

## الباب الثاني

### المستوى والمستقيم في الفراغ

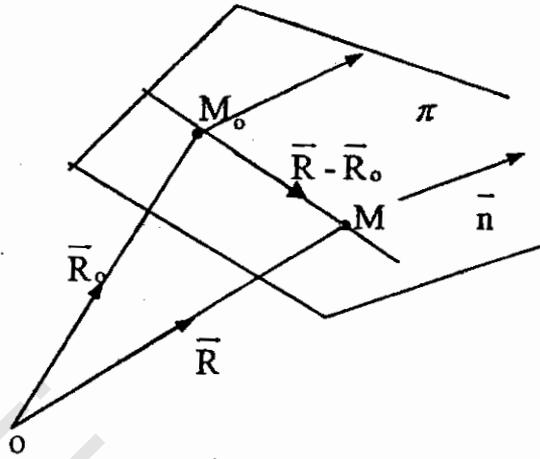
#### Plane and straight line in the space

(١.٢) المستوى في الفراغ  $E^3$ :

كما عرفنا في دراستنا السابقة أن المستقيم في المستوى يعطى على أنه علاقة خطية بين إحداثيات مجموعة النقاط  $(x^1, x^2)$  وهي  $k_1 x^1 + k_2 x^2 = k_3$  أو ما تعارفنا عليه  $ax + by = c$  فإننا يمكن تعريف المستوى في الفراغ على أنه مجموعة النقاط الهندسية التي إحداثياتها ترتبط فيما بينها بعلاقة خطية على الصورة  $k_1 x^1 = k_4$  مثلاً، أي  $k_1 x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3 = k_4$  أو ما تعارفنا عليه سابقاً  $ax + by + cz = d$ .

ولهذا الجزء من الفراغ الذي أسميناه المستوى له صور مختلفة على حسب ما هو معلوم من نقاط واتجاهات ونستخدم في العرض أسلوب المتجهات الذي ارتضيناه لمعالجة ما هو تحت الدراسة من مستوى ومستقيم ونقطة وسطح وكل ما يتعلق بها من معاني هندسية تحليلية أي باستخدام الجبر المسموح به في الدراسة الحالية.

(١.١.٢) معادلة المستوى في الصورة العمودية: إذا كان المعطى هو اتجاه وطول العمود الساقط على المستوى  $\pi$  من نقطة الأصل وليكن المتجه  $\bar{n} = \cos \alpha^i e_i$ . ولناخذ نقطة عامة  $M$  على المستوى وليكن متجه موضعها هو  $R = x^i e_i$ .



شكل (١)

وليكن نقطة تقاطع العمود  $\bar{n}$  مع المستوى هي  $M_0$  لها متجه الموضع  $\bar{R}_0 = (x_0^i)$  إذن  $\bar{R} - \bar{R}_0$  متجه واقع في المستوى وعليه يكون

$$\langle \bar{R} - \bar{R}_0, \bar{n} \rangle = 0 \quad (1)$$

أو ما يكافئ

$$\sum_{i=1}^3 (x^i - x_0^i) \cos \alpha^i = 0$$

ومنها نحصل على العلاقة

$$\sum_{i=1}^3 x^i \cos \alpha^i = \sum_{i=1}^3 x_0^i \cos \alpha^i$$

وطول العمود الساقط على المستوى  $\pi$  من نقطة الأصل هو

$$\rho = \sum_{i=1}^3 x_0^i \cos \alpha^i = \langle \underline{R}_0, \underline{n} \rangle = P_{\underline{n}} \underline{R}_0$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى في الصورة الإحداثية هي :

$$\sum_{i=1}^3 x^i \cos \alpha^i = \rho \quad (2)$$

أو في الصورة الاتجاهية  $\langle \bar{R}, \bar{n} \rangle = \rho$  وتسمى الصورة العمودية normal form للمستوى  $\pi$ .

والصورة الإحداثية تعكس ما قلناه في مقدمتنا على أن معادلة المستوى هي علاقة بين الإحداثيات  $(x^i)$  لمجموعة من النقط، هذه العلاقة هي كثيرة حدود خطية تساوي صفر أو الإحداثيات ترتبط فيما بينها بدالة خطية.

(٢.١.٢) المستوى بدلالة نقطة معلومة ويحتوي على اتجاهين :-

نفرض أن المستوى  $\pi$  يمر بنقطة  $M_0 = (x_0^i)$  ويحوي الاتجاهين

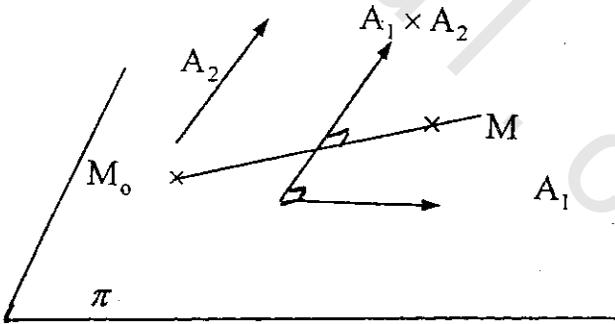
$A_\alpha = (\ell_\alpha^i), \alpha = 1, 2$  فإن المتجهات  $A_\alpha$  تقع في المستوى

$\pi$  حيث  $\bar{M}, \bar{M}_0$  متجهات الموضع للنقطة  $M_0$  ونقطة عامة  $M = (x^i)$  في  $\pi$

على الترتيب. أي أن

$$\left[ \overline{MM_0}, A_1, A_2 \right] = 0 \quad (3)$$

وهذا واضح باستخدام خصائص الارتباط الخطي (شكل ٢).



شكل (٢)

المعادلة العامة التي أشرنا إليها في البداية لا بد من ربطها بما توصلنا إليه وعليه يكون من

(3) وبفك المحدد نحصل على

$$B_i x^i = C \quad (4)$$

حيث  $B_i$  هي المحددات ذات الرتبة الثانية التي يمكن تكوينها من المصفوفة  $[A_1 \ A_2]$  حيث استخدمنا تجزئ المصفوفات وحيث أن  $A_1, A_2$  متجهات لا تقع على استقامة واحدة فإن أحد المحددات  $B_i$  يختلف عن الصفر (المحددات  $B_i$  تأخذ من أعمدة المصفوفة  $[A_1, A_2]$  مثنى مثنى بالترتيب الثابت،  $C$  يعطى من

$$C = -x_0^i B_i \quad (5)$$

المعادلة (4) هي المعادلة العامة للمستوى في نظام الإحداثيات الكرتيزية  $(x^i)$  وهذا هو برهان النظرية التي تنص على أن معادلة المستوى تعطى بعلاقة خطية من الإحداثيات  $(x^i)$ .

وعكس هذه النظرية صحيح بمعنى أن أي معادلة من الدرجة الأولى في الإحداثيات  $(x^i)$  تعرف مستوى في الفراغ والبرهان متروك للطالب كتمرين.

والمعادلة  $B_i x^i + C = 0$  يمكن تحويلها إلى الصورة العمودية يجعل  $B_i$  جيوب تمام اتجاه وذلك بضرب طرفي المعادلة في المقدار  $1/\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}$  حيث تؤخذ الإشارة التي تخالف إشارة الحد المطلق  $C$  في المعادلة العامة للمستوى.

ونوضح هنا كيفية رسم مستو معطى بمعادلة خطية:-

### تعريف (١):

تقاطع مستوى  $\pi$  في الفراغ مع أحد مستويات الإحداثيات  $\pi^i$  يسمى أثر المستوى  $\pi$  (trace) في المستوى الإحداثي  $\pi^i$  ويرمز له بالرمز  $T \Gamma_i(\pi)$  ونعني بالمستوى  $\pi^i$  هو المستوى الإحداثي المعطى بالمعادلة  $x^i = 0$ .

ويمكن استخدام آثار المستوى  $\pi$  للمساعدة في إظهار شكله في الفراغ كما يتضح من الأمثلة الآتية:-

مثال (١):

أرسم المستوى  $\pi: 2x + 6y + 3z - 12 = 0$  في الثمن الأول  $1^{st}$  octant

الحل: بوضع  $z=0$  نحصل على  $Tr(\pi)$  في المستوى  $xy$  أي هو

$$L_1: x + 3y = 6$$

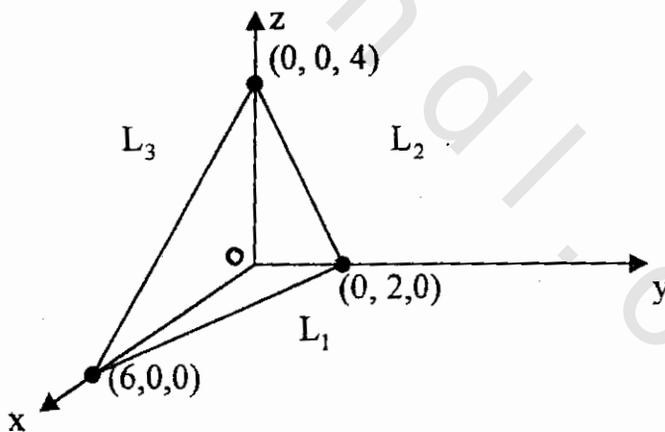
وكذلك أثر  $\pi$  في المستوى  $yz$  هو

$$L_2: 2y + z - 4 = 0$$

وبالمثل أثر  $\pi$  في المستوى  $xz$  هو

$$L_3: 2x + 3z - 12 = 0$$

المعادلات  $L_i$  تمثل خطوط مستقيمة في مستويات الإحداثيات. المنطقة المحددة بهذه المستقيمات هي جزء المستوى الموجود في الثمن الأول كما هو مبين بالرسم.



