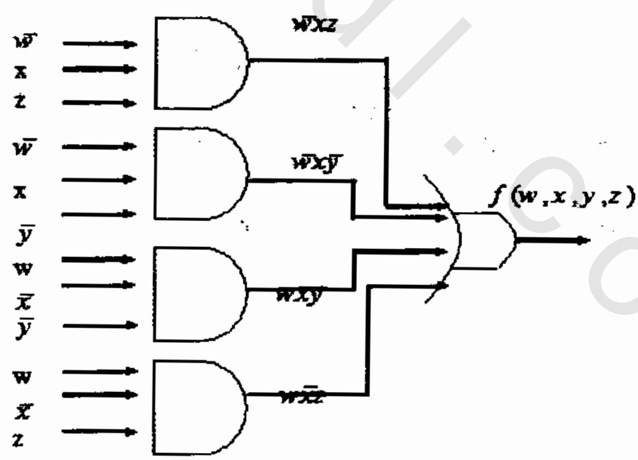
(١) أي تعديل إضافي ممكن يعطي تمثيل لا يكون مثل حواصل الضرب هذه.

(٢) إذا كان يمكن أن تمثل f بطريقة أخرى كمجموع حواصل ضرب (من حروف) فإننا سوف يكون لدينا على الأقل أربعة حدود حواصل ضرب كل منها على الأقل من ثلاثة حروف.

في شكل ٨-٢-٨ (أ) دائرة تمثل صيغة الفصل الطبيعي للدالة f في مثال ٨-٢-٤ الجزء (ب) من الشكل هي دائرة تمثل f كأصغر مجموع حواصل ضرب.



(أ)



(ب)

شكل ٨-٢-٨

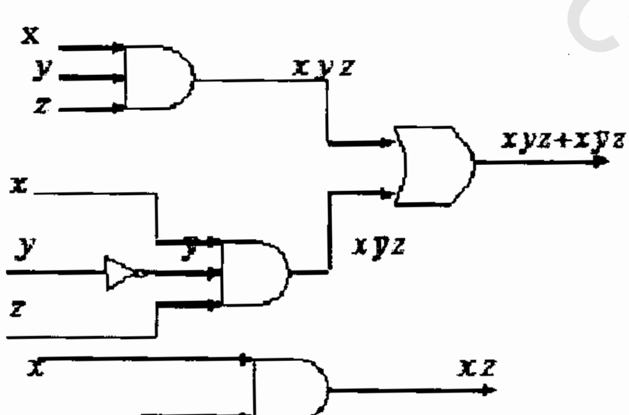
تصغير الدوائر Minimization of Circuits

خرائط كارنوف

كفاءة الدوائر التوافقية تعتمد على عدد وترتيب بواباتها. عملية تصميم دائرة توافقية تبدأ بجدول يعين المخرج لكل تركيبة من قيم المدخلات. دائما يمكننا استخدام تعبير مجموع حواصل الضرب لدائرة لإيجاد مجموعة البوابات المنطقية التي سوف تنفذ هذه الدائرة. ومع ذلك تعبير مجموع حواصل الضرب قد يحتوي حدود أكثر من الضروري. الحدود في تعبير مجموع حواصل الضرب التي تختلف في مجرد متغير واحد، بحيث أنه في حد واحد هذا المتغير يحدث وفي بقية الحدود مكملة هذا المتغير تحدث، يتم تجميعها. على سبيل المثال، نعتبر الدائرة التي مخرجها 1 إذا وفقط إذا كان $x=y=z=1$ أو $x=z=1$ و $y=0$. تعبير مجموع حواصل الضرب لهذه الدائرة يكون $x\,y\,z+x\,\bar{y}\,z$. حاصلي الضرب في هذا التعبير يختلفا في متغير واحد، وهو y. يمكن تجميعها بالصورة

$$x\,y\,z+x\,\bar{y}\,z=\left(y+\bar{y}\right)x\,z$$
$$=1\cdot(xz)=xz$$

إذن xz يكون تعبير بولياني بأقل عدد من المؤثرات يمثل الدائرة. نعرض تمثيلين لهذه الدائرة في شكل ٨-٢-٩.



شكل ٨-٢-٩

الدائرة الثانية تستخدم بوابة واحدة، بينما الدائرة الأولى تستخدم ثلاث بوابات وعاكس.

هذا المثال يبين أن تجميع الحدود في تعبير مجموع حواصل الضرب للدائرة يؤدي إلى تبسيط مفكوك هذه الدائرة.

