الباب الأول
قواعد المنطق وطرق البرهان
Logic and Proof

المنطق هو أساس التفكير الرياضي وقواعد المنطق تحدد معنى العبارات الرياضية. فعلى سبيل المثال، هذه القواعد تساعدنا على فهم تفسير تلك العبارات.

لفهم الرياضيات، يجب علينا أن نفهم كيفية تشكيل محاججة (حجة) رياضية صحيحة، وهو ما يعرف بالبرهان. بمجرد أن نبرهن على صحة عبارة رياضية فإن هذه العبارة تسمى نظرية. مجموعة النظريات حول موضوع ما تنظم ما نعرفه عن هذا الموضوع. لتعلم موضوع ما في الرياضيات، نحتاج إلى بناء الحجج والمناقشات الرياضية حول هذا الموضوع وليس مجرد عرض لها. علاوة على ذلك، لأن معرفة إثبات نظرية غالبا ما يجعل من الممكن تعديلها لتناسب أوضاع جديدة، فإن البراهين تلعب دورا أساسيا في تطوير واستحداث أفكار جديدة.

في هذا الباب، سوف نشرح كيفية تشكيل الحجج الرياضية الصحيحة ونقدم الأدوات اللازمة لبناء هذه الحجج. أيضا سوف نعطي عددا وافرا من طرق البرهان المختلفة التي من شأنها أن تمكننا من أن نبرهن العديد من الأنواع المختلفة من النتائج. بعد إدخال العديد من طرق البرهان المختلفة سوف نقدم بعض الاستراتيجيات لبناء البراهين.

١-١ منطق التقارير (الفرضيات) Propositional Logic

قواعد المنطق تعطي المعنى الدقيق للبيانات الرياضية. وتستخدم هذه القواعد للتمييز بين الحجج الرياضية الصالحة وغير الصالحة. حيث أن أحد الأهداف الرئيسية لهذا الموضوع هو تعليم الطالب كيفية فهم وبناء الحجج الرياضية الصحيحة، لذلك نبدأ دراستنا بمقدمة للمنطق.

الفرضيات (التقارير) Propositions

الآن نبدأ بتقديم الوحدات الأولية لبناء منطق الفرضيات. نعلم من دراستنا اللغوية سواء كانت اللغة العربية أو أي لغة أخرى أن الكلام يتكون من كلمة وجملة وحرف . الجملة قد تكون جملة خبرية أو جملة إنشائية. الجملة الخبرية هي جملة تخبر عن أمر ما ، هذا الأمر قد يكون

حقيقي أو غير حقيقي . **التقرير** أو الفرضية proposition هو جملة خبرية تحتمل الصدق أو الكذب ولكنها لا تحتمل الاثنين معا.

مثال ١-١-١. الجمل الخبرية التالية كلها تقارير

(أ) القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية.

(ب) أسيوط تقع شمال القاهرة.

(ج) $1+1=2$.

(د) $2+2\neq 4$.

التقريران (أ) و(ج) صادقان، بينما التقريران (ب) و(د) كاذبان.

المثال التالي يعطي بعض الجمل التي ليست تقارير.

مثال ١-١-٢. اعتبر العبارات التالية:

(أ) كم الساعة الآن؟

(ب) اقرأ الدرس بعناية.

(ج) $x+1=2$.

(د) $x+y=z$.

العبارتان (أ) و (ب) ليستا تقارير حيث أنها ليست جملة خبرية العبارتان (ج) و (د) ليستا تقارير حيث أنه لايمكن القول أن الجملة كاذبة أو صادقة لعدم تحديد قيم معينة للمتغيرات.

سوف نرمز للتقارير بالحروف الصغيرة مثل $p,q,r,s,\ldots$. **قيمة الصدق** truth value للتقرير تكون T أو 1 إذا كان التقرير صادقا وتكون F أو 0 إذا كان التقرير كاذبا. جزء المنطق الذي يهتم بالتقارير يسمى **حساب التقارير** propositional calculus أو **منطق التقارير** propositional logic .

الآن نوجه اهتمامنا إلى تكوين تقرير جديد من تقارير موجودة. **التقرير المركب** compound proposition هو التقرير الذي نحصل عليه من تقارير معروفة باستخدام مايسمى عمليات الربط المنطقية أو المؤثرات المنطقية.

تعريف ١-١-٣. نفرض p تقرير. العبارة "ليس الحال هو p " أو للاختصار "ليس p " تعطي تقرير جديد، يسمى " **نفي** p " negation of p ويرمز له بالرمز $\sim p$.

مثال ١-١-٤. نفي التقرير " اليوم الجمعة" هو التقرير " ليس الحال أن اليوم الجمعة" أو "اليوم ليس الجمعة".

تعريف ١-١-٥. **جدول الصدق** Truth table هو الجدول الذي يوضح قيم الصدق للتقارير المركبة من تقارير بسيطة. جدول ١-١-١ يعطي قيمتي الصدق المحتملتين للتقرير p وقيم الصدق التي تناظرها للتقرير $\sim p$.

p	$\sim p$
T	F
F	T

جدول ١-١-١

نفي تقرير يمكن اعتباره كناتج لتأثير مؤثر النفي negation operator. مؤثر النفي يعطي تقرير جديد من تقرير بسيط معروف.

فيما يلي سوف نعطي مؤثرات منطقية تستخدم لتكوين تقرير جديد من تقارير موجودة عددها إثنين أو أكثر. هذه المؤثرات المنطقية تسمى أيضا **أدوات ربط** connectives.

تعريف ١-١-٦. نفرض p و q تقريرين. التقرير " p و q " أو " p and q " ويرمز له بالرمز $p \wedge q$ هو التقرير الذي تكون قيمة الصدق له T فقط عندما تكون قيمة الصدق لكلا التقريرين p و q هي T وتكون F فيما عدا ذلك. التقرير $p \wedge q$ يسمي **عطف** p و q conjunction of. حيث أن $p \wedge q$ مركب من تقريرين بسيطين وكل تقرير له إحتمالين لقيم الصدق فإن التقرير $p \wedge q$ يكون له أربعة إحتمالات لقيم الصدق وبالتالي جدول الصدق له يتكون من أربعة صفوف.

جدول الصدق للتقرير $p \wedge q$ هو المبين في جدول ١-١-٢.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول ١-١-٢

مثال ١-١-٧. أوجد التقرير الناتج عن عطف التقريرين p و q حيث p هو التقرير "اليوم الخميس" و q هو التقرير "اليوم ممطر".

الحل. عطف هذان التقريران ، $p \wedge q$ ، هو التقرير "اليوم الخميس واليوم ممطر". هذا التقرير يكون صادق فقط في حالة أيام الخميس التي يكون فيها مطر ويكون كاذب في أي يوم غير الخميس وأي يوم خميس غير ممطر.

تعريف ١-١-٨. نفرض p و q تقريران. التقرير "p أو q" أو "p or q" ويرمز له بالرمز $p \vee q$ هو التقرير الذي يكون كاذب فقط عندما يكون التقريران p و q كاذبان ويكون صادق فيما عدا ذلك. التقرير $p \vee q$ يسمى **فصل** p و q disjunction of. جدول الصدق للتقرير $p \vee q$ هو المعطى في جدول ١-١-٣.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول ١-١-٣

إستخدام الأداة " أو" في اللغة له معنيان. المعنى الأول وهو الطريقة الشاملة inclusive way أن يتحقق أحد الطرفين أو كلاهما ومثال ذلك

قولنا "جاء أحمد أو محمد"، هنا يمكن أن يكون قد جاء أحمد فقط أو محمد فقط أو كلاهما معا. والمعنى الثاني وهو المعنى الحصري exclusive sense أن يتحقق أحد الطرفين فقط ولايمكن أن يتحقق الطرفان معا ومثال ذلك "يمكن للطالب أن يؤدي الآن الامتحان في مادة الجبر أو مادة التفاضل". هنا أحد الطرفين فقط هو الذي يحدث حيث أن الطالب يمكن أن يؤدي الامتحان في مادة واحدة فقط في اليوم. إستخدام الأداة "أو" هنا يكون من النوع الأول فقط.

مثال ١-١-٩. أوجد فصل التقريرين p و q الواردين في مثال ١-١-٧.

الحل. فصل التقريران p و q، $p \vee q$، هو "اليوم الخميس أو اليوم ممطر". هذا التقرير يكون صادق في أي يوم خميس (بما فيها الأيام غير الممطرة) أو أي يوم ممطر (بما فيها الأيام غير الخميس). هذا التقرير يكون كاذب فقط في الأيام التي ليست الخميس والتي تكون أيضا ليست ممطرة.

كما لوحظ من قبل استخدام أداة الربط " أو " في الفصل يناظر أحد المعنيين المستخدمان في اللغة وهي الطريقة الشاملة . أحيانا نستخدم الأداة "أو" بالمفهوم الحصري للربط بين تقريرين.

تعريف ١-١-١٠. الفصل الحصري exclusive or للتقريرين p و q يرمز له بالرمز $p \oplus q$ هو التقرير الذي يكون صادق فقط عندما يكون أحد التقريرين p و q صادق والآخر كاذب.

جدول الصدق للفصل الحصري للتقريرين p و q هو المبين في جدول ١-١-٤.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول ١-١-٤

العبارات الشرطية Conditional Statements

الآن نناقش طرق أخرى مهمة لتكوين تقارير جديدة من تقارير معطاة.

تعريف ١-١-١١. نفرض p و q تقريران. **التقرير الشرطي** conditional statement $p \to q$ هو التقرير " إذا كان p فإن q ". التقرير الشرطي $p \to q$ يكون كاذب فقط عندما تكون p صادق و q كاذب ويكون $p \to q$ صادق فيما عدا ذلك. في التقرير الشرطي $p \to q$ ، p تسمى **الفرض** أو المعطيات hypothesis و q تسمى **الخلاصة** أو النتيجة conclusion. التقرير الشرطي $p \to q$ يسمى أيضا **تضمين** implication.

جدول الصدق للتقرير الشرطي $p \to q$ هو المبين في جدول ١-١-٥.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول ١-١-٥

حيث أن التقرير الشرطي يلعب دورا محوريا في المناقشات الرياضية فإنه توجد عدة صياغات للتقرير الشرطي $p \to q$ معظمها إن لم يكن كلها يمكن تلخيصها فيما يلي:

"إذا كان p فإن q"   "p يؤدي إلى q"

"p فقط إذا كان q"   "p يكفي لـ q"

"الشرط الكافي لـ q هو p"   "q طالما كان p"

"q إذا كان p"   "q عندما p"

"q ضروري لـ p"   "الشرط الضروري لـ p هو q"

"q يأتي من p"   "q إلا إذا كان $\sim p$ "

طريقة مفيدة لفهم قيم الصدق للتقرير الشرطي هو إعتقاد أنها التزام أو عقد. علـى سبيل المثـال إعـلان أحـد المرشـحين فـي الانتخابـات "إذا أنـا إنتخبت فسوف أخفض الضرائب". لو أن هذا المرشح نجح فـإن النـاخبين سوف يتوقعون أن هذا الشخص سوف يخفض الضرائب. وإذا لم ينجح هذا المرشح فإن النـاخبين لا يتوقعـون أن يعمـل علـى خفض الضرائب. ومع ذلك، في حالة عدم نجاحه، قد تكون لديـه القدرة الكافيـة كـي يجعل السلطة الحاكمة تخفض الضرائب. فقط عندما ينجح المرشح ولايخفض الضرائب فـإن النـاخبين فـي هـذه الحالـة يقولـون بـأن المرشـح قد أخلـف تعهده. الحالة الأخيرة هي التي تنـاظر أن تكون p صـادق ولكن q كـاذب في $p \to q$.

بالمثل نعتبر التقرير أن أستاذ ما سوف يقول لطالب " إذا أنت حصلت علـى 100% فـي الامتحـان النهـائي فسوف تحصل علـى تقدير A". إذا أنت عملت للحصول علـى 100% فـي الامتحـان النهـائي فسوف تتوقع الحصول على تقدير A. إذا لم تحصل على 100% في الامتحان النهائي فقد تحصل أو لاتحصل على تقدير A اعتمـادا علـى عوامل أخـرى. ومع ذلك إذا أنت حصلت على 100% في الامتحان النهائي ولكن الأستاذ لم يعطك تقدير A سوف تشعر أنك خدعت.

المنكوس (المقلوب)، المكافئ العكسي والمعكوس

Converse, contrapositive and Inverse

يوجد بعض العبارات الشرطية التي يمكن صياغتها من $p \to q$.
العبـارة الـشرطية $q \to p$ تـسمى **منكـوس** $p \to q$ converse .
المكافئ العكسي لـ $p \to q$ contrapositive هو العبـارة الشرطية $\sim q \to \sim p$. التقريـر $\sim p \to \sim q$ يـسمى **معكـوس** inverse $p \to q$.

المكافئ العكسي $\sim q \to \sim p$ للعبارة الشرطية $p \to q$ يكون لـه نفس قيم الصدق مثل $p \to q$. لبيـان ذلك لاحظ أن المكـافئ العكسي يكون

كاذب فقط عندما يكون $\sim p$ كاذب و $\sim q$ صادق، وهذا يحدث فقط عندما يكون p صادق و q كاذب. من جهة أخرى لا المنكوس $q \to p$ ولا المعكوس $\sim p \to \sim q$ يكون له نفس قيم الصدق مثل $p \to q$ لكل الاحتمالات لقيم الصدق لـ p و q. لبيان ذلك، لاحظ أنه عندما p يكون صادق و q كاذب فإن العبارة الشرطية الأصلية تكون كاذب، ولكن المنكوس والمعكوس كلاهما يكون صادق. عندما يكون عبارتان شرطيتان مركبتان دائما لهما نفس قيم الصدق نقول أنهما **متكافئتان** equivalent، لذلك العبارة الشرطية ووضعها المعكوس تكونا متكافئتين. المعكوس والمنكوس لعبارة شرطية أيضا متكافئتان.

مثال ١-١-١٢. ما هو المكافئ العكسي ، المنكوس، والمعكوس للعبارة الشرطية "فريق البيت يكسب عندما يكون هناك مطر" ؟

الحل: حيث أن "q عندما p" هو أحد الطرق للتعبير عن العبارة الشرطية $p \to q$ ، العبارة الاصلية يمكن أن تكتب على الصورة "إذا كان هناك مطر، إذن فريق البيت يكسب". نتيجة لذلك، الوضع المعكوس لهذه العبارة الشرطية يكون "إذا لم يكسب فريق البيت، إذن ليس هناك مطر". المنكوس هو "إذا كسب فريق البيت، إذن هناك مطر". المعكوس هو "إذا لم يكن هناك مطر، إذن فريق البيت لن يكسب". فقط المكافئ العكسي يكافئ العبارة الأصلية.

طريقة أخرى لتكوين تقرير مركب من تقارير معطاة نقدمه في التعريف التالي:

تعريف ١-١-١٣. نفرض p و q تقريران. التقرير **الشرطي المزدوج** biconditional statement $p \leftrightarrow q$ هو التقرير "p إذا وفقط إذا كان q". التقرير الشرطي المزدوج $p \leftrightarrow q$ يكون صادق فقط عندما يكون التقريران p و q لهما نفس قيمة الصدق ويكون كاذب فيما عدا ذلك.

جدول الصدق للتقرير $p \leftrightarrow q$ هو المعطى في جدول ١-١-٦.

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جدول ١-١-٦

لاحظ أن التقرير الشرطي المزدوج $p\leftrightarrow q$ يكون صادق عندما يكون كلا التقريرين $p\rightarrow q$ و $q\rightarrow p$ صادق. لذلك التعبير "p إذا وفقط إذا كان q" يستخدم لهذا التقرير. أيضا يستخدم التعبير "p ضروري وكافي لـ q" والتعبير " الشرط الضروري والكافي لـ p هو q" والتعبير "إذا كان p فإن q والعكس" للدلالة على نفس التقرير.

جداول الصدق للتقارير المركبة

فيما مضى تعرفنا على أربعة أدوات ربط منطقية هي دالة الوصل ودالة الفصل والتقرير الشرطي والتقرير الشرطي المزدوج بالاضافة إلى النفي. يمكننا استخدام أدوات الربط هذه لبناء تقارير مركبة من عدة تراكيب تحتوي أي عدد من التقارير البسيطة ويمكننا استخدام جداول الصدق لتحديد قيم الصدق لكل تركيبة من هذه التراكيب كما يتضح ذلك من مثال ١-١-١٤ كل تركيبة نستخدم لها عمود منفصل لتحديد قيم الصدق لها.

مثال ١-١-١٤. كون جدول الصدق للتقرير المركب $(p\vee\sim q)\rightarrow(p\wedge q)$.

الحل. حيث أن هذا التقرير يحتوي تقريرين بسيطين p و q فإن جدول الصدق يحتوي أربعة صفوف. جدول ١-١-٧ يبين جدول الصدق لهذا التقرير.

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$p\wedge q$	$(p\vee\sim q)\rightarrow(p\wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

جدول ١-١-٧

ترتيب المؤثرات المنطقية

كما سبق يمكننا تكوين تقارير مركبة من تقارير بسيطة باستخدام أدوات الربط المنطقية التي سبق التعرف عليها. وعادة نستخدم الأقواس لتحديد أي الأدوات في التقرير المركب يراد تطبيقه. فعلى سبيل المثال التقرير $(p\vee q)\wedge(\sim r)$ هو عطف التقريرين $p\vee q$ و $\sim r$. ومع ذلك لتقليص عدد الأقواس نقرر أن مؤثر النفي يطبق قبل كل المؤثرات الأخرى. وهذا يعني أن $\sim p\wedge q$ يكون هو عطف $\sim p$ و q أي $(\sim p)\wedge q$ وليس نفي عطف p و q أي ليس $\sim(p\wedge q)$.

أيضا قاعدة عامة أخرى في الترتيب وهي أن مؤثر العطف يسبق مؤثر الفصل، لذلك $p\wedge q\vee r$ تعني أن $(p\wedge q)\vee r$ ولا تعني أن $p\wedge(q\vee r)$. وحيث أن هذه القاعدة قد يصعب تذكرها فسوف نستمر في وضع الأقواس.