شكل (٣)

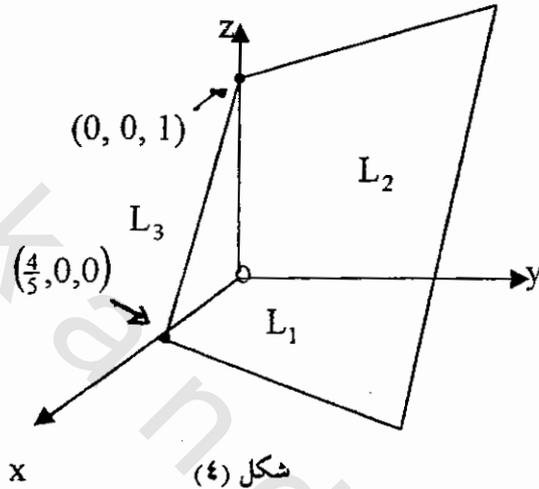
مثال (٢): ارسم المستوى  $5x + 4z - 2y = 4$  في الثمن الأول من الفراغ.

الحل: نعين آثار المستوى مع مستويات الإحداثيات كالآتي (شكل ٤).

$$z=0, L_1: 5x-2y=4,$$

$$y=0, L_3: 5x+4z=4,$$

$$x=0, L_2: 4z-2y=4.$$



(٣.١.٢) علاقة متجه بمستوى :

إذا كان لدينا متجه  $A = (a^i)$  ومستوى  $\pi: B_i x^i + C = 0$  فإن الشرط الضروري

والكافي لكي يوازي المتجه  $A$  المستوى  $\pi$  أو يقع فيه هو أن يتحقق  $\langle A, \bar{n} \rangle = 0$

حيث  $\bar{n} = (B_i)$  اتجاه العمودي على المستوى  $\pi$  ويحدد هذا الاتجاه لأن  $-\bar{n}$  عمودي

على المستوى في الاتجاه المعاكس. في الحالة التي فيها  $\bar{n} = (B_i)$  يقال أن المستوى

موجه  $oriented$  وعموما دائما نعتبر العمودي على المستوى هو  $\bar{n}$  ما لم ينص غير

ذلك. وتكتب  $A \parallel \pi$  وإذا كان  $A$  واقع في  $\pi$  فإننا نكتب  $A \in \pi$ . وباستخدام

هذه العلاقة يمكن عرض الحالات الخاصة للمستوى باستخدام المعادلة العامة للمستوى

$$\pi: A_i x^i + C = 0 \text{ وهي } \pi$$

(i)  $A_1 = 0$  ، المستوى  $\pi$  يوازي الاتجاه  $e_1$  (يوازي محور  $x$ ).

(ii)  $A_2 = 0$  ، المستوى  $\pi$  يوازي الاتجاه  $e_2$  (يوازي محور  $y$ )

(iii)  $A_3 = 0$  ، المستوى  $\pi$  يوازي الاتجاه  $e_3$  (يوازي محور  $z$ )

(iv)  $C = 0$  فإن المستوى  $\pi$  يمر بنقطة الأصل.

(v)  $A_1 = A_2 = 0$  فإن المستوى يكون عمودي على الاتجاه  $e_3$  ويوازي المستوى

$$\text{الإحداثي } x^3 = 0 .$$

(vi)  $A_1 = A_3 = 0$  فإن المستوى يكون عمودي على الاتجاه  $e_2$  ويوازي المستوى

$$\text{الإحداثي } x^2 = 0 .$$

(vii) إذا كان  $A_2 = A_3 = 0$  فإن المستوى يكون عمودي على الاتجاه  $e_1$

$$\text{ويوازي المستوي الإحداثي } x^1 = 0 .$$

(viii) إذا كان  $A_1 = C = 0$  فإن  $e_1 \in \pi$  (المستوى يحتوي على محور  $x$ )

(ix) إذا كان  $A_1 = A_2 = C = 0$  فإن  $\pi$  تنطبق على المستوى الإحداثي  $x^3 = 0$ .

وهكذا.

مثال (٣): أوجد معادلة المستوى الذي يمر بنقطتين معلومتين  $(x_\alpha^i)$   $\alpha = 1, 2, M_\alpha$

$$\text{ويوازي اتجاه معلوم } \bar{A} = (\ell^i) .$$

الحل: نفرض أن متجهها الموضع للنقطتين  $M_\alpha$  هما  $R_\alpha$  ونحاول إيجاد اتجاه العمودي

على المستوى المطلوب، من النقطتين  $M_\alpha$  يمكن تحديد اتجاه واقع في المستوى مثلاً

$\overline{M_1 M_2}$  ويوجد اتجاه آخر يوازي  $\bar{A}$  واقع أيضاً في المستوى. إذن المتجه

$\overline{A \times M_1 M_2}$  عمودي على المستوى ونأخذ نقطة معلومة من النقطتين  $M_\alpha$

ولتكن  $M_1$  وبذلك تكون معادلة المستوى هي

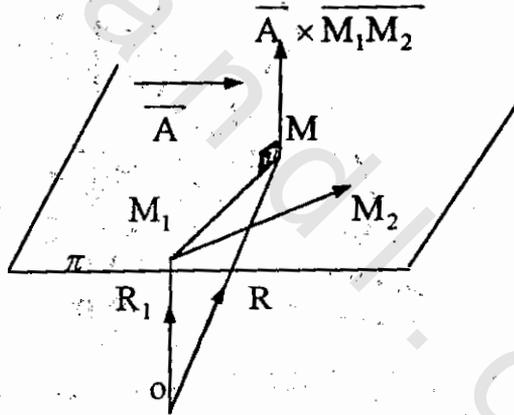
$$\langle R - R_1, \overline{A \times M_1 M_2} \rangle = 0 \quad (6)$$

$$\left[ R - R_1, \overline{A}, \overline{M_1 M_2} \right] = 0 \quad \text{أو}$$

حيث  $R$  متجه الموضع لأي نقطة عامة  $M(x^1, x^2, x^3)$  (شكل ٥).

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_1^1 & x^2 - x_1^2 & x^3 - x_1^3 \\ \ell^1 & \ell^2 & \ell^3 \\ x_2^1 - x_1^1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{أو بالتفصيل}$$

وبفك المحدد نحصل على معادلة خطية في الإحداثيات  $(x^i)$  لأي نقطة عامة على المستوى.



شكل (٥)

مثال (٤): أوجد معادلة المستوى الذي يمر بثلاث نقاط  $M_1 = (x_1^i)$ .

الحل: المستوى المطلوب يجوي ثلاث نقاط  $M_1$  ومنهم يمكن تكوين متجهين مستقلين

واقعين في المستوى وليكن  $\overline{M_1 M_2}, \overline{M_1 M_3}$  ونفرض أن النقطة المعلومة هي  $M_1$

وأن  $M$  أي نقطة عامة في المستوى ويكون اتجاه العمودي  $\bar{n}$  على المستوى هو

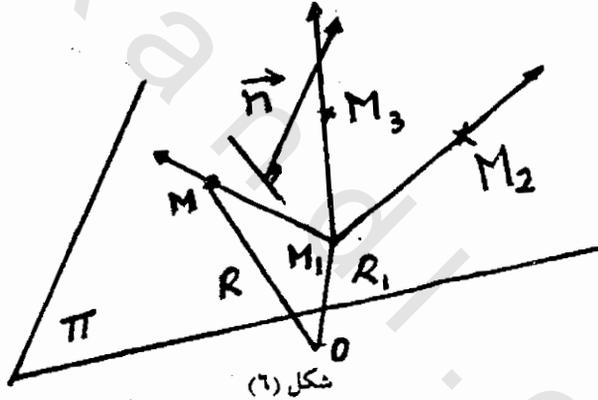
$\overline{M_1 M_3} \times \overline{M_1 M_2}$  وعليه فإن معادلة المستوى هي

$$[\overline{R - R_1}, \overline{M_1 M_2}, \overline{M_1 M_3}] = 0 \quad (7)$$

حيث  $R, R_1$  هما متجهتا الموضع للنقاط  $M, M_1$  على الترتيب (شكل ٦).

إذن معادلة المستوى في صورة صريحة هي :

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_1^1 & x^2 - x_1^2 & x^3 - x_1^3 \\ x_2^1 - x_1^1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ x_3^1 - x_1^1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \end{vmatrix} = 0$$



مثال (٥): أوجد معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات.