سوف نصف عملية لتبسيط مفكوك مجموع حواصل الضرب. الهدف من هذه العملية هو انتاج مجموع بولياني لحواصل ضرب بوليانية التي تمثل دالة بوليانية بأقل عدد من حواصل ضرب الحروف بحيث مثل حواصل الضرب هذه تحتوي أقل عدد ممكن من الحروف ضمن المجاميع وحواصل الضرب التي تمثل الدالة البوليانية. اختصار مجموع حواصل الضرب يسمى **تصغير الدالة البوليانية** minimization of the Boolean function. العملية التي سوف نصفها تسمى طريقة **خريطة كارنوف** Karnaugh map التي نشرت في عام ١٩٥٣ بواسطة Maurice Karnaugh . سوف نجد أن صيغة الفصل الطبيعي للدالة البوليانية هو المفتاح الرئيسي لهذه الطريقة.

في تبسيط صيغة الفصل الطبيعي للدالة f في مثال ٨-٢-٤، جمَّعنا الحدين $\overline{w}\,x\,\overline{y}\,z$ و $\overline{w}\,xyz$ إلى حد حاصل ضرب $\overline{w}\,xz$ ، لأن

$$\overline{w}\,x\,\overline{y}z+\overline{w}\,xyz=\overline{w}\,xz\,(\overline{y}+y)=\overline{w}\,xz\,(1)=\overline{w}\,xz$$

هذا مؤشر إلى أنه إذا كان حدان أصغران يختلفان في حرف واحد تحديدا فإنه يمكن تجميعهما إلى حد ضرب بإسقاط هذا الحرف.

بالنسبة إلى $g:B^4\to B$ حيث

$$g(w,x,y,z)=wx\,\overline{y}\,\overline{z}+wx\,\overline{y}z+wxyz+wxy\,\overline{z}$$

كل حد أصغر(ما عدا الأول) يختلف عن الحد السابق له في حرف واحد.

هنا يمكن تبسيط g بالصورة

$$\begin{aligned} g&=wx\,\overline{y}\,(\overline{z}+z)+wxy\,(z+\overline{z})=wx\,\overline{y}+wxy\\ &=wx\,(\overline{y}+y)=wx\end{aligned}$$

أيضا يمكننا كتابة

$$\begin{aligned} g&=wx\,(\overline{y}\,\overline{z}+\overline{y}z+yz+y\,\overline{z})\\ &=wx\,(y+\overline{y})(z+\overline{z})=wx\end{aligned}$$

المفتاح إلى عملية الاختزال هذه هو تمييز الحدود الصغرى حيث أي حدين متجاورين يختلفان فقط في حرف واحد.

إذا كان $h : B^4 \to B$ وصيغة الفصل الطبيعي تحتوي 12 حد هل يمكن تحريك هذه الحدود بحيث نميز أحسن اختزال؟ خريطة كارنوف تنظم لنا هذه الحدود.

نبدأ بالحالة متغيرين w و x . جدول ٨-٢-٣ يبين لنا خريطة كارنوف للدوال $f(w,x) = wx$ و $g(w,x) = w + x$

w \ x	0	1
0		
1		1

(أ) wx

w \ x	0	1
0		1
1	1	1

(ب) $w + x$

جدول ٨-٢-٣

في الجزء (أ)، 1 داخل الجدول يشير إلى الفصل الأساسي wx. هذا يحدث في الصف حيث $w = 1$ والعمود حيث $x = 1$، الحالة الوحيدة عندما $wx = 1$. في الجزء (ب) يوجد ثلاثة 1's في الجدول. 1 يناظر $\overline{w}x$ والتي لها القيمة 1 عندما $w = 0$ و $x = 1$. في الأسفل 1 و 1 يناظران wx و $w\overline{x}$ ونقرأ الصف السفلي من اليسار إلى اليمين . جدول ٨-٢-٣(ب) يمثل $\overline{w}x + w\overline{x} + wx$. كنتيجة لتجاورهما في الصف السفلي ، الجدول يشير إلى أن wx و $w\overline{x}$ يختلفان في حرف واحد فقط ويمكن تجميعهما لتعطي w. من قانون تساوي القوة يمكننا استخدام نفس الفصل مرة أخرى في عملية اختزال. التجاور في العمود الثاني في الجدول مؤشر إلى أن جمع $\overline{w}x$ و wx يعطي x. (في عمود x كل الإحتمالات لـ w ، وهي w و $\overline{w}$ ، تظهر، هذه طريقة للإقرار بـ x كنتيجة لهذا العمود). لذلك جدول ٨-٢-٣(ب) يوضح أن

$$\begin{aligned}
\overline{w}x + w\overline{x} + wx &= \overline{w}x + w\overline{x} + wx + wx \\
&= (w\overline{x} + wx) + (\overline{w}x + wx) = w(\overline{x} + x) + (\overline{w} + w)x \\
&= w(1) + (1)x = w + x
\end{aligned}$$

