

## الباب الأول المتجهات في الفراغ

### (١.١) الفراغ الإقليدي $E^3$ Euclidean space :

دون الخوض في تفاصيل أنواع الفراغات والتي أمكن تصنيفها إلى نوعين رئيسين إقليدي وغير إقليدي وببساطة شديدة يمكننا تعريف الفراغ الإقليدي ذو الثلاث أبعاد والذي يرمز له بالرمز  $E^3$  على أنه جميع النقاط الهندسية  $\{P\}$  والتي تمثل من خلال مجموعة كل الثلاثيات  $(x^1, x^2, x^3)$  وباختصار  $(x^i)$  وهذا يعطى من خلال راسم تناظر أحادي  $E^3 \rightarrow R^3 = R \times R \times R$  أي كل نقطة هندسية  $P$  يمكن تمثيلها كالتالي :

$$P \equiv (x^i), i=1,2,3, \forall x^i \in R$$

حيث  $R$  مجموعة الأعداد الحقيقية.

فئة النقاط  $\{X \equiv (x^i)\}$  يعرف عليها دالة القياس لهذا الفراغ وهي

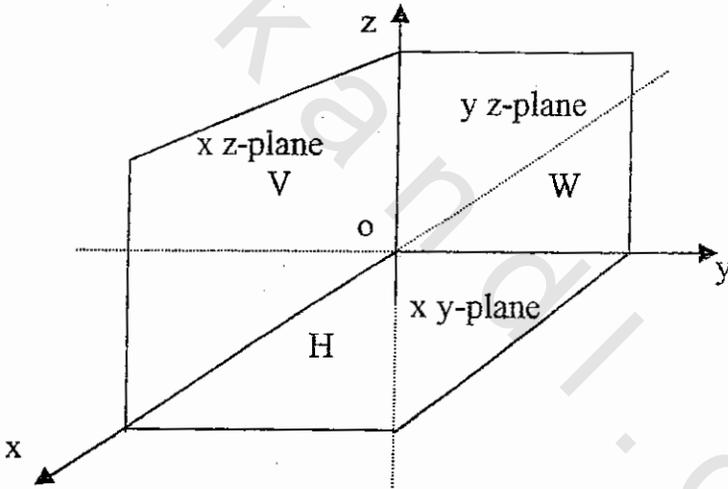
$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$$

ومنها يعرف البعد بين نقطتين  $x, y$  كالتالي :—

$$\langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=1}^3 (x^i - y^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

ومن هذا العرض نكون قد عرفنا الفراغ الثلاثي الإقليدي بأسلوب بسيط والذي تتحقق فيه خاصية التوازي المعروفة، وبأسلوب أكثر دقة يعرف الفراغ الثلاثي الإقليدي على أنه فراغ اتجاهي معياري بعده 3 معرف على حقل الأعداد الحقيقية وله أساس معياري متعامد.

ويتبقى لدينا كيفية تمثيل ووصف هذا الفراغ من خلال الثلاثي  $(x^i)$  والذي فيه تسمى  $x^i$  بالإحداثيات الكرتيزية والتي يمكن وصفها في الفراغ على أنها الأبعاد العمودية عن ثلاث مستويات متعامدة متنى متنى، هذه المستويات تسمى بمستويات الإحداثيات Coordinate Planes والأبعاد الثلاثة العمودية تسمى بإحداثيات النقطة. المستويات الثلاث  $yz, xz, xy$  نرمز لها بالرموز  $H, V, W$  على الترتيب وتقسّم الفراغ إلى ثمانية أجزاء منفصلة كل جزء يسمى octant ونوضح ذلك من خلال شكل (١) والجدول (١)

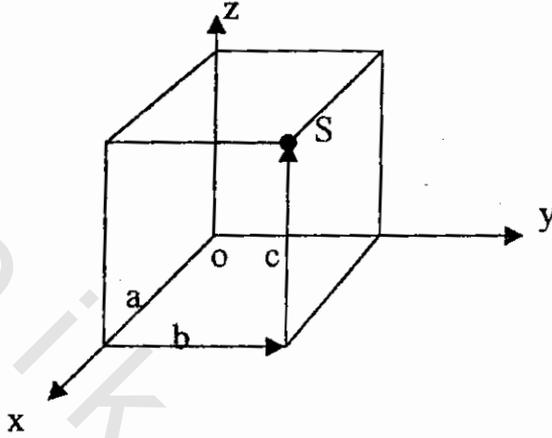


شكل (١)

Octant	Signs of Coordinates			Octant	Signs of Coordinates		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	-	+	+
II	+	-	+	VI	-	-	+
III	+	-	-	VII	-	-	-
IV	+	+	-	VIII	-	+	-

جدول (١)

وتحدد النقطة  $S(a, b, c)$  في الفراغ كما هو موضح بالرسم :



شكل (٢)

خطوط تقاطع المستويات الإحداثية تسمى بالمحاور الإحداثية والتي يرمز لها بالرمز  $x^i$  وإذا أخذنا متجهات الوحدة  $e_i$  في اتجاه المحاور  $x^i$  فإن أي نقطة  $P$  تمثل بالثلاثي  $(x^i)$  يكون متجه الموضع لها هو  $\overline{oP}$  ويكتب على الصورة (الموضع القياسي): (Standard Position)

$$\overline{oP} = \sum_{i=1}^3 x^i e_i$$

حيث نقطة البداية نقطة الأصل initial point ونقطة النهاية terminal point  $P$  ولنتفق من الآن فصاعداً أن الرموز  $i, j, k, \dots$  تأخذ القيم 1, 2, 3 وتبوع أسلوب أينشتين الاختزالي الجمعي ويتلخص الأسلوب: — في أي صيغة من الصيغ المشتملة على رموز ذات ترقيمات سفلية وأخرى علوية، إذا ظهر رمز وقيم متغيرة مرة بأعلى وأخرى بأسفل فإن هذا يعني تلقائياً عملية جمع هذه الصيغة في نطاق المسدى المسوح به لهذا الرمز.