أخيرا توجد قاعدة متوقعة وهي أن مؤثر الشرطي $\rightarrow$ ومؤثر الشرطي المزدوج $\leftrightarrow$ لهما ترتيب متأخر عن مؤثري العطف $\wedge$ والفصل $\vee$. لذلك $p\vee q\rightarrow r$ يكون هو $(p\vee q)\rightarrow r$ نفسه.
جدول ١-١-٨ يعطي ترتيب المؤثرات المنطقية

المؤثر	$\sim$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
الترتيب	1	2	3	4	5

جدول ١-١-٨

المنطق والعمليات على البتات Logic and Bit Operations

الحاسبات تمثل المعلومات باستخدام البتات bits. البت bit لها قيمتين ممكنتين 0 و 1. هذا يعني أن البت تأتي من الرقم الثنائي binary digit، حيث الصفر والواحد الصحيح هي الارقام التي تستخدم في التمثيل الثنائي للاعداد. البت يمكن أن تستخدم لتمثيل قيمة الصدق، حيث أنه يوجد قيمتين للصدق، صادق true وكاذب false . وكما هو جاري العمل به سوف نستخدم البت 1 لتمثل صادق والبت 0 لتمثل كاذب. أي أن 1 تمثل T (صادق) و 0 تمثل F (كاذب).

المتغير يسمى متغير ثنائي (**بولياني**) Boollean variable إذا كانت قيمته إما صادق أو كاذب. تبعا لذلك المتغير البولياني يمكن أن يمثل باستخدام بت.

عمليات الحاسب للبتات تناظر أدوات الربط المنطقية. باستبدال صادق بـ 1 و كاذب بـ 0 في جدول الصدق للعمليات $\wedge$ ، $\vee$ و $\oplus$ الجداول المبينة في جدول ١-١-٩ تناظر عمليات البتات التي حصلنا عليها. أيضا سوف نستخدم الرموز OR ، AND و XOR للمؤثرات $\vee$، $\wedge$ و $\oplus$ كما هو مستخدم في لغات البرمجة.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

العمليات على البتات OR، AND و XOR

جدول ١-١-٩

المعلومات تمثل غالبا باستخدام سلاسل بتات، وهي عبارة عن متتابعة من 1 و 0. عندما يتم ذلك، العمليات على البتات يمكن أن تستخدم معالجة هذه البيانات.

تعريف ١-١-١٥. سلسلة البتات bit string هي متتابعة من البتات. طول هذه السلسلة هو عدد البتات فيها.

مثال ١-١-١٦. 101010011 سلسلة بتات طولها 9.

يمكننا توسيع عمليات البتات إلى سلاسل البتات. نعرف فصل البتات bitwise OR، عطف البتات bitwise AND، والفصل الحصري bitwise XOR لسلسلتين من نفس الطول بأنها السلسلة التي لها البتات هي الفصل OR ، العطف AND و الفصل الحصري XOR للبتات المناظرة في السلسلتين، على الترتيب. نستخدم الرموز $\vee$ ، $\wedge$ و $\oplus$ لتمثل عمليات bitwise OR، bitwise AND و bitwise XOR، على الترتيب.

مثال ١-١-١٧. أوجد bitwiseOR، bitwiseAND و bitwiseXOR لسلاسل البتات 0110110110 و 1100011101 .

الحل:

0110110110	
1100011101	
1110111111	bitwise OR
0100010100	bitwise AND
1010101011	bitwise XOR

القوانين والتناقضات Tautologies and Contradictions

نوع هام من الخطوات في بناء الحجج الرياضية هو إستبدال تقرير بتقرير آخر له نفس قيمة الصدق. وبسبب ذلك، الطرق التي تنتج تقارير لها نفس قيم الصدق كتقارير مركبة تستخدم على نطاق واسع في بناء الحجج الرياضية.

تعريف ١-١-١٨. التقرير المركب والذي تكون قيمة الصدق له دائما هي T بغض النظر عن قيم الصدق للتقارير التي يتركب منها يسمى **قانون** tautology. التقرير المركب والذي تكون قيمة الصدق له دائما

هي F يسمى **تناقض** contradiction. التقرير الذي ليس قانون وليس تناقض يسمى **عارض** أو محتمل contingency.

القوانين والتناقضات لها أهمية كبيرة في التفكير الرياضي. المثال التالي يوضح هذه الأنواع من التقارير المركبة.

مثال ١-١-١٩. يمكننا بناء مثال لقوانين وتناقضات باستخدام تقرير بسيط واحد. نعتبر جداول الصدق للتقريرين $p \vee \sim p$ و $p \wedge \sim p$. حيث أن التقرير $p \vee \sim p$ دائما صادق فإنه يكون قانون. وحيث أن التقرير $p \wedge \sim p$ دائما كاذب فإنه يكون تناقض.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	T	F
F	T	T	F

جدول ١-١-١٠

جدول ١-١-١٠ مثال لقانون وتناقض.

التكافؤ المنطقي Logical equivalence

تعريف ١-١-٢٠. التقريران المركبان يقال أنهما **متكافئان منطقيا** logically equivalent إذا كان لهما نفس قيم الصدق بغض النظر عن قيم الصدق للتقارير البسيطة المركب منهما التقريران. بتعبير آخر التقريران المركبان p و q يقال أنهما متكافئان إذا كان التقرير $p \leftrightarrow q$ قانون. الرمز $p \equiv q$ يستخدم للدلالة على أن التقريرين p و q متكافئان.

لبيان أن تقريرين يكونا متكافئين يمكن استخدام جداول الصدق لكلا التقريرين ويكون التقريران متكافئان إذا كانت قيم الصدق في العمودين المناظرين لهما متساوية.

مثال ١-١-٢١. التقريران المركبان $p \rightarrow q$ و $\sim q \rightarrow \sim p$ متكافئان ويتضح ذلك من جدول ١-١-١١ الذي يعطي قيم الصدق للتقريرين

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

جدول ١ـ١ـ١١

لاحظ أن قيم الصدق في العمودين الممثلين للتقريرين $p \to q$ و $\sim q \to \sim p$ متطابقان وهذا يبين تكافؤ التقريران. التقرير $\sim q \to \sim p$ يسمى ،كما سبق، المكافئ العكسي للتقرير $p \to q$.

مثال ١ـ١ـ٢٢. بين أن التقريرين $\sim (p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ متكافئان. هذا التكافؤ هو أحد قوانين دي مورجان للتقارير.

الحل: جدول الصدق للتقريرين $\sim (p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ هو المعطى في جدول ١ـ١ـ١٢. وحيث أن قيم الصدق للتقريرين متساوية لكل الاختيارات الممكنة لقيم الصدق لكل من p و q فإن $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ يكون قانون ويكون هذان التقريران متكافئان.

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

جدول ١ـ١ـ١٢

تمارين ١ـ١

١- بين أي من الجمل التالية تكون تقريرا ثم أوجد قيم الصدق للتقارير.

(أ) القاهرة عاصمة مصر.

(ب) لندن عاصمة ألمانيا.

(ج) $2+3=5$. (د) $2+2=11$.

(هـ) أجب عن السؤال التالي.

(و) كم الساعة الآن؟

(ز) $x+y=y+z$ إذا كان $x=z$.

٢- ماهو نفي التقارير التالية؟

(أ) اليوم الأربعاء. (ب) $2+1=3$.

(ج) الصيف في أسيوط حار ومشمس.

٣- عبر بالكلام عن التقارير التالية:

(أ) $\sim p$. (ب) $p \vee q$.

(ج) $p \wedge q$. (د) $p \leftrightarrow q$.

(هـ) $p \rightarrow q$. (و) $\sim p \rightarrow \sim q$.

٤- نفرض p، q و r هي التقارير

p: أنت حصلت على A في الامتحان النهائي.

q: أنت أجبت عن كل التمارين في هذا الكتاب.

r: أنت حصلت على A في هذا الفصل.

أكتب التقارير التالية باستخدام p، q و r وأدوات الربط المنطقية.

(أ) أنت حصلت على A في هذا الفصل ولكنك لم تجب على كل التمارين في هذا الكتاب.

(ب) أنت حصلت على A في الاختبار النهائي، أنت أجبت عن كل التمارين في هذا الكتاب، أنت حصلت على A في هذا الفصل.

(ج) للحصول على A في الامتحان النهائي ، من الضروري لك أن تحصل على A في هذا الفصل.

(د) حصولك على A في نهاية الفصل وإجابتك على كل التمارين في هذا الكتاب يكفيان لحصولك على A في الامتحان النهائي.

٥- بين ما إذا كان التقرير الشرطي صادق أم كاذب.

(أ) إذا كان $1+1=2$ فإن $2+2=5$.

(ب) إذا كان $1+1=3$ فإن $2+2=4$.

(ج) إذا كان $1+1=3$ فإن $2+2=5$.

(د) إذا كان الفيل يمكن أن يطير فإن $1+1=3$.

(هـ) إذا كان $1+1=3$ فإن الفيل يمكن أن يطير.

(و) إذا كان $2+2=4$ فإن $1+2=3$.

٦- بين ما إذا كان التقرير الشرطي المزدوج صادق أم كاذب.

(أ) $2+2=4$ إذا وفقط إذا كان $1+1=2$.

(ب) $1+1=2$ إذا وفقط إذا كان $2+3=4$.

(ج) نحن في فصل الشتاء إذا وفقط إذا لم نكن في الصيف أو الربيع.

(د) $1>0$ إذا وفقط إذا كان $2>1$.

(هـ) $1+1=3$ إذا وفقط إذا كان الفيل يمكن أن يطير.

٧- أكتب التقارير التالية على الصورة "إذا كان p فإن q"

(أ) سوف أتذكر أن أرسل لك العنوان إذا أنت أرسلت لي رسالة بريد إليكتروني.

(ب) إذا إحتفظت بهذا الكتاب فسوف يكون مرجع مفيد في مقرراتك القادمة.

(ج) من الضروري الحصول على كلمة مرور صحيحة حتى تستطيع الدخول إلى الخادم.

٨- كون جدول الصدق للتقارير المركبة التالية

(أ) $p \wedge \sim p$.   (ب) $p \vee \sim p$.

(ج) $(p \vee \sim q) \rightarrow q$.   (د) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$.

(هـ) $p \rightarrow \sim p$.   (و) $p \leftrightarrow \sim p$.

(ز) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.   (ح) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

(ط) $(p \leftrightarrow q) \oplus (p \leftrightarrow \sim q)$.

(ي) $p \rightarrow \sim q$.   (ك) $\sim p \leftrightarrow q$.

(ل) $p \rightarrow (\sim q \vee r)$.   (م) $(p \vee q) \vee r$.

(ن) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$.

٩- بين أن $\sim(\sim p)$ و p متكافئان منطقيا.

١٠- إستخدم جداول الصدق للتحقق من صحة قوانين الابدال

(أ) $p \vee q \equiv q \vee p$.   (ب) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

١١- إستخدم جداول الصدق للتحقق من صحة قوانين الدمج

(أ) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

(ب) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.

١٢- بين أن التقارير الشرطية التالية تكون قوانين باستخدام جداول الصدق

(أ) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$.

(ب) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

(ج) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$.

١٣- بين أن التقارير الشرطية في تمرين 12 تكون قوانين بدون استخدام جداول الصدق.

١٤- بين أن كل زوج من التقارير التالية تكون متكافئة منطقيا

(أ) $p\to q$ و $\sim q\to\sim p$.

(ب) $\sim p\leftrightarrow q$ و $p\leftrightarrow\sim q$.

(ج) $\sim(p\leftrightarrow q)$ و $\sim p\leftrightarrow\sim q$.

(د) $(p\to q)\vee(p\to r)$ و $p\to(q\vee r)$.

(هـ) $(p\to r)\vee(q\to r)$ و $(p\wedge q)\to r$.

(و) $p\leftrightarrow q$ و $(p\to q)\wedge(q\to p)$.

١٥- بين أن $(p\vee q)\wedge(\sim p\vee r)\to(q\vee r)$ يكون قانون.

١٦- بين أن $(p\to q)\to r$ و $p\to(q\to r)$ غير متكافئان.

١٧- بين أن $(p\wedge q)\to r$ و $(p\to r)\wedge(q\to r)$ غير متكافئان.

١٨- بين أن $(p\to q)\to(r\to s)$ و $(p\to r)\to(q\to s)$ غير متكافئان.

نظير dual التقرير المركب الذي يحتوي فقط أدوات الربط $\vee$ ، $\wedge$ و $\sim$ هو التقرير المركب الذي نحصل عليه بالتبديل بين $\vee$ ، $\wedge$ والتبديل بين T و F. نظير التقرير S يرمز له بالرمز S^*.

١٩- أوجد نظير كل تقرير من التقارير المركبة التالية:

(أ) $p\vee\sim q$.   (ب) $p\wedge(q\vee(r\wedge T)$.

(ج) $(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge F)$.

٢٠- أوجد نظير كل تقرير من التقارير المركبة التالية:

(أ) $p\wedge\sim q\wedge\sim r$.   (ب) $(p\wedge q\wedge r)\vee s$.

(ج) $(p\vee F)\wedge(q\vee T)$.

١-٢. المقدرات والمسورات Predicates and Quantifiers

منطق التقارير الذي تمت دراسته في الفصل ١-١ لايمكن أن يعبر بصورة كافية عن معنى الجمل الرياضية وفي لغتنا العادية. على سبيل المثال لنفرض أننا نعلم أن " كل جهاز حاسوب موصل بشبكة الجامعة يعمل بدقة عالية" لاتوجد قواعد في منطق التقارير يسمح لنا باستنتاج قيمة الصدق للعبارة

"MATH3 يعمل بدقة عالية"

حيث MATH3 واحد من الحواسيب الموصلة بشبكة الجامعة.

في هذا الجزء سوف نقدم نوعا فعالا من المنطق يسمى منطق المقدرات predicate logic. سوف نبين كيف يمكن استخدام منطق المقدرات للتعبير عن معنى عدد كبير من العبارات في الرياضيات وعلوم الحاسب بطرق تسمح لنا بتوضيح والكشف عن العلاقات بين الأشياء.

لكي نفهم منطق المقدرات نحتاج أولا إلى تقديم مفهوم المقدر. عندئذ سوف نقدم مفهوم المقدرات الذي يمكننا من التعامل مع العبارات التي تشير إلى أن خاصية معينة تتحقق لكل الأشياء من نوع معين و العبارات التي تشير إلى وجود شيء له خاصية معينة.

المقدر Predicate

العبارات التي تحتوي متغيرات مثل

"$x>3$" ، "$x=y+3$" ، "$x+y=z$" ،

" الحاسوب x يتعرض لهجوم"

و " الحاسوب x يعمل بكفائة عالية"

غالبا توجد في الفروض الرياضية وبرامج الحاسوب. هذه العبارات ليست صادقة وليست كاذبة عندما لا تتعين قيم للمتغيرات. هنا سوف نناقش طرق الحصول على تقارير من مثل هذه العبارات.

العبارة " x أكبر من 3" لها جزنان. الجزء الأول ، المتغير x، موضوع العبارة ، الثاني ، المقدر "أكبر من 3" تشير إلى الخاصية التي موضوع

العبارة يحققها. يمكننا الرمز للجملة "x أكبر من 3" بالرمز $P(x)$ ، حيث P ترمز للمقدر " أكبر من 3" و x هي المتغير. بمجرد أن تحدد قيم للمتغير x ، العبارة $P(x)$ تصبح تقرير له قيم صدق.

العبارة $P(x)$ أيضا تسمى قيمة **دالة التقرير** P propositional function.

مثال ١-٢-١. نفرض $P(x)$ ترمز إلى العبارة "$x > 3$ ". ماهي قيم الصدق لكل من $P(4)$ و $P(2)$ ؟

الحل: نحصل على $P(4)$ بوضع $x = 4$ في العبارة "$x > 3$" . لذلك $P(4)$ والتي هي العبارة "$4 > 3$ " تكون صادقة. ولكن $P(2)$ والتي هي العبارة "$2 > 3$ " تكون كاذبة.

مثال ١-٢-٢. نفرض $A(x)$ ترمز إلى العبارة " الحاسوب x يتعرض لهجوم". نفرض أن الأجهزة التي في الشبكة التي تتعرض لهجوم فقط هي $CS2$ و $MATH1$. ماهي قيم الصدق للجمل $A(CS1)$ ، $A(CS2)$ و $A(MATH1)$ ؟

الحل: نحصل على العبارة $A(\mathrm{CS1})$ بوضع $x = \mathrm{CS1}$ في العبارة "الحاسوب x يتعرض لهجوم". لأن CS1 ليست ضمن الحواسيب التي تتعرض لهجوم فإن $A(\mathrm{CS1})$ تكون كاذبة. بالمثل لأن $CS2$ و $MATH1$ ضمن الحواسيب التي تتعرض لهجوم فإن $A(CS2)$ و $A(MATH1)$ تكون صادقة.

أيضا يمكن أن يكون لدينا عبارة تتضمن أكثر من متغير. على سبيل المثال نعتبر العبارة "$x = y + 3$ ". نرمز لهذه العبارة بالرمز $Q(x,y)$ حيث x و y متغيرات و Q مقدر. عندما تعين قيم للمتغيرات x و y ، العبارة $Q(x,y)$ تصبح تقرير له قيم صدق.

مثال ١-٢-٣. نفرض $Q(x,y)$ ترمز إلى العبارة "$x = y + 3$ ". ماهي قيم الصدق للتقارير $Q(1,2)$ و $Q(3,0)$ ؟

الحل: للحصول على $Q(1,2)$ نضع $x=1$ و $y=2$ في العبارة $Q(x,y)$. إذن العبارة $Q(1,2)$ هي "$1=2+3$" وهي كاذبة. العبارة $Q(3,0)$ هي التقرير "$3=0+3$" وهو صادق.

مثال ١-٢-٤. نفرض $A(c,n)$ ترمز إلى العبارة "الحاسوب c مرتبط بالشبكة n"، حيث c متغير يمثل حاسوب و n متغير يمثل شبكة. نفرض أن الحاسوب MATH1 تم توصيله بالشبكة CAMPUS2 ولكن ليس بالشبكة CAMPUS1 . ما هي قيم الصدق لكل من A(MATHI,CAMPUSI) و A(MATHI,CAMPUS2) ؟

الحل: حيث أن MATH1 ليست مرتبطة بالشبكة CAMPUS1 نجد أن A(MATHI,CAMPUSI) كاذب. ومع ذلك لأن MATH1 مرتبطة بالشبكة CAMPUS2، نجد أن A(MATHI,CAMPUS2) صادقة.