مثال ٨-٢-٥. الآن نعتبر ثلاثة متغيرات بوليانية x، y، z. في جدول ٨-٢-٤ الفكرة الجديدة التي نواجهها تكون في الصف الذي رأسه xy . هنا نجد أنه بالتحرك من اليسار إلى اليمين 00 تختلف عن 01 في مكان واحد فقط، 11 تختلف عن 10 في مكان واحد فقط ، وإذا عدنا مرة أخرى 10 يختلف عن 00 في مكان واحد فقط.

إذا كانت $f(w,x,y)=\sum m(0,2,4,7)$،

ولأن $0=000(\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y})$، $2=010(\overline{w}x\overline{y})$، $4=100(w\overline{x}\,\overline{y})$، $7=111(wxy)$، يمكننا تمثيل هذه الحدود بوضع 1's في الجدول كما هو مبين في جدول ٨-٢-٤

$w \backslash xy$	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	

جدول ٨-٢-٤

الـ 1 المناظر لـ wxy لايجاور أي 1 آخر في الجدول، لذلك يكون معزولا ويكون لدينا wxy كواحد في المجموع في أصغر مجموع حواصل ضرب الذي يمثل الدالة. 1 المناظر لـ $\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}$ ليس معزولا، إذا اعتبرنا أن الجدول يلتف، هذا يجعل هذا الـ 1 يجاور 1 المناظر لـ $\overline{w}x\overline{y}$. نجمع هذا لنعطي

$$\overline{w}x\overline{y}+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}=\overline{w}\,\overline{y}(x+\overline{x})=\overline{w}\,\overline{y}(1)=\overline{w}\,\overline{y}$$

أخيرا الـ 1's في العمود حيث $x=y=0$ مؤشر لاختزال $\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}+w\overline{x}\,\overline{y}$ إلى $(\overline{w}+w)\overline{x}\,\overline{y}=(1)\overline{x}\,\overline{y}=\overline{x}\,\overline{y}$.

لذلك أصغر مجموع حواصل ضرب يكون $f=wxy+\overline{w}\,\overline{y}+\overline{x}\,\overline{y}$

مثال ٨-٢-٦. من الأجزاء المناظرة في جدول ٨-٢-٥ نحصل على

w\xy	00	10	11	10
0	1			1
1	1			1

(أ)

w\xy	00	10	11	10
0	1	1	1	1
1				

(ب)

w\xy	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	1

(ج)

جدول ٨-٢-٥

(أ) $f(w,x,y)=\sum m(0,2,4,6)=\sum m(0,4)+\sum m(2,6)$

$$=(\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}+w\,\overline{x}\,\overline{y})+(\overline{w}\,x\,\overline{y}+wx\,\overline{y})$$
$$=(\overline{w}+w)\overline{x}\,\overline{y}+(\overline{w}+w)x\,\overline{y}$$
$$=(1)\overline{x}\,\overline{y}+(1)x\,\overline{y}$$
$$=\overline{x}\,\overline{y}+x\,\overline{y}=(\overline{x}+x)\overline{y}=(1)\overline{y}=\overline{y}$$

المتغير الوحيد الذي لم تتغير قيمته هو y ، في جميع الحدود المشار إليها بـ 1's قيمة y هي الصفر، لذلك $f(w,x,y)=\overline{y}$.

(ب) $f(w,x,y)=\sum m(0,1,2,3)$

$$=\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}+\overline{w}\,\overline{x}\,y+\overline{w}\,x\,\overline{y}+\overline{w}\,xy$$
$$=\overline{w}\,(\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,y+x\,\overline{y}+xy)$$
$$=\overline{w}\,(\overline{x}+x)(\overline{y}+y)=\overline{w}\,(1)(1)=\overline{w}$$

(ج) $f(w,x,y)=\sum m(1,2,3,5,6,7)$

$$=\sum m(1,3,5,7)+\sum m(2,3,6,7)$$
$$=y+x$$

للترقي إلى أربعة متغيرات نعتبر المثال التالي

مثال ٨-٢-٧. أوجد أصغر تمثيل لمجموع حواصل ضرب للدالة $f(w,x,y,z)=\sum m(0,1,2,3,8,9,10)$.

