

الباب الرابع

مقاطع سطوح الدرجة الثانية

Conic Sections of Quadrics

(١.٤) مقدمة:

لدراسة شكل سطح الدرجة الثانية $F(x, y, z) = 0$ يجب أن نعرف مقاطع السطح بمستويات مختلفة ويكفي أخذ مستويات الإحداثيات والمستويات التي توازيها كمقاطع ومنحنى المقطع عبارة عن قطع مخروطي conic section سبق أن درسه الطالب والمقاطع هي عبارة عن تشريح للسطح في اتجاهات مختلفة لمعرفة ما يحتويه السطح من أشكال هندسية.

مثال (١): الجسم الزائدي ذو الطيتين $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ - مقطعة بالمستوى

الإحداثي oxy ($z=0$) هو عبارة عن قطع ناقص تخيلي يعطى من $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

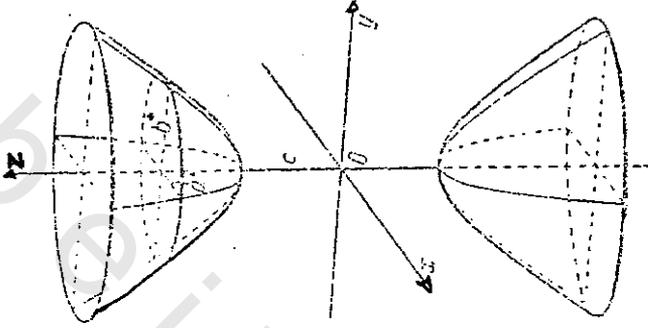
وكذلك مقطعة بالمستوى oxz هو قطع زائد $1 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$ محورة الحقيقي هو oz

والتخيلي هو ox وهكذا. إذا اعتبرنا المقطع $z = h$, $|h| > c$ فإننا نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2(h^2 - c^2)} + \frac{y^2}{b^2(h^2 - c^2)} = 1$$

أدرس الحالات $h = c$, $h < c$, $h > c$ ولاحظ على الرسم أن السطح مكون من جزئين منفصلين (طيتين) وكل طية شكلها عبارة عن وعاء مقعر لانهائي أنظر شكل

(١).



شكل (١)

مثال (٢): ابحث مقاطع سطح المكافئ الناقصي $ax^2 + by^2 = cz$.

الحل: مقطع السطح بالمستوى (xy) $z = 0$ هو نقطة حيث $a, b > 0$ ومقطعه

بالمستوى $z = h$ هو قطع ناقص في مستوى يوازي المستوى oxy ومعادلته :

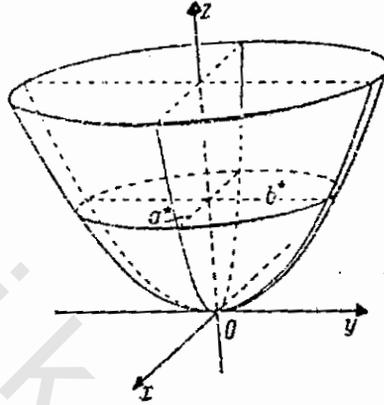
$$\frac{x^2}{\frac{ch}{a}} + \frac{y^2}{\frac{ch}{b}} = 1$$

ومقطعه بالمستوى (xz) $y = 0$ هو قطع مكافئ $x^2 = \frac{c}{a}z$ ، ومقطعه بالمستوى (yz)

$$y^2 = \frac{c}{b}z$$

وعموماً مقاطعه بمستويات توازي المستويات الإحداثية $x=0, y=0, z=0$ عبارة

عن قطاعات ناقصة أو مكافئة على الترتيب شكل (٢).



شكل (٢)

مثال (٣): إدرس مقاطع الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

الحل: مقطعه بالمستوى $z = h$ هو قطع ناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$

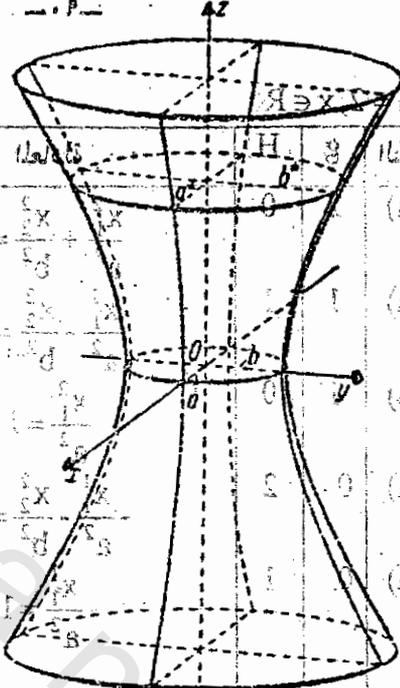
ومقطعه بالمستوى $x = h$ هو قطع زائد $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$ بشرط أن