بالمثل يمكننا فرض أن $R(x,y,z)$ ترمز إلى العبارة "$x+y=z$". عندما تعطى المتغيرات x، y و z هذه العبارة يكون لها قيم صدق.

مثال ١-٢-٥. أوجد قيم الصدق للتقارير $R(1,2,3)$ و $R(0,0,1)$.

الحل: التقرير $R(1,2,3)$ نحصل عليه بوضع $x=1$ ، $y=2$ و $z=3$ في العبارة $R(x,y,z)$. من ذلك نجد أن $R(1,2,3)$ تكون هي العبارة "$1+2=3$" وهذه صادقة. أيضا، لاحظ أن $R(0,0,1)$ هي العبارة "$0+0=1$" وهذه كاذبة.

على وجه العموم عبارة في n متغير $x_1,x_2,\ldots,x_n$ يمكن الرمز لها بالصورة $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

العبارة على الصورة $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ هي قيمة دالة التقرير P عند النوني المرتب $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و P أيضا تسمى مقدر نوني n-ary predicate.

المسورات Quantifiers

عندما تعطى قيم لكل المتغيرات في دالة التقرير فإن العبارة الناتجة تصبح تقرير بقيمة صدق معينة. ومع ذلك توجد طرق أخرى مهمة، تسمى **تسوير** quantification لانشاء تقرير من دالة تقرير. التسوير يعبر عن التفويض الذي يجعل مقدرة تكون صادقة على مدى من العناصر. في اللغة الكلمات كل، بعض، العديد ، قليل و لاشيء تستخدم في التسوير. سوف نركز هنا على نوعين من التسوير: التسوير الشامل universal quantification والذي يخبرنا بأن مقدرة تكون صادقة لكل العناصر تحت الاعتبار. وتسوير الوجود existential quantification والذي يخبرنا بأنه يوجد واحد أو أكثر من العناصر الذي تكون المقدرة عنده صادقة. جزء المنطق الذي يختص بدراسة المقدرات والمسورات يسمى **حساب المقدرات** predicate calculus.

المسور الشامل The universal quantifier

العديد من العبارات الرياضية تؤكد أن خاصية ما تكون صحيحة لكل القيم لمتغير ما في نطاق معين، يسمى النطاق الشامل أو النطاق domain . مثل هذه العبارات يمكن التعبير عنها باستخدام التسوير الشامل. التسوير الشامل لدالة التقرير هو التقرير الذي ينص على أن $P(x)$ تكون محققة لكل قيم x في النطاق. النطاق يعين القيم الممكنة للمتغير x.

تعريف ١-٢-٦. التسوير الشامل universal quantification لـ $P(x)$ هو التقرير " $P(x)$ تكون محققة لكل قيم x في النطاق"

يستخدم الرمز $\forall x\, P(x)$ للدلالة على التسوير الشامل لـ $P(x)$. هنا $\forall$ تسمى **المسور الشامل**.

التقرير $\forall x\, P(x)$ يقرأ هكذا "لكل x $P(x)$ "

مثال ١-٢-٧. نفرض $P(x)$ هي العبارة " $x+1>x$ " ما هي قيمة الصدق للتسوير $\forall x\, P(x)$ ، حيث النطاق يتكون من كل الأعداد الحقيقية؟

الحل: حيث أن $P(x)$ تكون محققة لكل الأعداد الصحيحة x، فإن التسوير $\forall x\, P(x)$ يكون صادق.

مثال ١-٢-٨. نفرض $Q(x)$ هي العبارة "$x < 2$". ماهي قيمة الصدق للتسوير $\forall\, x\; Q(x)$ ، حيث النطاق يتكون من الأعداد الحقيقية؟

الحل: $Q(x)$ ليست محققة لكل عدد حقيقي x، حيث على سبيل المثال $Q(3)$ كاذبة. لذلك $\forall\, x\; Q(x)$ تكون كاذبة.

عندما تكون عناصر النطاق منتهية ويمكن وضعها في قائمة على الصورة $x_1, x_2, ..., x_n$ فإن التسوير الشامل $\forall x\, P(x)$ يكون هو نفس الوصل $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge ... \wedge P(x_n)$.

مثال ١-٢-٩. ماهي قيمة الصدق لـ $\forall x\, P(x)$ ، حيث $P(x)$ هي العبارة "$x^2 < 10$" والنطاق هو كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي لاتزيد عن 4؟

الحل: العبارة $\forall x\, P(x)$ هي نفس الوصل $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$.
وحيث أن $P(4)$ ، والتي هي التقرير "$4^2 < 10$" كاذبة فإن $\forall x\, P(x)$ تكون كاذبة.

لبيان أن العبارة التي على الصورة $\forall x\, P(x)$ تكون كاذبة، حيث $P(x)$ هي دالة التقرير، نحتاج فقط لايجاد قيمة x في النطاق بحيث $P(x)$ تكون كاذبة. مثل هذه القيمة x تسمى مثال عكسي counterexample للعبارة $\forall x\, P(x)$.

مثال ١-٢-١٠. نفرض $P(x)$ هي "$x^2 > 0$". لبيان أن العبارة كاذبة، حيث النطاق يتكون من كل الأعداد الصحيحة نعطي مثال عكسي. واضح أن $x = 0$ مثال عكسي حيث أن $x^2 = 0$ عندما $x = 0$ لذلك x^2 ليست أكبر من 0 عندما $x = 0$.

تسوير الوجود The Existential Quantifier

العديد من العبارات الرياضية تؤكد أنه يوجد عنصر يحقق خاصية معينة. مثل هذه العبارات يمكن التعبير عنها باستخدام تسوير الوجود. باستخدام تسوير الوجود نكون تقرير يكون صادق إذا وفقط إذا كان $P(x)$ صادق لقيمة واحدة على الأقل x في النطاق.

تعريف ١-٢-١١. **تسوير الوجود** لـ $P(x)$ هو التقرير "يوجد عنصر x في النطاق بحيث $P(x)$ تكون صادقة". نستخدم الرمز $\exists x\ P(x)$ لتسوير الوجود لـ $P(x)$. هنا $\exists$ تسمى **مسور الوجود** existential quantifier.

دائما النطاق يجب أن يعين عندما نستخدم العبارة $\exists x\ P(x)$. علاوة على ذلك معنى $\exists x\ P(x)$ يتغير عندما يتغير النطاق. بدون تعيين النطاق $\exists x\ P(x)$ لا يكون لها معنى. تسوير الوجود $\exists x\ P(x)$ يقرأ

"يوجد x بحيث $P(x)$ "

أو "يوجد على الأقل عنصر واحد x بحيث $P(x)$"

أو "لبعض x $P(x)$"

مثال ١-٢-١٢. نفرض $P(x)$ ترمز إلى العبارة "$x > 3$". ما هي قيمة الصدق للتسوير $\exists x\ P(x)$، حيث النطاق يتكون من كل الأعداد الحقيقية؟

الحل: حيث أن "$x > 3$" أحيانا تكون صادقة (على سبيل المثال، عندما $x = 4$) تسوير الوجود $\exists x\ P(x)$ لـ $P(x)$ يكون صادق.

مثال ١-٢-١٣. نفرض $Q(x)$ ترمز إلى العبارة "$x = x + 1$". ماهي قيمة الصدق للتسوير $\exists x\ Q(x)$، حيث النطاق يتكون من كل الأعداد الحقيقية؟

الحل: حيث أن $Q(x)$ كاذبة لأي عدد حقيقي x، فإن تسوير الوجود $\exists x\ Q(x)$ لـ $Q(x)$ يكون كاذب.

إذا أمكن وضع كل عناصر النطاق في قائمة على الصورة $x_1, x_2, ..., x_n$ فإن تسوير الوجود $\exists x\, P(x)$ يكون هو نفس الفصل $P(x_1) \vee P(x_2) \vee ... \vee P(x_n)$، لأن هذا الفصل يكون صادق إذا وفقط إذا كان على الأقل واحد من التقارير $P(x_1)$، $P(x_2)$،...، $P(x_n)$ صادق.

مثال ١-٢-١٤. ماهي قيمة الصدق للتسوير $\exists x\, P(x)$، حيث $P(x)$ هي العبارة " $x^2 > 10$ " والنطاق يتكون من الأعداد الصحيحة التي لاتزيد عن 4؟

الحل: حيث أن النطاق هو $\{1,2,3,4\}$ ، التقرير $\exists x\, P(x)$ هو نفس الفصل

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

وحيث أن $P(4)$، والتي هي " $4^2 > 10$ "، صادقة ينتج أن $\exists x\, P(x)$ تكون صادقة.

تسويرات أخرى

حتى الآن تعرفنا على تسوير الوجود والتسوير الشامل. هذه هي التسويرات الأكثر أهمية في الرياضيات وعلوم الحاسب. ومع ذلك ليس هناك منتهى لعدد التسويرات المختلفة التي يمكننا تعريفها، مثل "يوجد على وجه التحديد إثنين" ، "لا يوجد أكثر من ثلاثة" ، "يوجد على الأقل 100" وهكذا. من التسويرات التي ترى غالبا هو تسويرات الوحداوية uniqueness quantifiers ويرمز لها بالرمز $\exists!$ أو $\exists_1$. الرمز $\exists! x\, P(x)$ ينص على أنه "يوجد عنصر وحيد x بحيث $P(x)$ تكون صادقة"

التسويرات بنطاق مقيد

رمز مختصر غالبا يستخدم لتقييد نطاق المسور. في هذا الرمز الشرط الذي يجب أن يحققه المتغير يوضع بعد المسور. نوضح ذلك في المثال التالي:

مثال ١-٢-١٥. ماذا تعني العبارات $\forall x < 0 (x^2 > 0)$ ، $\forall y \neq 0 (y^3 \neq 0)$ و $\exists z > 0 (z^2 = 2)$ ، حيث النطاق في كل هذه الحالات يتكون من الأعداد الحقيقية؟

الحل: العبارة $\forall x<0(x^2>0)$ تنص على أنه لأي عدد حقيقي x بحيث $x<0$ يكون $x^2>0$. أي أنها تنص على أن "مربع كل عدد سالب يكون موجب". هذه العبارة هي نفس العبارة $\forall x\,(x<0\rightarrow x^2>0)$.

العبارة $\forall y\neq 0(y^3\neq 0)$ تنص على أنه لكل عدد حقيقي y بحيث $y\neq 0$ يكون $y^3\neq 0$. أي أنها تنص على أن "مكعب كل عدد حقيقي غير صفري يكون غير صفري". هذه العبارة تكافئ $\forall y(y\neq 0\rightarrow y^3\neq 0)$.

أخيرا العبارة $\exists z>0(z^2=2)$ تنص على أنه يوجد عدد حقيقي z بحيث $z>0$ و $z^2=2$. أي أنها تنص على "يوجد جذر موجب للعدد 2". هذه العبارة تناظر $\exists z\,(z>0\wedge z^2=2)$.

ترتيب المسورات Precedence of Quantifiers

المسورات $\forall$ و $\exists$ لها ترتيب أعلى من كل المؤثرات المنطقية في حساب التقارير. على سبيل المثال $\forall xP(x)\vee Q(x)$ هي الفصل لـ $\forall xP(x)$ مع $Q(x)$. بتعبير آخر تعني أن $(\forall xP(x))\vee Q(x)$ وليس $\forall x(P(x)\vee Q(x))$.

التكافؤ المنطقي المشتمل مسورات

في الفصل ١-١ قدمنا التقارير المركبة. هنا سوف نقدم هذه المفاهيم في تعبيرات تشتمل على مقدرات ومسورات.

تعريف ١-٢-١٦. العبارات التي تشتمل على مقدرات ومسورات تكون متكافئة منطقيا logically equivalent إذا وفقط إذا كان لها نفس قيم الصدق بغض النظر عن المقدرات التي تم التعويض بها في هذه العبارات. نستخدم الرمز $S\equiv T$ للإشارة إلى تكافؤ المنطقي للعبارتان S و T المشتملتان على مقدرات ومسورات.

مثال ١-٢-١٧. بين أن $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ و $\forall xP(x)\wedge\forall Q(x)$ متكافئان منطقيا. حيث كلاهما مأخوذة على نفس النطاق. هذا التكافؤ المنطقي يبين أنه يمكن توزيع التسوير الشامل على الوصل. علاوة على ذلك يمكننا

توزيع تسوير الوجود على الفصل. ومع ذلك لا يمكن توزيع التسوير الشامل على الفصل ولا توزيع تسوير الوجود على الوصل.

الحل: لبيان أن هاتان العبارتان متكافئتان منطقيا يجب أن نبين أنهما دائما تأخذان نفس قيم الصدق مهما كان المقدران P و Q ومهما كان النطاق المستخدم. نعتبر مقدران P و Q مع نطاق مشترك. يمكننا بيان أن $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ و $\forall xP(x) \wedge \forall Q(x)$ متكافئان منطقيا بعمل أمرين. الأول بيان أنه إذا كان $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ صادق فإن $\forall xP(x) \wedge \forall Q(x)$ يكون صادق. الثاني أن نبين أنه إذا كان $\forall xP(x) \wedge \forall Q(x)$ صادق فإن $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ يكون صادق. نفرض أن $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ صادق. هذا يعني أنه إذا كان a في النطاق فإن $P(a) \wedge Q(a)$ يكون صادق. لذلك $P(a)$ يكون صادق وكذلك $Q(a)$. وحيث $P(a)$ و $Q(a)$ صادق لكل عنصر في النطاق، نستنتج أن $\forall xP(x)$ و $\forall xQ(x)$ كلاهما صادق. وهذا يعني أن $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ صادق.

الآن نفرض أن $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ صادق. إذن ينتج أن $\forall xP(x)$ صادق و $\forall xQ(x)$ صادق. لذلك إذا كان a في النطاق فإن $P(a)$ يكون صادق و $Q(a)$ يكون صادق. ومن ثم لكل a في النطاق يكون $P(a) \wedge Q(a)$ صادق. إذن $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ يكون صادق. الآن نستنتج أن $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall Q(x)$.

نفي تعبيرات التسوير Negating Quantifier Expressions

غالبا ما نكون في حاجة إلى نفي تعبير مسور. على سبيل المثال نعتبر نفي العبارة:

"كل طالب في هذا الفصل درس مقرر تفاضل وتكامل"

هذه العبارة هي تسوير شامل، ليكن $\forall x\ P(x)$، حيث $P(x)$ هي التعبير "x درس مقرر تفاضل وتكامل" والنطاق يتكون من كل الطلاب في هذا

الفصل. نفي هذه العبارة هو "ليس الحال أن كل طالب في هذا الفصل درس مقرر تفاضل وتكامل" وهذه تكافئ "يوجد طالب في هذا الفصل لم يدرس مقرر تفاضل وتكامل" وهذه ببساطة تسوير الوجود لنفي دالة التقرير الأصلية، أي $\exists\, x \sim P(x)$.

هذا المثال يوضح لنا أن $\sim \forall\, x\, P(x) \equiv \exists\, x \sim P(x)$.

لبيان أن $\sim \forall\, x\, P(x)$ و $\exists\, x \sim P(x)$ متكافئان منطقيا بغض النظر عن ماهية دالة التقرير $P(x)$ ولا ماهو النطاق، أولا نلاحظ أن $\sim \forall\, x\, P(x)$ يكون صادق إذا وفقط إذا كان $\forall\, x\, P(x)$ كاذب. وهذا يتحقق إذا وفقط إذا كان يوجد عنصر x في النطاق حيث $P(x)$ يكون كاذب. وهذا يتحقق إذا وفقط إذا كان يوجد عنصر x في النطاق حيث $\sim P(x)$ يكون صادق. أخيرا ، لاحظ أنه يوجد عنصر x في النطاق حيث $\sim P(x)$ يكون صادق إذا وفقط إذا كان $\exists\, x \sim P(x)$ صادق. من ذلك ينتج أن $\sim \forall\, x\, P(x)$ و $\exists\, x \sim P(x)$ متكافئان منطقيا.

نفرض أننا نرغب في نفي تسوير الوجود. على سبيل المثال، نعتبر التقرير

"يوجد طالب في هذا الفصل درس مقرر تفاضل وتكامل"

هذا هو تسوير الوجود $\exists\, x\, Q(x)$ ، حيث $Q(x)$ هي العبارة "x درس مقرر تفاضل وتكامل". نفي هذه العبارة هو التقرير "ليس الحال أنه يوجد طالب في هذا الفصل قد درس مقرر تفاضل وتكامل" وهذه هي التسوير الشامل لنفي دالة التقرير الأصلية، أي $\forall x\ \sim Q(x)$.

هذا المثال يوضح لنا التكافؤ $\sim \exists x\, Q(x) \equiv \forall x \sim Q(x)$.

قواعد نفي التسويرات تسمى قوانين دي مورجان للمسورات De Morgan's laws for quantifiers.

مثال ١-٢-١٨. ماهو نفي $\forall x\,(x^2 > x)$ و $\exists x\,(x^2 = x)$ ؟

الحل: نفي $\forall x\,(x^2>x)$ هي العبارة $\sim\forall x\,(x^2>x)$ وهذه تكافئ $\exists x\sim(x^2>x)$. وهذه يمكن إعادة كتابتها بالصورة $\exists x\,(x^2\le x)$.

نفي $\exists x\,(x^2=x)$ هي العبارة $\sim\exists x\,(x^2=x)$ والتي تكافئ $\forall x\sim(x^2=x)$ وهذه يمكن إعادة كتابتها على الصورة $\forall x\,(x^2\neq x)$.

قيم الصدق لهاتان العبارتان تتوقف على النطاق.

الآن نعطي أمثلة لتوضيح كيفية تحويل الجمل الكلامية إلى تعبيرات منطقية.

مثال ١-٢-١٩. عبر عن الجملة "كل طالب في هذا الفصل درس تفاضل وتكامل" باستخدام المسورات والمقدرات.