الحل: خريطة كارنوف للدالة f في جدول ٨-٢-٦ تجمع الـ 1's في الأركان الآربع (المتجاورة) لتعطي الحد

$$\bar w\,\bar x\,\bar y\,\bar z+\bar w\,\bar x\,y\,\bar z+w\,\bar x\,\bar y\,\bar z+w\,\bar x\,y\,\bar z$$

$$=\bar x\bar z\,(\bar w\bar y+\bar w y+w\bar y+wy)=\bar x\bar z$$

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1		1

جدول ٨-٢-٦

الـ 1's الأربع في أعلى الجدول تجمع لتعطي $\bar w\,\bar x$. أخيرا الـ 1 في الصف $(x=0,w=1)$ والعمود $(z=1,y=0)$ يمكن جمعه مع 1 الذي على يساره وهذان يمكن جمعهما مع أول إثنين من 1's في الصف العلوي لتعطي

$$\bar w\,\bar x\,\bar y\,\bar z+\bar w\,\bar x\,\bar y\,z+w\,\bar x\,\bar y\,\bar z+w\,\bar x\,\bar y\,z=\bar x\,\bar y$$

لذلك، كأصغر مجموع حواصل ضرب يكون

$$f(w,x,y,z)=\bar x\,\bar z+\bar w\,\bar x+\bar x\,\bar y$$

مثـــال ٨-٢-٨. خريطـــة $f(w,x,y,z)=\sum m(9,10,11,12,13)$ تظهر في جدول ٨-٢-٧ الـ 1 الوحيد في الجدول الذي لايجمع مع أي حد آخر يكون مجاور لـ 1 على يمينه (هذا التجميع يعطي $w\,\bar x\,z$) و 1 أعلاه (هذا التجميع يعطي $w\,\bar y\,z$). نتيجة لذلك، يمكن تمثيل f كأصغر مجمـــوع حواصـــل ضـــرب بطـــريقتين: $wx\bar y+w\bar x y+w\bar x z$ و $wx\bar y+w\bar x y+w\bar y z$. هذا النـوع من التمثيل ليس وحيد ومع ذلك يمكننا ملاحظة أنه نفس العدد من حواصل الضرب ونفس العدد الكلي من الحروف يظهر في كل حالة.

wx \ yz	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10		1	1	1

جدول ٨-٢-٧

مثال ٨-٢-٩. توجد طريقة صحيحة وطريقة خطأ لاستخدام خريطة كارنوف. نفرض $f(w,x,y,z) = \sum m(3,4,5,7,9,13,14,15)$. في جدول ٨-٢-٨(أ) تجمع كتلة من أربعة 1's إلى الحد xz. ولكن عندما نتعامل مع الـ 1's الأربعة الأخرى، نفعل مايظهر في الجزء (ب). لذلك النتيجة في الجزء (ب) سوف تنتج مجموع أربعة حدود (كل حد ثلاثة حروف) بينما الطريقة المقترحة في الجزء (أ) أضافت حد زائد غير مطلوب وهو xz.

(أ)

wx \ yz	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	
11		1	1	1
10		1		

(ب)

wx \ yz	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	
11		1	1	1
10		1		

جدول ٨-٢-٨

المقترحات التالية على استخدام خرائط كارنوف وضعت على أساس ما قد فعلناه في الأمثلة السابقة. نصوغها الآن لكي يتم استخدامها للخرائط الأكبر.

١- إبدأ بتجميع الحدود في الجدول حيث يوجد على الأكثر إمكانية واحدة للتبسيط.

٢- إختبر الأركان الأربعة للجدول. قد تحتوي 1's متجاورة حتى وإن ظهرت كأنها معزولة.

٣- في كل التبسيطات، حاول الحصول على أكبر كتلة من 1's المتجاورة للحصول على أصغر حد ضرب (نذكر هنا أن 1's يمكن أن تستخدم أكثر من مرة، إذا كان ذلك ضروريا، وذلك من خاصية تساوي القوى للعملية +).

٤- إذا كان هناك اختيار في التبسيط لأي عنصر في الجدول، نحاول استخدام 1's المجاورة التي لم يتم استخدامها في أي تبسيط سابق.

