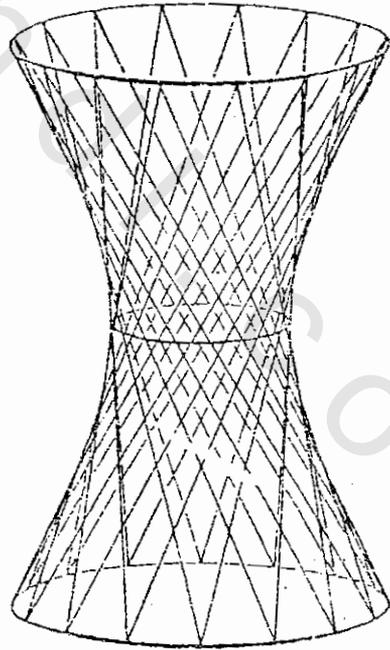
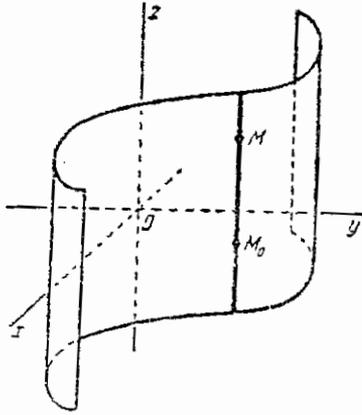


## الباب السابع

### السطوح المسطرة Ruled surfaces

(١.٧) السطوح المسطرة العامة :

السطح المسطر هو سطح يتولد بعائلة من الخطوط المستقيمة ذات البارامتر الواحد. أو بمعنى آخر هو السطح الناتج عن حركة مستقيم في الفراغ موازيا لاتجاه معلوم ويقطع في حركته منحنى معلوم. المستقيم يسمى راسم السطح *ruling* والمنحنى بدليل السطح *directrix*. كما هو مبين في شكل (١)



شكل (١)

نحاول استنتاج معادلة السطح المسطر في الصورة العامة. لهذا نفرض أن

معادلة الراسم هي

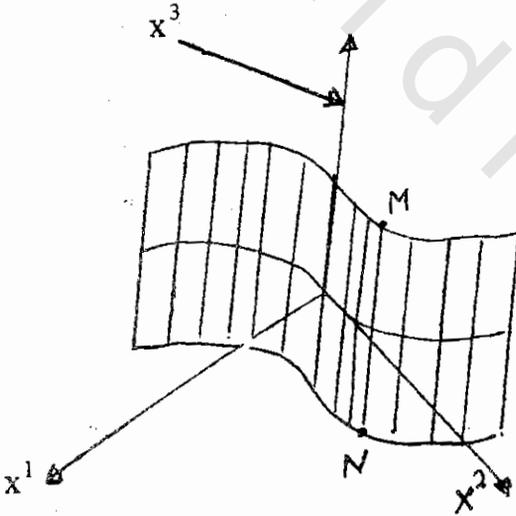
$$\frac{x^1 - a^1}{b^1} = \frac{x^2 - a^2}{b^2} = \frac{x^3}{1} \quad (1)$$

بفرض أنه يوازي الاتجاه الثابت  $(b^1, b^2, 1)$  ويعر بالنقطة  $N(a^1, a^2, 0)$  وهي نقطة تقاطعه مع المستوى  $x^3 = 0$ .

نفرض أن الدليل هو منحنى تقاطع سطحين ويعطى بالمعادلة

$$\left. \begin{aligned} f_1(x^1, x^2, x^3) &= 0 \\ f_2(x^1, x^2, x^3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

بما أن النقطة  $(a^1, a^2, 0)$  هي نقطة تقاطع الراسم مع الدليل فهي تحقق المعادلة (2)



شكل (٢)

وبالتالي يمكن حذف  $x^1, x^2, x^3$  من (1), (2) لنحصل على علاقة في  $a^1, a^2$  وتكون  
 $\Phi(a^1, a^2) = 0$  أو

$$a^2 = f(a^1) \quad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نحصل على

$$x^2 - b^2 x^3 = h(x^1 - b^1 x^3) \quad (4)$$

وهذه هي المعادلة العامة للسطح المسطر الذي رأسه يوازي الاتجاه  $(b^1, b^2, 1)$  ودليله المنحني (2).