الحل: نفرض أن المستوى يقطع من محاور الإحداثيات  $OX_1, OX_2, OX_3$  الأجزاء

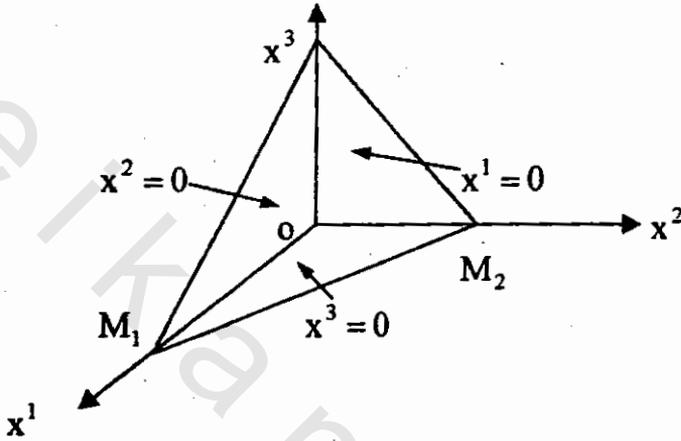
$a^1, a^2, a^3$  على الترتيب. إذن نقاط تقاطع المستوى مع محاور الإحداثيات هي

$M_1(a^1, 0, 0), M_2(0, a^2, 0), M_3(0, 0, a^3)$  وبالتالي المستوى المطلوب بمسوي

ثلاث نقاط وباستخدام المعادلة (7) نحصل على معادلة المستوى بدلالة الأجزاء

المقطوعة the intercepts من محاور الإحداثيات على الصورة (شكل ٧).

$$\frac{x^1}{a^1} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} = 1 \quad (8)$$



شكل (٧)

وهذا المستوى يمكن اعتباره اتحاد ثلاثة مستويات تعرف من المعادلات

$$x^3 = 0, \frac{x^1}{a^1} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad x^2 = 0, \frac{x^1}{a^1} + \frac{x^3}{a^3} = 1, \quad x^1 = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} = 1$$

(٤.١.٢) المعادلات البارامترية للمستوى :

بما أن المستوى في الصورة العامة يعطى من  $ax + by + cz + d = 0$  مثلاً، فإنه إذا ما أعطينا مثلاً  $x, y$  فإنه يمكننا الحصول على  $z$  أي أن كل نقطة في المستوى تعتمد على بارامترين  $x, y$  مثلاً ولتوضيح ذلك في الشكل العام.

نفرض أن لدينا مستوى  $\pi$  يمر بنقطة  $M_0 = (x_0^i)$  ويحتوي على الاتجاهين

$M = (x^i) \in \pi$  فإن المتجهات  $A_\alpha = (a_\alpha^i), \alpha = 1, 2$  وإذا اعتبرنا نقطة عامة

$$\overline{M_0 M} = (x^i - x_0^i), A_\alpha$$

تقع في مستوى واحد أي أنها مرتبطة خطياً فيكون

$$\overline{M_0 M} = u^\alpha A_\alpha \quad (9)$$

حيث  $u^\alpha$  كميات قياسية ( $u^\alpha \in \mathbb{R}$ ). العلاقة (9) تأخذ الشكل الآتي :-

$$R = R_0 + u^\alpha A_\alpha, \quad R(u^1, u^2) = (x_0^i + u^\alpha a_\alpha^i) \quad (10)$$

$$= (x_0^1 + u^1 a_1^1 + u^2 a_2^1, \dots)$$

$$x^i = x_0^i + u^\alpha a_\alpha^i, \quad \forall i=1,2,3, \alpha=1,2 \quad (11)$$

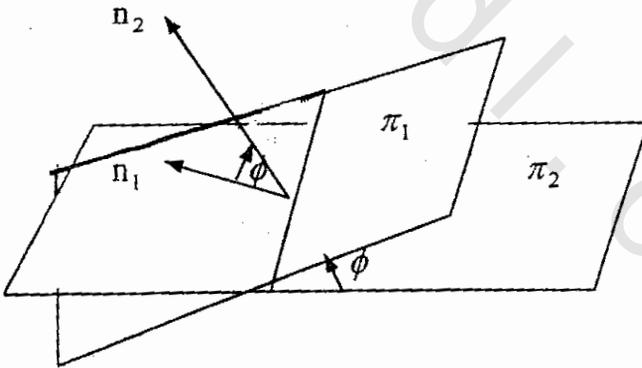
المعادلات (11) تسمى المعادلات البارامترية للمستوى و المعادلة (10) تسمى الدالة

الاتجاهية للمستوى وهي دالة اتجاهية خطية في متغيرين  $u^1, u^2$ .

تعريف (٢):

الزاوية بين المستويين  $\pi_\alpha: a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0$  حيث  $\alpha=1,2$  هي الزاوية  $\phi$  بين

العمودين  $A_1 = (a_i^1), A_2 = (a_i^2)$  على المستويين  $\pi_\alpha$  (شكل ٨) وتعطى من العلاقة:



شكل (٨)

$$\cos \phi = \frac{\langle A_1, A_2 \rangle}{|A_1| |A_2|} \quad (12)$$

يتوازي المستوى  $\pi_1$  مع المستوى  $\pi_2$  إذا تحقق أن  $A_1 \parallel A_2$  أي أن :

$$\frac{a_1^1}{a_1^2} = \frac{a_2^1}{a_2^2} = \frac{a_3^1}{a_3^2} \quad (13)$$

ويعتمد المستويين  $\pi_2, \pi_1$  إذا تحقق أن

$$\langle A_1, A_2 \rangle = 0 \quad (14)$$

وعلى الطالب أن يتأكد من هذه الحقائق وذلك بتصور فراغي للمستوى والعمودي عليه وعلاقته بالمستويات الأخرى.

(٢. ٥. ١) حزمة المستويات :-

معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين  $\pi_\alpha$ ، حيث  $\pi_\alpha : a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0$

$$\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0 \text{ تعطى من}$$

أو

$$\text{أو} \quad a_i^1 x^i + C_1 + \lambda (a_i^2 x^i + C_2) = 0$$

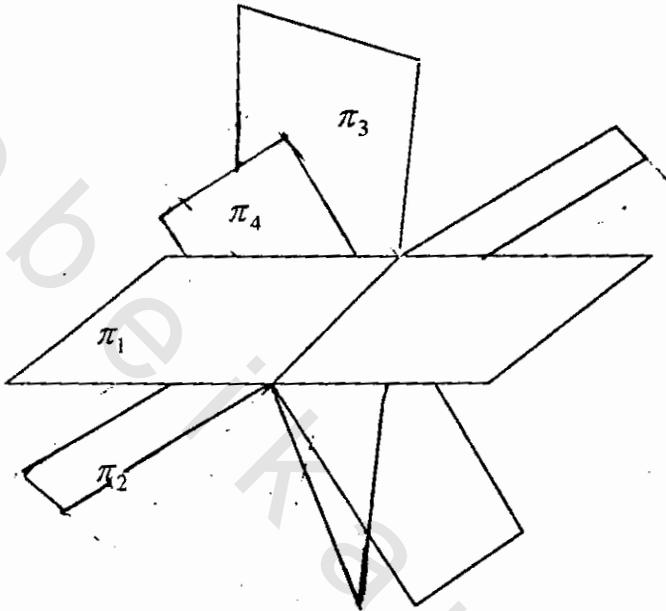
$$(a_i^1 + \lambda a_i^2) x^i + C_1 + \lambda C_2 = 0 \quad (15)$$

حيث  $\lambda$  عدد حقيقي يتعين بشرط إضافي على المستويين معا.

مجموعة المستويات التي تتحدد لجميع قيم  $\lambda$  الحقيقية تسمى حزمة المستويات ويرمز

لها بالرمز  $\pi_\lambda$ . المستويين  $\pi_2, \pi_1$  يسميان قاعدة الحزمة وخط تقاطع المستويين

يسمى محور الحزمة.



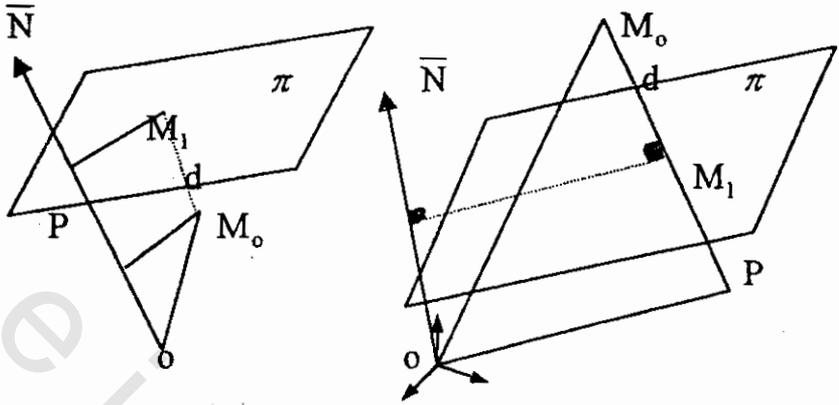
شكل (٩)

(٦.١.٢) بعد نقطة عن مستوى :-

نظرية : بعد النقطة  $M_0 = (x_0^i)$  عن المستوى  $\pi : a_i x^i + C = 0$  يعرف بأنه

$d = P_n \overline{M_0 M}$  حيث  $M \in \pi$  (شكل ١٠) ويعطى من

$$d = \frac{|a_i x_0^i + C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (16)$$



شكل (١٠)

البرهان: نحاول إثبات العلاقة (16) التي تعطي طول العمود الساقط من نقطة البرهان:  $M_0 \equiv (x_0^i)$  على المستوى  $\pi: a_i x^i + C = 0$ . لذلك نفرض أن موقع العمود الساقط من  $M_0$  على المستوى  $\pi$  هو النقطة  $M_1 \equiv (x_1^i)$  فيكون  $\overline{M_1 M_0} \perp \pi$  ويكون المتجه  $\overline{M_1 M_0} = d \underline{n}$  يساوي  $\underline{n}$  وحدة المتجهات في اتجاه العمودي على  $\pi$ .