فمثلا :  $a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$  ، وهكذا

ولأي متجه  $A = (a^i)$  فإننا نعرف  $a^i$  على أنها مركبات المتجه  $A$  والزوايا بين المتجه  $\bar{A}$  ومحاور الإحداثيات  $x^i$  تسمى بزوايا الاتجاه للمتجه  $\bar{A}$  وجيوب التمام تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه  $\bar{A}$  ويرمز لها بالرمز  $\alpha^i$  وعليه فإن الاتجاه  $L$  والذي يسمى جيوب تمام الاتجاه Direction Cosines هو

$$L = \cos \alpha^i e_i$$

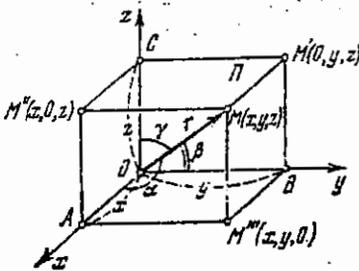
حيث  $\cos \alpha^i = \frac{x^i}{|A|}$  ، طول المتجه  $\bar{A}$  ، أي أن :

$$|A| = \left( \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال (١): أثبت أن  $\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha^i = 1$

الحل:  $\bar{A} = |A| \bar{e}_A$  ،  $e_A = (\cos \alpha^i) = \cos \alpha^i e_i$  نحصل على المطلوب.

وإذا كان  $\bar{A}$  متجه وحدة فإن مركباته هي  $|\cos \alpha^i|$  على امتداد محاور الإحداثيات ونوضح ذلك من خلال الشكل التالي:



شكل (٣)

ولتوضيح المسافة بين نقطتين  $M_2(x_2, y_2, z_2), M_1(x_1, y_1, z_1)$  نقوم  
برسم مستويات توازي مستويات الإحداثيات وتمر خلال النقاط  $M_2, M_1$  ونحدد  
النقاط  $M_4(x_2, y_1, z_1), M_3 = (x_2, y_2, z_1)$   
النقاط  $M_1, M_2, M_3$  تكون مثلث قائم الزاوية وكذلك النقاط  $M_1, M_3, M_4$   
تكون مثلث قائم الزاوية.

وبتطبيق نظرية فيثاغورث Pythagorean theorem نجد أن :

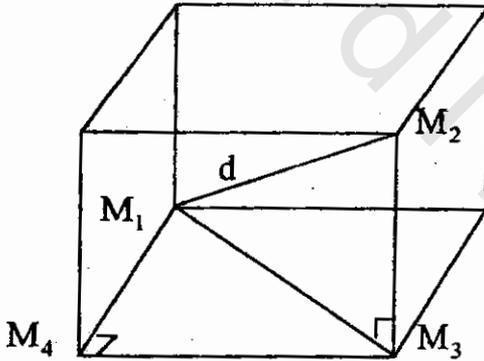
$$d(M_1, M_2) = \sqrt{d(M_1, M_3)^2 + d(M_2, M_3)^2} \quad (1)$$

$$d(M_1, M_3) = \sqrt{d(M_1, M_4)^2 + d(M_3, M_4)^2} \quad (2)$$

ومن شكل (٤)

$$d(M_2, M_3) = |z_2 - z_1| \quad (3)$$

وبالتعويض من (2), (3) في (1) نحصل على الصيغة (\*) التي تعطي المسافة بين  
نقطتين.



شكل (٤)

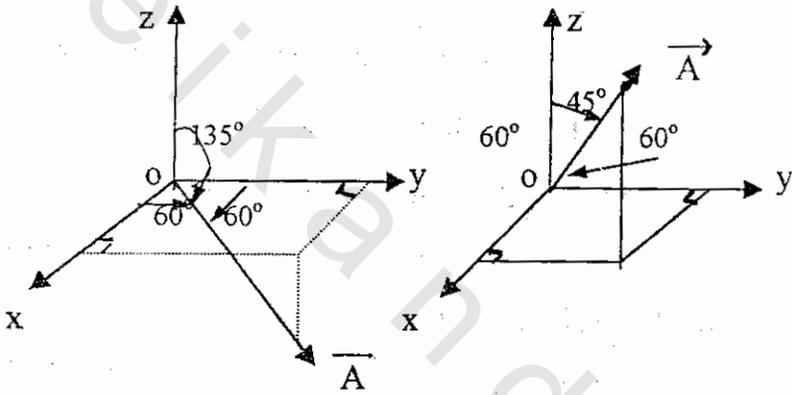
مثال (٢): الاتجاه  $\overline{A}$  يصنع زاوية  $60^\circ$  مع محور  $x$ , محور  $y$ , ما هي الزاوية التي

يصنعها مع محور  $z$ ؟

الحل: حيث أن  $\cos \alpha^1 = \cos \alpha^2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\cos \alpha^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ فإن } \cos^2 \alpha^3 = \frac{1}{2} \text{ فإن } \sum_i \cos^2 \alpha^i = 1$$

إذن  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  أو  $\frac{3\pi}{4}$  كما هو موضح بالرسم.



شكل (٥)

مثال (٣): إذا كانت  $\alpha, \beta, \gamma$  هي الزوايا التي يصنعها متجه مع محاور الإحداثيات،

$$\text{ماذا عن } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma ?$$

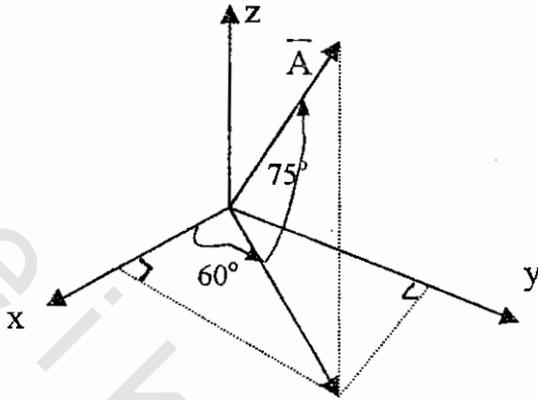
الحل: استخدم العلاقة بين جيب وجيب تمام الزاوية وامتتمتها.

مثال (٤): هل جيوب تمام الاتجاه وحيدته؟

مثال (٥): ماذا نفهم إذا قلنا أن الزوايا التي يصنعها متجه مع محاور الإحداثيات

متساوية؟ موضحا ذلك بالرسم.