مثال (1): أوجد السطح الأسطواني الناتج عن حركة المستقيم الذي يوازي الاتجاه

$$x^1 = 0, (x^2 - 9)^2 = 12(x^3 - 5)$$

الحل: المعادلات البارامترية لرأس السطح الأسطواني هي

$$x^1 = x^1 + 3t, x^2 = x^2 + 2t, x^3 = x^3 + 2t \quad (1)$$

حيث  $N(x^1, x^2, x^3)$  هي النقطة التي يمر بها الرأس والنقطة  $M(x^1, x^2, x^3)$

هي نقطة تقاطع الرأس مع المستوى الذي يحتوي على الدليل وهو المستوى  $x^1 = 0$

$$x^1 = 0 \text{ في المعادلات نحصل على } x^1 - 3t = 0 \Rightarrow t = +\frac{x^1}{3}$$

وبالتعويض في المعادلتين الثانية والثالثة من (1) نحصل على :

$$x^2 = x^2 + \frac{2x^1}{3}, x^3 = x^3 + \frac{2}{3}x^1$$

بالتعويض عن هذه القيم في معادلة الدليل نحصل على

$$\left(x^2 - \frac{2x^1}{3} - 9\right)^2 = 12\left(x^3 - \frac{2}{3}x^1 - 5\right)$$

وهي معادلة السطح الأسطواني المطلوب.

مثال (٢) : كون معادلة السطح المخروطي الذي رأسه النقطة (5, 4, 6) ودليله

$$\text{المنحنى } (x^1 - 6)^2 + (x^2 - 4)^2 = 9, x^3 = 0$$

الحل : المعادلات البارامترية لرأس السطح هي

$$\frac{x^{i1} - 6}{x^1 - 6} = \frac{x^{i2} - 4}{x^2 - 4} = \frac{x^{i3} - 5}{x^3 - 5} = t \quad (1)$$

هذا المستقيم يقطع دائما دليل السطح الذي يقع في المستوى  $x^3 = 0$  ومنها نحصل

$$\text{على } t = \frac{-5}{x^3 - 5} \text{ وبالتعويض في المعادلات (1) نحصل على:}$$

$$x^{i1} = 6 - \frac{5(x^1 - 6)}{x^3 - 5}, x^{i2} = 4 - \frac{5(x^2 - 4)}{x^3 - 5}$$

وبالتعويض في معادلة الدليل المعطاة نحصل على

$$25(x^1 - 6)^2 + 25(x^2 - 4)^2 = 9(x^3 - 5)^2$$

$$\left(\frac{x^1 - 6}{3}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - 4}{3}\right)^2 - \left(\frac{x^3 - 5}{5}\right)^2 = 0 \quad \text{أو}$$

وهي معادلة سطح مخروطي رأسه النقطة (6, 4, 5) وهو مخروط دائري قائم.

(٢.٧) رواسم سطوح الدرجة الثانية المسطرة :

**Generators of ruled conoid**

المستقيم الذي جميع نقطة تقع على سطح من سطوح الدرجة الثانية

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x^i x^j + \sum_{i=1}^3 b_i x^i + c = 0$$

يسمى براسم لهذا السطح ويعتبر سطح الدرجة الثانية في هذه الحالة سطح مسطر.

ومن سطوح الدرجة الثانية المسطرة التي لها خطوط مستقيمة مولدة سطح الأسطوانة

وسطح المخروط ومجسم القطع الزائد ذو الطية الواحدة ومجسم القطع المكافئ الزائدي. وهذه السطوح يمكن اعتبارها ناتجة عن حركة مستقيم في الفراغ.

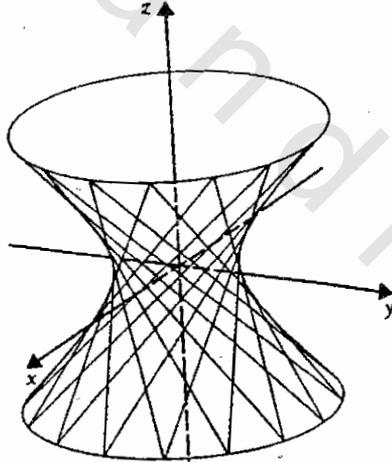
مثال (٣) : المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة

الحل : بالنسبة لمجسم القطع الزائد ذو الطية الواحدة يمكن إثبات الخواص الآتية:—

١— خلال كل نقطة من نقط مجسم القطع الزائد ذو الطية الواحدة

$$\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{x^3}{a^3}\right)^2 = 1$$

يبرر راسمين لهذا السطح ونشاهد في الشكل المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة ومجموعتي رواسمة المستقيمة



شكل (٣)

(٢) تقسيم مجموعة الرواسم إلى عائلتين  $\{L_1\}$  ,  $\{L_2\}$  حيث

$$L_1 : \frac{x^1 - x_0^1}{\frac{a^1 x_0^2}{a^2}} = \frac{x^2 - x_0^2}{\frac{-a^2 x_0^1}{a^1}} = \frac{x^3}{a^3}$$

$$L_2: \frac{x^1 - x_0^1}{\frac{-a^1 x_0^2}{a^2}} = \frac{x^2 - x_0^2}{\frac{a^2 x_0^1}{a^1}} = \frac{x^3}{a^3}$$

حيث الرواسم (المولدات) تمر بالنقطة  $(x_0^1, x_0^2, 0)$  ويتوازيان الاتجاه

$$\left( \pm \frac{a^1 x_0^2}{a^2}, \mp \frac{a^2 x_0^1}{a^1}, a^3 \right)$$

(٣) أي راسمين من عائلتين مختلفتين يقعان في مستوى واحد ويتوازيان إذا كان يمران بنهايتي قطر للقطع الناقص الحلقي.

$$\left( \frac{x^1}{a^1} \right)^2 + \left( \frac{x^2}{a^2} \right)^2 = 1, x^3 = 0$$

(٤) أي راسمين ينتميان لعائلة واحدة لا يقعان في مستوى واحد.

سؤال (٤): أوجد رواسم الجسم المكافئ الزائدي (سطح السرج) Saddle Surface

الحل: بالنسبة لجسم القطع المكافئ الزائدي

$$a^2 (x^1)^2 - a^1 (x^2)^2 = 2 a^1 a^2 x^3, a^1, a^2 > 0$$

يمكن إثبات أن رواسمه تنقسم إلى عائلتين إحداهما توازي المستوى

$$\sqrt{a^2} x^1 + \sqrt{a^1} x^2 = 0 \quad \text{والأخرى توازي المستوى} \quad \sqrt{a^2} x^1 - \sqrt{a^1} x^2 = 0$$

وبالتالي يمكن أن نلاحظ أن المستوى  $x^1 o x^2$  يقطع مجسم القطع المكافئ الزائدي في

زوج من المستقيمتان

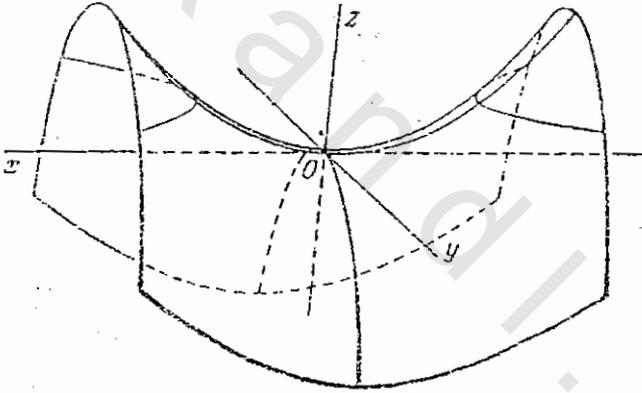
$$L_1: \frac{x^1}{\sqrt{a^1}} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2}} = 0, x^3 = 0,$$

$$L_2: \frac{x^1}{\sqrt{a^1}} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2}} = 0, x^3 = 0,$$