الحل: أولا نعيد صياغة الجملة بحيث يمكننا تحديد التسوير المناسب لاستخدامه. بفعل ذلك نحصل على "لكل طالب في هذا الفصل، هذا الطالب درس تفاضل وتكامل". بعد ذلك ندخل متغير x في الجملة لتصبح "لكل طالب x في هذا الفصل، x درس تفاضل وتكامل". الخطوة التالية ندخل المقدر $C(x)$ والتي هي "x درس تفاضل وتكامل". تبعا لذلك إذا كان نطاق x يتكون من كل الطلاب في هذا الفصل فإن الجملة المعطاة تتحول إلى تعبير منطقي على الصورة $\forall x C(x)$.

مثال ١-٢-٢٠. عبر عن الجملتين "بعض الطلاب في هذا الفصل زار مدينة العريش" و "كل طالب في هذا الفصل زار مدينة العريش أو مدينة الغردقة" في صورة تعبيرات منطقية.

الحل: الجملة "بعض الطلاب في هذا الفصل زار مدينة العريش" تعني أنه "يوجد طالب في هذا الفصل له الخاصية أنه زار مدينة العريش". ندخل المتغير x لتصبح هذه الجملة "يوجد طالب x في هذا الفصل له الخاصية أن x زار العريش". ندخل المقدر $M(x)$ والتي هي التعبير "x زار العريش". إذا كان نطاق x يتكون من كل طلاب هذا الفصل، نحول الجملة الأولى إلى الصورة $\exists x M(x)$.

بالمثل الجملة الثانية يمكن التعبير عنها بالصورة $\forall x\,(C(x) \vee M(x))$ ، حيث النطاق يتكون من كل الطلاب في هذا الفصل، $M(x)$ هي التعبير "x زار العريش" و $C(x)$ هي التعبير "x زار الغردقة".

تمارين ١-٢

١- حول التسويرات التالية إلى جمل كلامية ثم حدد قيمة الصدق لها.

(أ) $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2 \neq -1\right)$.　(ب) $\forall x \in \mathbb{Z}\left(x^2 > 0\right)$.

(ج) $\exists x \in \mathbb{R}\left(x^3 = -1\right)$.　(د) $\exists x \in \mathbb{Z}\left(x + 1 > x\right)$.

(هـ) $\forall x \in \mathbb{Z}\left(x^2 \in \mathbb{Z}\right)$.

٢- نفرض $P(x)$ ترمز إلى العبارة " $x \leq 4$ ". ماهي قيم الصدق للتقارير $P(0)$ ، $P(4)$ و $P(6)$.

٣- نفرض $P(x)$ هي العبارة "x يقضي أكثر من خمس ساعات في كل أيام الاسبوع في الفصل"، حيث نطاق x يتكون من كل الطلاب. عبر عن المسورات التالية بجمل كلامية.

(أ) $\exists x P(x)$.　(ب) $\forall x P(x)$.

(ج) $\exists x \sim P(x)$.　(د) $\forall x \sim P(x)$.

٤- عبر بجمل كلامية عن العبارات التالية، حيث $C(x)$ هي "x ممثل كوميدي" و $F(x)$ هي " x مرح" ونطاق x يتكون من كل الناس.

(أ) $\forall x\left(C(x) \rightarrow F(x)\right)$.　(ب) $\forall x\left(C(x) \wedge F(x)\right)$.

(ج) $\exists x\left(C(x) \rightarrow F(x)\right)$.　(د) $\exists x\left(C(x) \wedge F(x)\right)$.

٥- نفرض $Q(x)$ هي العبارة " $x + 1 > 2x$ ". إذا كان نطاق x يتكون من كل الأعداد الصحيحة فما هي قيم الصدق للتقارير

(أ) $Q(0)$. (ب) $Q(-1)$. (ج) $Q(1)$.

(د) $\exists x Q(x)$. (هـ) $\forall x Q(x)$. (و) $\exists x \sim Q(x)$.

(ز) $\forall x \sim Q(x)$.

٦- نفرض أن نطاق دالة التقرير $P(x)$ تتكون من الأعداد الصحيحة 1، 2، 3، 4 و 5. عبر عن العبارات بدون استخدام المسورات ولكن بدلا عنها استخدم النفي، الفصل والعطف.

(أ) $\exists x P(x)$. (ب) $\forall x P(x)$.

(ج) $\sim \exists x P(x)$. (د) $\sim \forall x P(x)$.

(هـ) $\forall x \left((x \neq 3) \rightarrow P(x) \right) \vee \exists x \sim P(x)$.

٧- حول الجمل التالية إلى تعبيرات منطقية باستخدام المقدرات والمسورات وأدوات الربط المنطقية بطريقتين. أولا بفرض أن النطاق يتكون من كل الطلاب في فصلك. ثانيا باعتبار أن النطاق يتكون من كل الناس.

(أ) شخص من فصلك يمكن أن يتحدث الإنجليزية.

(ب) كل شخص في فصلك يكون ودود.

(ج) يوجد شخص في فصلك لم يولد في أسيوط.

(د) أحد الطلاب في فصلك ظهر في برنامج تليفزيوني.

(هـ) لا يوجد أحد من الطلاب في فصلك درس مقرر البرمجة المنطقية.

٨- عبر عن الجمل التالية في صورة تعبيرات منطقية مستخدما المقدرات والمسورات وأدوات الربط المنطقية.

(أ) ليس هناك أحد صادق.

(ب) ليس كل واحد صادق.

(ج) كل واحد من أصدقائك صادق.

(د) واحد من أصدقائك صادق.

(هـ) كل واحد يكون صديقك ويكون صادق.

(و) ليس كل الناس أصدقائك أو يوجد بعض الناس غير صادق.

٩- عبر عن الجمل التالية في صورة تعبيرات منطقية مستخدما المقدرات والمسورات وأدوات الربط المنطقية.

(أ) بعض التقارير تكون قوانين منطقية.

(ب) نفي التناقض يكون قانون.

(ج) فصل عارضين يمكن أن يكون قانون.

(د) عطف قانونين يكون قانون.

١٠- عبر عن الجمل التالية مستخدما المسورات. بعد ذلك كون نفي العبارة بحيث لايظهر النفي على يسار المسور. بعد ذلك عبر عن النفي بجمل كلامية (لا تستخدم التعبير "ليس الحال أن").

(أ) بعض الكلاب المسنة يمكن أن يتعلم الصيد.

(ب) لايوجد قط يعرف الحساب.

(ج) كل طائر يمكن أن يطير.

(د) لايوجد كلب يمكن أن يتكلم.

(هـ) لا يوجد أحد في هذا الفصل يعرف الفرنسية والروسية.

١-٣ المسورات المختلطة Nested Quantifiers

في هذا الجزء سوف نتعرض بالدراسة للمسورات المختلطة، وهي المسورات التي تحدث مع مسورات أخرى، كما في العبارة

$$\forall x \, \exists y \, (x + y = 0)$$

المسورات المختلطة تحدث كثيرا في الرياضيات وعلوم الحاسب.

مثال ١-٣-١. نفرض أن نطاق المتغيرين x و y يتكون من كل الأعداد الحقيقية. العبارة $\forall x \, \forall y \, (x + y = y + x)$ تنص على أن $x + y = y + x$ لكل الأعداد الحقيقية x و y. هذا هو قانون الإبدال لعملية جمع الأعداد الحقيقية.

بالمثل العبارة $\forall x \, \exists y \, (x + y = 0)$ تنص على أن لكل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y بحيث $x + y = 0$. وهذه تنص على أن كل عدد حقيقي له معكوس جمعي.

بالمثل العبارة $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x + (y + z) = (x + y) + z)$ هي قانون الدمج (المشاركة) لعملية جمع الأعداد الحقيقية.

مثال. ١-٣-٢. حول إلى جملة كلامية العبارة

$$\forall x \, \forall y \, \big((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (x \, y < 0) \big)$$

حيث نطاق المتغيرات يتكون من كل الأعداد الحقيقية.

الحل. هذه العبارة تقول أنه لأي عدد حقيقي x ولأي عدد حقيقي y ، إذا كان $x > 0$ و $y < 0$ فإن $xy < 0$. أي أن هذه العبارة تنص على أنه لأي عددين حقيقين x و y إذا كان x موجب و y سالب فإن xy يكون سالب. وهذه يمكن صياغتها بصورة أكثر إحكاما كما يلي "حاصل ضرب عدد حقيقي موجب وعدد حقيقي سالب يكون عدد حقيقي سالب"

ترتيب المسورات The Order of Quantifiers

العديد من العبارات الرياضية تحتوي تسويرات متعددة لدوال تقارير تحتوي أكثر من متغير. من المهم ملاحظة أن ترتيب المسورات يكون مهم إلا إذا كانت المسورات كلها مسورات شاملة أو كلها مسورات وجود.

مثال ١-٣-٣. حول العبارة $\forall x\left(C(x)\vee\exists y\left(C(y)\wedge F(x,y)\right)\right)$ إلى جملة كلامية. حيث $C(x)$ هي "x عنده حاسوب"، $F(x,y)$ هي "x و y أصدقاء" والنطاق لكلا المتغيرين x و y يتكون من كل الطلاب في معهدك الدراسي.

الحل. العبارة تنص على أن لكل طالب x في معهدك الدراسي، x عنده حاسوب أو يوجد طالب y بحيث y يكون عنده حاسوب و x و y أصدقاء. بتعبير آخر كل طالب في معهدك الدراسي يكون عنده حاسوب أو له صديق عنده حاسوب.

مثال ١-٣-٤. عبر عن الجملة الكلامية "إذا كان شخص أنثى ووالد فإن هذا الشخص يكون أم لشخص ما" بصورة عبارة منطقية تشتمل على مقدرات ومسورات حيث النطاق هو كل الناس.

الحل: هذه الجملة يمكن التعبير عنها كما يلي "لكل شخص x، إذا كان الشخص x أنثى والشخص x والد، فإنه يوجد شخص y بحيث أن الشخص x يكون أم للشخص y". ندخل المقدرات $F(x)$ لتمثل "x تكون أنثى" ، $P(x)$ لتمثل "x يكون والد" و $M(x,y)$ لتمثل "x هي أم y". الجملة الأصلية يمكن التعبير عنها بالصورة

$$\forall x\left(\left(F(x)\wedge P(x)\right)\rightarrow\exists y\,M(x,y)\right)$$

مثال ١-٣-٥. عبر عن الجملة الكلامية "كل واحد له تحديدا صديق واحد مخلص" في صورة عبارة منطقية تشتمل على مقدرات ومسورات وأدوات الربط المنطقية حيث النطاق يتكون من كل الناس.

الحل: الجملة المعطاة يمكن التعبير عنها كما يلي "لكل شخص x، الشخص x له تحديدا صديق واحد مخلص". بإدخال التسوير الشامل نجد أن هذه العبارة

تكون مثل " $\forall x$ (الشخص x له تحديدا صديق واحد مخلص)" حيث النطاق يتكون من كل الناس. أن نقول أن x له تحديدا صديق واحد مخلص هذا يعني أنه يوجد شخص y يكون صديق مخلص للشخص x علاوة على ذلك، لأي شخص z إذا كان الشخص z ليس هو الشخص y فإن z ليس صديق مخلص لـ x. عندما ندخل المقدر $B(x,y)$ لتعني أن "y هو الصديق المخلص لـ x" الجملة x له تحديدا صديق واحد مخلص يمكن التعبير عنها كما يلي

$$\exists y\left(B(x,y)\wedge\forall z\left((z\neq y)\rightarrow\sim B(x,z)\right)\right)$$

تبعا لذلك الجملة الأصلية يمكن التعبير عنها كما يلي

$$\forall x\,\exists y\left(B(x,y)\wedge\forall z\left((z\neq y)\rightarrow\sim B(x,z)\right)\right)$$

مثال ١-٣-٦. نفرض $P(x)$ هي الجملة "$x+y=y+x$". ماهي قيمة الصدق للمسورات $\forall x\,\forall\,y\,P(x,y)$ و $\forall\,y\,\forall\,x\,P(x,y)$ حيث نطاق كل المتغيرات يتكون من كل الاعداد الحقيقية؟

الحل: التسوير $\forall x\,\forall\,yP(x,y)$ يرمز إلى التقرير "لكل الاعداد الحقيقية x ولكل الأعداد الحقيقية y، $x+y=y+x$". حيث أن $P(x,y)$ صادق لكل الأعداد الحقيقية x و y، التقرير $\forall x\,\forall\,yP(x,y)$ يكون صادق. لاحظ أن العبارة $\forall y\,\forall xP(x,y)$ تنص على "لكل الاعداد الحقيقية y ولكل الأعداد الحقيقية x، $x+y=y+x$". وهذه لها نفس المعنى مثل "لكل الاعداد الحقيقية x ولكل الأعداد الحقيقية y، $x+y=y+x$". أي أن $\forall x\,\forall\,yP(x,y)$ و $\forall y\,\forall xP(x,y)$ لهما نفس المعنى وكلاهما صادق. هذا يوضح مبدأ أن ترتيب المسورات الشاملة المختلطة في العبارات بدون مسورات أخرى يمكن تبديلها بدون تغير معنى العبارات المسورة.

مثال ١-٣-٧. نفرض $Q(x,y)$ ترمز إلى "$x+y=0$" . ما هي قيمة الصدق للمسورات $\exists y\,\forall x\,Q(x,y)$ و $\forall x\,\exists y\,Q(x,y)$، حيث نطاق كل المتغيرات يتكون من كل الاعداد الحقيقية؟

الحل. التقدير $\exists y \, \forall x \, Q(x,y)$ يرمز إلى التقرير "يوجد عدد حقيقي y بحيث لكل عدد حقيقي x، $Q(x,y)$". بدون اعتبار لقيمة y المختارة توجد قيمة وحيدة لـ x بحيث $x+y=0$. حيث أنه لايوجد عدد حقيقي y بحيث يكون $x+y=0$ لكل الاعداد الحقيقية x، فإن العبارة $\exists y \, \forall x \, Q(x,y)$ تكون كاذبة. التقدير $\forall x \, \exists y \, Q(x,y)$ يرمز إلى التقرير "لكل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y بحيث $x+y=0$ أي $y=-x$ ". لذلك العبارة $\forall x \, \exists y \, Q(x,y)$ تكون صادقة.

مثال ١-٣-٧ يوضح أن الترتيب الذي تظهر به المسورات المختلفة يحدث إختلافا. العبارتان $\exists y \, \forall x \, Q(x,y)$ و $\forall x \, \exists y \, Q(x,y)$ ليستا متكافئتان منطقيا.

نفي المسورات المختلطة Negating Nested Quantifiers

العبارات التي تشتمل على مسورات مختلطة يمكن نفيها بتتابع تطبيق قواعد نفي العبارات التي تحتوي مسورمنفرد.

مثال ١-٣-٨. عبر عن نفي العبارة $\forall x \, \exists y \, (xy=1)$ بحيث لايسبق المسور أي نفي.

الحل: نفي $\forall x \, \exists y \, (xy=1)$ هو $\sim \forall x \, \exists y \, (xy=1)$. بتحريك النفي للداخل نجد أن $\sim \forall x \, \exists y \, (xy=1)$ تكافئ $\exists x \sim \exists y \, (xy=1)$ وهذه تكافئ $\exists x \, \forall y \sim (xy=1)$. وحيث أن $\sim (xy=1)$ يمكن التعبير عنها بصورة أبسط على الشكل $xy \neq 1$، نستنتج أن العبارة المنفية يمكن التعبير عنها بالصورة $\exists x \, \forall y \, (xy \neq 1)$.

الجدول التالي يوضح لنا الحالات المختلفة الممكنة للمسورات المشتملة على متغيرين

العبارة	متى تكون صادقة ؟	متى تكون كاذبة ؟
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	$P(x,y)$ صادقة لكل زوج x و y	يوجد زوج x و y بحيث تكون $P(x,y)$ كاذبة
$\forall x \exists y P(x,y)$	لكل x يوجد y بحيث تكون $P(x,y)$ صادقة	يوجد x بحيث $P(x,y)$ تكون كاذبة لكل y
$\exists x \forall y P(x,y)$	يوجد x بحيث $P(x,y)$ تكون صادقة لكل y	لكل x يوجد y حيث $P(x,y)$ تكون كاذبة
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	يوجد زوج x و y بحيث $P(x,y)$ تكون صادقة	$P(x,y)$ كاذبة لكل زوج x و y

جدول١-٣-١

تمارين ١-٣

١- حول إلى جمل كلامية العبارات التالية، حيث نطاق كل متغير يتكون كل الأعداد الحقيقية.

(أ) $\forall x \exists y (x < y)$.

(ب) $\forall x \forall y \left(\left((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)\right) \rightarrow x\, y \geq 0\right)$.

(ج) $\forall x \ \forall y \ \exists z \ (x\, y = z)$.

(د) $\exists x \ \forall y \ (x\, y = y)$.

(هـ) $\forall x \forall y \left(\left((x \geq 0) \wedge (y < 0)\right) \rightarrow (x - y > 0)\right)$.

(و) $\forall x \ \forall y \ \exists z \ (x = y + z)$.

(ز) $\exists x \ \forall y \ (x + y = y)$.

(ح) $\exists x \ \exists y \left(\left((x \le 0) \wedge (y \le 0) \right) \wedge (x - y > 0) \right)$.

(ط) $\forall x \ \forall y \left(\left((x < 0) \wedge (y < 0) \right) \rightarrow x \ y > 0 \right)$

٢- نفرض $Q(x,y)$ هي العبارة "x أرسل رسالة بريد إليكتروني إلى y"، حيث نطاق المتغيرين x و y يتكون من كل الطلاب في فصلك. عبر عن كل من المسورات التالية في جمل كلامية.

(أ) $\exists x \exists y \, Q(x,y)$.

(ب) $\exists x \ \forall y \ Q(x,y)$.

(ج) $\forall x \ \exists y \ Q(x,y)$.

(د) $\exists y \ \forall x \ Q(x,y)$.

(هـ) $\forall y \ \exists x \ Q(x,y)$.

(و) $\forall x \ \forall y \ Q(x,y)$.