مثال (٦): أوجد جيوب تمام الاتجاه للمتجه المبين بالشكل



شكل (٦)

### (٢.١) تحليل المتجهات:

لتسهيل أسلوب الدراسة داخل هذا الفراغ نقوم بعرض نظرية تحليل المتجهات أي العمليات الجبرية والمعاني الهندسية التي تربط المتجهات.

تعريف (١): يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهين  $\bar{A} = (a^i)$ ,  $\bar{B} = (b^i)$  والذي يرمز له بالرمز  $\langle A, B \rangle$  كالآتي

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \quad (*)$$

تعريف (٢): يقال لمتجهين  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  متسايمين إذا كان  $\bar{B} = \lambda \bar{A}$ ,  $\bar{A} \neq 0$  منطبقين أو متوازيين.

خصائص حاصل الضرب القياسي:

(١) خاصية التعامد  $\langle \bar{A}, \bar{B} \rangle = 0$  if  $\bar{A} = 0$  or  $\bar{B} = 0$  or  $\bar{A} \perp \bar{B}$

(٢) خاصية التماثل:  $\langle \bar{A}, \bar{B} \rangle = \langle \bar{B}, \bar{A} \rangle$

$$(٣) \text{ خاصية التوزيع } \langle \bar{A}, \bar{B} + \bar{C} \rangle = \langle \bar{A}, \bar{B} \rangle + \langle \bar{A}, \bar{C} \rangle$$

$$(٤) \text{ خاصية الضرب في عدد قياسي } \langle \alpha \bar{A}, \bar{B} \rangle = \langle \bar{A}, \alpha \bar{B} \rangle = \alpha \langle \bar{A}, \bar{B} \rangle$$

مثال (٧): أثبت أن  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  حيث  $\delta_{ij}$  تسمى كرونكر دلتا وتعرف كالتالي

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \forall i = j \\ 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

الحل: المتجهات  $e_i$  عيارية متعامدة ومنها نحصل على المطلوب.

تعريف (٣): تعرف الزاوية بين متجهين على أنها الزاوية  $\phi$  بين المتجهين  $A, B$  والتي تعطى عن طريق جيوب تمام الاتجاه  $\alpha^i, \beta^i$  للمتجهين  $A, B$  على الترتيب

$$\text{بالعلاقة} \quad \cos \phi = \sum_{i=1}^3 \cos \alpha^i \cos \beta^i$$

$$\text{مثال (٨):} \quad \text{أثبت أن} \quad \cos \phi = \frac{\langle A, B \rangle}{\langle A, A \rangle^{\frac{1}{2}} \langle B, B \rangle^{\frac{1}{2}}}$$

الحل: بقسمة طرفي العلاقة (\*) على  $|A|, |B|$  واستخدام تعريف جيوب تمام الاتجاه نحصل على المطلوب.

من الآن نتفق على أن نكتب رمز المتجه بالرمز  $A$  بدلا من  $\bar{A}$ .

ملحوظة:  $\langle \bar{A}, \bar{B} \rangle > 0$ , زاوية حادة.  $\langle \bar{A}, \bar{B} \rangle < 0$ , زاوية منفرجة.

تطبيقات حاصل الضرب القياسي:

(١) المساقط:

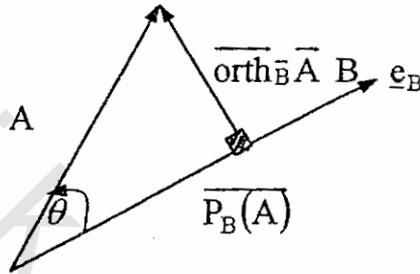
ونعطي الآن تطبيق على حاصل الضرب القياسي:—

(١) إيجاد طول مسقط متجه  $A$  على اتجاه معلوم  $B$  ويرمز له بالرمز  $P_B(A)$  ويعطى

من

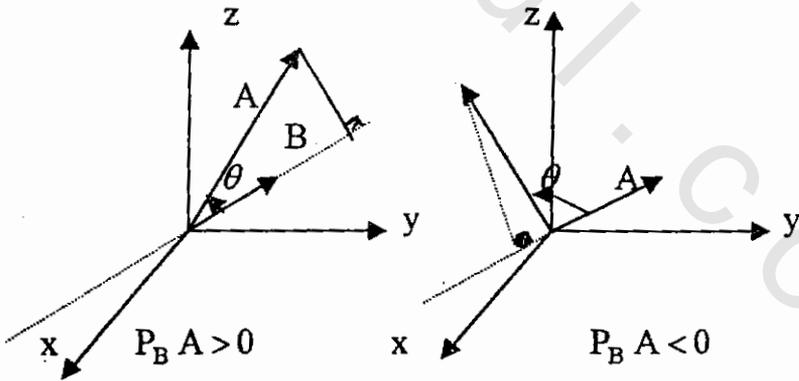
$$P_B(A) = \frac{\langle A, B \rangle}{|B|} = \mathbf{e}_B \cdot A \quad (1)$$

والمعنى الهندسي للمقدار  $P_B(A)$  هو مركبة  $A$  التي تتوازي  $B$  كما هو واضح في شكل (٧)



شكل (٧)

لاحظ أن طول المسقط يكون موجب أو سالب على حسب الزاوية  $\theta$  حادة أو منفرجة على الترتيب. ونوضح ذلك بالرسم كما في شكل (٨)



شكل (٨)

وكذلك طول مسقط  $B$  على  $A$  ويعطى من

$$P_A(B) = \frac{\langle A, B \rangle}{|A|} = e_A \cdot \bar{B}, e_A = \frac{A}{|A|} \quad (2)$$

من (1), (2) يكون لدينا العلاقة

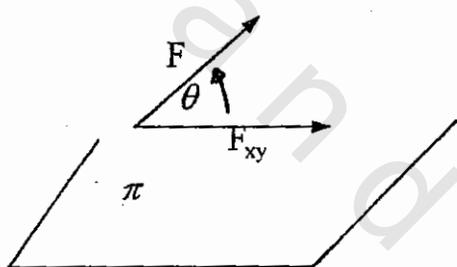
$$\frac{P_B(A)}{P_A(B)} = \frac{|A|}{|B|}$$

مثال (٩): (أ) أوجد طول مسقط  $v=(1,3,5)$  على المتجه الذي يوازي  $u \equiv (1,-2,2)$ .