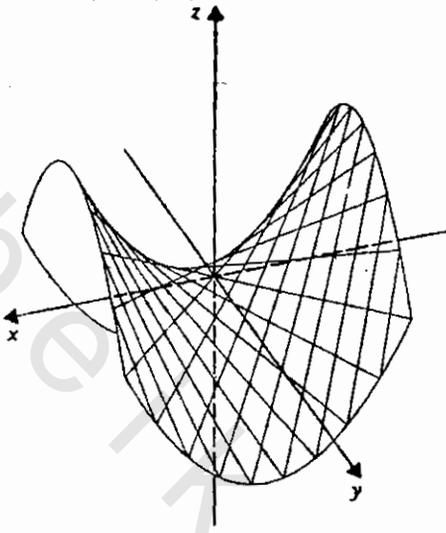
وبالتالي تصبح مجموعتا رواسته هي :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a^2} x^1 - \sqrt{a^1} x^2 &= 2\lambda a^1 x^3 \\ \lambda (\sqrt{a^2} x^1 + \sqrt{a^1} x^2) &= a^2 x^3 \end{aligned} \right\} , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu (\sqrt{a^2} + \sqrt{a^1} x^2) &= 2a^1 x^3 \\ \sqrt{a^2} x^1 - \sqrt{a^1} x^2 &= \mu a^2 x^3 \end{aligned} \right\} , \mu \in \mathbb{R}$$

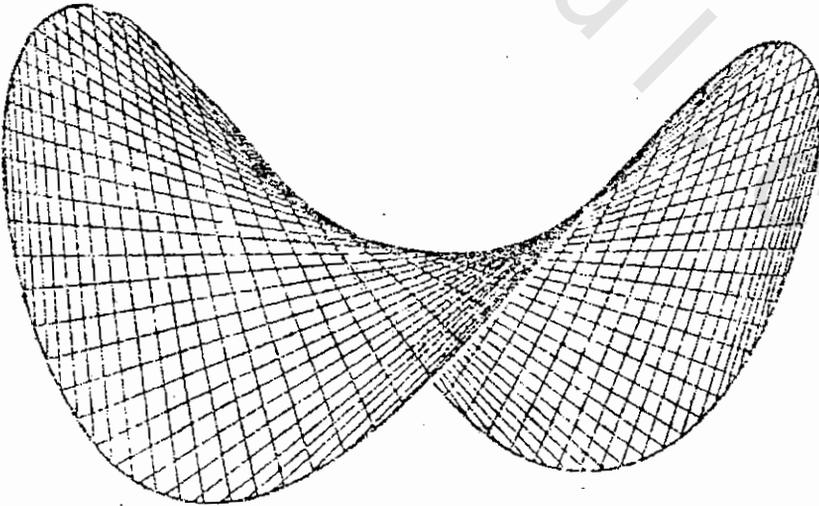


شكل (٤)



شكل (٥)

ونشاهد في الشكل الجسم المكافئ الزائدي ومجموعتي رؤاسه المستقيمة.



شكل (٦)

وقد استخدم الروس فكرة الطابع المسطر للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة في المنشآت الصناعية وتستخدم بكثرة في أبراج المياه والهوائيات اللاسلكية العالية لأهمها خفيفة ومثينة.

في العرض السابق بينا أنه من بين سطوح الدرجة الثانية يوجد سطوح مسطرة أي سطوح تتكون من مستقيمات : المخروطات والأسطوانات والمجسم الزائدي ذو الطية الواحدة والمجسم المكافئ الزائدي وهذه الحقيقة ليست واضحة بمجرد النظر غير أنه من السهل إثباتها جبريا. ونعطي الآن الإثبات في حالة الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة كمثال.

مثال (٥): أوجد جبريا رواسم الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة

الحل: نكتب المعادلة القياسية للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة على الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

بالتحليل لكل طرف نحصل على :

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (1)$$

نعتبر معادلتنا الدرجة الأولى

$$\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

حيث  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  ولقيمة ثابتة من قيم  $\alpha, \beta$  فإن المعادلتين (2) تعرفان معا مستقيما.

وبتغير  $\alpha, \beta$  نحصل على عدد لا نهائي من المستقيمت إذا ضربنا كل طرفين مناظرين للمعادلتين (2) في بعضهما نحصل على المعادلة (1).

ومن هنا ينتج أن كل مستقيم من هذه المستقيمت يقع كلية على الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة.

نبين أخيرا أن بكل نقطة من نقط الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة يمر مستقيم واحد فقط مستقيم واحد من مجموعة المستقيمت المذكورة.