٣- نفرض $Q(x,y)$ هي العبارة " $x + y = x - y$ ". إذا كان نطاق كل المتغيرات يتكون من كل الاعداد الصحيحة فماهي قيم الصدق لكل ممايأتي؟

(أ) $Q(1,1)$.

(ب) $Q(2,0)$.

(ج) $\forall y \, Q(1,y)$.

(د) $\exists x \ \exists y \, Q(x,y)$.

(هـ) $\forall x \ \exists y \, Q(x,y)$.

(و) $\exists y \ \forall x \, Q(x,y)$.

(ز) $\forall y \ \exists x \ Q(x,y)$.

(ح) $\forall y \ \exists x \ Q(x,y)$.

(ط) $\forall x \ \forall y \, Q(x,y)$.

(ك) $\exists x \, Q(x,2)$.

٤- حدد قيم الصدق لكل من العبارات التالية إذا كان نطاق كل المتغيرات يتكون من كل الأعداد الحقيقية.

(أ) $\forall x \ \exists y \left(x^2 = y \right)$.

(ب) $\forall x \exists y \left(x = y^2 \right)$.

(ج) $\exists x \forall y \left(xy = 0 \right)$.

(د) $\forall x \left(x \neq 0 \to \exists y \left(x + y = 1 \right) \right)$.

(هـ) $\exists x \forall y \left(y \neq 0 \to x y = 1 \right)$.

(و) $\exists x \exists y \left(x + y = 1 \right)$.

(ز) $\exists x \exists y \left(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5 \right)$.

(ح) $\forall x \exists y \left(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1 \right)$.

(ط) $\forall x \forall y \exists z \left(z = (x + y) / 2 \right)$.

(ي) $\exists x \exists y \left(x + y \neq y + x \right)$.

٥- عبر عن نفي كل من العبارات التالية بحيث أن رمز النفي يسبق المقدر مباشرة.

(أ) $\forall x \forall y \forall z \, T(x, y, z)$.

(ب) $\forall x \exists y \, P(x, y) \vee \forall x \exists y \, Q(x, y)$.

(ج) $\forall x \exists y \left(P(x, y) \wedge \exists z \, R(x, y, z) \right)$.

(د) $\forall x \exists y \left(P(x, y) \to Q(x, y) \right)$.

٦- حدد قيم الصدق لكل من العبارات التالية إذا كان نطاق كل المتغيرات يتكون من كل الأعداد الصحيحة.

(أ) $\forall n \exists m (n^2 < m)$.

(ب) $\exists n \forall m (n < m^2)$.

(ج) $\forall n \exists m (n + m = 0)$.

(د) $\exists n \forall m (nm = m)$.

(هـ) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$.

(و) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$.

(ز) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$.

(ح) $\forall n \forall m \exists p (p = (m + n)/2)$.

٧- نفرض أن نطاق دالة التقارير $P(x, y)$ يتكون من كل الثنائيات x و y حيث $x = 1,2,3$ و $y = 1,2,3$. أكتب هذه التقارير باستخدام الفصل والعطف.

(أ) $\forall x \forall y P(x, y)$. (ب) $\exists x \exists y P(x, y)$.

(ج) $\exists x \forall y P(x, y)$. (د) $\forall x \exists y P(x, y)$.

٨- أعد كتابة العبارات التالية بحيث أن النفي يظهر فقط للمقدرات (أي لايظهر نفى أمام المسورات أو التعبيرات التي تحتوي روابط منطقية).

(أ) $\sim \exists y \exists x P(x, y)$. (ب) $\sim \forall x \exists y P(x, y)$.

(ج) $\sim \exists y (Q(y) \wedge \forall x \sim R(\mathrm{x,y}))$.

(د) $\sim \exists y (\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$.

(هـ) $\sim \exists y (\forall x \exists z T(x, y, z) \vee \exists x \forall z U(\mathrm{x,y,z}))$.

٩- عبر عن نفي العبارات التالية بحيث أن كل ادوات النفي تسبق المقدرات مباشرة.

(أ) $\forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$.

(ب) $\forall x \exists y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$.

(ج) $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z R(x, y, z))$.

(د) $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$.

(هـ) $\exists z\, \forall y\, \forall x T(x, y, z)$.

(و) $\exists x\, \exists y P(x, y) \wedge \forall x\, \forall y Q(x, y)$.

(ز) $\exists x\, \exists y\, (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$.

(ح) $\forall y\, \exists x\, \exists z\, (T(x, y, z) \vee Q(x, y))$.

١٠- أعد كتابة العبارات التالية بحيث أن النفي يظهر فقط أمام المقدر.

(أ) $\sim \forall x\, \forall y P(x, y)$.

(ب) $\sim \forall y\, \exists x P(x, y)$.

(ج) $\sim \forall y\, \forall x\, (P(x, y) \vee Q(x, y))$.

(د) $\sim (\exists x\, \exists y \sim P(x, y) \wedge \forall x\, \forall y Q(x, y))$.

(هـ) $\sim \forall x\, (\exists y\, \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z\, \forall y P(x, y, z))$.

١١- حدد قيم الصدق للعبارة $\forall x\, \exists y\, (xy = 1)$ حيث نطاق المتغيرات يتكون من

(أ) الأعداد الحقيقية غير الصفرية.

(ب) الأعداد الصحيحة غير الصفرية.

(ج) الأعداد الحقيقية الموجبة.

١٢- حدد قيم الصدق للعبارة $\exists x\, \forall y\, (x \leq y^2)$ ، حيث نطاق المتغيرات يتكون من

(أ) الأعداد الصحيحة الموجبة.

(ب) الأعداد الصحيحة.

(ج) الأعداد الحقيقية غير الصفرية.

١٣- أوجد مثال عكسي ، إن أمكن، للتسوير الشامل للعبارات المقدرة التالية، حيث نطاق كل المتغيرات يتكون من كل الأعداد الصحيحة.

(أ) $\forall x \forall y (x^2 = y^2 \to x = y)$.

(ب) $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$.

(ج) $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$.

(د) $\forall x \forall y (xy \geq x)$.

(هـ) $\forall x \exists y (y^2 = x)$.

(و) $\forall x \exists y (x = 1/y)$.

١-٤ قواعد الاستدلال Rules of Inference

في نهاية هذا الباب سوف نتعرض بالدراسة للبراهين. البرهان في الرياضيات هو محاججة صحيحة تؤكد صحة عبارات رياضية. محاججة argument يقصد بها متتابعة من العبارات التي تنتهي بخلاصة. بكلمة صحيحة valid نقصد أن الخلاصة أو العبارة النهائية في المحاججة يجب أن تنتج من العبارات السابقة لها أو معطيات المحاججة. أي أن المحاججة تكون صحيحة إذا وفقط إذا كان من غير الممكن أن تكون المعطيات صادقة والخلاصة كاذبة.

لكي نستخرج عبارة جديدة من عبارة موجودة معنا بالفعل نستخدم قواعد الاستدلال والتي هي أدوات لبناء محاججة صحيحة. قواعد الاستدلال هي أدواتنا الأساسية لتأسيس العبارات الصادقة.

قبل دراسة البراهين الرياضية، سوف نلقي نظرة على المحاججات التي تحتوي فقط تقارير مركبة. سوف نعرف مامعني أن محاججة تحتوي تقارير مركبة تكون صحيحة. ومن ثم سوف نقدم مجموعة من قواعد الاستدلال في منطق التقارير. قواعد الاستدلال هذه تكون من بين أكثر المقومات أهمية في إنتاج المحاججات الصحيحة. بعد بيان كيفية استخدام قواعد الاستدلال في بناء محاججة صحيحة، سوف نصف بعض الصيغ المشتركة للاستنتاج الخاطئ incorrect reasoning ، وتسمى مغالطات fallacies ، والتي تؤدي إلى محاججات غير صحيحة.

بعد دراسة قواعد الاستدلال في منطق التقارير، سوف نقدم قواعد الاستدلال في العبارات المسورة. سوف نصف كيف يمكن استخدام هذه القواعد في انتاج محاججات صحيحة.

أخيرا سوف نبين كيف يمكن تركيب قواعد الاستدلال في منطق التقارير مع قواعد الاستدلال في العبارات المسورة.

المحاججات الصحيحة في منطق التقارير

Valid Arguments in Propositional Logic

نعتبر المحاججة التالية التي تشتمل على تقارير

"إذا كان لديك كلمة مرور فاعلة، فيمكنك الدخول على الشبكة"

" أنت لديك كلمة مرور فاعلة"

لذلك

"أنت يمكنك الدخول على الشبكة"

نود تحديد ما إذا كانت هذه المحاججة صحيحة. بمعني أننا نود تحديد ما إذا كانت الخلاصة "أنت يمكنك الدخول على الشبكة" يجب أن تكون صادقة عندما تكون المعطيات "إذا كان لديك كلمة مرور فاعلة، فيمكنك الدخول على الشبكة" و " أنت لديك كلمة مرور فاعلة" كلاهما صادقة.

قبل مناقشة صحة هذه المحاججة المعينة ننظر في صياغتها. نستخدم p لتمثل " أنت لديك كلمة مرور فاعلة" و q لتمثل "أنت يمكنك الدخول على الشبكة". لذلك هذه المحاججة تأخذ الصورة

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

حيث $\therefore$ رمز يعني لذلك therefore.

نعلم أنه عندما يكون p و q متغيرات تقارير فإن العبارة

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

تكون قانون منطقي. وعلى وجه الخصوص عندما تكون $p \to q$ و p كلاهما صادق نعلم أن q يجب أن تكون صادق. نقول أن هذه الصيغة للمحاججة صحيحة لأنه أينما كانت كل المعطيات صادقة فإن الخلاصة يجب أن تكون صادقة. الآن نفرض أن كلا من "إذا كان لديك كلمة مرور فاعلة، فيمكنك الدخول على الشبكة" و " أنت لديك كلمة مرور فاعلة" يكون تعبير صادق. عندما نضع p بدلا عن " أنت لديك كلمة مرور فاعلة" و q بدلا عن "أنت يمكنك الدخول على الشبكة" من الضروري أن ينتج أن الخلاصة "أنت يمكنك الدخول على الشبكة" تكون صادقة. هذه المحاججة تكون

صحيحة لأن صيغتها صحيحة. لاحظ أنه حيثما استبدلنا p و q بتقارير حيث $p \to q$ و p كلاهما صادق، فإن q يجب أن يكون صادق.

ماذا يحدث عندما نستبدل p و q في هذه الصيغة للمحاججة بتقارير حيث p و $p \to q$ ليس كلاهما صادق ؟ على سبيل المثال نفرض أن p تمثل "لديك إمكانية الدخول للشبكة" و q تمثل " يمكنك تغيير درجتك" و p صادق ولكن $p \to q$ كاذب. المحاججة التي نحصل عليها بالتعويض بهذه القيم لـ p و q في صيغة المحاججة تكون

"إذا كان لديك إمكانية الدخول للشبكة، فإنه يمكنك تغيير درجتك "

" لديك إمكانية الدخول للشبكة"

∴ " يمكنك تغيير درجتك"

المحاججة التي حصلنا عليها تكون صحيحة، ولكن لأن أحد المعطيات ،وهو الأول، كاذب لايمكننا استنتاج أن الخلاصة تكون صادق.

تعريف ١-٤-١. **المحاججة** argument في منطق التقارير هي متتابعة من التقارير جميعها عدا التقرير الأخير تسمى **معطيات** أو مقدمات premises والأخير يسمى **خلاصة** conclusion. المحاججة تكون **صحيحة** valid إذا كانت قيم الصدق للمعطيات تؤدي إلى أن الخلاصة تكون صادق.

صيغة المحاججة argument form

في منطق التقارير، صيغة المحاججة هي متتابعة من التقارير المركبة تشتمل على متغيرات تقارير propositional variables. صيغة المحاججة تكون صحيحة بدون اعتبار لماهية التقارير التي استبدلت بها متغيرات التقارير في المعطيات، الخلاصة تكون صادقة إذا كانت المعطيات جميعها صادقة.

من تعريف صيغة المحاججة الصحيحة نجد أن صيغة المحاججة التي لها المعطيات $p_1, p_2, \ldots, p_n$ والخلاصة q تكون صحيحة عندما تكون $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ قانون.

قواعد الاستدلال لمنطق التقارير

يمكننا دائما استخدام جدول الصدق لبيان أن صيغة محاججة تكون صحيحة. نفعل ذلك ببيان أنه عندما تكون المعطيات صادقة فإن الخلاصة يجب أن تكون صادقة. ومع ذلك، هذا يمكن أن يكون طريق ممل. على سبيل المثال عندما تحتوي صيغة محاججة على 10 متغيرات تقارير مختلفة، لاستخدام جدول الصدق لبيان أن صيغة المحاججة هذه صحيحة نحتاج إلى عدد $2^{10} = 1024$ صف مختلف. لحسن الحظ أننا لسنا مصممون على جداول الصدق. بدلا عن ذلك يمكننا أولا استنتاج صحة بعض صيغ المحاججات البسيطة نسبيا ، تسمى **قواعد الاستدلال** rules of inference. هذه القواعد للاستدلال يمكن استخدامها كلبنات لبناء صيغ محاججات صحيحة أكثر تعقيدا. الآن سوف نقدم الاكثر أهمية من قواعد الاستدلال في منطق التقارير.

القانون $\left(p \wedge (p \rightarrow q)\right) \rightarrow q$ هو أساس قاعدة الاستدلال يسمى طريقة **التثبت** modus ponens أو قانون الانفصال law of detachment. هذا القانون يؤدي إلى صيغة المحاججة الصحيحة التالية، والتي تعرضنا لها في بداية مناقشتنا عن المحاججات:

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore q \end{array}$$

باستخدام هذا الرمز، الفروض تكتب في عمود، يليه خط أفقي يليه سطر يبدأ بالرمز ($\therefore$) وينتهي بالخلاصة. بصفة خاصة طريقة التخفيض تخبرنا أنه إذا كان العبارة الشرطية وفرض هذه العبارة الشرطية كلاهما صادق فإن الخلاصة يجب أن تكون صادقة.

مثال ١-٤-٢. نفرض أن الجملة الشرطية "إذا كان n أكبر من 3، فإن n^2 يكون أكبر من 9" صادقة، تبعا لذلك إذا كان n أكبر من 3، فإنه باستخدام طريقة التخفيض ، ينتج أن n^2 يكون أكبر من 9.

مثال ١-٤-٣. نفرض أن الجملة الشرطية "إذا كان الجو اليوم معتدل، فسوف نذهب للنادي" والفرض "الجو اليوم معتدل" كلاهما صادق فإنه باستخدام طريقة التثبت ، ينتج أن الخلاصة "سوف نذهب إلى النادي" تكون صادقة.

كما ذكرنا سابقا، المحاججة الصحيحة يمكن أن تؤدي إلى خلاصة غير صحيحة إذا كان واحد أو أكثر من المعطيات غير صادق. نوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال ١-٤-٤. حدد ما إذا كانت المحاججة المعطاة هنا صحيحة وحدد ما إذا كانت الخلاصة يجب أن تكون صادقة بسبب صحة المحاججة.

إذا كان $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$، فإن $\left(\sqrt{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$. نحن نعلم أن $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$.

تبعا لذلك $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

الحل. نفرض p هي التقرير "$\sqrt{2} > \frac{3}{2}$" و q هي التقرير "$2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$".

معطيات المحاججة هي $p \to q$ و p والخلاصة هي q. هذه المحاججة صحيحة لأنه تم بنائها باستخدام قاعدة التثبت، وهي صيغة محاججة صحيحة.

ومع ذلك، أحد المعطيات ، $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$، غير صادق. تبعا لذلك لا يمكننا استنتاج أن الخلاصة تكون صادقة. علاوة على ذلك، لاحظ أن الخلاصة في هذه المحاججة كاذبة، لأن $2 < \frac{9}{4}$.

الجدول التالي يعطي بعض قواعد الاستدلال الهامة

الاسم	القانون المنطقي	قاعدة الاستدلال
الإضافة Addition	$p \to (p \vee q)$	$\underline{p \qquad}$ $\therefore p \vee q$
التبسيط Simplification	$(p \wedge q) \to p$	$\underline{p \wedge q}$ $\therefore p$
الوصل Conjunction	$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$	p $\underline{q \qquad}$ $\therefore p \wedge q$
طريقة التثبت Modus ponens	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	p $\underline{p \to q}$ $\therefore q$
طريقة الإنكار Modus tollens	$[\sim q \wedge (p \to q)] \to \sim p$	$\sim q$ $\underline{p \to q}$ $\therefore \sim p$
القياس الافتراضي Hypothetical syllogism	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	$p \to q$ $\underline{q \to r}$ $\therefore p \to r$
قياس الفصل Disjunction syllogism	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$	$p \vee q$ $\underline{\sim p}$ $\therefore q$
التحلل Resolution	$[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)] \to (q \vee r)$	$p \vee q$ $\underline{\sim p \vee r}$ $\therefore q \vee r$

جدول ١-٤-١

مثال ١-٤-٥. بين ماهي قاعدة الاستدلال التي تكون أساس للمحاججة التالية "الحرارة الآن تحت الصفر. إذن، الحرارة الآن تحت الصفر أو هناك مطر الآن".

الحل: نفرض p هو التقرير" الحرارة الآن تحت الصفر" ونفرض q هو التقرير "الآن يوجد مطر". إذن هذه المحاججة تكون في الصيغة

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

هذه المحاججة تستخدم قاعدة الاضافة.

مثال ١-٤-٦. بين ماهي قاعدة الاستدلال التي تكون أساس للمحاججة التالية:

إذا كان الجو اليوم ممطر، إذن لن نذهب اليوم إلى النادي. إذا لم نذهب اليوم إلى النادي إذن سوف نذهب إلى النادي غدا. لذلك إذا كان الجو اليوم ممطر فإننا سوف نذهب إلى النادي غدا.

الحل. نفرض p التقرير "الجو اليوم ممطر" ، q هي التقرير "لن نذهب اليوم للنادي" ونفرض r هو التقرير "سوف نذهب للنادي غدا". هذه المحاججة تكون على الصيغة

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore \ p \to r \end{array}$$

إذن هذه المحاججة هي القياس الافتراضي.

