

## الباب الثامن

### الإحداثيات الكروية والأسطوانية

#### Spherical and cylindrical coordinates

(١.٨) مقدمة :

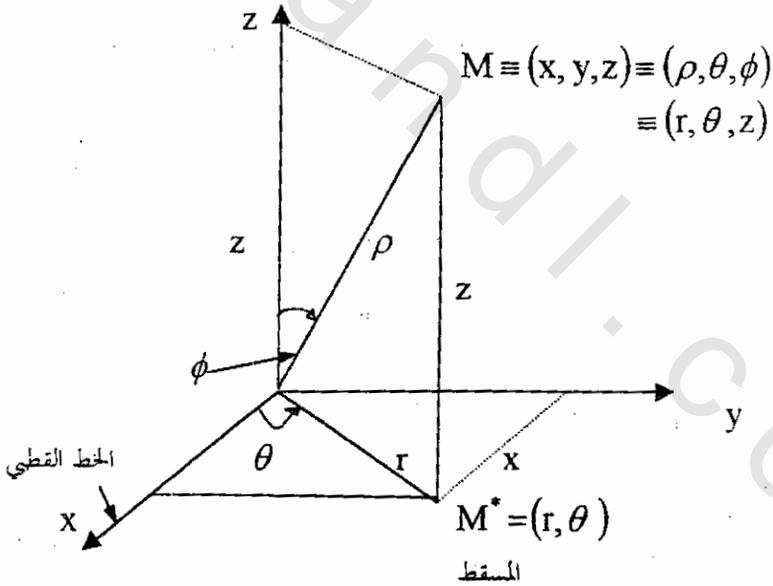
سبق لك أن تعرفت في المستوى على نوعين من نظم الإحداثيات أو نظم التعبير عن نقطة هندسية باستخدام أبعاد وكان هذا النوع هو الإحداثيات الكرتيزية ونوع آخر فيه التعبير عن نقطة هندسية من خلال بعد وزاوية وهو نظام الإحداثيات القطبية وهنا في الفراغ توجد نظم كثيرة ومعقدة للتعبير عن نقطة فراغية  $(x, y, z)$  وهي الإحداثيات الكرتيزية والإحداثيات الكروية (القطبية الفراغية) التي تتحدد من خلال زاويتين  $\theta, \phi$  في المستوى وبعد في اتجاه العمودي على المستوى وأخرى فيها زاوية وبعدين وتسمى الإحداثيات الأسطوانية ولنعرض ذلك بالتفصيل.

تتحدد الإحداثيات الكروية وكذلك الأسطوانية بمستوى  $\alpha$  عليه مجموعة إحداثيات قطبية ثم اتجاه عمودي على المستوى  $\alpha$  وليكن  $OZ$ . بالنسبة لأي نقطة  $M$  في الفراغ  $E^3$  تتحدد تحديداً تاماً بالكميات  $\theta, \rho, \phi$  حيث  $-\pi < \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \rho < \infty$  وتسمى الكميات  $\theta, \phi, \rho$  بالإحداثيات الكروية للنقطة  $M$  ولكي نحدد  $M$  في الفراغ إذا أعطيت إحداثياتها الكروية نلاحظ أن  $\rho$  تحدد كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها  $\rho$  والزاوية  $\phi$  تحدد مخروطاً دائرياً قائماً رأسه نقطة الأصل وزاوية رأسه  $2\phi$  وأخيراً الزاوية  $\theta$  تحدد مستويًا  $zOM$  عمودياً على المستوى  $\alpha$  وتكون النقطة  $M$  هي تقاطع الكرة والمخروط والمستوى (شكل ١، ٢).