نفرض أن  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  نقطة اختيارية على الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة فإن :

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \quad (3)$$

وسنبحث عن العددين  $\alpha, \beta$  اللذين يمر المستقيم المناظر لهما من المجموعة (2) بالنقطة  $M_0$ . وحيث أن احداثيات النقطة  $M_0$  يجب أن تحقق معادلتنا هذا المستقيم، إذن

$$\alpha\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \quad (4)$$

$$\beta\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y_0}{b}\right)$$

وإذا كان  $1 + \frac{y_0}{b} \neq 0$  نجد من المعادلة الأولى في هذه المجموعة أن  $\beta = k\alpha$  حيث

$$k = \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}}{1 + \frac{y_0}{b}} \quad (5)$$

وعندما تكون  $\beta = k\alpha$  تحقق أيضا المعادلة الثانية من المجموعة (4) فنحصل على زوج من المعادلات محدد تماما :

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k \left( 1 + \frac{y}{b} \right)$$

$$k \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = 1 - \frac{y}{b}$$

يناظر مستقيما واحدا (تقاطع مستويين) فقط وهذا المستقيم يمر بالنقطة  $M_0$ . أما إذا كانت  $1 + \frac{y_0}{b} = 0$  فإن العلاقة (5) تفقد معناها. وفي هذه الحالة يكون  $1 - \frac{y_0}{b} \neq 0$  وبالتالي يمكن إثبات أنه في هذه الحالة أيضا يمر بالنقطة  $M_0$  مستقيم واحد ووحيد من المجموعة (2) وعلى هذا الأساس تعرف المعادلتان (2) عند قيم  $\alpha, \beta$  المختلفة مجموعة لانهائية من المستقيمت الواقعة على الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة وتغطيه كلية باتصال. وتسمى هذه المستقيمت بالرواسم المستقيمة للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة.

علاوة على المعادلتين (2) ومثلهما يمكن تكوين المعادلتين :

$$\alpha \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \beta \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \quad (6)$$

$$\beta \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \alpha \left( 1 + \frac{y}{b} \right)$$

والمعادلتان (6) تعرفان أيضا مجموعة من الرواسم المستقيمة للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة، علما بأنها تختلف عن تلك المجموعة المعروفة بالمعادلتين (2). ولذا يسمى المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة سطح مسطر مرتين doubly ruled.

مثال (٦): بالمثل يمكن برهان نفس الحقيقة بالنسبة للسطوح المسطرة المذكورة.

مثال (٧): أوجد أطوال الشكل الرباعي المكون من نقاط تقاطع الأرباع رواسم للسطح

الزائدي

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 49 \quad (1)$$

والتي تمر بالنقطتين  $M_1 \equiv (10, 5, 1), M_2 \equiv (14, 2, -2)$

الحل: نكتب المعادلة (1) في الصورة

$$\left(\frac{x}{2} - z\right)\left(\frac{x}{2} + z\right) = (7 - y)(7 + y)$$

ويمكن أن نرى أن معادلات عائلتي المولدات للسطح الزائدي هي:

$$\frac{x}{2} - z = \lambda(7 - y), \quad \lambda\left(\frac{x}{2} + z\right) = 7 + y \quad (2)$$

$$\frac{x}{2} - z = \mu(7 + y), \quad \mu\left(\frac{x}{2} + z\right) = 7 - y \quad (3)$$

المولدات (2), (3) يمرا خلال النقاط  $M_2, M_1$  إذا حققت النقاط المعادلات (2), (3) وعليه نحصل على زوج من القيم  $\lambda, \mu$  كالآتي:

$$(\lambda, \mu) = \left(2, \frac{1}{3}\right), (\lambda, \mu) = \left(\frac{2}{5}, 1\right)$$

إذن أزواج الخطوط المستقيمة المارة خلال النقطتين  $M_2, M_1$  تعطي من

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - z = 2(7 - y), \quad 2\left(\frac{x}{2} + z\right) &= 7 + y \\ \frac{x}{2} - z = \frac{1}{3}(7 + y), \quad \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + z\right) &= 7 - y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - z = \frac{9}{5}(7 - y), \quad \frac{9}{5}\left(\frac{x}{2} + z\right) &= 7 + y \\ \frac{x}{2} - z = 7 + y, \quad \frac{x}{2} + z &= 7 - y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - z = \frac{9}{5}(7 - y), \quad \frac{9}{5}\left(\frac{x}{2} + z\right) &= 7 + y \\ \frac{x}{2} - z = 7 + y, \quad \frac{x}{2} + z &= 7 - y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - z = 7 + y, \quad \frac{x}{2} + z &= 7 - y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