استخدام قواعد الاستدلال لبناء محاججات

Using Rules of Inference to Build Arguments

عندما يوجد عدد كثير من الفروض فإننا غالبا نحتاج إلى العديد من قواعد الاستدلال لبيان أن محاججة تكون صحيحة. يمكن توضيح ذلك بالمثال التالي حيث خطوات المحاججة موضحة على خطوط مستقلة مع توضيح سبب كل خطوة صراحة.

مثال ١-٤-٧. بين أن الفروض "الشمس ليست غائمة بعد ظهر اليوم والجو أكثر بردا من أمس" ، "سوف نذهب إلى النادي فقط إذا كانت الشمس مشرقة" ، "إذا لم نذهب إلى النادي سوف نذهب للتسوق" و "إذا ذهبنا للتسوق فسوف نعود للبيت قبل الغروب" تؤدي إلى الخلاصة "سوف نعود للبيت قبل الغروب".

الحل. نفرض p هو التقرير "الشمس مشرقة بعد ظهر اليوم" ، q هي التقرير "الجو أكثر بردا من أمس" ، r التقرير "سوف نذهب إلى النادي" ، s التقرير "سوف نذهب للتسوق" و t هو التقرير "سوف نذهب للبيت قبل الغروب". إذن الفروض تصبح $\sim p \wedge q$ ، $r \rightarrow p$ ، $\sim r \rightarrow s$ و $s \rightarrow t$. إذن الخلاصة تكون ببساطة هي t. الآن نكون محاججة لبيان أن الفروض تؤدي إلى الخلاصة المطلوبة كما يلي:

	الخطوة	السبب
-١	$\sim p \wedge q$	فرض
-٢	$\sim p$	التبسيط باستخدام الخطوة 1
-٣	$r \rightarrow p$	فرض
-٤	$\sim r$	طريقة التثبت باستخدام خطوة 2 و 3
-٥	$\sim r \rightarrow s$	فرض
-٦	s	طريقة التثبت باستخدام خطوة 4 و 5
-٧	$s \rightarrow t$	فرض
-٨	t	طريقة التثبت باستخدام خطوة 6 و 7

الخدع Fallacies

العديد من الخدع المشتركة تظهر في المحاججات غير الصحيحة. هذه الخدع تشابه قواعد الاستدلال ولكن وضعت على أساس عوارض وليست قوانين. هذه نناقشها الآن للتمييز بين المناقشات الصحيحة وغير الصحيحة.

التقرير $[(p\to q)\wedge q]\to p$ ليس قانون، حيث أنه يكون كاذب عندما p تكون كاذبة و q تكون صادقة. ومع ذلك يوجد العديد من المحاججات غير الصحيحة التي تعامله على أنه قانون. هذا النوع من المناقشات غير الصحيحة يسمى خدعة في إثبات الخلاصة fallacy of affirming the conclusion.

مثال ١-٤-٨. هل المحاججة التالية صحيحة ؟

"إذا أنت قمت بحل كل المسائل في هذا الكتاب، إذن أنت سوف تتعلم رياضيات متقطعة، أنت تعلمت رياضيات متقطعة". لذلك "أنت قمت بحل كل المسائل في هذا الكتاب".

الحل: نفرض p هي التقرير "أنت قمت بحل كل المسائل في هذا الكتاب"، نفرض q هي التقرير "أنت تعلمت رياضيات متقطعة". إذن هذه المحاججة تكون على الصيغة: إذا كان $p\to q$ و q، إذن p. هذا مثال لمحاججة غير صحيحة باستخدام خدعة لتمرير الخلاصة. في الواقع يمكنك تعلم الرياضيات المتقطعة بطريقة غير حل تمارين هذا الكتاب.

التقرير $[(p\to q)\wedge\sim p]\to\sim q$ ليس قانون، حيث أنه غير صادق عندما p تكون كاذبة و q صادقة. العديد من المحاججات غير الصحيحة يستخدم هذا التقرير غير الصحيح كقاعدة استدلال. هذا النوع من التبرير الخاطئ يسمى خدعة إنكار الفرض fallacy of denying the hypothesis.

مثال ١-٤-٩. نفرض p و q كما في المثال السابق. إذا كان التقرير الشرطي $p\to q$ صادق و $\sim p$ صادق ، هل صحيح استنتاج أن $\sim q$ صادقة ؟ بتعبير آخر هل صحيح فرض أنك لم تتعلم الرياضيات المتقطعة إذا لم تقوم بحل كل المسائل في هذا الكتاب، بفرض أنه إذا أنت قمت بحل كل المسائل في هذا الكتاب إذن أنت سوف تتعلم الرياضيات المتقطعة ؟

الحل. من الممكن أن تتعلم الرياضيات المتقطعة حتى وإن لم تقم بحل كل المسائل في هذا الكتاب. هذه المحاججة غير الصحيحة تكون في الصيغة $p \to q$ و $\sim p$ يؤدي إلى $\sim q$، وهي مثال لخدعة إنكار الفرض.

قواعد الاستدلال للعبارات المسورة

Rules of Inferences for Quantified Statements

ناقشنا فيما مضى قواعد الاستدلال للتقارير. الآن سوف نصف بعض القواعد المهمة للاستدلال للعبارات التي تشمل مسورات. هذه القواعد للاستدلال تستخدم على نطاق واسع في المحاججات الرياضية، غالبا بدون ذكرها صراحة.

التخصيص الشامل Universal instantiation هي قاعد الاستدلال التي تستخدم لتقرير أن $P(c)$ يكون صادق، حيث c عنصر معين في النطاق، إذا كان الفرض المعطى $\forall x P(x)$. التخصيص الشامل يستخدم عندما نستنتج من العبارة "كل مربعات الأعداد الحقيقية تكون غير سالبة" أن "$x^2 \geq 0$" حيث x عدد حقيقي.

التعميم الشامل Universal generalization هي قاعدة الاستدلال التي تنص على أن $\forall x P(x)$ يكون صادق، إذا كان الفرض أن $P(c)$ يكون صادق لكل c في النطاق. التعميم الشامل يستخدم عندما نريد بيان أن $\forall x P(x)$ وذلك بأخذ عنصر اختياري c من النطاق ونبين أن $P(c)$ تكون صادقة. العنصر c الذي نأخذه يجب أن يكون إختياري في النطاق وليس مخصص. التعميم الشامل يستخدم بطريقة غير صريحة في العديد من البراهين في الرياضيات ونادرا ما يذكر صراحة.

تخصيص الوجود Existential instantiation هي القاعدة التي تسمح لنا باستنتاج أنه يوجد عنصر c في النطاق حيث $P(c)$ يكون صادق إذا علمنا أن $\exists x P(x)$ يكون صادق. لانستطيع اختيار قيمة اختيارية c هنا، ولكن يجب أن يوجد c بحيث $P(c)$ يكون صادق. عادة لايكون لدينا معلومات عن ماهي c، فقط نعلم أنها موجودة. وحيث أنها موجودة، يمكن أن نعطيها إسم (c) ونستمر في المحاججة.

تعميم الوجود Existential generalization **هي** قاعدة الاستدلال التي تستخدم لاستنتاج أن $\exists x\, P(x)$ يكون صادق عندما يعلم عنصر معين c بحيث $P(c)$ يكون صادق. أي أنه إذا علمنا عنصر معين c في النطاق بحيث $P(c)$ يكون صادق فإننا نعلم أن $\exists x\, P(x)$ يكون صادق.

مثال ١-٤-١٠. بين أن الفروض "كل طالب في فصل الرياضيات المتقطعة درس مقررا في علوم الحاسب" و "أحمد طالب في هذا الفصل" تؤدي إلى الخلاصة "أحمد درس مقرر في علوم الحاسب".

الحل: نفرض أن $D(x)$ ترمز إلى "x طالب في فصل الرياضيات المتقطعة" و $C(x)$ ترمز إلى "x درس مقرر في علوم الحاسب". إذن الفروض تكون هي $\forall x\,(D(x) \rightarrow C(x))$ و $D(\text{Ahmad})$. الخلاصة تكون $C(\text{Ahmad})$.

الخطوات التالية يمكن استخدامها للوصول للخلاصة من المعطيات.

الخطوة	السبب
١- $\forall x\,(D(x) \rightarrow C(x))$	فرض
٢- $D(\text{Ahmad}) \rightarrow C(\text{Ahmad})$	التخصيص الشامل من (1)
٣- $D(\text{Ahmad})$	فرض
٤- $C(\text{Ahmad})$	قاعدة التثبت من (2) و (3)

قواعد الاستدلال هذه نلخصها في الجدول التالي

قاعدة الاستدلال	الاسم
$\dfrac{\forall x\, P(x)}{\therefore\ P(c)}$	التخصيص الشامل Universal instantiation
$\dfrac{P(c) \text{ for an arbitrary } c}{\therefore\ \forall x\, P(x)}$	التعميم الشامل Universal generalization
$\dfrac{\exists x\, P(x)}{\therefore\ P(c) \text{ for some element } c}$	تخصيص الوجود Existential instantiation
$\dfrac{P(c) \text{ for some element } c}{\therefore\ \exists x\, P(x)}$	تعميم الوجود Existential generalization

جدول ١-٤-٢

مثال ١-٤-١١. بين أن الفروض "في هذا الفصل طالب لم يقرأ الكتاب" و "كل واحد في هذا الفصل نجح في الامتحان الأول" تؤدي إلى الخلاصة "بعض ممن نجح في الامتحان الأول لم يقرأ الكتاب"

الحل: نفرض $C(x)$ هي "x طالب في هذا الفصل"، $B(x)$ هي "x قرأ الكتاب" و $P(x)$ هي "x نجح في الامتحان الأول". الفروض تكون $\exists x\,(C(x) \wedge \sim B(x))$ و $\forall x\,(C(x) \rightarrow P(x))$. الخلاصة تكون $\exists x\,(P(x) \wedge \sim B(x))$. الخطوات التالية يمكن استخدامها للحصول على الخلاصة من الفروض.

الخطوة	السبب
١- $\exists x\,(C(x) \wedge \sim B(x))$	فرض
٢- $C(a) \wedge \sim B(a)$	تخصيص الوجود من (1)
٣- $C(a)$	التبسيط من (2)

٤- $\forall x\,(C(x) \to P(x))$ فرض

٥- $C(a) \to P(a)$ تخصيص التعميم من (4)

٦- $P(a)$ قاعدة التثبت من (2) و (5)

٧- $\sim B(a)$ التبسيط من (2)

٨- $P(a) \wedge \sim B(a)$ العطف من (6) و (7)

٩- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$ تعميم الوجود من (8)

جمع قواعد الاستدلال للتقارير والعبارات المسورة

Combining Rules of inference for Propositions and Quantified Statements

فيما سبق وضحنا بالتفصيل قواعد الاستدلال لكلا من التقارير والجمل المسورة. لاحظ أننا في مثال ١-٤-١٠ و ١-٤-١١ استخدمنا كلا من التخصيص الشامل، وهي قاعدة استدلال للعبارات المسورة، وطريقة الخفض، وهي قاعدة استدلال في منطق التقارير. غالبا نحتاج لهذا الجمع بين قواعد الاستدلال. وحيث أن التخصيص الشامل و طريقة التثبت غالبا تستخدمان معا، فإن هذا الجمع للقواعد يسمى أحيانا طريقة تثبت التعميم universal modus ponens. هذه القاعدة تخبرنا أنه إذا كان $\forall x(P(x) \to Q(x))$ صادق وإذا كان $P(a)$ صادق لعنصر معين a في نطاق التقدير الشامل، فإن $Q(a)$ يجب أن يكون صادق. لبيان ذلك، لاحظ أنه من التخصيص الشامل، $P(a) \to Q(a)$ يكون صادق. لذلك من طريقة التثبت، $Q(a)$ يجب أن يكون صادق. يمكن وصف طريقة التثبت الشامل كما يلي:

$\forall x(P(x) \to Q(x))$
$P(a)$, حيث a عنصر معين في النطاق

$\therefore Q(a)$

طريقة التثبت الشامل تستخدم مجتمعة في المحاجات الرياضية. يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال ١-٤-١٢. نفرض أن "لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n ، إذا كان n أكبر من 4، فإن n^2 تكون أقل من 2^n" صادق. استخدم طريقة التخفيض الشامل لبيان أن $100^2 < 2^{100}$.

البرهان. نفرض $P(n)$ ترمز إلى "$n > 4$" و $Q(n)$ ترمز إلى "$n^2 > 2^n$". العبارة "لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n ، إذا كان n أكبر من 4، فإن n^2 تكون أقل من 2^n" يمكن تمثيلها بالصورة $\forall n(P(n) \to Q(n))$ ، حيث النطاق يتكون من كل الأعداد الصحيحة الموجبة. الآن نفرض أن $\forall n(P(n) \to Q(n))$ صادق. لاحظ أن $P(100)$ يكون صادق لأن $100 > 4$. من طريقة التثبت الشامل ينتج أن $Q(n)$ يكون صادق، أي $100^2 < 2^{100}$.

تمارين ١-٤

١- أوجد صيغة محاججة للمحاججة التالية وحدد ما إذا كانت صحيحة. هل يمكننا استنتاج أن الخلاصة تكون صادق إذا كانت الفروض كلها صادق ؟

إذا كان ذو القرنين بشر فإنه هالك
ذو القرنين بشر

∴ ذو القرنين هالك

٢- أوجد صيغة محاججة للمحاججة التالية وحدد ما إذا كانت صحيحة. هل يمكننا استنتاج أن الخلاصة تكون صادق إذا كان الفروض كلها صادق ؟

إذا لم يدخل أحمد الامتحان فإنه لن ينجح
أحمد نجح

∴ أحمد دخل الامتحان

٣- ما هي قاعدة الاستدلال التي تستخدم في كل من المحاججات التالية ؟
(أ) أحمد في تخصص الرياضيات. لذلك أحمد في تخصص الرياضيات أو علوم الحاسب .
(ب) عمر في تخصص الرياضيات وتخصص علوم الحاسب. لذلك عمر في تخصص الرياضيات.
(ج) إذا كان الجو ممطر، إذن سوف يغلق حمام السباحة. الجو ممطر. لذلك أغلق حمام السباحة.
(د) إذا كان اليوم الجمعة فإن الجامعة سوف تغلق. الجامعة لم تغلق اليوم. لذلك اليوم ليس الجمعة.

٤- ما هي قاعدة الاستدلال التي تستخدم في كل من المحاججات التالية ؟
(أ) الكنغر يعيش في أستراليا وهو من الجرابيات. لذلك الكنغر يكون من الجرابيات.
(ب) سامي سباح ماهر. إذا كان سامي سباح ماهر إذن هو يستطيع أن يعمل بحارا. لذلك سامي يمكن أن يعمل بحارا.
(ج) إذا أنا عملت طول الليل في هذه الواجبات، إذن يمكن أن أجيب على كل التمارين. إذا أنا أجبت على كل التمارين، سوف أفهم الدرس. لذلك إذا أنا عملت طول الليل في هذه الواجبات ، إذن سوف أفهم الدرس.

٥- استخدم قواعد الاستدلال لبيان أن الفروض " سامي يعمل ببطء" "إذا كان سامي يعمل ببطء، إذن هو يكون شخص ممل" و "إذا كان سامي شخص ممل، إذن هو لن يحصل على وظيفة" تؤدي إلى الخلاصة "سامي لن يحصل على وظيفة"

٦- ما هي قاعدة الاستدلال التي تستخدم في المحاججة "لا يوجد إنسان في المنزل. مانهاتن في المنزل. لذلك مانهاتن ليس إنسان"

٧- بين أن صيغة المحاججة التي لها الفروض $p_1, p_2, \ldots, p_n$ و الخلاصة $q \to r$ تكون صحيحة إذا كانت صيغة المحاججة التي لها الفروض $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ والخلاصة r صحيحة.

٨- بين أن صيغة المحاججة التي لها الفروض $(p \wedge t) \to (r \vee s)$، $q \to (u \wedge t)$، $u \to p$ و $\sim s$ والخلاصة $q \to r$ تكون صحيحة، أولا باستخدام تمرين 7 ومن ثم باستخدام قواعد الاستدلال في الجدول.

٩- لكل من المحاججات التالية وضح أي من قواعد الاستدلال تستخدم في كل خطوة.

(أ) "سامي، طالب في هذا الفصل، يعرف كيف يكتب برامج في الجافا JAVA . كل شخص يعرف كيف يكتب برنامج في الجافا يمكن أن يحصل على وظيفة بمرتب مرتفع. لذلك شخص ما في هذا الفصل يمكن أن يحصل على وظيفة بمرتب مرتفع"

(ب) "شخص ما في هذا الفصل يستمتع بمشاهدة الحوت. كل شخص يستمتع بمشاهدة الحوت يهتم بتلوث البحار. لذلك يوجد شخص في هذا الفصل يهتم بتلوث البحار.

(ج) يوجد شخص في هذا الفصل زار السعودية. كل شخص ذهب إلى السعودية زار المسجد الحرام. لذلك شخص ما في هذا الفصل زار المسجد الحرام.

١٠- بين أي من المحاججات التالية صحيحة وأيها خطأ مع التوضيح لماذا.

(أ) كل الطالبات التي سجلن في الجامعة أقمن في المدينة الجامعية. سها لم تسكن أبدا في المدينة الجامعية. لذلك، سها لم تسجل في الجامعة.

(ب) سيارات السباق ممتعة في القيادة. سيارة شريف ليست سيارة سباق. لذلك سيارة شريف ليست ممتعة في القيادة.

(ج) جميع فرق كرة القدم لا تقل عن سبعة لاعبين. النصر هو فريق كرة قدم. لذلك فريق النصر لا يقل عن سبعة لاعبين.

١١- حدد الخطأ أو الأخطاء في هذه المحاججة التي تبين أنه إذا كان $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ صادق فإن $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ يكون صادق.

١- $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ فرض
٢- $\exists xP(x)$ تبسيط من (1)
٣- $P(c)$ تخصيص الوجود من (2)
٤- $\exists xQ(x)$ التبسيط من (1)
٥- $Q(c)$ تخصيص الوجود من (4)
٦- $P(c) \wedge Q(c)$ العطف من (3) و (5)
٧- $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ تعميم الوجود

١٢- حدد ما إذا كانت المحاججة صحيحة. إذا كانت صحيحة ماهي قاعدة الاستدلال التي استخدمت؟ إذا لم تكن صحيحة أين الخطأ المنطقي حدث؟

(أ) العدد $\log_2 3$ عدد غير كسري إذا كان لايمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b أعداد صحيحة، لذلك حيث أن $\log_2 3$ كان لايمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b أعداد صحيحة فإن $\log_2 3$ يكون ليس كسري.