$|h| < a$. ومقطعه بالمستوى $y = h$ هو قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$ بشرط أن

$|h| < b$

وهذا السطح يشبه برج التبريد المستخدم في الصناعة Cooling tower. ولتوضيح

القطاعات الزائدة أنظر الرسم شكل (٣).



شكل (٣)

$$0 = \frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2}$$

ولدراسة مقاطع سطوح الدرجة الثانية وجدنا أنه لزاماً علينا أن نقوم بمعرض واسترجاع القطاعات المخروطية وذلك في أشكالها القياسية والتي تظهر بدورها في مقاطع سطوح الدرجة الثانية في الصور القياسية بمقاطع تنطبق على مستويات الإحداثيات أو توازيها.

(٢.٤) تصنيف المحال الهندسية المقابلة لمعادلة الدرجة الثانية

(٤.١) نفرض أن g عدد الإشارات الموجبة، h عدد الإشارات السالبة في معادلة الدرجة الثانية في الصيغة القياسية (الجزء التربيعي في المعادلة):

(٤.١) (ii) $0 \quad 0 \quad 0$

(٤.١) (ii) $0 \quad 0 \quad 0$

(٤.١) (ii) $0 \quad 0 \quad 0$

$n=2, x \in \mathbb{R}^2$

أولاً : في المستوى

مسلسل	النوع	g	H	المعادلة	الحل الهندسي
(1)	(ia)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	قطع ناقص
(2)	(ia)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	قطع زائد
(3)	(ia)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2} = 1$	خطين مستقيمين متوازيين
(4)	(ia)	0	2	$-\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	ϕ
(5)	(ia)	0	1	$-\frac{x_1^2}{a^2} = 1$	ϕ
(6)	(ia)	0	0	$0=1$	ϕ
(7)	(ib)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$	نقطة
(8)	(ib)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0$	خطين مستقيمين متقاطعين
(9)	(ib)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2} = 0$	خط مستقيم
(10)	(ib)	0	0	$0=0$	مستوى صفري
(11)	(ii)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_2$	قطع مكافئ
(12)	(ii)	0	1	$-\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_2$	قطع مكافئ
(13)	(ii)	0	0	$0 = 2x_2$	خط مستقيم

ثانياً في الفراغ:

وهنا نقوم بعرض كل الصور القياسية لسطوح الدرجة الثانية التي تعرضنا لها وسوف تعمم في الفصول القادمة. ونعني بالصور القياسية أن محاور التماثل وكذلك مستويات التماثل (إن وجدت) هي محاور الإحداثيات أو مستويات الإحداثيات وذلك موضح في الجدول الآتي:

$$n=3, x \in \mathbb{R}^3$$

مسلسل	النوع	g	h	المعادلة	المحل الهندسي
(1)	(ia)	3	0	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$	الجسم الناقص
(2)	(ia)	2	1	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$	الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة
(3)	(ia)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	اسطوانة ناقصية
(4)	(ia)	1	2	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$	الجسم الزائدي ذو الطيتين
(5)	(ia)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	اسطوانة زائدية
(6)	(ia)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2} = 1$	مستويان متوازيان
(7)	(ia)	0	3	$-\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$	ϕ
(8)	(ia)	0	2	$-\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	ϕ
(9)	(ia)	0	1	$-\frac{x_1^2}{a^2} = 1$	ϕ