بحل أزواج المعادلات (4), (7) وكذلك (5), (6) نجد أن نقاط التقاطع الأخرى هي

$$M_3 = \left(14, \frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right), M_4 = \left(\frac{12}{2}, \frac{77}{16}, \frac{21}{16}\right)$$

وعليه يمكن حساب أطوال الشكل الرباعي  $M_i M_j$   $i, j=1, \dots, 4$  كالآتي :

$$\sqrt{98}/16, \sqrt{308}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{7970}/16$$

(٣.٧) المخروط العام : General Conical Surface (Cone)

وفي الحالة العامة نرى أن المعادلة  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

متجانسة  $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$ ,  $n \in \mathbb{R}$  أي كل حدودها من

نفس الدرجة الثانية وبالتالي تتحقق الخاصية الهندسية الآتية:—

إذا وقعت نقطة ما  $M$  (مختلفة عن نقطة الأصل) على هذا السطح، فإن كل نقط

المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة  $M$  تقع أيضا على هذا السطح.

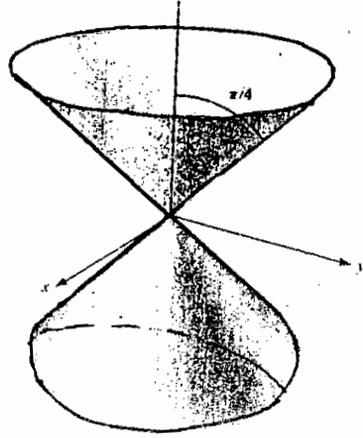
وبعبارة أخرى يمكن القول أن السطح المعرف بمعادلة متجانسة إنما يتكون من

مستقيمات مارة بنقطة واحدة هي بالذات نقطة الأصل ويسمى هذا السطح بالسطح

المخروطي ونسمي المستقيمات برواسمه ونسمى النقطة التي يمر بها جميع روااسم

المخروط برأس المخروط ويكون لدينا مخروط مزدوج double cone كما هو مبين

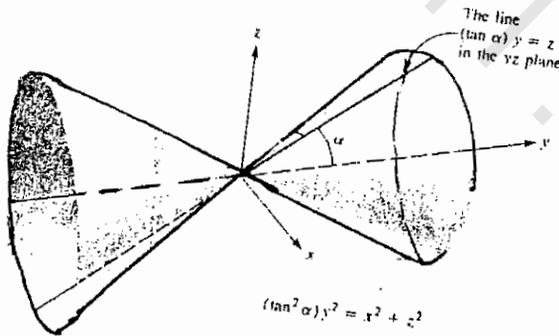
بشكل (١)



شكل (١)

ويمكن استنتاج معادلة المخروط المزدوج القائم والذي زاوية رأسه  $2\alpha$  كالآتي :

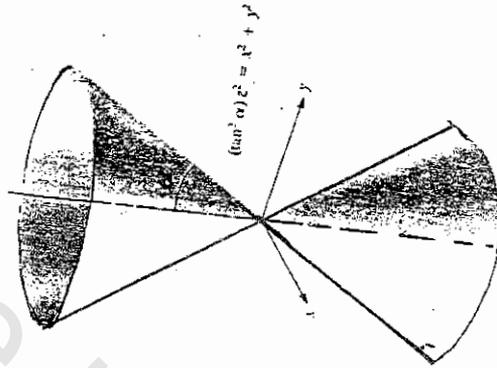
بدوران الخط المستقيم  $L: z = y \tan \alpha$  في المستوى  $yz$  حول محور  $y$  . النقطة  $(0, y, \sqrt{x^2 + z^2})$  تقع على الخط  $C$  بمعنى أن  $y \tan \alpha = \sqrt{x^2 + z^2}$  ، وبالتربيع نحصل على شكل (٢)

$$x^2 + z^2 - (\tan^2 \alpha)y^2 = 0$$


شكل (٢)

بالمثل المخروط الموضح بشكل (٣) له المعادلة

$$x^2 + y^2 - (\tan^2 \alpha)z^2 = 0$$



شكل (٣)

شموما المعادلة

$$x^2 + y^2 - k z^2 = 0, \quad K > 0 \quad (1)$$

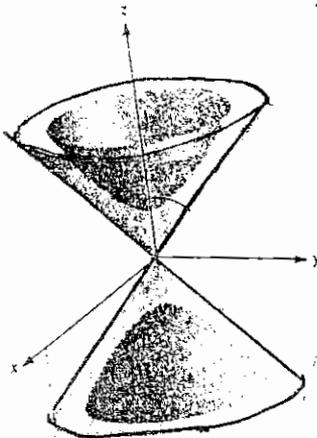
تمثل مخروط مزدوج قائم، زاوية رأسه  $2\alpha$  تحقق  $\tan^2 \alpha = k$ .