أي أن

$$\underline{n} = \frac{(a_i)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad a_i x_1^i + C = 0$$

$$d = \left| \langle \underline{n}, \overline{M_1 M_0} \rangle \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \overline{M_1 M_0} = (x_0^i - x_1^i) \quad \text{ويكون}$$

$$= \left| \frac{a_i x_0^i - a_i x_1^i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

ولكن النقطة  $(x_1^i)^*$  تقع على المستوى  $\pi$  فهي تحقق معادلته أي  $-C = a_i x_1^i$  وبالتالي  
العلاقة (16) تنتج مباشرة.

(٧.١.٢) الوضع المتبادل لمستويين في الفراغ —  
نفرض أن لدينا مستويين

$$\pi_\alpha : a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0, \alpha = 1, 2 \quad (*)$$

ونعتبر الحالات الآتية:—

(i) إذا كان  $\frac{a_1^1}{a_2^1} \neq \frac{a_2^1}{a_2^2} \neq \frac{a_3^1}{a_3^2}$  فإن المستويان متقاطعان.

(ii) إذا كان  $\frac{a_1^1}{a_2^1} = \frac{a_2^1}{a_2^2} = \frac{a_3^1}{a_3^2} = \lambda$ ,  $\frac{C_1}{C_2} \neq \lambda$  فإن المستويان متوازيان.

(iii) إذا كان  $\frac{a_1^1}{a_2^1} = \frac{a_2^1}{a_2^2} = \frac{a_3^1}{a_3^2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$  فإن المستويان متطابقان.

(i) الشروط الضرورية والكافية لكي يتقاطع المستويان  $\pi_1, \pi_2$  هي أن يتحقق أحد  
الشروط الآتية:—

(١) المحددات ذات الرتبة الثانية المتكونة من أعمدة المصفوفة  $(a_i^\alpha)$  مختلفة عن  
الصفر ولتكن هي  $\Delta_i$ .

(٢) الأعمدة  $(a_i^2), (a_i^1)$  على المستويين غير متوازية.

(٣) رتبة مصفوفة المعاملات  $(a_i^\alpha)$  تساوي 2.

(ii) الشروط الواجب توافرها لكي تكون المستويين  $\pi_\alpha$  متوازية هي أن يتحقق أحد  
الشروط الآتية:—

(١) أن تكون التجهات  $(a_i^2), (a_i^1)$  متوازية أي أن  $\frac{a_i^1}{a_i^2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ ,  $\forall i$

(٢) أن كل محددات الرتبة الثانية المتكونة من أعمدة المصفوفة  $(a_i^\alpha)$  تساوي صفر وأن أحد المحددات الآتية :-

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & C_1 \\ a_1^2 & C_2 \end{vmatrix}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_2^1 & C_1 \\ a_2^2 & C_2 \end{vmatrix}, \delta_3 = \begin{vmatrix} a_3^1 & C_1 \\ a_3^2 & C_2 \end{vmatrix}$$

يكون مختلف عن الصفر.

(٣) رتبة المصفوفة  $(a_i^\alpha)$  تساوي واحد ورتبة المصفوفة الموسعة  $(a_i^\alpha | C_\alpha)$  تساوي 2.

(iii) شروط انطباق مستويين هو أن يتحقق أحد الشروط الآتية :-

$$\delta_i = \Delta_i = 0 \quad (1)$$

$$(2) \text{ التجهات } (a_i^2), (a_i^1) \text{ متوازية وأن } \frac{a_i^1}{a_i^2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \forall i$$

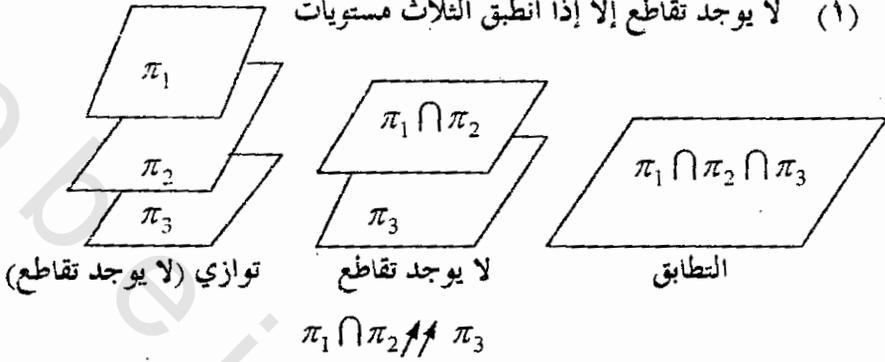
(٣) رتبة المصفوفة الموسعة  $(a_i^\alpha | C_\alpha)$  تساوي واحد.

وهذه الشروط يمكن التأكد منها (نعني البرهان) باستخدام رتبة المصفوفة الموسعة ورتبة مصفوفة المعاملات بحيث يكون نظام المعادلات (\*) متفق (متوافق) Consistent.

(٨.١.٢) الوضع المتبادل لثلاث مستويات في الفراغ:

توجد احتمالات كثيرة للوضع النسبي المتبادل للمستويات الثلاث  $\pi_j$  وخط تقاطع المستويات الثلاث. وهذه الأوضاع يمكن التعرف عليها من مناقشة الحلول الممكنة للمعادلات  $\pi_j: a_j^i x^i + b^j = 0, j=1,2,3$  ويمكن ترجمتها إلى الأشكال الآتية:

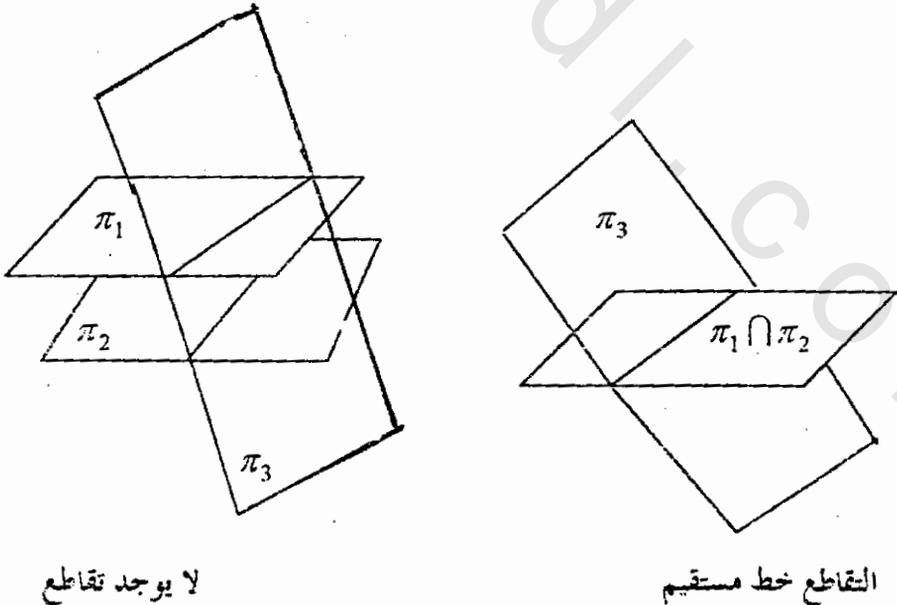
(١) لا يوجد تقاطع إلا إذا انطبق الثلاث مستويات



شكل (١١)

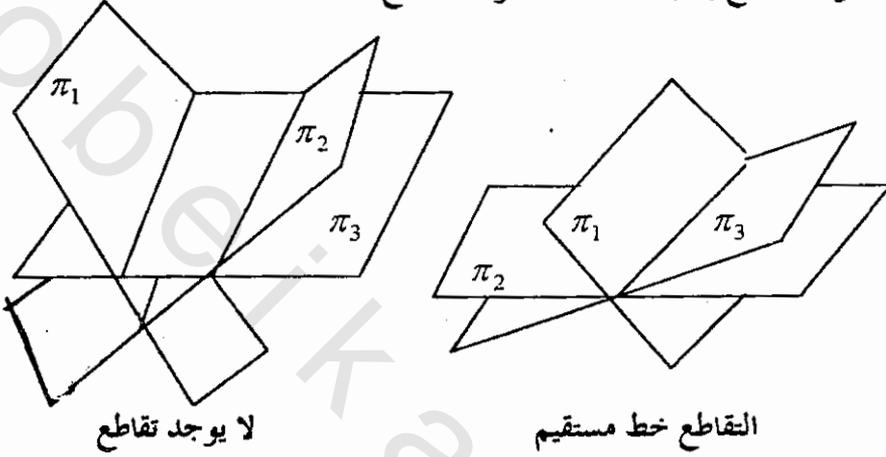
$\pi_1 \cap \pi_2$  تعني أن  $\pi_1$  ينطبق على  $\pi_2$ .