(ب) مسقط متجه على مستوى  $\pi$  هو البعد بين مسقط بدايته ومسقط نهايته وهو

كمية اتجاهية. ومقياس مسقط المتجه  $\bar{F}$  على المستوى  $xy$  يساوي  $|\bar{F}| \cos \theta = |F_{xy}|$

حيث  $\theta$  هي الزاوية بين  $\bar{F}$  والمستوى  $xy$ .



شكل (٨)

مثال (١٠):

في الفراغ الثلاثي  $E^3$  إذا كان لدينا أساس معياري متعامد  $\{e_i\}$  ( $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ )

وارتبط بالثلاثي  $\{u_i\}$  بالعلاقة  $u_i = a_j^i e_j$  فإن الشرط الضروري والكافي كي

تكون المجموعة  $\{u_i\}$  أساس معياري متعامد للفراغ هو أن مصفوفة التحويل  $(a_j^i)$

تكون عمودية، وعلى الطالب إثبات ذلك كتمرين؟

مثال (١١): عين الزاوية  $\theta = \widehat{BAC}$  حيث

$$A \equiv (1, 1, 1), B \equiv (2, 2, 1), C \equiv (2, 1, 2)$$

$$\overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC}, \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \cos \theta = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} \quad \text{الحل:}$$

ملاحظة: مسقط المتجه  $\overline{A}$  على المتجه  $\overline{B}$  هو متجه  $P_B(\overline{A})$  ويعطى من  $P_B \overline{A} = P_B(\overline{A}) \overline{u} = \langle \overline{A}, \overline{u} \rangle \overline{u}$

حيث  $\overline{u}$  وحدة المتجهات في إتجاه  $\overline{B}$ .

ومن شكل (٧) يتضح أن المتجه  $\overline{A}$  مجموع جزئين، جزء في إتجاه  $B$  (مسقط  $A$  على  $B$ ) وجزء في إتجاه عمودي على  $B$  ونرمز له بالرمز  $\text{orth}_B \overline{A}$  أي أن

$$\overline{A} = \overline{Pr_B A} + \overline{\text{orth}_B A}$$

مثال (١٢): أوجد  $\overline{\text{orth}_B A}, \overline{Pr_B A}$  إذا كان  $A=(2,3,-1), B=(8, -4,1)$

$$\text{الحل: } \overline{Pr_B A} = \langle \overline{A}, \overline{u} \rangle \overline{u} \quad \text{حيث } \overline{u} = \frac{\overline{B}}{\langle \overline{B}, \overline{B} \rangle^{1/2}} = \left( \frac{8}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{1}{9} \right)$$

$$\overline{Pr_B A} = \left( \frac{8}{27}, \frac{-4}{27}, \frac{1}{27} \right) \quad \text{إذن}$$

$$\overline{\text{orth}_B A} = \overline{A} - \overline{Pr_B A} = \left( \frac{46}{27}, \frac{85}{27}, \frac{-28}{27} \right) \quad \text{وكذلك}$$

$$\langle \overline{Pr_B A}, \overline{\text{orth}_B A} \rangle = 0 \quad \text{ويمكن أن نتأكد من أن}$$

(٢) الإحصاء :

حساب معامل الارتباط بين الأطوال والأوزان لعدد  $n$  شخص فمثلا نفرض أن وزن الشخص رقم  $i$  هو  $w_i$  وطوله  $h_i$  والمتوسطات هي  $w, h$  على الترتيب.

$$H = (h_i - h), W = (w_i - w) \quad \text{نعتبر المتجهات}$$

إذن معامل الارتباط بين الارتفاعات والأوزان يعطى من

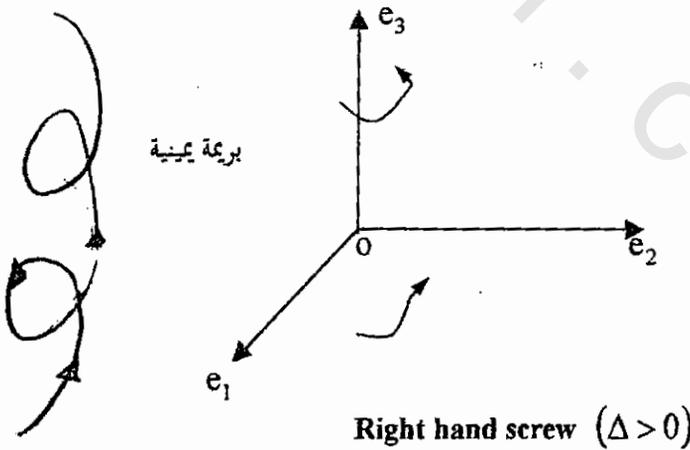
$$\frac{\langle H, W \rangle}{\langle H, H \rangle^{\frac{1}{2}} \langle W, W \rangle^{\frac{1}{2}}}$$

ويعرف على أنه جيب تمام الزاوية بين المتجهين  $H, W$  في فراغ بعده  $n$  ومن هذا يتضح معنى أن معامل الارتباط أقل من أو يساوي الواحد حيث أن مقياس جيب تمام الزاوية دائما أقل من أو يساوي الواحد.