تطبيق: خطوط الطول والعرض على سطح الكرة الأرضية تحدد من الزوايا  $\theta, \phi$

فمثلاً: إذا أخذنا المستوى  $\alpha$  هو المستوى الاستوائي والمستوى  $ZOX$  يمر بمدينة جريتش فإن :

خط عرض  $M$  يكون مساوياً  $\frac{\pi}{2} - \phi$  ويكون هذا الخط شمالاً عندما  $\phi < \frac{\pi}{2}$  ويكون جنوباً عندما  $\phi > \frac{\pi}{2}$  أما خط الطول للنقطة  $M$  فهو  $\theta$  ويكون هذا الخط شرقاً عندما تكون  $\theta$  موجبة ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) وغرباً عندما تكون  $\theta$  سالبة ( $-\pi \leq \theta \leq 0$ ) وستقوم بدراسة نموذج للكرة الأرضية وهو تقريباً كرة تعطى من  $\rho = \text{const.}$  في الباب القادم.



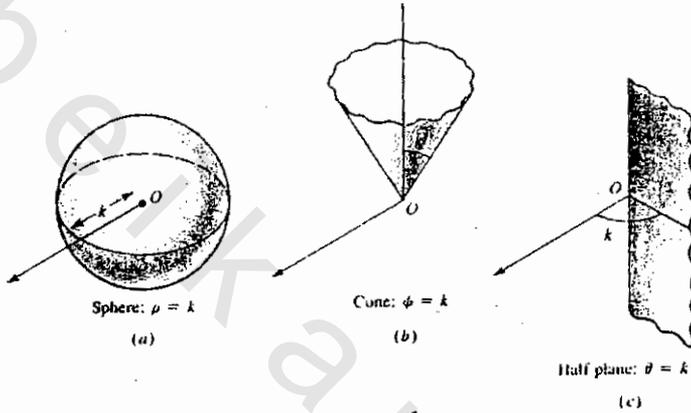
شكل (١)

ويمكننا من شكل (٣) ملاحظة أن العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية  $(x, y, z)$  والكروية  $\rho, \theta, \phi$  هي :

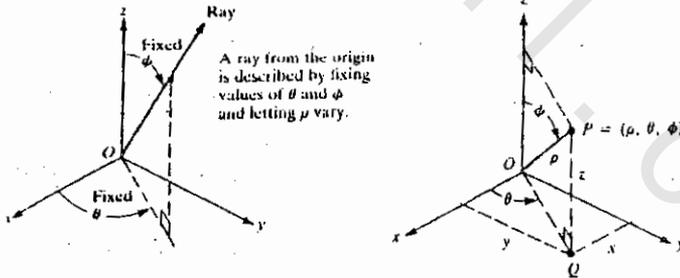
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi \quad (1)$$

والإحداثيات الأسطوانية  $(r, \theta, z)$  وعلاقتها بالكرتيزية تعطى من

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (2)$$



شكل (٢)



شكل (٣)

والتحويلات العكسية للتحويلات (1), (2) على الترتيب هي

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, z = z \quad (4)$$

العلاقة بين الإحداثيات الكروية والأسطوانية هي

$$r = \rho \sin \theta, z = \rho \cos \phi$$

والتحويل العكسي هو

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \phi = \tan^{-1} \frac{r}{z}$$

مثال (١): التحويلات (الرواسم) السابقة تناظر أحادي؟

مثال (٢): إذا كانت  $(1, -\sqrt{3}, 2)$  هي الإحداثيات الكرتيزية لنقطة M فأوجد إحداثياتها الأسطوانية والكروية.

الحل: باستخدام العلاقات (2), (1) نحصل على المطلوب.

مثال (٣): أثبت أن المعادلة  $\rho^2 (1 + 3 \sin \phi \cos^2 \theta) = 4$  تمثل مجسم ناقصي دوراني ناتج عن دوران قطع ناقص حول محور السينات حيث  $(r, \phi, \theta)$  هي الإحداثيات الكروية في الفراغ.

الحل: باستخدام التحويل العكسي (3) واستخدام ما سبق دراسته من سطوح الدرجة الثانية الدورانية نحصل على المطلوب.