(٢) يتقاطع المستويات في خط مستقيم إذا أنطبق اثنين من المستويات وخلاف ذلك لا يوجد تقاطع (أي توازي مستويان وقطعا الثالث).



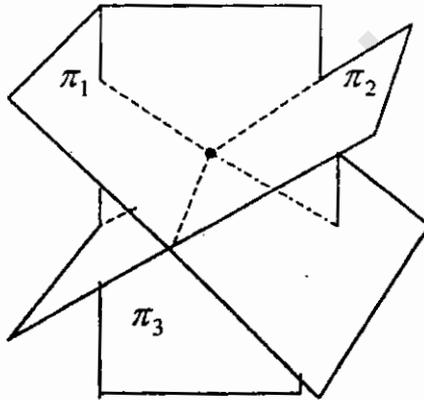
شكل (١٢)

(٣) إذا كان كل مستويان متقاطعان وخطوط تقاطعهما متوازيه في هذه الحالة لا يوجد تقاطع إلا إذا انطبقت خطوط التقاطع.



شكل (١٣)

(٤) إذا لم يوجد مستويان متوازيان وخطوط تقاطعهما غير متوازية فإن المستويات تتقاطع في نقطة ويمكن إيجادها بحل المعادلات الخطية الثلاث والتي تمثل المستويات آنيا Simultaneously (معا في وقت واحد) ويكون الحل وحيد



التقاطع نقطة

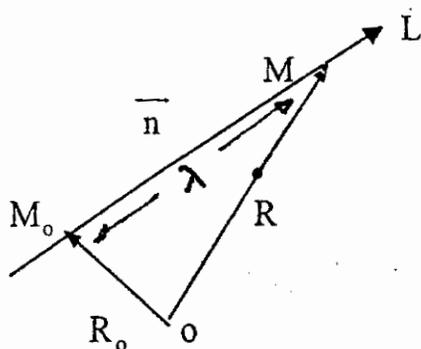
شكل (١٤)

### (٢.٢) الخط المستقيم في الفراغ $E^3$ :

من المعادلة المألوفة للخط المستقيم في المستوى وهي  $y = m x + c$  حيث  $m$  الميل أي أن معادلة الخط المستقيم في المستوى تتحدد بنقطة  $M_0$  والميل وهو اتجاه الخط المستقيم أي ظل الزاوية التي يصنعها الخط مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$  وإن كان هذا الاتجاه يمكن التعبير عنه  $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$  ويكون  $\vec{a}$  يكون اتجاه العمودي عليه هو  $(-\sin \theta, \cos \theta)$  ومنها نحصل على  $y = mx + c$  حيث  $m = \tan \theta$ . بنفس الأسلوب يمكن عرض معادلات الخط المستقيم في الفراغ كالآتي:—

نفرض أن لدينا خط مستقيم  $L$  ونقطة اختيارية عليه و  $L$  يمر بالنقطة  $M_0 = (x^i)$  وله اتجاه المتجه  $\vec{n} = (\ell^i)$ . إذن  $\vec{n} \perp \vec{M_0M}$  وبذلك تكون المركبات متناسبة، أي أن

$$\frac{x^i - x_0^i}{\ell^i} = \lambda, \quad \forall i \quad (17)$$



شكل (١٥)

المعادلة (17) يمكن كتابتها على الصورة

$$x^i = x_0^i + \lambda \ell^i, \quad i=1, 2, 3 \quad (18)$$

أو في الصورة الاتجاهية

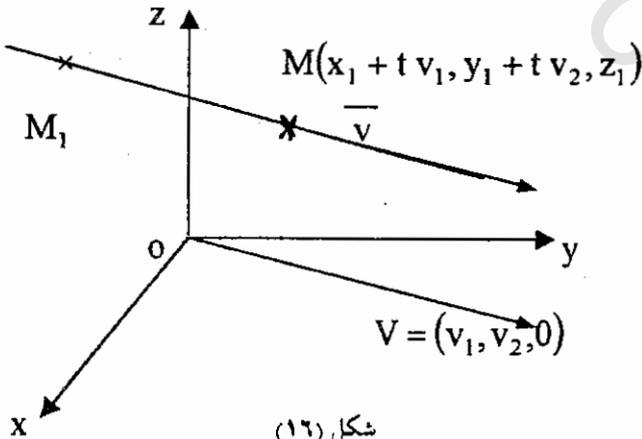
$$R = R_0 + \lambda n \quad (19)$$

حيث  $R, R_0$  متجهات النوضع للنقط  $M, M_0$  على الترتيب، المعادلات (17) تسمى المعادلات القانونية أو المتماثلة Symmetric equation، والمعادلات (18) تسمى المعادلات البارامترية Parametric equation للخط المستقيم  $L$  الذي اتجاهه  $n$  ويمر بنقطة معلومة  $M_0$ ،  $\lambda$  بارامتر أي لقيم البارامتر  $\lambda$  المختلفة نحصل على نقط مختلفة على الخط المستقيم، المعادلة (19) تعتبر تطبيق على الدالة الاتجاهية في متغير واحد (شكل ١٥).

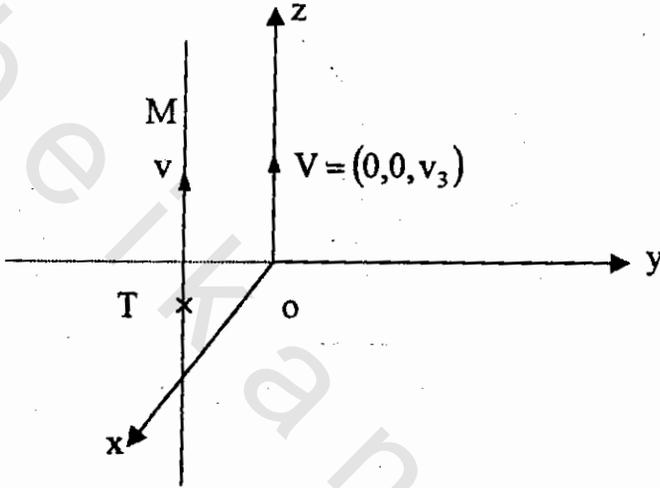
ونوضح هندسيا (أي بالرسم) المعادلات (17) في حالتين مثلا.

مثال (٦): الخط يوازي مستوى إحداثي وليكن يوازي المستوى  $xy$  ويمر بالنقطة  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  ويوازي الاتجاه  $(v_1, v_2, 0)$  الواقع في المستوى  $xy$  حيث  $v_1, v_2 \neq 0$  فإن معادلاته المتماثلة هي (شكل ١٦).

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}, \quad z = z_1$$



مثال (٧): الخط يوازي أحد محاور الإحداثيات وليكن محور  $z$  ويمر بالنقطة  $M_1$  ،  
 إذن معادلاته القياسية  $x = x_1, y = y_1$  .



شكل (١٧)

حيث  $T(x_1, y_1, 0)$  هي نقطة تقاطع الخط مع المستوى  $xy$  .

مثال (٨): أوجد المعادلات (17)، (18)، (19) للخط المستقيم المار بنقطتين  
 $\alpha = 1, 2 M_\alpha = (x_\alpha^i)$  .

الحل: استخدم  $\Gamma = r_1 + \lambda (r_2 - r_1)$  أو  $(\Gamma - r_1) \times (r_2 - r_1) = 0$  حيث  $\Gamma$  متجه  
 الموضع لأي نقطة عامة،  $r_\alpha$  متجهات الموضع للنقاط  $M_\alpha$  .

مثال (٩): أثبت أنه إذا وقعت النقط  $M_1, M_2, M_3$  على استقامة واحدة فإن :

$$r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1 = 0$$

الحل: بوضع  $r=r_3$  في المثال السابق واستخدام خاصية التوزيع نحصل على المطلوب.

(١.٢.٢) الوضع المتبادل لمستقيمين في الفراغ:

هنا نقوم بإعطاء الشروط الضرورية والكافية للوضع المتبادل لمستقيمين  $L_\alpha$  معطيان بالمعادلات القانونية الآتية:—

$$L_\alpha: \frac{x^i - x_\alpha^i}{l_\alpha^i} = \lambda, M_\alpha = (x_\alpha^i) \in L_\alpha, \forall i, \alpha$$

ونعتبر الحالات الآتية:—

(١) المستقيمان  $L_\alpha$  لا يقعان في مستوى واحد إذا تحقق

$$\Delta = [l_1, l_2, L_{12}] \neq 0$$

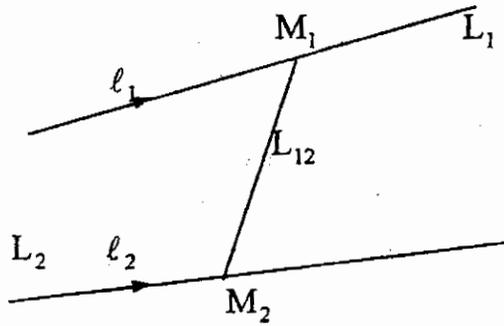
$$\text{حيث } l_\alpha = (l_\alpha^i), L_{12} = (x_1^i - x_2^i)$$

(٢) المستقيمان متقاطعان إذا تحقق  $\Delta = 0$  وأن  $l_1, l_2$  غير متوازيين.