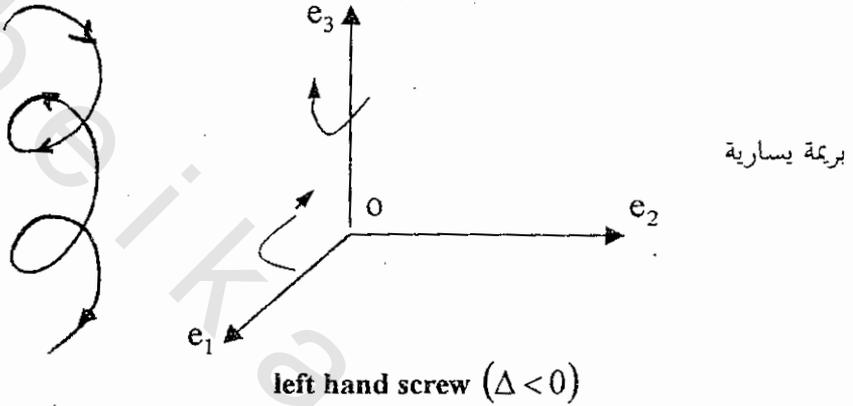
تعريف (٤):

الأساسان  $\{u_i\}, \{e_i\}$  يكون لهما نفس الوضع في الفراغ إذا تحقق  $\Delta = \text{Det}(a_j^i) > 0$  ويكونا منعكسان في الفراغ إذا كان  $\Delta = \text{Det}(a_j^i) < 0$ . وفي الحالة التي يكون فيها  $\Delta > 0$  نسمى الثلاثي المتعامد بالثلاثي اليميني

$$\text{حيث } u_i = a_j^i e_j$$



بالطبع إذا كان الدوران بين  $e_2$  ،  $e_1$  يجعلنا نسير في اتجاه عكس الاتجاه  $e_3$  فإن الثلاثي يكون في هذه الحالة برميّة يسارية والثلاثي يسمى ثلاثي يساري.



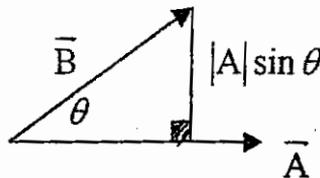
شكل (١٠)

وستنتفح طوال الدراسة على أن الأساس المختار هو الأساس المعياري المتعامد ويكون برميّة يمينية ونكتفي بكلمة ثلاثي لعني أساس معياري orthonormal basis.

### تعريف (٥):

يعرف حاصل الضرب الأتجاهي Vector product أو Cross product لمتجهين  $A$ ،  $B$  والذي يرمز له بالرمز  $A \times B$ ، على أنه

$$A \times B = \langle A, A \rangle^{\frac{1}{2}} \langle B, B \rangle^{\frac{1}{2}} \sin \theta \bar{n}$$



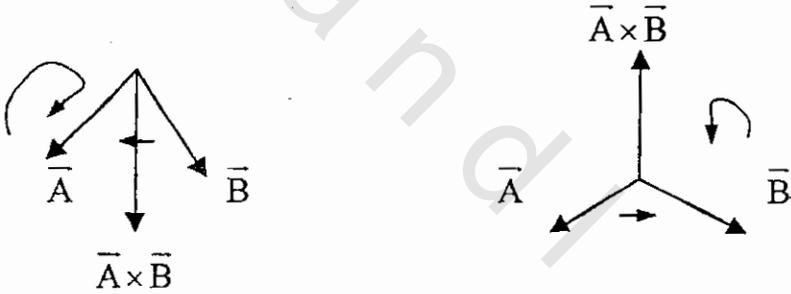
شكل (١١)

حيث  $\theta$  هي الزاوية بين المتجهين  $A, B$ ،  $\vec{n}$  متجه الوحدة في الاتجاه العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين  $A, B$  ويكون طول المتجه هو

$$\begin{aligned} \langle A \times B, A \times B \rangle^{\frac{1}{2}} &= \langle A, A \rangle^{\frac{1}{2}} \langle B, B \rangle^{\frac{1}{2}} \sin \theta \\ &= |A| |B| \sin \theta \end{aligned}$$

والذي نرمز له بالرمز  $|A \times B|$  ولهذا الطول معنى هندسي وهو أنه مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين المتجاورين  $A, B$  أي أن  $A, B$  متجهين (ضلعين) متجاورين فيه ومنه نصل إلى الخاصية التي تنص على أن المساحة كمية اتجاهية. والضرب الاتجاهي يحقق الخواص الآتية :-

$$e_i \times e_j = e_k, \quad i < j, \quad e_i \times e_i = 0, \quad \forall i$$



شكل (١٢)

وإذا استخدمنا مجموعة التباديل على المجموعة (1, 2, 3) فإن  $e_i \times e_j = \varepsilon e_k$  حيث  $\varepsilon$  تساوي 1 أو -1 طبقاً للآتي (i, j, k) تبديل زوجي أو فردي من المجموعة (1, 2, 3) على الترتيب وهذا يمكن الحصول عليه بسهولة بالتحقق أولاً من الخصائص الآتية:-

$$A \times B = -B \times A, \quad A \times A = 0 \quad (1)$$

أي أن خاصية الإبدال غير محققة

$$A \times B = 0 \text{ if } A = 0 \text{ or } B = 0 \quad (2)$$

أو المتجه  $A$  يوازي المتجه  $B$  ويحاول الطالب إعطاء تفسير لذلك باستخدام تعريف التوازي؟

خاصية الدمج القياسية (Scalar associative property) :

$$(\alpha A) \times B = A \times (\alpha B) = \alpha (A \times B) \quad (3)$$

حيث  $\alpha$  عدد قياسي.

خاصية التوزيع (Distributive property) :

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (4)$$

مثال (١٣): إذا كان  $A = a^i e_i$ ,  $B = b^i e_i$  أثبت أن

$$A \times B = \text{Det} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{bmatrix}$$

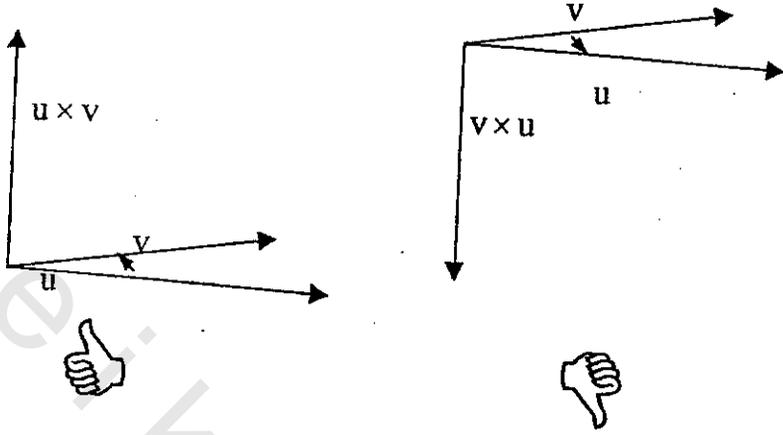
الحل: استخدم خواص الإبدال والتوزيع نحصل على :

$$\begin{aligned} A \times B &= a^i e_i \times b^j e_j = \sum_{i,j}^3 (a^i b^j - a^j b^i) e_i \times e_j \\ &= \sum_{\substack{j,i,k \neq i \\ k \neq j}} (a^i b^j - a^j b^i) e_k \end{aligned}$$

وخواص فك المحدد نحصل على المطلوب.