مثال (١): الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة والمخروط المزدوج والجسم الزائدي ذو

الطيتين يمكن رسمهم معا متداخلين. لنرى ذلك، نعتبر، كمثال، القطاعات الزائدة

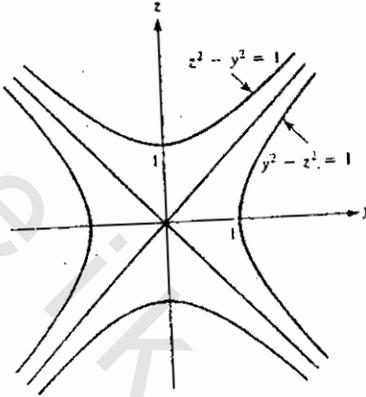
في المستوى  $yz$  ولهما نفس الخطوط التقاربية  $y^2 - z^2 = 1, z^2 - y^2 = 1$

كما هو واضح في الشكل (٤).



شكل (٤)

الآن بدوران المنحنيات الموجودة في شكل (٤) حول محور  $z$ . نحصل على الثلاثة  
سطوح المطلوبة كما هو مبين بالشكل (٥).

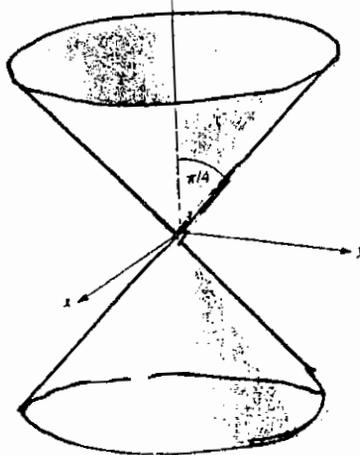


شكل (٥)

مثال (٢): أوصف السطح  $z^2 = x^2 + y^2$  مع الرسم.

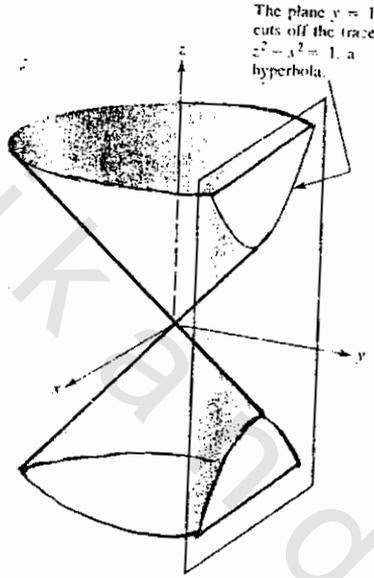
الحل: بوضع  $k = 1$  في (1) نحصل على معادلة السطح المعطى وهي تصف مخروط

مزدوج قائم دائري فيه  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  كما مبين بشكل (٦).



شكل (٦)

نعتبر مقاطع السطح بمستويات توازي المستوى  $x y$  وهي دوائر ومقاطع السطح بمستويات توازي المستوى  $x z$  وهي قطاعات زائدية كما هو موضح بشكل (٧).

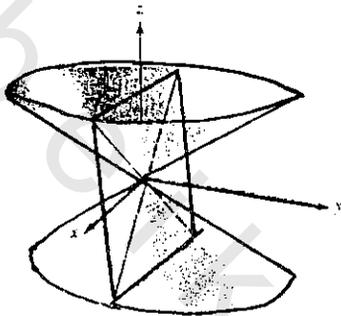


شكل (٧)

مثال (٣): ادرس مقاطع السطح  $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$  وبين نوعه موضحا ذلك بالرسم.