مثال (٤): عبر في الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة عن النقطة التي إحداثياتها الأسطوانية

$$\text{هي } \left(4, \frac{\pi}{2}, -2\right)$$

الحل: باستخدام المعادلات (2) ينتج المطلوب.

مثال (٥): اكتب كل من معادلة الأسطوانة  $x^2 + y^2 = a^2$  والمخروط الدائري  $x^2 + y^2 = c^2 z^2$  في الإحداثيات الأسطوانية.  
الحل: بالتعويض في المعادلات (2) ينتج المطلوب.

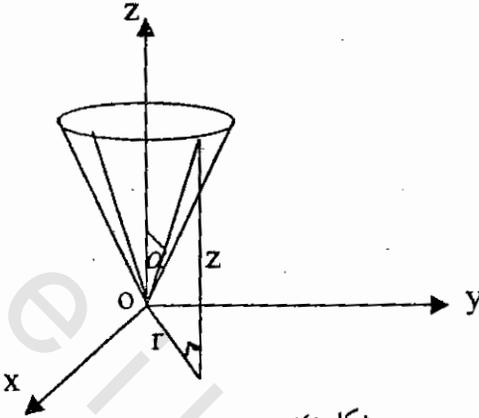
مثال (٦): عين الإحداثيات الكرتيزية للنقطة P التي احداثياتها الكروية  $\left(2, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ .  
الحل: استخدم التحويل العكسي (3).

مثال (٧): عين الاحداثيات الكروية للنقطة P حيث احداثياتها الكرتيزية هي  $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{2})$ .  
الحل: استخدم التحويل (1).

مثال (٨): عبر عن معادلة الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  في الأحداثيات الكروية.  
الحل: استخدم التحويل (1).

مثال (٩): معطى السطح  $\rho^2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta = 1$  في الإحداثيات الكروية  $(\rho, \theta, \phi)$  اكتب معادلته في الإحداثيات الكرتيزية وحدد نوعه.  
الحل: استخدم التحويل العكسي (3).

مثال (١٠): مخروط زاوية رأسه  $2\alpha$  عين معادلته في الاحداثيات الكروية والأسطوانية إذا كان محورة هو OZ .



شكل (٤)

الحل: في الإحداثيات الكروية نجد أن معادلة المخروط  $\phi = \alpha$  للنصف العلوي

للمخروط،  $\phi = \alpha + \frac{\pi}{2}$  للنصف السفلي للمخروط.

ومن الشكل والإحداثيات الأسطوانية يكون  $z = r \cot \alpha$  ،  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال (١١): أوجد الزاوية  $\alpha$  في حالة المخروط الدائري  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

الحل: استخدم المثال السابق تحصل على المطلوب.

مثال (١٢): أثبت أن المعادلة  $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$  تمثل مخروط دائري.

الحل: حول هذه المعادلة إلى الإحداثيات الكروية وكذلك الأسطوانية ومن ثم أعط

تفسيراً للبارامتر  $\lambda$  وباستخدام التأويل الهندسي للإحداثيات الكروية والأسطوانية السابقة.

مثال (١٣): أعط وصف هندسي للسطوح  $x^2 + y^2 = z^2$  ،  $3(x^2 + y^2) = z^2$  في

كل من الإحداثيات الكروية والأسطوانية.

الحل: استخدم المثال السابق.

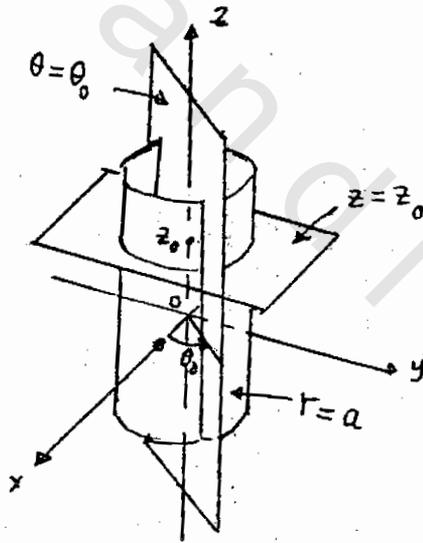
(٢.٨) التآويل الهندسي للإحداثيات الأسطوانية:

المعادلة  $r = a = \text{const.}$  تصف ليس فقط دائرة في المستوى  $xy$  لكن تصف

أسطوانة كاملة حول محور  $z$ ، محور  $z$  نفسه يعطى بالمعادلة  $r = 0$ .