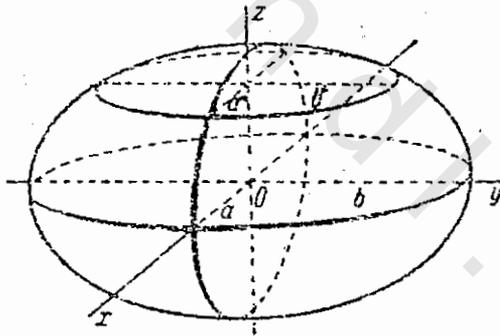
مسلسل	النوع	g	H	المعادلة	المحل الهندسي
(10)	(ia)	0	0	$0=1$	ϕ
(11)	(ib)	3	0	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0$	نقطة
(12)	(ib)	2	1	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$	مخروط
(13)	(ib)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$	نقطة
(14)	(ib)	1	2	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$	المخروط
(15)	(ib)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0$	مستويين
(16)	(ib)	1	0	$\frac{x_1^1}{a^2} = 1$	مستويين منطبقين
(17)	(ib)	0	0	$0=0$	الفراغ الصفري
(18)	(ii)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$	المجسم الناقص المكافئ
(19)	(ii)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$	المكافئ الزائدي
(20)	(ii)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_3$	الأسطوانة المكافئة
(21)	(ii)	0	2	$-\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$	المكافئ الناقص
(22)	(ii)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_3$	الأسطوانة المتوازية
(23)	(ii)	0	0	$0 = 2x_3$	مستوى

مثال (٤) : المجسم الناقص Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

المقطع الناتج	مستوى القاطع يوازي
قطع ناقص	المستوى — x_1x_2
قطع ناقص	المستوى — x_1x_3
قطع ناقص	المستوى — x_2x_3

انظر شكل (٤) ولاحظ المقاطع المختلفة وأوجد معادلاتهم؟.



شكل (٤)

مثال (٥) : المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة Hyperboloid of one sheet

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

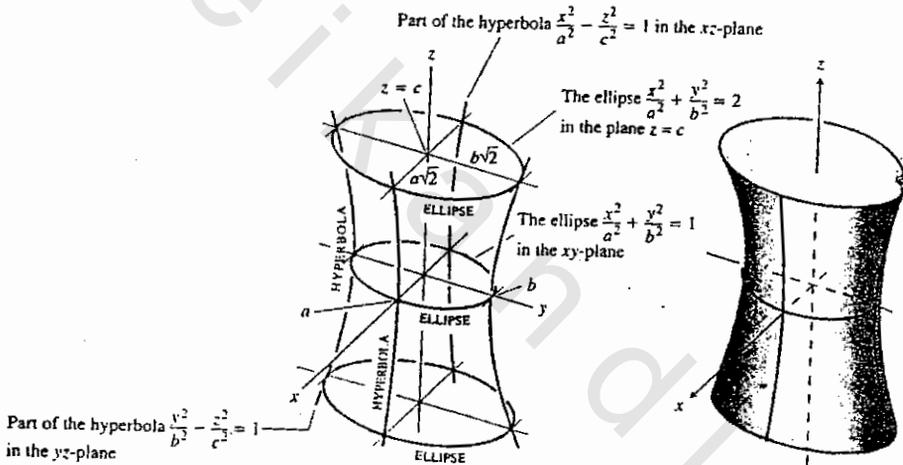
مستوى القاطع يوازي المقطع الناتج

المستوى — X_1X_2 قطع ناقص

المستوى — X_1X_3 قطع زائد

المستوى — X_2X_3 قطع زائد

والمقاطع موضحة على الجسم كما في شكل (٥) وأوجد معادلات المقاطع؟.



شكل (٥)

مثال (٦) : أسطوانة ناقصية Elliptic cylinder

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

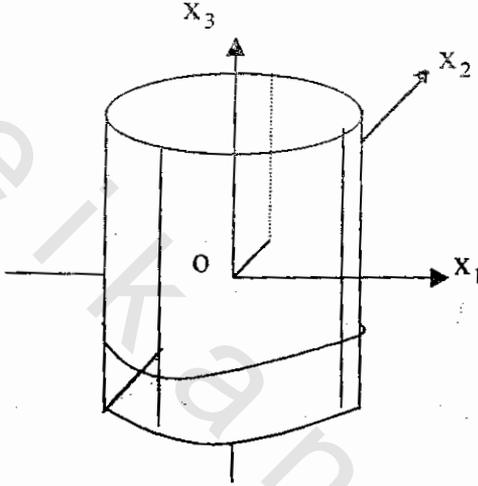
مستوى القاطع يوازي المقطع الناتج

المستوى — X_1X_2 قطع ناقص

المستوى — X_1X_3 مستقيمين متوازيان

المستوى — X_2X_3 مستقيمين متوازيان

والمقاطع موضحة كما في شكل (٦) وأوجد معادلاتهم؟.