شكل (١٢) يحدد إشارة حاصل الضرب الاتجاهي ويمكن توضيحه عن طريق قاعدة

اليد اليمنى كما في شكل (١٣).



$$u \times v = -v \times u$$

شكل (١٣)

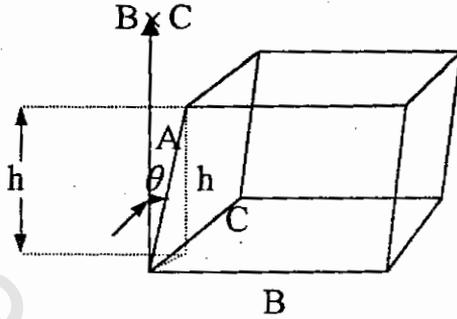
مثال (١٤): إذا كانت  $\theta$  هي الزاوية بين متجهين  $u, v$  غير متعامدين، أثبت أن

$$\tan \theta = \frac{|u \times v|}{\langle u, v \rangle}$$

الحل: من تعريف حاصل الضرب القياسي والاتجاهي ينتج المطلوب.

### تعريف (٦)

يعرف حاصل الضرب الثلاثي القياسي Triple Scalar product للمتجهات  $A, B, C$  على أنه حاصل الضرب القياسي للمتجهين  $A \times B, C$ . أي أنه  $(A \times B) \cdot C$  والقيمة المطلقة له (القيمة الموجبة) تساوي حجم متوازي السطوح المكون بهذه المتجهات الثلاث على أنها ثلاثة أضلاع متجاورة. وعلى الطالب أن يرى ذلك بنفسه؟ (تمرين للطالب) كما هو واضح من الرسم حيث :-



شكل (١٤)

الارتفاع هو  $h = |A| \cos \theta$ ، مساحة القاعدة هي  $|B \times C|$  و  $\theta$  هي الزاوية بين المتجه  $A$  والعمودي على القاعدة.

وحاصل الضرب الثلاثي القياسي له الخصائص الآتية:—

$$(1) \quad (A \times B) \cdot C = 0 \quad \text{أي أن حجم متوازي السطوح يساوي صفر إذا كان أحد}$$

هذه الحالات محقق:—

(i) أحد المتجهات الثلاث متجه صفري.

(ii) متجهين من الثلاثة متوازيين.

(iii) المتجهات الثلاث تقع في مستوى واحد (توازي مستوى واحد)، متروك

للطالب كتمرين.

$$(2) \quad (A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C)$$

$$(3) \quad (A \times B) \cdot C = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

ولإثبات (١)، (٢)، (٣) نستخدم خصائص المحددات.

مثال (١٥): إذا كان لدينا ثلاث متجهات  $A_i = (a_i^j)$  فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي هو  $A_1 \cdot (A_2 \times A_3)$  ويعطى من  $\text{Det}(a_i^j)$  والذي يكتب أحيانا بالشكل  $[A_1, A_2, A_3]$  ويعطى من العلاقة  $[A_1, A_2, A_3] = \text{Det}(a_i^j)$  وهو محدد المصفوفة  $(a_i^j)$  وعلى الطالب أن يتحقق من ذلك بنفسه (تمرين متروك للطالب)؟

مثال (١٦):  $[A, B, C] > 0$  أو  $[A, B, C] < 0$  إذا كان  $C, A \times B$  متجهات في اتجاه واحد أو ناحيتين مختلفتين على الترتيب.

الحل: يمكن التأكد منها باستخدام العمليات الأولية المسموح بها على صفوف المصفوفات وكذلك خصائص المحددات.

ومن الخصائص السابقة نكون قد برهننا النظرية الآتية:—

نظرية: الشرط الضروري والكافي كي توازي المتجهات  $A_i$  مستو واحد هو أن يتحقق  $[A_1, A_2, A_3] = 0$

مثال (١٧): أوجد حجم الهرم الذي يتكون من المتجهات  $A_i$ .

تعريف (٧):

المتجهات في النظرية السابقة يقال أنها مرتبطة خطيا أما إذا كان  $[A_1, A_2, A_3] \neq 0$  سميت المتجهات الثلاث مستقلة خطيا.

من هذا التعريف يكون لزاما علينا أن نعطي تعريف الاستقلال والارتباط الخطي لمجموعة من المتجهات في الفراغ الإقليدي  $E^n$ . إذا كان لدينا  $m$  من المتجهات  $A_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, m$  في الفراغ  $E^n$  فيقال أنها مرتبطة خطيا Linearly dependent إذا وجد  $m$  من الأعداد  $k^\alpha$  ليست جميعها أصفارا بحيث  $k^\alpha A_\alpha = 0$  وإذا كانت  $k^\alpha = 0, \forall \alpha$  فيقال أن المتجهات  $A_\alpha$  مستقلة خطيا

Linearly independent وإذا كان أحد المتجهات  $A_\alpha$  متجه صفري فإن المتجهات  $A_\alpha, \forall \alpha$  تكون مرتبطة خطيا.

وهنا نعطي خواص الارتباط والاستقلال الخطي من خلال حاصل الضرب الثلاثي القياسي كالآتي :-

١- المتجهين  $A_1, A_2$  مرتبطين خطيا إذا وإذا فقط  $A_1 \times A_2 = 0$  والمتجهين في هذه الحالة يقعان على مستقيم واحد أو متوازيين (البرهان متروك للقارئ).