المعادلة  $\theta = b = \text{const.}$  تصف المستوى الذي يحتوي على محور  $z$  ويصنع

زاوية مقدارها  $b$  (تقدير دائري) مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$  (انظر شكل (٤)).



شكل (٤)

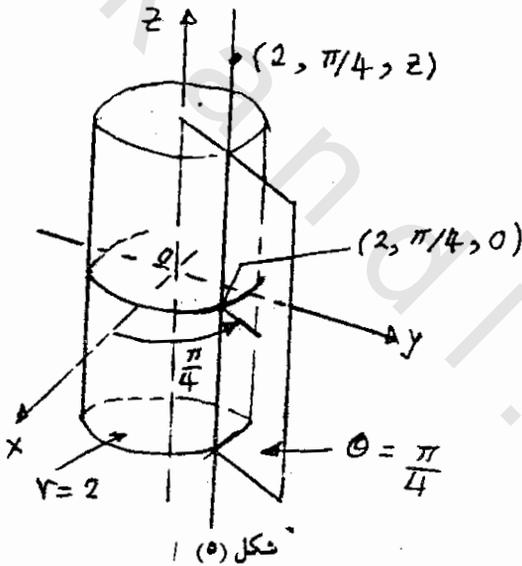
مثال (١٤): صف النقاط في الفراغ التي إحداثياتها الأسطوانية تحقق المعادلات

$$r=2, \theta = \frac{\pi}{4}$$

الحل: هذه النقاط تصف الخط الذي فيه الأسطوانة  $r = 2$  تقطع جزء المستوى

الذي  $\theta = \frac{\pi}{4}$  عليه  $r$  موجبة. هذا الخط يمر بالنقطة  $(2, \frac{\pi}{4}, 0)$  ويوازي محور  $z$

(شكل (٥)) أي أن النقاط المعطاة في المثال تصف خط مستقيم يوازي محور  $z$ .

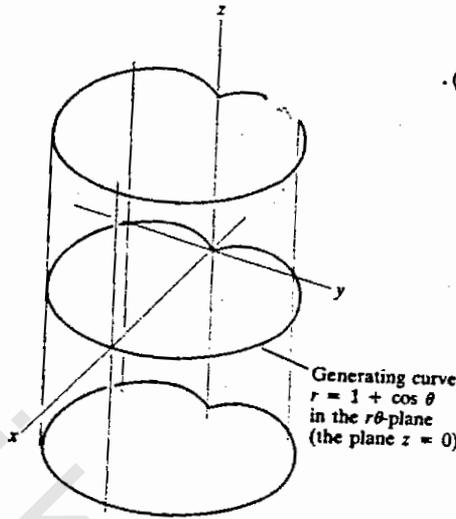


شكل (٥)

مثال (١٥): ارسم السطح  $r = 1 + \cos \theta$  حيث  $(r, \theta, z)$  هي الإحداثيات الأسطوانية.

الحل: المعادلة المعطاة خالية من الإحداثي  $z$ . ولهذا فإن السطح هو أسطوانة مقامة على منحنى الكارديويد  $r = 1 + \cos \theta$  في المستوى  $r\theta$  ومولدات الأسطوانة تسوازي

محور z (شكل (٦)).