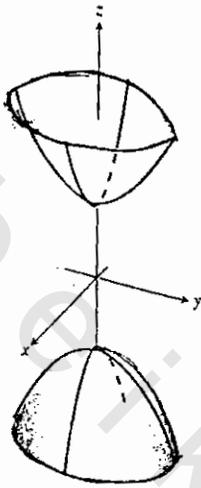
شكل (٦)

مثال (٧): الجسم الزائدي ذو الطيتين Two sheeted Hyperboloid

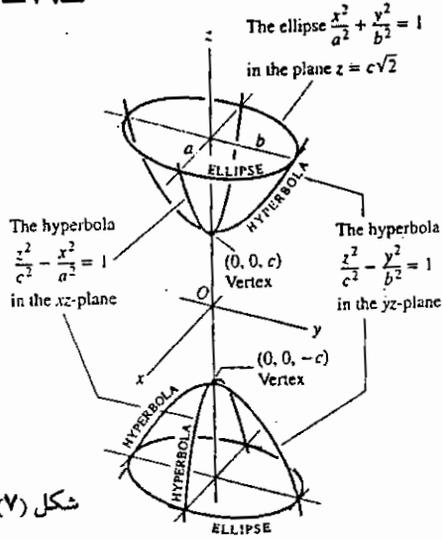
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

المقطع الناتج	مستوى المقاطع يوازي
قطع زائد	المستوى — x_1x_2
قطع زائد	المستوى — x_1x_3
قطع ناقص	المستوى — x_2x_3

انظر شكل (٧) وأوجد معادلات المقاطع الناتجة؟.



شكل (٧)



سؤال (٨): اسطوانة زائدية **Hyperboloid cylinder**

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

المقطع الناتج

مستوى القاطع يوازي

قطع ناقص

المستوى — x_1x_2

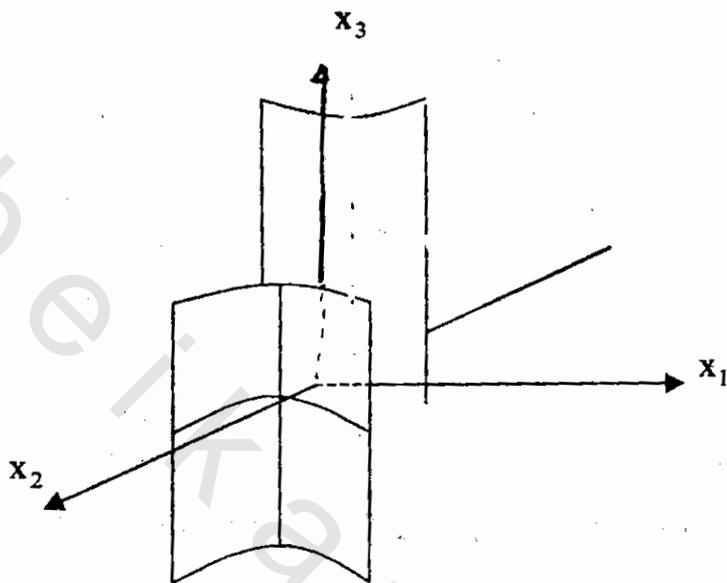
مستقيمين متوازيان

المستوى — x_1x_3

مستقيمين متوازيان

المستوى — x_2x_3

انظر شكل (٨) وأوجد معادلات المقاطع الناتجة؟.



شكل (٨)