(٣) المستقيمان متوازيان إذا تحقق  $l_1 \parallel l_2$  ولكن المتجه  $L_{12}$  لا يوازيهما أي أن  $\Delta = 0$ .

(٤) المستقيمان منطبقان إذا تحقق أن  $L_{12}, l_1, l_2$  تقع على استقامة واحدة أي أن  $\Delta = 0$ ، البرهان متروك للطالب ويمكن استخدام مفهوم الاستقلال والارتباط

الخطي وحاصل الضرب الثلاثي القياسي (شكل ١٨).



شكل (١٨)

مثال (١٠): أثبت أن الشرط (٤) يمكن كتابته في الصورة

$$\frac{x_3^1 - x_1^1}{x_2^1 - x_1^1} = \frac{x_3^2 - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{x_3^3 - x_1^3}{x_2^3 - x_1^3}$$

حيث  $M_3 = (x_3^i)$

(٢.٢.٢) الوضع المتبادل للمستوى والمستقيم:

نفرض أن لدينا مستقيم  $L$  اتجاهه  $\ell = (\ell^i)$  يمر بالنقط  $M_0 = (x_0^i)$  ومستوى

معطى بالمعادلة  $a_i x^i + C = 0$  أي العمودي عليه  $n = (a_i)$ ، نعتبر الحالات الآتية:—

(١) المستقيم والمستوى متقاطعان: —  $\langle n, \ell \rangle \neq 0$  (نقطة التقاطع وحيدة):

(٢) المستقيم والمستوى متوازيان: —  $\langle n, \ell \rangle = 0$ ;  $a_i x_0^i + C \neq 0$

(٣) المستقيم يقع في المستوى: —  $\langle n, \ell \rangle = 0$ ;  $a_i x_0^i + C = 0$

البرهان: المعادلات البارامترية للخط المستقيم هي

$$x^i = x_0^i + \lambda \ell^i, \quad \forall i$$

وبالتعويض عنها في معادلة المستوى نحصل على

$$\lambda = \frac{a_i x_0^i + C}{-\langle n, \ell \rangle}$$

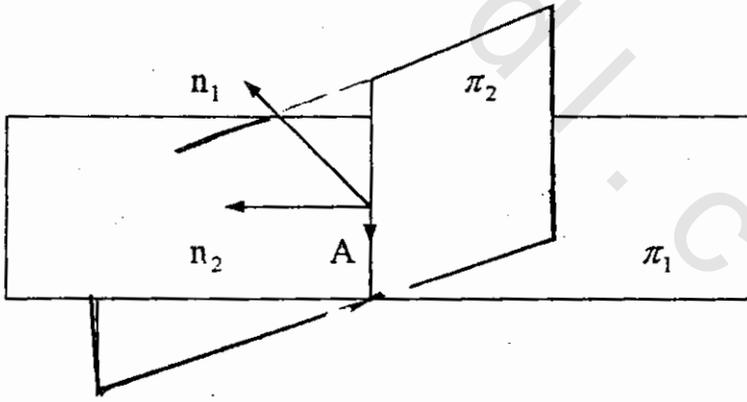
أي أن المستوى والمستقيم لهما نقطة مشتركة ولذلك فهما متقاطعين إذا كان  $\langle n, \ell \rangle \neq 0$  وهكذا يمكن تكملة البرهان.

(إرشاد : بالنسبة للحالة (٣) ناقش الحالات التي فيها  $\ell$  مقدار لانهائي،  $\ell$  كمية غير معينة على الصورة  $(\frac{0}{0})$  .

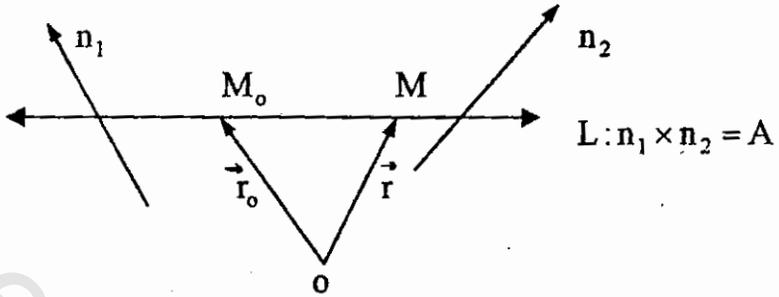
(٣.٢.٢) المستقيم كخط تقاطع مستويين :

من هندسة الفراغ نعلم أنه إذا تقاطع مستويين فيكون ناتج التقاطع خط مستقيم (شكل ١٩) ولذلك يكون الخط المستقيم هو مجموعة كل النقاط الهندسية  $(x^i)$  التي تحقق المعادلتين.

$$\pi_\alpha : a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0, \alpha = 1, 2 \quad (20)$$



شكل (١٩)



شكل (٢٠)

للحصول على المعادلات القانونية للخط المستقيم (20) يجب تعيين نقطة  $M_0 = (x_0^i)$  تحقق المعادلات (20) وهي بذلك تقع على المستقيم. كذلك الاتجاه

$$\text{حيث } A = (\Delta_i) = n_1 \times n_2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3^1 & a_1^1 \\ a_3^2 & a_1^2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

هو اتجاه خط تقاطع المستويين (20) وذلك لأن  $\langle n_1, A \rangle = 0, \langle n_2, A \rangle = 0$  حيث  $n_\alpha = (a_i^\alpha)$  أعمدة على المستويين  $\pi_\alpha$ . ويمكن للطالب أن يتأكد من ذلك؟ وذلك باستخدام تعريف حاصل الضرب القياسي ومفكوك المحددات (شكل ٢٠).  
وعليه فإن المعادلات القانونية للخط المستقيم هي :

$$\frac{x^i - x_0^i}{\Delta_i} = \lambda, \forall i, M = (x^i) \in L$$

مثال (١١): كيف يمكن تعيين النقطة الاختيارية  $M_0$  كي تحقق المعادلات (20)؟

الحل: نختار أحد المركبات للنقطة العامة  $(x_i)$  بقيمة معينة (أي عدد حقيقي) وليكن مثلاً  $x_1 = 0$  وبالتعويض عنها في المعادلات (20) نحصل على معادلتين في مجهولين

$x_2, x_3$  نقوم بجعلهما آتيا ونحصل على النقطة  $M_0$  في الصورة  $(0, x_1, x_2)$  أو بأي اختيار للمركبة  $x_1$  أو  $x_2$  أو  $x_3$ .

(٤.٢.٢) معادلات خط أقصر بعد بين مستقيمين :  
لنعتبر المستقيمين  $L_\alpha$  حيث

$$L_\alpha : \frac{x^i - x_\alpha^i}{l_\alpha^i} = \lambda, \alpha = 1, 2; \forall i$$

هي المعادلات القانونية للخطوط  $L_\alpha$  (غير متقاطعان وغير متوازيان).

نفرض أن المستقيمان غير متوازيان أي أن

$$l_1 \times l_2 \neq 0, l_1 = (l_1^i), l_2 = (l_2^i)$$

وبالتالي يكون  $l_1 \times l_2$  هو اتجاه العمودي على كل منهما. خط أقصر بعد بينهما

هو ذلك المستقيم  $L$  العمودي على  $L_\alpha, \forall \alpha$  فيكون اتجاه خط أقصر بعد هو اتجاه

المتجه  $l_1 \times l_2$ .

ومعادلات خط أقصر بعد تتعين باعتباره خط تقاطع مستويين  $\pi_\alpha$  حيث  $\pi_1$  يحتوي

على المستقيم  $L_1$  والنقطة  $M_1$  وخط أقصر بعد  $l_1 \times l_2$ ,  $\pi_2$  يحتوي على المستقيم

$L_2$  والنقطة  $M_2$  وخط أقصر بعد  $l_1 \times l_2$  أي أن المستويين  $\pi_\alpha$  هما:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 : [\overline{M_1 M}, l_1, l_1 \times l_2] &= 0 \\ \pi_2 : [\overline{M_2 M}, l_2, l_1 \times l_2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

حيث  $\overline{M_\alpha M} = (x^i - x_\alpha^i)$  متجه واقع في المستوى  $\pi_\alpha$ .

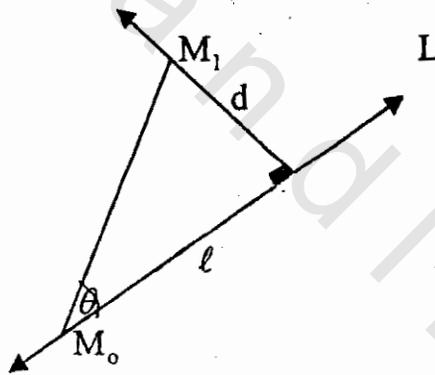
مثال (١٢): أكتب المعادلات (21) في شكل صريح بدلالة  $x^i, x_\alpha^i, l_\alpha^i$ .

الحل: بفك المحددات المثلثة لحاصل الضرب الثلاثي القياسي نحصل على المطلوب.