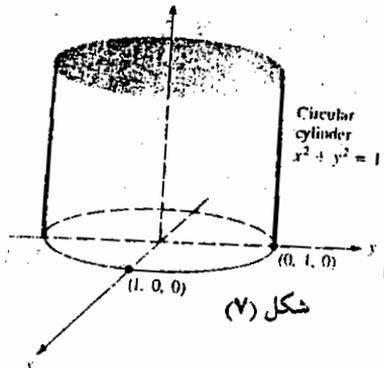
شكل (٦)

ومقطع الأسطوانة العمودي على محور z هو منحنى الكارديويد.

مسألة (١٦): صف الأسطوانة التي نصف قطرها a وارتفاعها h في الإحداثيات الأسطوانية.

الحل: نفرض أن محور الأسطوانة هو الاتجاه الموجب لمحور z وقاعدتها السفلى مركزها هو قطب الإحداثيات الأسطوانية (أنظر شكل (٧)). ومن دراستك للإحداثيات الأسطوانية نجد أن الأسطوانة المطلوبة تعطى من

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h$$



شكل (٧)

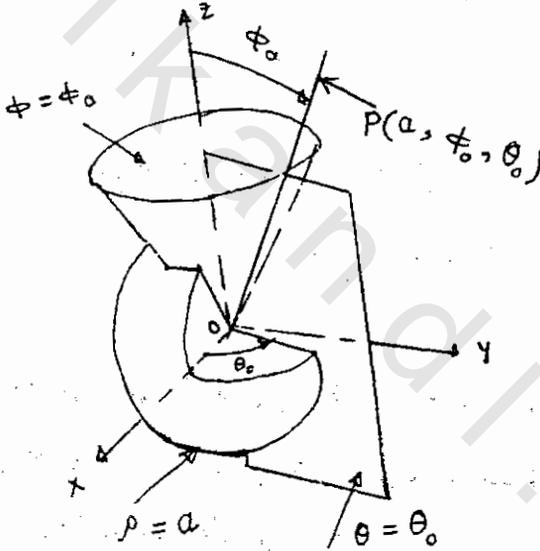
(٣.٨) التآويل الهندسي للإحداثيات الكروية:

المعادلة  $\rho = a = \text{const.}$  تصف كرة نصف قطرها  $a$  ومركزها نقطة الأصل. المعادلة

$\phi = \phi_0 = \text{const.}$  تصف مخروط وحيد رأسه نقطة الأصل ومحوره يقع على امتداد

محور  $z$   $\left(0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$  وإذا كانت  $\phi = \frac{\pi}{2}$  نحصل على المستوى  $xy$  وإذا زادت

$\phi$  عن  $\frac{\pi}{2}$  فإن المخروط ينقلب إلى اسفل (شكل (٨)).



شكل (٨)

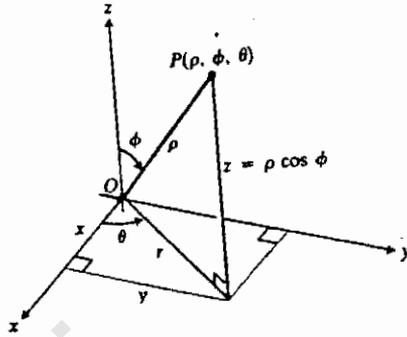
العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية والأسطوانية والكروية تعطى من

$$r = \rho \sin \phi, \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$z = \rho \cos \phi, \quad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

كما هو مبين بالشكل (٩).



شكل (٩)

مثال (١٧): أوجد معادلة المستوى  $z = 4$  في الإحداثيات الكروية.

الحل: من التحويلات التي تربط الإحداثيات الكرتيزية بالإحداثيات الكروية نجد أن

$$\rho = 4 \sec \phi$$

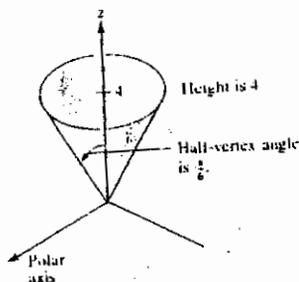
مثال (١٨): صف المخروط الذي ارتفاعه 4 وحدات ونصف زاوية رأسه  $\frac{\pi}{6}$  في

الإحداثيات الكروية.