(ب) إذا كان n عدد حقيقي بحيث $n>1$ فإن $n^2>1$. نفرض $n^2>1$ إذن $n>1$.

(ج) إذا كان n عدد حقيقي بحيث $n>3$، فإن $n^2>9$، نفرض أن $n^2 \le 9$ إذن $n \le 3$.

(د) إذا كان n عدد حقيقي بحيث $n>2$، فإن $n^2>4$، نفرض أن $n \le 2$ إذن $n^2 \le 4$.

١٣- ماهو الخطأ في المحاججة: نفرض $H(x)$ هي " x مسرور"، إذا أعطينا الفرض $\exists xH(x)$، نستنتج أن (سامي)H. لذلك سامي يكون مسرور.

١٤- ماهو الخطأ في المحاججة: نفرض $S(x,y)$ هي " x أقصر من y".
إذا أعطينا الفرض $\exists sS(s,Aly)$، ينتج أن $S(Aly,Aly)$. إذن من تعميم الوجود ينتج أن $\exists xS(x,x)$، لذلك يوجد شخص يكون أقصر من نفسه.

١٥- استخدم قواعد الاستدلال لبيان أنه إذا كان $\forall x\,(P(x)\rightarrow(Q(x)\wedge S(x)))$ و $\forall x\,(P(x)\wedge R(x))$ كل منهما صادق فإن $\forall x\,(R(x)\wedge S(x))$ يكون صادق.

١٦- استخدم قواعد الاستدلال لبيان أنه إذا كان $\forall x\,(P(x)\vee Q(x))$ و $\forall x\,(\sim Q(x)\vee S(x))$ و $\forall x\,(R(x)\rightarrow\sim S(x))$ و $\exists x\ \sim P(x)$ جميعهم صادق فإن $\exists x\ \sim R(x)$ يكون صادق.

١-٥ طرق البرهان Methods of Proof

في هذا الجزء نقدم مفهوم البرهان ونصف الطرق التي يبنى بها البرهان. البرهان هو محاججة صحيحة والتي تقرر صدق جملة رياضية. البرهان يمكن أن يستخدم فروض النظرية، إذا كانت موجودة، المسلمات التي يفترض أنها صحيحة والنظريات المبرهنة سلفا. باستخدام هذه المقومات وقواعد الاستدلال، الخطوة الأخيرة في البرهان تقرر صدق الجملة التي بصدد برهانها.

طرق البرهان التي نناقشها في هذا الفصل مهمة ليس فقط لأننا نستخدمها في برهان النظريات الرياضية ولكن أيضا لتطبيقاتها الكثيرة في علوم الحاسب. هذه التطبيقات تشمل التحقق من صحة برامج الحاسب، تقرير أن نظم التشغيل آمنة، عمل استنتاجات في الذكاء الاصطناعي وغيرها. لذلك فهم الطرق المستخدمة في البرهان يكون ضروري لكل من الرياضيات وعلوم الحاسب.

بعض المصطلحات الفنية

النظرية theorem هي جملة يمكن بيان أنها صادق. في الرياضيات نكتب نظرية عادة للجملة التي تعتبر على الأقل مهمة بعض الشيء. النظريات الأقل أهمية أحيانا تسمى تقارير (أو **فرضيات**) propositions. (النظريات أيضا يمكن الاشارة إلى أنها حقائق facts أو نتائج results). النظرية قد تكون تسوير شامل لجملة شرطية بفرض واحد أو أكثر مع خلاصة. ومع ذلك قد تكون نوع آخر من العبارات المنطقية. نوضح أن النظرية تكون صادقة بالبرهان. **البرهان** هو محاججة صحيحة تقرر صدق النظرية. العبارات المستخدمة في البرهان يمكن أن تشمل مسلمات وهي العبارات التي نفترض أنها صادقة، معطيات النظرية ، إن وجدت، و النظريات التي سبق برهانها.

النظرية الأقل أهمية والتي تساعد في برهان نتائج أخرى تسمى **تمهيدية** lemma. البراهين المعقدة يكون من الأيسر فهمها عندما تبرهن باستخدام سلسلة من التمهيديات التي تبرهن منفصلة. **اللازمة** أو **النتيجة الطبيعية** corollary هي نظرية يمكن استنتاجها مباشرة من نظرية تم إثباتها. **المقترح** (الحدس) conjecture هو عبارة يراد إثباتها لتكون عبارة صادقة، ويكون

ذلك عادة على أساس بعض الأمارات الجزئية. عندما يوجد برهان للمقترح فإنه يسمى نظرية.

طرق برهان النظريات Methods of Proving Theorems

الآن نقدم مجموعة من طرق البرهان المختلفة. هذه الطرق سوف تصبح جزء من ذخيرتك لبرهان النظريات.
لإثبات نظرية على الصورة $\forall x(P(x) \to Q(x))$، هدفنا هو بيان أن $P(c) \to Q(c)$ يكون صادق ، حيث c عنصر اختياري في النطاق ومن ثم نطبق التعميم الشامل. في هذا البرهان، نحتاج لبيان أن العبارة الشرطية صادقة. بسبب ذلك سوف نركز الطرق التي تبين أن العبارات الشرطية تكون صادقة. نذكر هنا أن $p \to q$ تكون صادقة إلا إذا كانت p صادقة و q كاذبة.

البرهان المباشر Direct Proofs

البرهان المباشر للعبارة الشرطية $p \to q$ هو البرهان الذي يكون عندما نفرض أولا أن p يكون صادق، الخطوات التالية تكون باستخدام قواعد الاستدلال والخطوة الأخيرة بيان أن q يجب أن يكون صادق. البرهان المباشر يبين أن العبارة الشرطية $p \to q$ يكون صادق ببيان أنه إذا كان p صادق فإن q يجب أن يكون صادق، لذلك التركيبة p صادق و q كاذب لا تحدث أبدا. في البرهان المباشر، نفترض أن p صادق ونستخدم مسلمات، تعاريف، ونظريات سبق برهانها بجانب قواعد الاستدلال، لبيان أن q يجب أن يكون صادق. الآن نعطي مثال لبرهان مباشر.

مثال ١-٥-١. أعط برهان مباشر للنظرية "إذا كان n عدد صحيح فردي، فإن n^2 يكون فردي".

البرهان: لاحظ أن النظرية تنص على أن $\forall n(P(n) \to Q(n))$ حيث $P(n)$ هي "n عدد صحيح فردي" و $Q(n)$ هي "n^2 يكون فردي". كما سبق وأشرنا سوف نتبع العرف المعتاد في البراهين الرياضية وذلك ببيان أن $P(n)$ تؤدي إلى $Q(n)$ وليس باستخدام التخصيص الشامل صراحة. للبدء

في البرهان المباشر لهذه النظرية، نفرض أن الفرض في هذه العبارة الشرطية صادق، أي نفرض أن n عدد صحيح فردي. من تعريف العدد الفردي ينتج أن $n=2k+1$ ، حيث k عدد صحيح. نود بيان أن n^2 يكون أيضا فردي. بتربيع الطرفين في المعادلة $n=2k+1$ نحصل على $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$. من تعريف العدد الفردي، يمكننا استنتاج أن n^2 تكون عدد صحيح فردي. نتيجة لذلك نكون قد برهنا على أنه إذا كانت n عدد صحيح فردي فإن n^2 تكون عدد صحيح فردي.

البرهان باستخدام المكافئ العكسي Proof by Contraposition

البراهين المباشرة تقود من فروض النظرية إلى الخلاصة. هي تبدأ بالمعطيات ثم تستمر مع متتابعة الاستنتاجات وفي النهاية نصل إلى الخلاصة. ومع ذلك سوف نرى أن المحاولة مع البرهان المباشر غالبا تصل إلى نهاية عليلة. غالبا نحتاج طرق أخرى لاثبات النظريات على الصورة $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$. براهين النظريات على هذه الصورة والتي هي ليست براهين مباشرة، أي التي لاتبدأ بالفروض وتنتهي بالخلاصة، تسمى براهين غير مباشرة indirect proofs.

نوع مهم جدا من البرهان غير المباشر يعرف بالبرهان باستخدام المكافئ العكسي proof by contraposition . البراهين باستخدام المكافئ العكسي تستعمل حقيقة أن $p\rightarrow q$ تكافئ مكافئها العكسي $\sim q\rightarrow\sim p$. هذا يعني أن العبارة الشرطية $p\rightarrow q$ يمكن برهانها ببيان أن مكافئها العكسي $\sim q\rightarrow\sim p$ يكون صادق.

مثال ١-٥-٢. برهن أنه إذا كان n عدد صحيح و $3n+2$ فردي فإن n يكون فردي.

البرهان: الآن نحاول في برهان مباشر. لبناء برهان مباشر، نفرض أولا أن $3n+2$ عدد صحيح فردي. هذا يعني أن $3n+2=2k+1$ لعدد ما صحيح k. هل يمكننا استخدام هذه الحقيقة لبيان أن n فردي ؟ نرى أن $3n+1=2k$ ولكن لا توجد طريقة مباشرة لاستنتاج أن n فردي. بسبب

فشل محاولتنا في البرهان المباشر، نحاول في البرهان بطريقة المكافئ العكسي. الخطوة الأولى في البرهان باستخدام المكافئ العكسي هو فرض أن الخلاصة في العبارة الشرطية " إذا كان $3n+2$ عدد فردي فإن n يكون فردي" تكون غير صادق، أي نفرض أن n عدد زوجي. إذن من تعريف العدد الزوجي ، $n=2k$ لعدد ما صحيح k . بالتعويض نجد أن $3n+2=3(2k)+2=6k+2=2(3k+1)$. هذا يخبرنا بأن $3n+2$ عدد زوجي، وبالتالي ليس فردي. وهذا هو نفي فرض النظرية. ولأن نفي الخلاصة في العبارة الشرطية أدى إلى أن الفرض كاذب، العبارة الشرطية الأصلية تكون صادق. ويكون البرهان باستخدام المكافئ العكسي قد نجح.

مثال ١-٥-٣. برهن أنه إذا كان $n=ab$ ، حيث a و b عددان صحيحان موجبان، فإن $a\le\sqrt{n}$ أو $b\le\sqrt{n}$.

الحل: حيث أنه لا توجد طريق واضحة لبيان أن $a\le\sqrt{n}$ أو $b\le\sqrt{n}$ مباشرة من المعادلة $n=ab$ ، فإننا نحاول في المكافئ العكسي.

الخطوة الأولى في البرهان باستخدام المكافئ العكسي هو أن نفرض أن الخلاصة في العبارة الشرطية " إذا كان $n=ab$ ، حيث a و b عددان صحيحان موجبان، فإن $a\le\sqrt{n}$ أو $b\le\sqrt{n}$ " تكون كاذب. أي أننا نفرض أن العبارة $(a\le\sqrt{n})\vee(b\le\sqrt{n})$ كاذب. باستخدام معنى الفصل مع قوانين دي مورجان، نجد أن هذا يؤدي إلى أن كلا من $a\le\sqrt{n}$ و $b\le\sqrt{n}$ يكون كاذب. هذا يؤدي إلى $a>\sqrt{n}$ و $b>\sqrt{n}$. بضرب المتباينتين نحصل على $ab>\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=n$. وهذا يبين أن $ab\ne n$ ، وهذا يناقض العبارة $ab=n$.

لأن نفي الخلاصة في العبارة الشرطية أدى إلى أن الفرض يكون كاذب، فإن العبارة الشرطية الأصلية تكون صادق. البرهان باستخدام المكافئ العكسي نجح، أثبتنا أنه إذا كان $n=ab$ ، حيث a و b عددان صحيحان موجبان، فإن $a\le\sqrt{n}$ أو $b\le\sqrt{n}$.

مثال ١-٥-٤. برهن أنه إذا كان n عدد صحيح و n^2 فردي، إذن n يكون فردي.

الحل: أولا نحاول في البرهان المباشر. للبدء، نفرض أن n عدد صحيح و n^2 فردي. إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $n^2 = 2k+1$. هل يمكننا استخدام هذه المعلومات من بيان أن n فردي ؟ لا يبدو أنه يوجد أسلوب بسيط لبيان أن n فردي لأنه بالحل في n تعطي $n = \pm\sqrt{2k+1}$ ، وهذا غير مفيد.

حيث أن محاولة البرهان المباشر لم ينتج أي ثمرة، نحاول في برهان غير مباشر. نأخذ كفرض العبارة n ليس فردي. لأن كل عدد صحيح يكون إما فردي أو زوجي، هذا يعني أن n يكون زوجي. هذا يؤدي إلى أنه يوجد عدد صحيح k بحيث $n = 2k$. لاثبات النظرية نحتاج لبيان أن هذا الفرض يؤدي إلى الخلاصة أن n^2 ليست فردي، أي أن n^2 زوجي. هل يمكننا استخدام المعادلة $n = 2k$ لاتمام ذلك ؟ بتربيع الطرفين نحصل على $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ، والتي تؤدي إلى أن n^2 تكون أيضا زوجي، حيث أن $t = 2k^2$, $n^2 = 2t$. محاولتنا لايجاد برهان غير مباشر نجحت.

البرهان الفارغ والبرهان البديهي Vacuous and Trivial Proof

يمكننا بسرعة إثبات أن عبارة شرطية $p \to q$ تكون صادقه إذا عرفنا أن p كاذبه، لأن $p \to q$ يجب أن تكون صادقة عندما p تكون كاذبة، لذلك نحصل على برهان يسمى برهان فارغ vacuous proof للعبارة الشرطية $p \to q$. البراهين الفارغة غالبا تستخدم لاثبات حالات خاصة من النظريات التي تنص على أن عبارات شرطية تكون صادقة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة (أي النظريات من النوع $\forall n P(n)$ ، حيث $P(n)$ هي دالة تقرير). آليات البرهان لمثل هذه النظريات تدرس في الاستنتاج الرياضي.

مثال ١-٥-٥. بين أن التقرير $P(0)$ يكون صادق، حيث $P(n)$ هي "إذا كان $n > 1$، فإن $n^2 > n$ " والنطاق يتكون من كل الأعداد الصحيحة".

الحل: لاحظ أن $P(0)$ هي "إذا كان $0 > 1$ ، فإن $0^2 > 0$. يمكننا بيان أن $P(0)$ صادق باستخدام البرهان الفارغ، لأن الفرض $0 > 1$ كاذب. هذا يخبرنا أن $P(0)$ مباشرة تكون صادق.

يمكننا أيضا أن نبرهن بسرعة العبارة الشرطية $p \to q$ إذا علمنا أن الخلاصة q تكون صادقة. ببيان أن q يكون صادق، ينتج أن $p \to q$ يجب أن تكون صادقة. البرهان لـ $p \to q$ الذي يستخدم حقيقية أن q تكون صادقة يسمى برهان بديهي (أو تافه) trivial proof.

مثال ١-٥-٦. نفرض $P(n)$ هي "إذا كان a و b عدداد صحيحان موجبان بحيث $a \geq b$، فإن $a^n \geq b^n$، حيث النطاق يتكون من كل الاعداد الصحيحة. بين أن $P(0)$ تكون صادقة.

الحل: التقرير $P(0)$ هو "إذا كان $a \geq b$، فإن $a^0 \geq b^0$". لأن $a^0 = b^0 = 1$، الخلاصة للعبارة الشرطية "إذا كان $a \geq b$، فإن $a^0 \geq b^0$" يكون صادق. لذلك، هذه العبارة الشرطية، والتي هي $P(0)$، تكون صادقة. هذا هو مثال للبرهان البديهي. لاحظ أن الفرض، والذي هو العبارة "$a \geq b$"، لم نحتاج إليه في هذا البرهان.

البرهان باستخدام التناقض Proof by Contradiction

لأن العبارة $r \wedge \sim r$ تكون تناقض حيث r تقرير، يمكننا إثبات أن p يكون صادق إذا استطعنا بيان أن $\sim p \to (r \wedge \sim r)$ يكون صادق لتقرير ما r. البراهين من هذا النوع تسمى برهان بالتناقض proofs by contradiction.

لأن البرهان بالتناقض ليس برهانا مباشرا فإنه يعتبر نوع آخر من البرهان غير المباشر.

مثال ١-٥-٧. بين أنه على الأقل أربعة من 22 يوم يجب أن تقع في نفس اليوم من الاسبوع.

الحل: نفرض p هو التقرير "على الأقل أربعة من 22 يوم تقع في نفس اليوم من الاسبوع". نفرض أن $\sim p$ يكون صادق. هذا يعني أنه على الأكثر ثلاثة من الـ 22 يوم تقع في نفس اليوم من الاسبوع. حيث أنه يوجد سبعة أيام في الاسبوع، فإنه يوجد 21 يوم يمكن اختيارها ،لأن ثلاثة من هذه الأيام

فقط يمكن أن تقع في أي يوم من أيام الأسبوع. هذا يناقض الفرض بأنه لدينا 22 يوم تحت الاعتبار. نتيجة لذلك ، p تكون صادق.

مثال ١-٥-٨. برهن أن $\sqrt{2}$ يكون عدد غير قياسي باعطاء برهان غير مباشر.

البرهان: نفرض p التقرير " $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي". نفرض أن $\sim p$ صادق. إذن $\sqrt{2}$ يكون عدد قياسي. سوف نبين أن هذا يؤدي إلى تناقض. تحت الفرض بأن $\sqrt{2}$ عدد قياسي، يوجد عددان صحيحان a و b حيث $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ ، حيث a و b ليس بينهما عامل مشترك. بتربيع $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ نحصل على $2=\frac{a^2}{b^2}$. إذن $2b^2=a^2$ وهذا يعني أن a^2 عدد زوجي، وهذا يؤدي إلى أن a عدد زوجي ومن ثم $a=2c$ لبعض c عدد صحيح. لذلك $2b^2=4c^2$ ومنها $b^2=2c^2$. هذا يعني أن b^2 عدد زوجي ولذلك b يجب أن يكون زوجي كذلك.