نعتبر في الفراغ  $E^3$  النقطة  $M_1 \equiv (x_1^i)$  والمستقيم  $L$ ،  $\forall i$   $\frac{x - x_0^i}{\ell^i} = \lambda$ ، بعد النقطة  $M_1$  عن المستقيم  $L$  والذي نرمز له بالرمز  $d$  يمكن اعتباره ارتفاع متوازي الأضلاع الذي فيه المتجهين  $\overline{M_0 M_1} = (x_1^i - x_0^i)$ ،  $\ell = (\ell^i)$  ضلعين متجاورين فيكون

$$d = \frac{|\overline{M_0 M_1} \times \ell|}{|\ell|} = |\overline{M_0 M_1}| \sin \theta \quad (22)$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1^1 - x_0^1 & x_2^1 - x_0^2 & x_3^1 - x_0^3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{vmatrix} / |\ell|$$



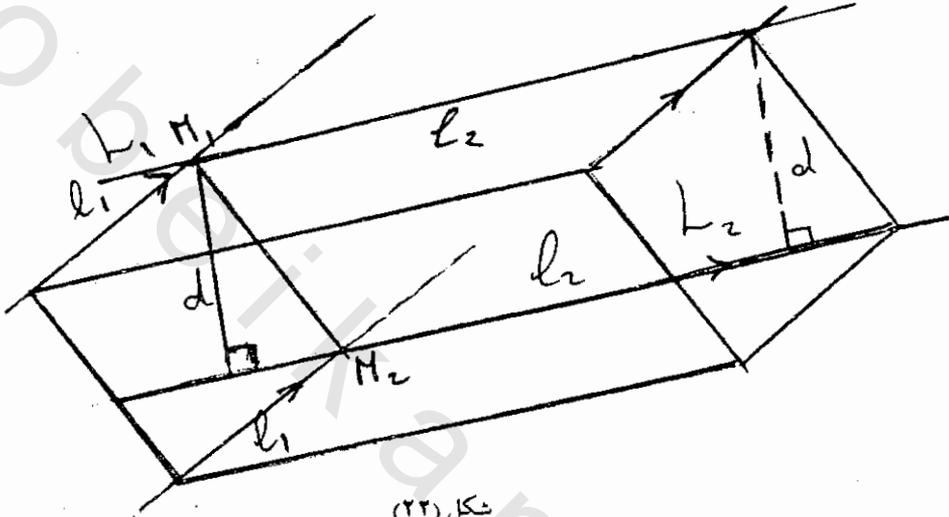
شكل (٢١)

العلاقة (22) تعطي بعد النقطة  $M_1$  عن المستقيم  $L$  (شكل ٢١).

نعتبر الآن المستقيمين  $L_\alpha$  الغير واقعين في مستوى واحد حيث

$$L_\alpha : \frac{x^i - x_\alpha^i}{\ell_\alpha^i} = \lambda, \alpha = 1, 2 \forall i$$

خط أقصر بعد هو خط مستقيم عمودي على كل من المتجهين  $l_\alpha = (l_\alpha^i)$  وهما اتجاه المستقيمين  $L_\alpha$  على الترتيب.



نعتبر المتجهات  $l_\alpha$ ,  $\overline{M_1M_2} = (x_2^i - x_1^i)$  والتي تكون متوازي مستطيلات حجمه  $V = [\overline{M_1M_2}, l_1, l_2]$  وقاعدته محددة بالمتجهين  $l_1, l_2$  ومساحتها هي  $S$  تعطى من  $S = |l_1 \times l_2|$  وبالتالي يكون طول أقصر بعد هو ارتفاع متوازي المستطيلات المنشأ على المتجهات  $\overline{M_1M_2}, l_\alpha$  ويعطى من

$$d = \frac{V}{S} = \frac{[\overline{M_1M_2}, l_1, l_2]}{|l_1 \times l_2|} \quad (23)$$

$$d = \overline{M_1M_2} \cdot \frac{e}{|e|}, \quad e = l_1 \times l_2 \quad \text{أو}$$

حيث  $e$  متجه في اتجاه العمودي على كل من المستقيمين  $L_\alpha$  (شكل ٢٢).

مثال (١٣): عين مسقط النقطة  $M_0 = (1, 2, 5)$  على المستوى  $\pi: 2x + y - z = 0$ .

الحل : المعادلات البارامترية للعمودي على المستوى  $\pi$  والمار بالنقطة  $M_0$  هي :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-1} = \lambda$$

مسقط النقطة  $M_0$  على  $\pi$  هو موقع العمود الساقط من  $M_0$  على  $\pi$ .

بالتعويض عن قيم  $x, y, z$  في معادلة المستوى  $\pi$  نجد أن  $\lambda = \frac{1}{6}$  وتكون إحداثيات

$$x = 1 + \frac{1}{3}, y = 2 + \frac{1}{6}, z = 5 - \frac{1}{6} \quad \text{هي المسقط}$$

(إرشاد: لاحظ أن مسقط نقطة على المستوى هي نقطة واقعة على المستوى وعلى العمودي

على المستوى المار بالنقطة المعطاة).

مثال (١٤): عين مسقط النقطة  $M_0 \equiv (3, 7, 1)$  على المستقيم

$$L : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$$

الحل: نعين معادلة المستوى  $\pi$  الذي يمر بالنقطة  $M_0$  وعمودي على المستقيم  $L$  وهي

$$\pi : x + y + 2z - 7 = 0 \quad \text{ثم نحل معادلة المستوى مع معادلة المستقيم } L \text{ نحصل على}$$

$$\text{إحداثيات مسقط } M_0 \text{ على } L \text{ وهي } \left( \frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3} \right).$$

(إرشاد: لاحظ أن مسقط  $M_0$  على  $L$  هو تقاطع المستوى  $\pi$  مع المستقيم  $L$ ).

$$\text{مثال (١٥): عين مسقط المستقيم } L : \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}$$

$$\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0$$

على المستوى

الحل: بما أن المسقط يقع في المستوى المعطى  $\pi$  فإن أحد معادلات المسقط هي المعادلة التي تصف المستوى  $\pi$ . والمعادلة الثانية نحصل عليها من مستوى الإسقاط وهو ذلك المستوى الذي يمر بالمستقيم  $L$  وعمودي على المستوى المسقط عليه أي المستوى الذي يحوي اتجاه  $L$  واتجاه العمودي على المستوى  $\pi$ . إذن المستوى المطلوب يعطى من:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أو

$$5x - 4y + z - 19 = 0$$

وتكون المعادلات المطلوبة هي

$$x + 2y + 3z + 4 = 0, \quad 5x - 4y + z - 14 = 0$$

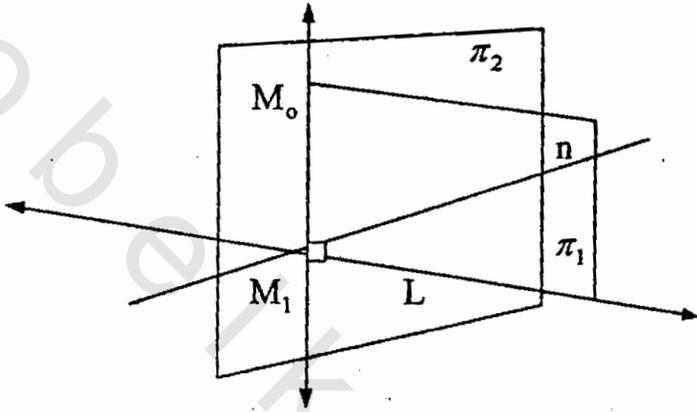
مثال (١٦): كون معادلة العمودي على المستقيم  $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$  من النقطة  $M_0 \equiv (3, 2, 1)$ .

الحل: نعتبر معادلة المستوى المار بالنقطة  $M_0$  وعمودي على المستقيم وهي

$$\pi_1: 2x + 4y + z - 15 = 0$$

نعتبر المستوى  $\pi_2$  المار بالنقطة  $M_0$  ويحتوي على المستقيم  $L$  وهذا المستوى يحتوي على النقطتين  $M_0, M_1 \equiv (0, 0, -3) \in L$  وبالتالي يحتوي على الاتجاه  $M_0M_1 \equiv (3, 2, 4)$  فتكون معادلته هي

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 14x - 5y - 8z - 24 = 0$$



شكل (٢٣)

المستويين  $\pi_1, \pi_2$  يقطعان في مستقيم يمر بالنقطة  $M_0$  وعمودي على المستقيمان  $L$  وبذلك تكون معادلاته هي معادلات المستويات  $\pi_1, \pi_2$  معا.

(٥.٢.٢) تطبيقات على تحليل المتجهات: التطبيقات كثيرة ومتعددة ولنأخذ منها حلول المعادلات الاتجاهية Solutions of vector equations أي مجموعة النقاط الهندسية التي تحقق مجموعة المعادلات الاتجاهية وفي هذه الحالة يكون الحل نقطة أو مستقيم أو مستوى.

مثال (١٧): أوجد المتجه  $r$  الذي يحقق

$$r \times b = a \times b \quad (1)$$

حيث  $a, b$  متجهان معلومان.

الحل: المعادلة (1) يمكن كتابتها في الصورة

$$(r - a) \times b = 0$$

أو ما يكافئ

$$r - a = tb, t \in \mathbb{R}$$

أو

$$r = a + tb, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

أي أن المعادلة (1) لها عدد لا نهائي من الحلول والحل (2) يعطي الحل العام والمعادلة الاتجاهية (2) تمثل خط مستقيم في الفراغ.