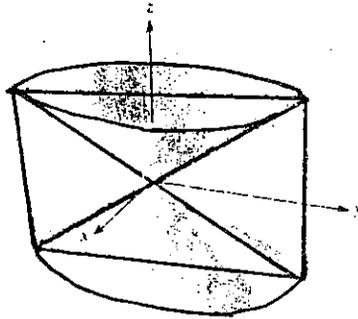
الحل: هذا السطح مخروط ناقص elliptical cone (من الباب الرابع) ومقاطعته بالمستويات  $z = k$  هي قطاعات ناقصية تزيد في المساحة كلما زادت  $k$ . ومقاطعته بالمستوى  $y = 0$  هي خطوط مستقيمة  $z = \pm x$ . ومقاطعته بالمستوى  $x = 0$  هي

خطوط مستقيمة  $z = \pm \frac{y}{\sqrt{3}}$ . ونوضح ذلك في شكل (٨).



Trace in  $xz$  plane

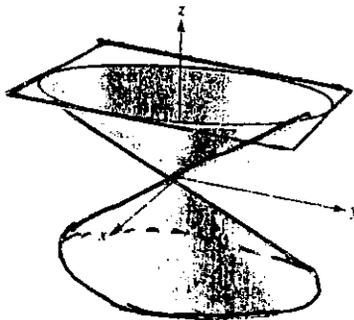
The surface  $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$



Trace in  $yz$  plane

The surface  $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$

شکل (۸)



Trace in plane  $z = k$

The surface  $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$

## تمارين (٧)

١- بين أن المستوى  $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z + z_0}{2} = 0$  المار خلال النقطة

$(x_0, y_0, z_0)$  على الجسم المكافئ الزائدي  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + z = 0$  يقطع هذا

الجسم في راسمين ينتميان لعائلتين مختلفتين من روااسمة.

٢- أوجد روااسم الجسم المكافئ الزائدي  $z = a x y$  وبين أنه مسطر بطريقتين.

٣- كون معادلة السطح المولد بواسطة خطوط مستقيمة توازي المستوى  $xy$  وتقطع

خطين مستقيمين مختلفين (غير متقاطعين).

إرشاد : لحل تمرين (3) تتبع الآتي:-

اتجاه المولد عمودي على العمودي على المستوى  $xy$  أي عمودي على محور  $z$

ولذلك يمكن أخذ هذا الاتجاه في الصورة  $(\ell, m, 0)$  حيث  $\ell^2 + m^2 = 1$

تكون معادلتها هي  $\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{0}$  . الدليل يمكن أخذه بصورة

عامة كالآتي:

$$x = 0, a_{11} z^2 + 2 a_{12} z y + a_{22} y^2 + 2 b_1 z + 2 b_2 y + c = 0$$

بشرط أن يميز هذه المعادلة يساوي الصفر، أي أن  $\Delta = 0$ ، ولكي يكون

المستقيمان متوازيين يجب أن يتحقق  $\delta = 0, \delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$  . حيث

$(x_0, y_0, z_0)$  هي نقطة تقاطع المولد مع الدليل.

٤- أكتب معادلات عائلات المولدات للسطوح الزائدية  $H$  وحدد أزواج الخطوط

المستقيمة من عائلات الخطوط التي تمر خلال النقطة المعطاة  $M_0$

(i)  $H: x^2 + 9y^2 - z^2 = 9, M_0 = \left(3, \frac{1}{3}, -1\right)$

(ii)  $H: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1, M_0 = \left(-1, \frac{4}{3}, 2\right)$

٥- أوجد معادلة السطح المكافئ الزائدي المار بالنقطتين  $M_1 \equiv \left(8, 3, \frac{3}{2}\right)$

و  $M_2 \equiv (-4, 3\sqrt{3}, -1)$  إذا علم أن مقطع السطح بالمستوى  $x = 0$  هو قطع مكافئ معادلته  $x = 0, y^2 = -2z$

٦- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفراغ بحيث يكون الفرق بين بعديها عن النقطتين  $(2, 4, 1)$ ,  $(2, -4, 1)$  يساوي 6 وحدات.

٧- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بشرط أن يكون مجموع بعديها عن النقطتين  $(c, 0, 0)$ ,  $(-c, 0, 0)$  مقدار ثابت.

٨- أوجد عائلات رواسم السطوح المسطرة الآتية

(i)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$

(ii)  $9x^2 - y^2 = 42$