٢- المتجهات  $A_1, A_2, A_3$  تكون مرتبطة خطيا إذا وإذا كان فقط  $[A_1, A_2, A_3] = 0$  والمتجهات في هذه الحالة تقع في مستو واحد أو بصورة أخرى يمكن التعبير عن أحدهما كتركيبية خطية من الأثنين الآخرين على الصورة  $A_3 = k^1 A_1 + k^2 A_2$  حيث  $k^1, k^2$  أعداد قياسية (البرهان متروك للقارئ).

٣- في الفراغ  $E^3$  أي أربعة متجهات تكون مرتبطة خطيا.  
تعريف (٨):

حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي لثلاث متجهات  $A_1$  يرمز له بالرمز  $A_1 \times (A_2 \times A_3)$  وهو عبارة عن متجه عمودي على المستوى الذي يشمل المتجهين  $A_2, A_3, A_1$  ويحقق المتطابقة الاتجاهية

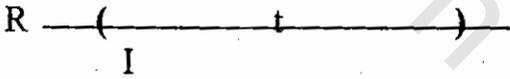
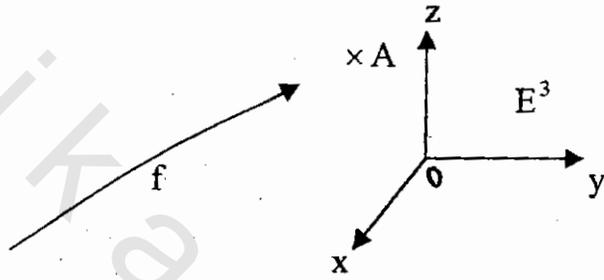
$$A_1 \times (A_2 \times A_3) = \langle A_1, A_3 \rangle A_2 - \langle A_1, A_2 \rangle A_3$$

وهذه المتطابقة لها تطبيقات كثيرة في علم البلورات في الفيزياء.

(٣.١) الدالة الاتجاهية في متغير واحد: كما تعودنا سابقا بمعرفتنا للكميات الثابتة (الأعداد الحقيقية مثلا) أمكن تعريف الكميات المتغيرة ومنها الدوال في متغير أو أكثر. يمكننا بأسلوب مشابه جعل مركبات المتجه دوال وليست كميات ثابتة أي أنه في هذه الحالة طول المتجه دالة قياسية وليست كمية ثابتة، في هذه الحالة يسمى المتجه

بالدالة الاتجاهية وهذا التعريف ليس دقيق في نصه ولكننا يمكن إعطاء تعريف رياضي دقيق كالآتي :

الدالة الاتجاهية هي راسم من الأعداد الحقيقية  $R$  أو جزء منها  $I$  (فترة مفتوحة أو مغلقة مثلاً) إلى الفراغ الأقليدي  $E^3$  بحيث أنه لكل  $t \in I$  توجد نقطة  $A$  في  $E^3$ .

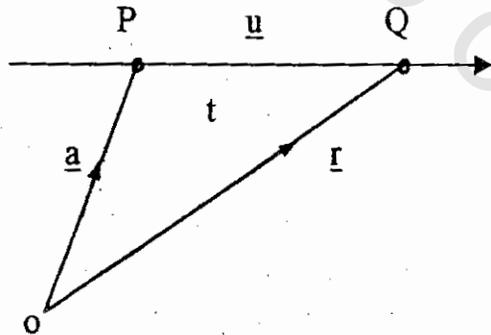


شكل (١٤)

$$f = f(t) = \bar{A} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

مثال (١٨) : إذا كانت الدوال  $f_i(t)$  دوال خطية في  $t$  فإن الدالة الاتجاهية في هذه

الحالة تحدد مستقيم في الفراغ  $\underline{r} = t\underline{u} + \underline{a}$ .



شكل (١٥)

حيث  $t$  بارامتر،  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$  وتصبح  $\underline{r}$  على الصورة

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = (tu_1 + a_1, tu_2 + a_2, tu_3 + a_3)$$

و  $t$  عدد حقيقي (بارامتر).

وإذا كان  $\{e_i\}$  هو أساس الفراغ فإن  $\underline{f}(t)$  يمكن كتابتها على الصورة  $\underline{f}(t) = f^i(t)e_i$  وفي هذه الحالة الدالة الاتجاهية ترسم منحنى في الفراغ معادلاته البارامتريّة هي  $f^i = f^i(t)$  وببساطة شديدة يمكننا تعريف اتصال الدالة الاتجاهية فيقال أن الدالة الاتجاهية متصلة إذا كانت كل مركبة  $f^i(t)$  متصلة في  $t$ . ويقال أن  $\underline{f} = \underline{f}(t)$  تفاضلية إذا كانت كل مركبة  $f^i(t)$  تفاضلية ودون الخوض في تفاصيل التعريف الدقيق لتفاضل الدالة الاتجاهية فنكتفي بهذه المعاني بالنسبة للتفاضل تعرف  $\underline{f}'(t)$  بالمشقة التفاضلية الأولى للدالة الاتجاهية وتعطى من

$$\begin{aligned} \underline{f}'(t) &= \frac{d\underline{f}}{dt} = \left( \frac{df^i(t)}{dt} \right) = \left( \frac{df^1}{dt}, \frac{df^2}{dt}, \frac{df^3}{dt} \right) \\ &= (f^{i'}(t)), \quad i' = \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

والمعنى الهندسي للمشقة الأولى هو اتجاه المماس للمنحنى عند نقطة ما. وهذا الموضوع يكمل دراسته في السنوات القادمة.

يمكن أن يعبر عن المنحنى كتقاطع سطحين فمثلا تقاطع مستويين هو خط مستقيم وهو حالة خاصة من منحنى الفراغ.

نعتبر المنحنى الناتج عن تقاطع سطحين  $\sigma_\alpha$  وبذلك تكون معادلات المنحنى هي  $\sigma_\alpha \equiv F_\alpha(x^i) = 0, \alpha = 1, 2$ ، بحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى  $x^1, x^2$  مثلا نحصل على  $x^1 = \phi^1(x^3), x^2 = \phi^2(x^3)$  وهي تمثل أيضا المعادلات البارامتريّة للمنحنى في المستوى.