مثال ٨-٢-١٠. إذا كان

$$f(v,w,x,y,z)=\sum m(1,5,10,11,14,15,18,26,27,30,31)$$

نكون جدولين 4×4، جدول عندما $v=0$ والآخر عندما $v=1$.

wx \ yz	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11			1	1
10			1	1

$(v=0)$

wx \ yz	00	01	11	10
00				1
01				
11			1	1
10			1	1

$(v=1)$

جدول ٨-٢-٩

باتباع ترتيب المتغيرات نكتب ن على سبيل المثال، $5=00101$ للإشارة إلى الحاجة إلى 1 في الصف الثاني في العمود الثاني في الجدول حيث $v=0$. الـ 1's الخمس الأخرى في الجدول حيث $v=0$ هي للحدود الصغرى 1,10,11,14,15. الحدود الصغرى لـ 18,26,27,30,31 تمثل بخمسة 1's في الجدول حيث $v=1$. بعد تعبئة كل 1's ، نجد أن 1 في الصف الأول في العمود الرابع في جدول $v=1$ يمكن تجميعه مع حد آخر بطريقة واحدة فقط – مع $vw\bar{x}y\bar{z}$ - لينتج حاصل الضرب $v\bar{x}y\bar{z}$. هذا أيضا يكون صحيح لإثنين من 1's في العمود الثاني من جدول $v=0$ هذه تعطي حاصل الضرب $\bar{v}\bar{w}\bar{y}z$. كتلة الثمان 1's تعطي wy، ويكون لدينا

$$f(v,w,x,y,z)=wy+\bar{v}\bar{w}\bar{y}z+v\bar{x}y\bar{z}.$$

الدالة في ستة متغيرات t,v,w,x,y,z تتطلب أربعة جداول، واحد لكل حالة من الحالات

(أ) $t=0,v=0$، (ب) $t=0,v=1$،
(ج) $t=1,v=1$، (د) $t=1,v=0$.

بعد ستة متغيرات هذه الطريقة تصبح معقدة بصورة كبيرة.

نختتم هذا الجزء بمثال يشتمل على المفهوم المناظر، وهو أصغر حاصل ضرب مجاميع.

مثال ٨-٢-١١. للدالة

$$g(w,x,y,z)=\prod M(1,5,7,9,10,13,14,15)$$

نضع 0 في كل موضع للمكافئات الثنائية للحدود العليا في القائمة. وهذا يعطي النتيجة المبينة في جدول ٨-٢-١٠

wx \ yz	00	01	11	10
00		0		
01		0	0	
11		0	0	0
10		0		0

جدول ٨-٢-١٠

الـ 0 في الركن الأسفل يمين يمكن أن يجمع فقط إلى الـ 0 أعلاه، ولذلك يكون لدينا

$$(\overline{w}+x+\overline{y}+z)(\overline{w}+\overline{x}+\overline{y}+z)$$
$$=(\overline{w}+\overline{y}+z)+x\overline{x}=(\overline{w}+\overline{y}+z)+0=\overline{w}+\overline{y}+z$$

الكتلة من أربعة 0's (للحدود العليا 5,7,13,15) تبسط إلى $\overline{x}+\overline{z}$. بينما الأربعة 0's (للحدود العليا 1,5,9,13) في العمود الثاني تعطي $y+\overline{z}$. لذلك أصغر حاصل ضرب مجاميع يكون

$$g(w,x,y,z)=(\overline{w}+\overline{y}+z)(\overline{x}+\overline{z})(y+\overline{z}).$$

طريقة كوني مكلوسكي Qunie-McCluskey.

رأينا فيما سبق كيف يمكن استخدام خرائط كارنوف لإيجالد تعبيرات صغرى للدوال البوليانية كمجاميع بوليانية لحواصل ضرب بوليانية. ومع ذلك، خرائط كارنوف تكون غير ملائم لاستخدامها عندما يوجد أكثر من أربعة متغيرات، كما أن خرائط كارنوف تعتمد على التوقع لتحديد الحدود للتجميع. ومن ثم الحاجة إلي عملية تبسيط تعبيرات حواصل الضرب لأي عدد من المتغيرات بحيث يمكن ميكنتها. طريقة كوني مكلوسكي هي مثل هذه الطريقة. بصفة أساسية طريقة كوني مكلوسكي تتكون من

جزأين. الجزء الأول ينظر تلك الحدود المرشحة لتكون محتواة في المفكوك الأدنى كمجموع بولياني لحواصل ضرب بولياني. الجزء الثاني يحدد تلك الحدود التي بالفعل تستخدم.

مثال ٨-٢-١٢. سوف نبين كيفية استخدام طريقة كوني مكلوسكي لإيجاد أصغر مفكوك يكافئ $xyz+x\bar{y}z+\bar{x}yz\ \bar{x}\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. سوف نمثل كل حد صغير في هذا المفكوك باستخدام سلسلة بتات. البت الأولى سوف تكون 1 إذا كانت تحدث x و 0 إذا كانت تحدث $\bar{x}$. البت الثانية سوف تكون 1 إذا كانت y تحدث و 0 إذا كانت $\bar{y}$ تحدث. البت الثالثة سوف تكون 1 إذا كانت z تحدث و 0 إذا كانت $\bar{z}$ تحدث. إذن نجمع هذه الحدود طبقا لعدد 1s في سلاسل البتات المناظرة. المعلومات موضحة في جدول ٨-٢-٣.