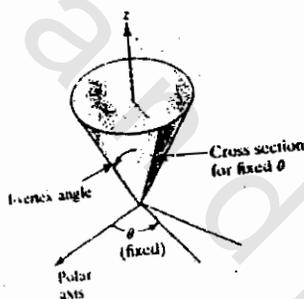
الحل: في الإحداثيات الكروية  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ، لأي قيمة ثابتة  $\theta$  فإن المقطع يكون

مثلث كما هو مبين بشكل (١٠). على هذا المثلث الزاوية  $\phi$  تتغير من 0 إلى  $\frac{\pi}{6}$

ولأي قيم ثابتة  $\theta, \phi$  فإن المقطع عبارة عن قطعه مستقيمة تبدأ من نقطة الأصل حتى المستوى  $z = 4$  كما هو موضح بالشكل (١١).



شكل (١٠)



شكل (١١)

كما في المثال السابق فإن هذا المستوى معادلته  $\rho = 4 \sec \phi$  وبالتالي فإن المخروط المطلوب يعطى من

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \rho \leq 4 \sec \phi$$

### تمارين (٨)

(١) حدد معادلة المخروط الدائري القائم الذي محوره منطبق على محور  $z$  ورأسه نقطة الأصل ونصف زاوية رأسه  $\theta$ .

(٢) أثبت أن الزاوية  $\theta$  بين راسمي المخروط  $6yz-2xz+5xy=0$  الواقعين في المستوى  $3x+y-5z=0$  تحقق  $\cos \theta = \frac{1}{6}$

(٣) أثبت أن مقاطع السطح المخروطي  $9x^2 - 36y^2 + 4z^2 = 0$  بمستويات موازية للمستوى  $y=0$  تكون قطاعات ناقصه لها نفس الاختلاف المركزي.

(٤) أثبت أن المستوى  $2x-12y-z+16=0$  يقطع السطح المكافئ الزائدي  $x^2 - 4y^2 = 2z$  في راسمين وأوجد معادلة كل منهما.

(٥) أوجد الزاوية بين الراسمين المارين بالنقطة  $(-2, 0, 1)$  على السطح المكافئ الزائدي  $9x^2 - 4y^2 = 36z$

(٦) عين السطوح الآتية في الإحداثيات الكارتيزية وأذكر نوع السطح

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| (i) $z = r^2 \sin 2\theta$                        | (ii) $z = r^2$                    |
| (iii) $\rho \sin \phi \tan \phi \sin 2\theta = 2$ | (iv) $\rho = \sin \phi \cos \phi$ |
| (v) $z = r^2 \cos 2\theta$                        | (vi) $\rho \sin \phi = 1$         |

(٧) صف السطوح المثلة بمجموعة النقاط التي إحداثياتها الأسطوانية تحقق المعادلات ومن ثم أرسماها.

- |                                       |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| (i) $r = 4$ ,                         | (ii) $r^2 + z^2 = 1$                 |
| (iii) $r = 2, z = 3$ ,                | (iv) $r = 2 \cos \theta$             |
| (v) $\theta = \frac{\pi}{6}, z = r$ , | (vi) $r = 3, \theta = \frac{\pi}{2}$ |

(٨) صف السطوح المثلثة بمجموعة النقاط التي إحداثياتها الكروية تحقق المعادلات ومن ثم أرسمها.

(i)  $\phi = \frac{\pi}{6}$  ,

(ii)  $\rho = 6, \phi = \frac{\pi}{6}$

(iii)  $\rho = 5, \theta = \frac{\pi}{4}$  ,

(v)  $\theta = \frac{\pi}{4}, \phi = \frac{\pi}{4}$

(iv)  $\theta = \frac{\pi}{2}, \rho = 4 \cos \phi$

(٩) ادرس مجموعة النقاط  $(\rho, \theta, \phi)$  التي تحقق  $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}$ .

(١٠) ادرس المنطقة  $0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi, 1 \leq \rho \leq 2$