حيث  $x^3$  هي البارامتر وله المعادلة الاتجاهية  $\underline{I} = (\phi^1(x^3), \phi^2(x^3))$  وهي تمثل معادلة منحنى واقع في مستوى يوازي المستوى الأحادي  $x^1 x^2$  . وبفرض أن

$$x^3 = t \text{ نحصل على}$$

$$\underline{I} = (\phi^1(t), \phi^2(t), t)$$

وهي تمثل منحنى فراغ له البارامتر  $t$  حيث  $t \in \mathbb{R}$

مثال (١٩): الدالة الاتجاهية  $X(t) = (t, t^2, 0)$  تمثل جزء القطع المكافئ  $x_2 = x_1^2$

في المستوى  $x_1 x_2$  .

مثال (٢٠): أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى  $x_2^2 = x_1, x_3^2 = 1 - x_1$

الحل: بالجمع نحصل على  $x_2^2 + x_3^2 = 1$  وهي معادلة دائرة في المستوى  $x_2 x_3$

ومعادلاتها البارامتريّة  $x_2 = \sin t, x_3 = \cos t$  وبالتعويض في المعادلات المعطاة

$x_1 = \sin^2 t$  ويكون التمثيل البارامتري (المعادلة الاتجاهية) هي

$$x(t) = (\sin^2 t, \sin t, \cos t), 0 \leq t < 2\pi$$

### تمارين (١)

١- أثبت أن المتجهات  $\{u_i\}$  تكون أساس معياري متعامد ثم أوجد  $\{e_i\}$  بدلالة  $\{u_i\}$  حيث

$$u_1 = \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3), u_2 = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 2e_3), u_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3)$$

(إرشاد: استخدم معكوس مصفوفة التحويل)

٢- أوجد اتجاه المتجه  $u$  الذي يصنع زوايا حادة متساوية القياس مع محاور الإحداثيات.

٣- إذا كانت  $\{u_i\}$  أساس للفراغ  $E^3$  وكان  $v_i = \frac{u_j \times u_k}{[u_1, u_2, u_3]}$  حيث  $(i,j,k)$

تبديلة زوجية من الأعداد  $(1, 2, 3)$ ،  $i, j, k$  مختلفة فبرهن على أن الثلاثيان

$$\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad \{v_i\}, \{u_i\}$$

٤- إذا كان  $u, v$  متجهات وحدة فاثبت أن  $|u - v| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$  حيث  $\theta$  الزاوية بينهما.

٥- أثبت أنه إذا كان المتجهات  $\bar{a}, \bar{b}$  غير متسامتين وغير صفريين فإن

$$x\bar{a} + y\bar{b} = 0 \quad \text{لا يمكن أن تتحقق إلا عندما } x = 0, y = 0.$$

٦- أثبت أنه إذا كانت  $x_1 a + y_1 b = x_2 a + y_2 b$  حيث  $a, b$  غير متسامتين

$$\text{وغير صفريين فإن } x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

٧- أعط معاني هندسية للكميات  $\alpha^i, \beta^i$  في الحالات الآتية:-

(i)  $A, B$  متجهان متوازيان، (ii)  $A, B$  متجهان متعامدان.

حيث  $\alpha^i, \beta^i$  هي الزوايا التي يصنعها المتجهان  $A, B$  على الترتيب مع محاور الإحداثيات.

٨- عين زوايا المثلث الذي ضلعان من أضلعه هما

$$\bar{A} = (3, 6, -2), \bar{B} = (2, 3, -6)$$

$$|A \times B|^2 + \langle A, B \rangle^2 = |A|^2 |B|^2 \quad (*)$$

ولأي متجهين  $\bar{A}, \bar{B}$  يمكن إثبات العلاقة (\*) والتي تسمى متطابقة لاجرانج.

٩- أوجد حجم الهرم الثلاثي الذي رؤوسه هي

$$A \equiv (2, 2, 2), B \equiv (4, 3, 4), D \equiv (5, 5, 6)$$

١٠- أثبت أن متوازي الأضلاع الذي أقطاره هي المتجهات

$$A_1 = (3, -4, -1), A_2 = (2, 3, -6)$$

هو معين وأوجد أطوال أضلعه وزواياه.

١١- بين أنه إذا كان  $A \neq 0$  وكل من الشرطين

$$\langle A, B \rangle = \langle A, C \rangle \text{ and } A \times B = A \times C$$

يتحققان معا فإن  $B = C$  ولكن إذا تحقق شرط واحد فقط فإن  $B \neq C$  بالضرورة.

١٢- برهن على أن الشرط الضروري والكافي كي يتحقق

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \text{ هو أن } (A \times C) \times B = 0$$

ناقش الحالات التي فيها  $A \cdot B = 0$  أو  $B \cdot C = 0$ .

١٣- عين قيم  $\lambda$  التي عندها تكون المتجهات  $A = (3, \lambda, 5)$ ,  $B = (1, 2, -3)$  واقعة في مستوى واحد.  $C = (2, -1, 1)$

١٤- بين أن  $\langle u \times v, u \times v \rangle = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2$

١٥- لأي ثلاث متجهات  $A_1, A_2, A_3, A_4$  بين أن  $\langle A_1 \times A_2, A_3 \times A_4 \rangle = \langle A_1, A_3 \rangle \langle A_2, A_4 \rangle - \langle A_1, A_4 \rangle \langle A_2, A_3 \rangle$

١٦- إذا كانت  $\underline{u} \times \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{0}$  فإن المتجه  $\underline{a} = \underline{u}(t)$  ثابت الاتجاه والعكس صحيح حيث  $(\underline{u} = \alpha(t)\underline{A})$  متجه ثابت.

١٧- إذا كانت  $\underline{r} = 4a(\sin^2 t e_1 + \cos^2 t e_2) + 3b \cos 2t e_3$  فأوجد  $\left[ \frac{d\underline{r}}{dt}, \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}, \frac{d^3\underline{r}}{dt^3} \right], \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}, \frac{d\underline{r}}{dt}$  حيث  $a, b$  ثوابت،  $t$  بارامتر.

١٨- أوجد الزاوية بين المنحنيين  $x_2^2 = x_1, x_3^2 = 2 - x_1$  عند النقطة  $(1, 1, 1)$ .