الحد الأصغر Minterm	سلسلة البتات Bit String	عدد 1s Number of 1s
xyz	111	3
$x\bar{y}z$	101	2
$\bar{x}yz$	011	2
$\bar{x}\bar{y}z$	001	1
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	0

جدول ٨-٢-١١

الحدود الصغرى التي يمكن تجميعها هي التي تختلف تحيدا في حرف واحد. لذلك الحدان اللذان يمكن تجميعهما يختلفان تحديدا في واحد فقط من عدد 1s في سلسلتي البتات اللتان تمثلانهما. عندما نقوم بتجميع إثنين من الحدود الصغرى في حاصل ضرب، فإن حاصل الضرب هذا يحتوي حرفين إثنين. حاصل الضرب في حرفين اثنين يمثل باستخدام شرطة لنرمز إلى المتغير الذي لايحدث. على سبيل المثال، الحدود الصغرى $x\bar{y}z$ و $\bar{x}\bar{y}z$ ، الممثلة بسلسلتي البتات 101 و 001، يمكن تجميعهما إلى $\bar{y}z$ ، الممثلة بسلسلة البتات 01- . كل الثنائيات من

الحدود الصغرى التي يمكن تجميعها والضرب المكون من هذه التجميعات موضح في جدول ٨-٢-١٢

			الخطوة الأولى		الخطوة الثانية	
	الحد	سلسلة البتات	الحد	سلسلة البتات	الحد	سلسلة البتات
1	xyz	111	$(1,2)\ xz$	1-1	$(1,2,3,4)\ z$	--1
2	$x\bar{y}z$	101	$(1,3)\ yz$	-11		
3	$\bar{x}yz$	011	$(2,4)\ \bar{y}z$	-01		
4	$\bar{x}\bar{y}z$	001	$(3,4)\ \bar{x}z$	0-1		
5	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	$(4,5)\ \bar{x}\bar{y}$	00-		

جدول ٨-٢-١٢

في جدول ٨-٢-١٢ أشرنا ايضا إلى أي الحدود التي استخدمت لتكوين حواصل ضرب بأقل عدد من الحروف، هذه الحدود ليس بالضرورة أن نحتاج إليها في أصغر مفكوك. الخطوة التالية هي تحديد المجموعة الصغرى لحاصل الضرب التي تمثل الدالة البوليانية. نبدأ بكل حواصل الضرب التي لم تستخدم لكي نبني مع عدد أقل من الحروف. بعد ذلك نكون جدول ٨-٢-١٣، والذي يحتوي على صف لكل حاصل ضرب مرشح تم تكوينه بتجميع حدود أصلية، وعمود لكل حد أصلي، ونضع × في الموضع إذا كان الحد الأصلي في مفكوك مجموع حواصل الضرب قد استخدم لتكوين هذا الضرب المرشح. في هذه الحالة، نقول أن حاصل الضرب المرشح غطى covers الحد الأصغر الأصلي. نحتاج إلى أن يتضمن على الأقل واحد يغطي كل الحدود الصغرى الأصلية. نتيجة لذلك، كلما كان يوجد × واحدة فقط في العمود في الجدول، الضرب المناظر لصف هذه الـ × يجب أن يستخدم.

	$x y z$	$x \bar{y} z$	$\bar{x} y z$	$\bar{x} \bar{y} z$	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$
z	×	×	×	×	
$\bar{x} \bar{y}$				×	×

جدول ٨-٢-١٣

من جدول ٨-٢-٥ نرى أن كلا من z و $\bar{x}\,\bar{y}$ كلاهما نحتاج إليه. لذلك الاجابة النهائية $z + \bar{x}\,\bar{y}$.

كما وضحنا في مثال ٨-٢-١٢، طريقة كوين مكلوسكي تستخدم هذه المتتابعة من الخطوات لتبسيط مفكوك مجموع حواصل الضرب.

١- نعبرعن كل حد صغيرفي n متغير بسلسلة بتات طولها n حيث يكون 1 في الموضع رقم i إذا كان x_i يحدث و 0 في هذا الموضع إذا كان $\bar{x_i}$ يحدث.

٢- نجمع سلاسل البتات طبقا لعدد 1s فيهم.