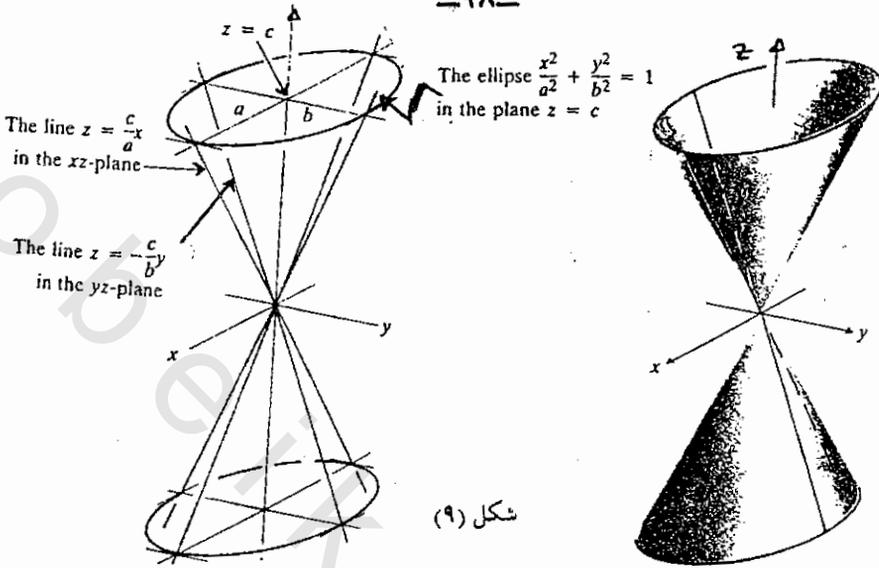
مثال (٩) : المخروط Cone

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$

المقطع الناتج	مستوى القاطع يوازي
قطع ناقص	المستوى — x_1x_2
قطع زائد	المستوى — x_1x_3
قطع زائد	المستوى — x_2x_3

والمقاطع بمستويات الإحداثيات هي نقطة (رأس المخروط) أو خطوط مستقيمة (رواسم

المخروط) (شكل (٩)).



إذا كان $c = 1$ يسمى المخروط بالمخروط الناقص شكل (٩). أي له المعادلة :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = X_3^2$$

مثال (١٠) : المكافئ الناقص Elliptic Paraboloid

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 2X_3$$

المقطع الناتج	مستوى القاطع يوازي
قطع ناقص	المستوى X_1X_2
قطع مكافئ	المستوى X_1X_3
قطع مكافئ	المستوى X_2X_3

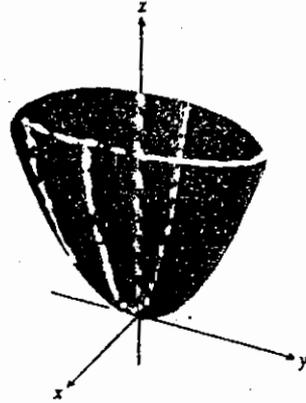
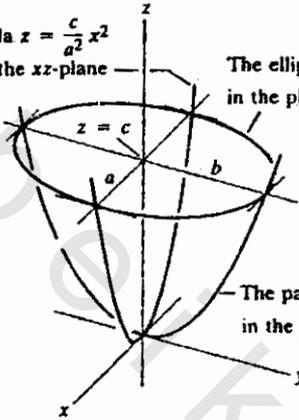
ومقطعه بالمستوى $X_3 = 0$ عبارة عن نقطة (شكل (١٠)) وهي رأس المجسم.

The elliptical paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

The parabola $z = \frac{c}{a^2} x^2$
in the xz -plane

The ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
in the plane $z = c$

The parabola $z = \frac{c}{b^2} y^2$
in the yz -plane



شكل (١٠)

مثال (١١): المكافئ الزائدي Hyperbolic Paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$$

المقطع الناتج

مستوى القاطع يوازي

قطع زائد

المستوى — x_1x_2

قطع مكافئ

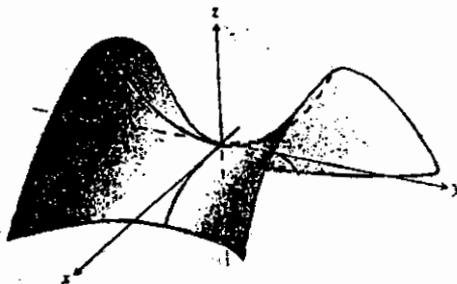
المستوى — x_1x_3

قطع مكافئ

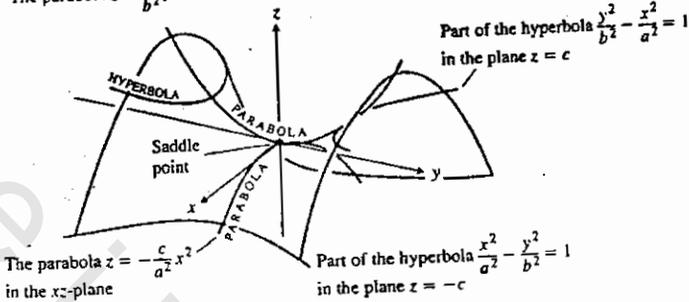
المستوى — x_2x_3

ومقطعه بالمستوى $x_3 = 0$ عبارة عن زوج من المستقيمات المتقاطعة أنظر شكل

(١١).