إذن قد بينا أن $\sim p$ أدى إلى أن $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك و 2 تقسم a و b. هذا تناقض حيث أن $\sim p$ تؤدي إلى r و $\sim r$، حيث r هي العبارة a و b عددان صحيحان ليس بينها عامل مشترك. لذلك $\sim p$ يكون كاذب، وبالتالي p وهي " $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي" يكون صادق.

البرهان بالتناقض يمكن استخدامه لبرهان العبارات الشرطية. في مثل هذه البراهين نفرض أولا نفي الخلاصة. بعد ذلك نستخدم فروض النظرية ونفي الخلاصة للوصول إلى تناقض. (السبب في أن مثل هذه البراهين تكون صحيحة يستند على التكافؤ المنطقي لـ $p \to q$ و $(p\wedge \sim q)\to F$. لبيان أن هاتان العبارتان متكافئتان، نلاحظ ببساطة أن كل منهما يكون كاذب تحديدا في حالة واحدة هي عندما p يكون صادق و q يكون كاذب.)

لاحظ أنه يمكننا إعادة كتابة البرهان باستخدام المكافئ العكسي لعبارة شرطية كبرهان بالتناقض. في برهان $p \to q$ بالمكافئ العكسي ، نفرض أن

$\sim q$ صادق. بعد ذلك نبين أن $\sim p$ يجب أن يكون صادق. في البرهان بالتناقض نفرض أن كلا من p و $\sim q$ صادق. بعد ذلك نستخدم الخطوات من برهان $\sim q \rightarrow \sim p$ لبيان أن $\sim p$ صادق. وهذا يقود إلى التناقض $p \wedge \sim p$، ويكتمل البرهان.

مثال ١-٥-٩. أعط برهان بالتناقض للنظرية "إذا كان $3n+2$ فردي، فإن n يكون فردي".

الحل: نفرض p ترمز إلى "$3n+2$ فردي" و q ترمز إلى "n فردي". لبناء برهان بالتناقض، نفرض أن كلا من p و $\sim q$ صادق. أي نفرض أن $3n+2$ فردي و n ليس فردي. n ليس فردي يعني أن n زوجي وكما سبق في مثال ١-٥-٢ تكون $3n+2$ زوجي. لاحظ أن العبارة "$3n+2$ زوجي" هي $\sim p$. وحيث أن كلا من p و $\sim p$ صادق، يكون لدينا تناقض. وهذا يكمل البرهان بالتناقض.

البراهين بالتكافؤ Proofs of Equivalent

لإثبات نظرية على صورة عبارة شرطية مزدوجة، أي على الصورة $p \leftrightarrow q$، نبين أن $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ كلاهما صادق. صحة هذا المسلك وضع على أساس القانون $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$.

مثال ١-٥-١٠. برهن النظرية "إذا كان n عدد صحيح موجب، فإن n يكون فردي إذا وفقط إذا كان n^2 فردي.

الحل: هذه النظرية تأخذ الصورة "p إذا وفقط إذا كان q"، حيث p هي "n فردي" و q هي "n^2 فردي". لإثبات النظرية، نحتاج لبيان أن $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ كلاهما صادق. بالفعل نحن بينا صدق $p \rightarrow q$ في مثال ١-٥-١ و بينا صدق $q \rightarrow p$ في مثال ١-٥-٤ وحيث أننا قد بينا أن كلا من $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ صادق، نكون قد أثبتنا أن النظرية صحيحة.

أحيانا تنص نظرية على أن عددا من التقارير تكون متكافئة. مثل هذه النظرية تنص على أن التقارير $p_1, p_2, \ldots, p_n$ تكون متكافئة. هذا يمكن كتابته على الصورة $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$ والتي تنص على أن كل

التقارير والتي عددها n لها نفس قيم الصدق. نتيجة لذلك لكل i و j بحيث $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n$ يكون p_i و p_j متكافئان. طريقة واحدة لإثبات هذه التكافؤات الثنائية هو استخدام القانون

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \to p_1)]$$

هذا يبين أنه إذا كانت العبارات الشرطية $p_1 \to p_2$ ، $p_2 \to p_3$ ،...، $p_n \to p_1$ يمكن بيان أنها صادقة، فإن التقارير $p_1, p_2, \ldots, p_n$ تكون جميعها متكافئة.

مثال ١ـ٥ـ١١. بين أن العبارات التالية تكون متكافئة:

p_1 : n عدد صحيح زوجي.

p_2 : $n-1$ عدد صحيح فردي.

p_3 : n^2 عدد صحيح زوجي.

الحل: سوف نبين أن العبارات الثلاث متكافئة ببيان أن العبارات الشرطية $p_1 \to p_2$ ، $p_2 \to p_3$ و $p_3 \to p_1$ كلها صادقة.

نستخدم البرهان المباشر لبيان أن $p_1 \to p_2$. نفرض أن n زوجي. إذن $n = 2k$ لبعض k عدد صحيح. نتيجة لذلك $n-1 = 2k-1 = 2(k-1)+1$. هذا يعني أن $n-1$ عدد فردي لأنه على الصورة $2m+1$ ، حيث m العدد الصحيح $k-1$.

أيضا نستخدم البرهان المباشر لبيان أن $p_2 \to p_3$. الآن $n-1$ عدد فردي. لذلك $n-1 = 2k+1$ لعدد ما صحيح k . إذن $n = 2k+2$ ومن ثم $n^2 = (2k+2)^2 = 4k^2+8k+4 = 2\left(2k^2+4k+2\right)$. هذا يبين أن n^2 عدد زوجي لأنه ضعف العدد الصحيح $2k^2+4k+2$.

لبيان أن $p_3 \to p_1$ نستخدم برهان غير مباشر. أي نبرهن أنه إذا كان n ليس زوجي، فإن n^2 يكون ليس زوجي. هذا نفس الشئ مثل أن نبرهن أنه إذا كان n فردي فإن n^2 يكون فردي وهذا ماسبق أن برهناه بالفعل في مثال ١ـ٥ـ١ وهذا يكمل البرهان.

الأمثلة العكسية Counterexamples

يمكننا بيان أن العبارة على الصورة $\forall x P(x)$ كاذبة إذا أمكننا إيجاد مثال x على أن $P(x)$ كاذبة. هذا المثال يسمى مثال عكسي counterexample .

مثال ١-٥-١٢. بين أن العبارة "كل عدد صحيح يكون مجموع مربعات لثلاثة أعداد صحيحة" تكون كاذبة.

الحل: يمكننا بيان أن هذه العبارة تكون كاذبة إذا استطعنا إيجاد مثال عكسي. بمعنى إذا استطعنا إيجاد عدد صحيح معين لايكون مجموع مربعات ثلاثة أعداد صحيحة. للبحث عن مثال عكسي، نحاول كتابة الأعداد الصحيحة المتتالية كمجموع مربعات ثلاثة أعداد صحيحة. نجد أن $1 = 0^2 + 0^2 + 1^2$، $2^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2$، $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$، $4 = 0^2 + 0^2 + 2^2$، $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$، $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$، ولكن 7 لايمكن إيجاد طريقة لكتابتها كمجموع مربعات ثلاثة أعداد. إذن 7 تكون مثال عكسي.

البرهان بالحالات proof by cases. البرهان بالحالات يجب أن يغطي جميع الحالات التي تظهر في النظرية.

مثال ١-٥-١٣. برهن أنه إذا كان n عدد صحيح ، فإن $n^2 \geq n$.

الحل: يمكننا إثبات أن $n^2 \geq n$ لأي عدد صحيح باعتبار ثلاث حالات، عندما $n = 0$ ، عندما $n \geq 1$ وعندما $n \leq -1$. قسمنا البرهان إلى ثلاثة حالات لأنه من الواضح أننا نبرهن النظرية للصفر والأعداد الصحيحة الموجبة والأعداد الصحيحة السالبة كل على حدة.

الحالة الأولى: $n = 0$، حيث أن $0^2 = 0$ ، نجد أن $0^2 \geq 0$. من ذلك ينتج أن $n^2 \geq n$ تكون صادقة في الحالة الأولى.

الحالة الثانية: عندما $n \geq 1$، بضرب طرفي المتباينة في العدد الصحيح الموجب n نحصل على $n \cdot n \geq n \cdot 1$. وهذا يؤدي إلى $n^2 \geq n$ لكل $n \geq 1$.

الحالة الثالثة: عندما $n \le -1$، $n^2 \ge 0$ ومن ثم $n^2 \ge n$.

ولأن المتباينة $n^2 \ge n$ محققة في الحالات الثلاث، يمكننا استنتاج أن لأي عدد صحيح n يكون $n^2 \ge n$.

مثال ١-٥-١٤. باستخدام البرهان بالحالات بين أن $|x\,y| = |x||y|$، حيث x و y أعداد حقيقية.

الحل: نفرض p هي "x و y عددان حقيقيان" و q هي "$|x\,y| = |x||y|$".
لاحظ أن p تكافئ $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4$، حيث p_1 هي "$x \ge 0 \wedge y \ge 0$"، p_2 هي "$x \ge 0 \wedge y < 0$"، p_3 هي "$x < 0 \wedge y \ge 0$" و p_4 هي "$x < 0 \wedge y < 0$". لذلك، لبيان أن $p \to q$، نبين أن $p_1 \to q$، $p_2 \to q$، $p_3 \to q$ و $p_4 \to q$.

لبيان أن $p_1 \to q$، حيث أن $x\,y \ge 0$ عندما $x \ge 0$ و $y \ge 0$، فيكون $|x\,y| = x\,y = |x||y|$.

لبيان أن $p_2 \to q$، لاحظ أنه إذا كان $x \ge 0$ و $y < 0$ فإن $x\,y \le 0$، لذلك $|x\,y| = -x\,y = x(-y) = |x||y|$.

لبيان أن $p_3 \to q$، نتبع نفس الإثبات في الحالة السابقة مع تبديل x مع y.

أخيرا، لبيان أن $p_4 \to q$، لاحظ أنه عندما $x < 0$ و $y < 0$ فإن $xy > 0$. لذلك $|x\,y| = x\,y = (-x)(-y) = |x||y|$.

وهذا يكمل البرهان.

براهين الوجود existence proofs. العديد من النظريات تقرر أن أشياء من نوع خاص تكون موجودة. النظرية من هذا النوع تكون تقرير على الصورة $\exists x\, P(x)$، حيث P مقدرة. برهان التقرير على الصورة $\exists x\, P(x)$ يسمى برهان الوجود existence proof. توجد طرق عديدة

لبرهان نظرية من هذا النوع. أحيانا برهان الوجود لـ $\exists x\, P(x)$ يمكن إعطاءه بإيجاد عنصر a بحيث $P(a)$ يكون صادق. مثل هذا النوع من برهان الوجود يسمى **إنشائي** (تشييدي) constructive . من الممكن أيضا إعطاء برهان وجود **غير إنشائي** nonconstructive ، أي أننا لا نوجد عنصر a بحيث $P(a)$ يكون صادق، نبرهن على $\exists x\, P(x)$ ببعض الطرق الأخرى. طريقة مشتركة لإعطاء برهان وجود غير إنشائي وهو البرهان بالتناقض وبيان أن نفي تسوير الوجود يؤدي إلى تناقض.

مثال ١-٥-١٥. بين أنه يوجد عدد صحيح موجب يمكن كتابته كمجموع مكعبات أعداد صحيحة بطريقتين مختلفتين.

الحل: بعد عدد من الحسابات نجد أن $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$.

وحيث أننا أوجدنا عدد صحيح يمكن كتابته كمجموع مكعبات بطريقتين مختلفتين، نكون قد أثبتنا صحة المطلوب باستخدام برهان الوجود الإنشائي.

مثال ١-٥-١٦. بين أنه يوجد عددان غير كسريان x و y بحيث x^y يكون كسري.

الحل: من مثال ١-٥-٨ نعلم أن $\sqrt{2}$ عدد غير كسري. نعتبر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. إذا كان هذا العدد كسري، نكون قد أوجدنا عددين غير كسريين $x = \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{2}$ بحيث يكون x^y كسري. إذا كان $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ عدد غير كسري، فيمكننا فرض $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و $y = \sqrt{2}$ حيث يكون

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

هذا البرهان هو مثال لبرهان وجود غير إنشائي لأننا لم نوجد عددين غير كسريين x و y بحيث x^y يكون كسري، ولكن وضحنا أنه إما الثنائي $x = \sqrt{2}$ ، $y = \sqrt{2}$ أو الثنائي $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و $y = \sqrt{2}$ يكون له الخاصية المطلوبة ولكننا لا نعلم أي من الزوجين يحقق هذه الخاصية.

براهين الوحدوية uniqueness proofs. بعض النظريات تقرر وجود عنصر وحيد بخاصية معينة. بتعبير آخر، هذه النظريات تقرر أنه يوجد تحديدا عنصر واحد له هذه الخاصية. لإثبات عبارة ما من هذا النوع نحتاج إلى بيان أن عنصر يحقق هذه الخاصية يكون موجودا وأنه لا يوجد عنصر آخر يحقق هذه الخاصية. جزأي برهان الوحدوية هما:

الوجود existence . نبين أن عنصر x له الخاصية المطلوبة موجود.

الوحدوية uniqueness. نبين أنه إذا كان $y \neq x$، فإن y لا تحقق الخاصية المطلوبة.

مثال ١-٥-١٧. بين أن كل عدد صحيح له معكوس جمعي وحيد. أي أنه لكل عدد صحيح s يوجد عدد صحيح وحيد t بحيث $s+t=0$.

الحل: إذا كان s عدد صحيح فإن $-s$ يكون عدد صحيح. ولكن $s+(-s)=0$. إذن $t=-s$ يكون هو المعكوس المطلوب. لبيان أن هذا العدد وحيد نفرض أن r عدد صحيح بحيث $r \neq t$ و $s+r=0$. إذن $s+t=s+r$. بطرح s من طرفي المعادلة نحصل على $t=r$، وهذا يناقض الفرض بأن $r \neq t$. نتيجة لذلك يوجد عدد وحيد t بحيث $s+t=0$.

أخطاء في البراهين

توجد بعض الأخطاء المشتركة التي تتم عند إنشاء براهين رياضية. هناك أخطاء في الحساب وأساسيات الجبر. حتي الرياضيون المحترفون قد يقعوا في هذه الأخطاء، خاصة عندما يقوموا بعمل صيغ معقدة.

مثال١-٥-١٨. ما هو الخطأ في البرهان المزعوم المشهور بأن $2=1$؟

"البرهان" نستخدم الخطوات التالية حيث a و b عددان صحيحان موجبان متساويان.

الخطوة	السبب
1- $a=b$	فرض
2- $a^2=ab$	بضرب طرفي (1) في a

3- $a^2-b^2=ab-b^2$ بطرح b^2 من الطرفين في (2)

4- $(a-b)(a+b)=b(a-b)$ تحليل الطرفين في (3)

5- $a+b=b$ بقسمة الطرفين في (4) على $a-b$

6- $2b=b$ بوضع a بدلا عن b في(5)
لأن $a=b$ والتبسيط

7- $2=1$ بقسمة الطرفين في (6) على b

الحل: جميع الخطوات صحيحة ماعدا خطوة واحدة هي الخطوة (5) حيث قسمة الطرفين على $a-b$. الخطأ هو أن $a-b$ يساوي صفر، ولايمكن القسمة على صفر.

تمارين ١-٥

١- برهن على أن مربع العدد الزوجي يكون زوجي باستخدام برهان مباشر.

٢- برهن أنه إذا كان x و y عددان حقيقيان فإن

$$\max(x,y)+\min(x,y)=x+y$$

٣- بين أن العبارات الثلاث التالية متكافئة:

(i) $a<b$، (ii) $a<\dfrac{a+b}{2}$، (iii) $\dfrac{a+b}{2}<b$.

٤- بين أنه إذا كانت a، b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$، فإنه يوجد حل وحيد للمعادلة $ax+b=c$.

٥- برهن متباينة المثلث، التي تنص على أنه إذا كان x و y عددان حقيقيان فإن $|x|+|y|\geq|x+y|$.

٦- ما هي طرق البرهان التي تعتقد أنه ينبغي استخدامها في كل من الحالات التالية ؟

(أ) لاثبات أنه يمكن رسم خط مستقيم من نقطة معطاة موازيا لمستقيم معطى.

(ب) لاثبات أن الجذر التربيعي للعدد السالب لايكون موجودا في نظام الأعداد العادية.

٧- برهن التقرير $P(0)$ حيث $P(n)$ هو التقرير "إذا كان n عدد صحيح أكبر من 1 فإن $n^2 > n$ ". ما هو نوع البرهان المستخدم؟

٨- برهن التقرير $P(1)$ حيث $P(n)$ هو التقرير "إذا كان n عدد صحيح موجب فإن $n^2 \geq n$ ". ما هو نوع البرهان المستخدم؟

٩- نفرض $P(n)$ هو التقرير "إذا كان a و b عددان حقيقيان موجبان فإن $(a+b)^n \geq a^n + b^n$ ". برهن أن $p(1)$ يكون صادق. ماهو نوع البرهان المستخدم.

١٠-أثبت انه إذا كان n عدد صحيح و $n^3 + 5$ فردي فإن n يكون زوجي باستخدام

(أ) المكافئ العكسي. (ب) برهان بالتناقض.

١١- برهن بالتناقض أن مجموع عدد غير كسري وعدد كسري يكون عدد غير كسري.

١٢- برهن أنه إذا كان n عدد صحيح موجب فإن n يكون زوجي إذا وفقط إذا كان $7n + 4$ زوجي.

١٣- بين أن العبارات التالية تكون متكافئة:

(i) $3x + 2$ عدد صحيح زوجي.

(ii) $x + 5$ عدد صحيح فردي.

(iii) x^2 عدد صحيح زوجي.

١٤- برهن أنه يوجد عدد صحيح موجب يساوي مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عنه. هل البرهان إنشائي أم غير إنشائي؟

١٥- برهن أنه يوجد عددان صحيحان متتابعان بحيث أحد العددين يكون مربع كامل والآخر يكون مكعب كامل. هل البرهان إنشائي أم غير إنشائي؟