٣- نحدد كل حواصل الضرب في $n-1$ متغير التي يمكن تكوينها بأخذ المجموع البولياني للحدود الصغيرة في المفكوك. الحدود الصغيرة التي يمكن تجميعها تمثل بسلاسل بتات تختلف في موضع واحد فقط. نمثل حواصل الضرب هذه في $n-1$ متغير بسلاسل بتات حيث يكون 1 في الموضع رقم i إذا كان x_i و 0 في هذا الموضع في حاصل الضرب إذا كان $\bar{x_i}$ يحدث و(-) في هذا الموضع إذا كان لايوجد حرف يتضمن x_i في حاصل الضرب.

٤- نحدد كل حواصل الضرب في $n-2$ متغير التي يمكن تكوينها بأخذ المجموع البولياني لحواصل الضرب في $n-1$ متغير الموجودة في الخطوة السابقة. حواصل الضرب في $n-1$ متغير التي يمكن تجميعها تمثل بسلاسل بتات التي لها (-) في نفس الموضع وتختلف فقط في موضع واحد.

٥- بالاستمرار في تجمبع حواصل الضرب البولياني إلى حاصل ضرب في أقل عدد من المتغيرات قدر المستطاع.

٦- أوجد كل حواصل الضرب البولياني التي لم تستخدم لتكوين الضرب البولياني في حرف واحد أقل.

٧- أوجد أقل مجموعة من حواصل الضرب البولياني هذه بحيث أن مجموع حواصل الضرب هذه يمثل الدالة البوليانية. هذا يتم بتكوين جدول يبين أي الحدود الصغرى غطت أي حاصل ضرب. كل حد أصغر يجب أن يغطى على الأقل بحاصل ضرب واحد.

مثال ٨-٢-١٣. استخدم طريقة كوين مكلوسكي لتبسيط مفكوك مجموع حواصل الضرب

$$wxy\bar{z}+w\bar{x}yz+w\bar{x}y\bar{z}+\bar{w}xyz+$$
$$\bar{w}x\bar{y}z+\bar{w}\bar{x}yz+\bar{w}x-\bar{y}z$$

الحل: أولا نمثل كل حد صغير بسلسلة بتات ونجمع هذه الحدود طبقا لعدد 1s في سلسلة البتات. هذا موضح في جدول ٨-٢-١٤ كل حواصل الضرب البولياني التي يمكن تكوينها بأخذ المجموع البولياني مبينة في جدول ٨-٢-١٥ حواصل الضرب التي لم يتم استخدامها في تكوين حواصل الضرب في متغيرات أقل فقط هي $\bar{w}z$ ، $wy\bar{z}$ ، $w\bar{x}y$ و $\bar{x}yz$.

عدد الـ 1's	سلسلة البتات	الحد
3	1110	$wxy\bar{z}$
3	1011	$w\bar{x}yz$
3	0111	$\bar{w}xyz$
2	1010	$w\bar{x}y\bar{z}$
2	0101	$\bar{w}x\bar{y}z$
2	0011	$\bar{w}\bar{x}yz$
1	0001	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

جدول ٨-٢-١٤

في جدول ٨-٢-١٦ نبين الحدود الصغيرة التي تغطي كل من حواصل الضرب. لكي نغطي هذه الحدود الصغيرة يجب أن تشمل $\bar{w}z$ و $wy\bar{z}$ ، حيث أن حواصل الضرب هذه هي الوحيدة التي تغطي

$\overline{w}xyz$ و $wxy\overline{z}$، على الترتيب. بمجرد أن حاصلي الضرب هذان تم تضمينهما، نجد أن واحد فقط من حاصلي الضرب الذين تركناهما نحتاج إليه. طبقا لذلك يمكننا أن نأخذ إما $\overline{w}z+wy\overline{z}+w\overline{x}y$ أو $\overline{w}z+wy\overline{z}+wy\overline{z}+\overline{x}yz$.

		الخطوة الأولى		الخطوة الأولى	
الحد	السلسلة	الحد	السلسلة	الحد	السلسلة
1 $wxy\overline{z}$	1110	(1, 4) $wy\overline{z}$	1 - 10	(3, 5, 6, 7) $\overline{w}z$	0 -1
2 $w\overline{x}yz$	1011	(2, 4) $w\overline{x}y$	101 -		
3 $\overline{w}xyz$	0111	(2, 6) $\overline{x}yz$	- 011		
4 $w\overline{x}y\overline{z}$	1010	(3, 5) $\overline{w}xz$	01 – 1		
5 $\overline{w}x\overline{y}z$	0101	(3, 6) $\overline{w}yz$	0 – 11		
6 $\overline{w}\overline{x}yz$	0011	(5, 7) $\overline{w}\overline{y}z$	0 – 01		
7 $\overline{w}\overline{x}\overline{y}z$	0001	(6, 7) $\overline{w}\overline{x}z$	00 - 1		