مثال (١٨): أوجد المتجه  $r$  الذي يحقق  $r \times b = a$  حيث  $b, a$  متجهان معروفان ويحققان أن  $a$  عمودي على  $b$ .

الحل: نعتبر المتجهات المستقلة خطياً  $a, b, a \times b$  وتكتب  $r$  كتركيب خطي من هذه المتجهات على الصورة

$$r = xa + yb + z a \times b$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة واستخدام خواص الاستقلال الخطي نحصل على

$$x = 0, z = -\frac{1}{\langle b, b \rangle}$$

أي أن

$$r = y b - \frac{1}{\langle b, b \rangle} a \times b \quad (*)$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة يمكن أن نرى أن  $(*)$  هو حل للمعادلة المعطاة لجميع قيم  $y$ . ولهذا نعتبر  $(*)$  حل عام للمعادلة المعطاة حيث  $y$  بارامتر.

هندسياً يمكن القول أن المعادلة  $(*)$  تمثل خط مستقيم يمر بالنقطة  $-\frac{1}{\langle b, b \rangle} a \times b$

ويوازي الاتجاه  $b$ .

مثال (١٩): أوجد حل مجموعة المعادلات الاتجاهية

$$r \times b = c \times b \quad (1)$$

$$\langle r, a \rangle = 0 \quad (2)$$

بشرط أن  $a$  ليست عمودي على  $b$ .

الحل: من المعادلة (1)

$$(r - c) \times b = 0$$

أو

$$r = c + tb, t \in \mathbb{R}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على

$$\langle c, a \rangle + t \langle b, a \rangle$$

$$t = -\frac{\langle c, a \rangle}{\langle b, a \rangle}, \langle b, a \rangle \neq 0$$

$$r = c - \frac{\langle c, a \rangle}{\langle b, a \rangle} b$$

إذن

لاحظ أن المعادلة الثانية تعرف مستوى يمر بنقطة الأصل وعمودي على المتجه  $a$ .

وبالتالي فإن حل المعادلات (1)، (2) يمثل نقطة تقاطع الخط المستقيم  $r = c + tb$  مع

المستوى  $\langle r, b \rangle = 0$ .

مسألة (٢٠): أوجد المتجه  $r$  الذي يحقق

$$kr + r \times a = b, \quad (*)$$

$k$  عدد قياسي مختلف عن الصفر،  $a, b$  متجهات معلومة.

الحل: نكتب  $r$  تركيب خطي من المتجهات المستقلة خطياً  $a, b, a \times b$  على

الصورة

$$r = xa + yb + za \times b$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على (استخدام تعريف الاستقلال الخطي).

$$x = \frac{\langle a, b \rangle}{k(k^2 + a^2)}, \quad y = \frac{k}{k^2 + a^2}, \quad z = \frac{1}{k^2 + a^2}$$

حيث  $a^2 = \langle a, a \rangle$  أي أن

$$r = \frac{1}{k^2 + a^2} \left\{ \frac{\langle a, b \rangle}{k} a + k b + a \times b \right\}$$

وهذا هو الحل الوحيد الذي يحقق (\*).

### تمارين (٣)

١- كون معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين

$$2x + 3y - z + 2 = 0, x + y - 5z - 1 = 0$$

و يمر بالنقطة  $M_0 = (3, 2, 1)$ .

٢- عين معادلة المستوى العمودي على المستوى  $2x - 5y + z - 3 = 0$  ويقطعه في

مستقيم يقع في المستوى الإحداثي  $y = 0$ .

٣- عين معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين  $x + 2y - z - 2 = 0$ ,

$x + 3y - 2z - 5 = 0$  ويوازي  $e_1$ .

٤- كون معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين

$\alpha = 1, 2, a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0$  وينقطة الأصل.

٥- عين معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين

$$3x + y - 7z = 0, 2x - y - 12z - 3 = 0$$

والعمودي على المستوى  $x + 2y + 5z - 1 = 0$ .

٦- عين معادلة مسقط المستقيم

$$3x - 2y - z + 4 = 0, x - 4y - 3z - 2 = 0$$

$$5x + 2y + 2z - 7 = 0$$

على المستوى

٧- عين معادلة المستوى المار بنقطة الأصل وعمودي على المستقيم

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+7}{4} = \frac{z+3}{1}$$

ثم عين الزاوية التي يصنعها هذا المستوى مع المستوى الإحداثي  $z = 0$ .

٨- عين معادلة المستوى المار بالنقطة  $(0, 1, 1)$  وعمودي على المستويين

$$3x - y + 2z + 5 = 0, x + 2y - z + 5 = 0$$

٩- عين طول أقصر بعد ومعادلات أقصر بعد بين المستقيمين

$$L_1: x=1+2\lambda, y=-1+3\lambda, z=5\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x=3\mu, y=3+4\mu, z=1+2\mu, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

١٠- أوجد معادلة المستوى الذي يحتوي على المستقيمين المتوازيين

$$L_1: x=3+2\lambda, y=-4+\lambda, z=1+3\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x=-1+2\mu, y=2+\mu, z=-3+3\mu, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

وأوجد البعد العمودي بين المستويين.

١١- أثبت أن المستقيمين

$$L_1: x=4+\lambda, y=5+3\lambda, z=-6-4\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x=3+\mu, y=-4-3\mu, z=5+3\mu, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

يتقاطعان وأوجد إحداثيات نقطة التقاطع وطول العمود الساقط من النقطة

$(3, -2, 3)$  على المستوى الذي يحتوي على هذين المستقيمين.

$$١٢- \text{عين البعد بين المستقيمين } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}, \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{2}$$

(إرشاد: المستقيمان المتوازيان يكون البعد بينهما هو بعد أي نقطة عن الآخر).

١٣- أثبت أن المستقيم

$$6x+4y-5z=4, x-5y+2z=12$$

$$x=9+2\lambda, y=-4-\lambda, z=5+\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{والمستقيم}$$

يقعان في مستوى واحد وأوجد معادلته.

١٤- أوجد معادلة المستوى الذي يحتوي على المستقيم

$$x+y+z=3, 3x+5y+2z=5$$

$$4x+y+z=0, 2x-3y-5z=0 \quad \text{ويوازي المستقيم}$$

١٥- أثبت أن المستقيمين

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{0}, \quad \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

متقاطعين وبين نقطة تقاطعهما.

(إرشاد: بالنسبة للمستقيمين غير متوازيين نحسب طول أقصر بعد ثم نقوم بحل المعادلات

معاً).

١٦- عين أقصر بعد بين المستقيمين  $L_2, L_1$  حيث

$$L_1: x+y-2z+3=0, 2x+y+2z=0$$

$$L_2: x-2y+z=0, 3x+y-z-2=0$$

١٧- أثبت أن المستقيمين

$$x=4+t, y=-8-2t, z=12t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$x=3+2s, y=-1+s, z=-3-3s, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

غير متقاطعين وأوجد أقصر بعد بينهما.

١٨- أوجد أقصر مسافة بين الخطين

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$$

وأثبت أيضاً أن الخطوط تقع في مستوى واحد.

١٩- أوجد معادلة المستوى الذي يحتوي الخط  $x=2, y-z=0$  وعمودي على

المستوى  $x+z=3$ . وأوجد النقطة التي يقابل فيها المستوى المستقيم

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

٢٠- أوجد حجم الهرم المكون من الأوجه (المستويات) الآتية:

$$m y + n z = 0, n z + \ell x = 0, \ell x + m y = 0, \ell x + m y + n z = P$$

٢١- أوجد حل للمعادلات الاتجاهية الآتية

$$\langle r, n_1 \rangle = 1, \langle r, n_2 \rangle = 1 \text{ حيث } n_1, n_2 \text{ متجهات معروفة.}$$

٢٢- أوجد الشرط الذي يجعل المعادلات الآتية

$$r \times a = b, r \times c = d$$

متفقة Consistent أي لها حل  $r$  وأوجد الحل، حيث  $a, b, c, d$  متجهات

معروفة.

٢٣- أوجد نقاط تقاطع المستويات الثلاث

$$(i) \quad x + y + z = 0, 2x + 2y - 3z + 3 = 0$$

$$2x - 3y + 2z = 0$$

$$(ii) \quad 3x + 2y - 2z = 0, x - y + 2z - 11 = 0$$

$$9x + y + 2z - 20 = 0$$

٢٤- ارسم المستويات الآتية في الثمن الأول من الفراغ

$$(i) \quad x + 2y + 3z = 6, (ii) \quad y + 3z = 6$$

$$(iii) \quad x = 3, (v) \quad x + 2y = 5$$

$$(iv) \quad y = 4, (vii) \quad x + y - z = 1$$

٢٥- بين أن نقطة تقاطع المستوى  $\pi: ax + by + cz = d$  مع الخط المستقيم المار

بنقطة الأصل وعمودي على المستوى  $\pi$  هي  $(a, b, c)$ .

٢٦- أوجد المحل الهندسي لجميع النقاط التي تقع على مسافات متساوية من

المستويات

$$2x + 2y - z - 1 = 0, x - 2y + 2z + 1 = 0$$