جدول ٨-٢-١٥

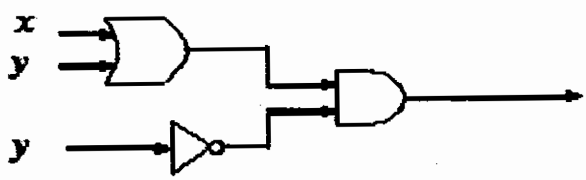
	$wxy\overline{z}$	$w\overline{x}yz$	$\overline{w}xyz$	$w\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{w}x\overline{y}z$	$\overline{w}\overline{x}yz$	$\overline{w}\overline{x}\overline{y}z$
$\overline{w}z$			×		×	×	×
$wy\overline{z}$	×			×			
$w\overline{x}y$		×		×			
$\overline{x}yz$		×				×	

جدول ٨-٢-١٦

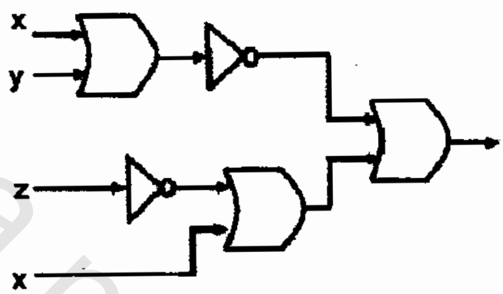
تمارين ٨-٢

١- فيما يلي ، أوجد نواتج الدوائر المعطاة:

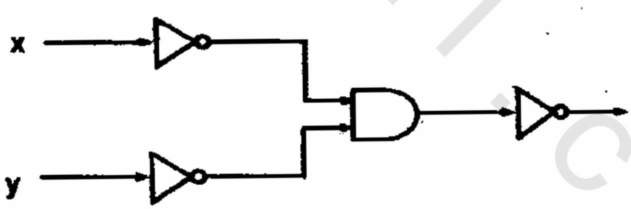
(أ)



(ب)



(ج)



٢- باستخدام العواكس، بوابات AND وبوابات OR كون شبكة بوابات للدوال التالية

(أ) $f(x,y,z) = x\bar{z} + y\bar{z} + x$.

(ب) $g(x,y,z) = (x+\bar{z})(y+\bar{z})\bar{x}$.

(ج) $h(x,y,z) = \overline{(xy \oplus yz)}$.

٣- استخدم خرائط كارنوف لإيجاد تمثيل أصغر مجموع حواصل ضرب للدوال التالية

(أ) $f(x,y,z) = \sum m(1,2,5,6)$.

(ب) $f(w,x,y,z)=\prod M(0,1,4,5)$.

(ج) $f(w,x,y,z)=\sum m(0,2,5,7,8,10,13,15)$.

(د) $f(w,x,y,z)=\sum m(5,6,8,11,12,13,14,15)$.

(هـ) $f(w,x,y,z)=\sum m(7,9,10,11,14,15)$.

٤- أوجد تمثيل أصغر حاصل ضرب مجاميع للدالة

$f(w,x,y,z)=\prod M(0,1,2,4,5,10,12,13,14)$.

٥- أرسم خريطة كارنوف لتعبيرات مجموع حواصل الضرب في متغيرين:

(أ) $x\bar{y}$. (ب) $xy+\overline{x\,y}$.

(ج) $xy+x\bar{y}+\bar{x}y+\overline{x\,y}$.

٦- صمم دائرة من عواكس، بوابات" و" AND، وبوابات "أو" OR لتنتج المخرجات التالية

(أ) $\bar{x}+y$. (ب) $\overline{(x+y)}\,x$.

(ج) $xyz+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. (د) $\overline{(\bar{x}+z)(y+\bar{z})}$.

٧- بين أن $F(x,y,z)=xy+xz+yz$ يكون لها القيمة 1 إذا وفقط إذا كان إثنين على الأقل من المتغيرات x، y و z يكون لهما القيمة 1.

٨- استخدم طريقة كوني مكلوسكي لتبسيط تعبير مجموع حواصل الضرب في كل مما يلي

(أ) $\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z$. (ب) $xyz+xy\bar{z}+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}$.

(ج) $xy\bar{z}+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z$.

(د) $xyz+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

(هـ) $wxyz+wx\bar{y}z+wx\bar{y}\bar{z}+w\bar{x}y\bar{z}+w\bar{x}\bar{y}z$.

(و) $wxy\bar{z}+wx\bar{y}z+w\bar{x}z+\bar{w}x\bar{y}z+\bar{w}\bar{x}y\bar{z}+\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$.