The parabola $z = \frac{c}{b^2}y^2$ in the yz -plane



The parabola $z = -\frac{c}{a^2}x^2$ in the xz -plane

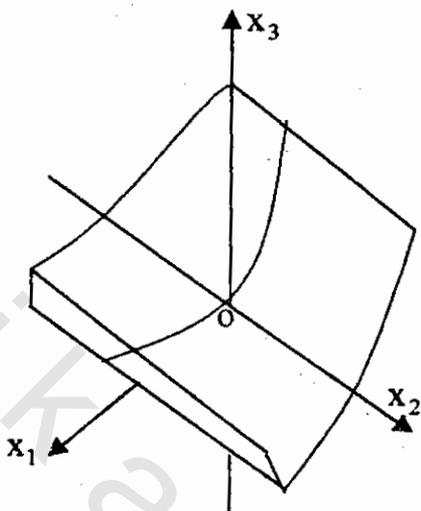
شكل (١١)

مثال (١٢): الأسطوانة المكافئة Parabolic Cylinder

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_3$$

المقطع الناتج	مستوى القاطع يوازي
مستويات متوازية	المستوى — x_1x_2
قطع مكافئ	المستوى — x_1x_3
خط مستقيم	المستوى — x_2x_3

كما هو مبين في شكل (١٢).

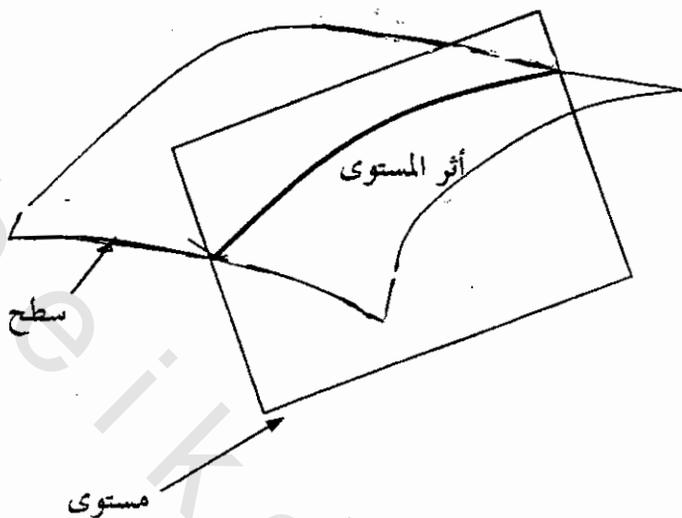


شكل (١٢)

سؤال (١٣): في كل المجسمات السابقة من (١) إلى (٩) أوجد الشروط اللازمة لكي تكون المقاطع حقيقية وأكتب معادلات المقاطع الناتجة من تقاطع المجسمات بمستويات توازي مستويات الإحداثيات.

(٣.٤) رسم السطوح في الفراغ:

لرسم السطح $F(x, y, z) = 0$ نقوم بدراسة جميع المقاطع المختلفة بمستويات — هذه المقاطع تسمى أثر المستوى مع السطح Trace of the surface وفي حالة سطوح الدرجة الثانية يسمى الأثر بالقطع المخروطي Conic section كما هو مبين بشكل (١٣).



شكل (١٣)

مثال (١٤): أرسم السطح المعطى بالمعادلة $z^2 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

الحل: المعادلة المعطاة تكتب في الصورة

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 4 \quad (1)$$

وهي تمثل مجسم زائدي ذو الطيتين.

نعتبر أثر المستوى $z = k$ (مقطع) مع السطح لجميع قيم k المختلفة، $k = 0$ المقطع مجموعة خالية، وهذا معناه أن السطح لا يقطع المستوى xy . بالمثل إذا كانت $-1 < k < 1$ فإن الأثر مجموعة خالية.

نعتبر $z = 1$ وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0$$

وحلها هو $(0, 0)$ أي أن المستوى $z = 1$ يقطع السطح في نقطة واحدة $(0, 0, 1)$.

إذا كانت $k > 1$ ($k < -1$) فإن أثر المستوى $z = k$ يعطي من

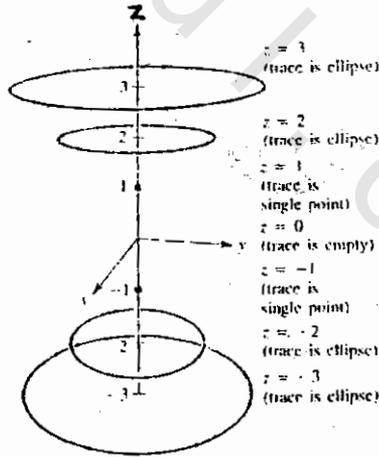
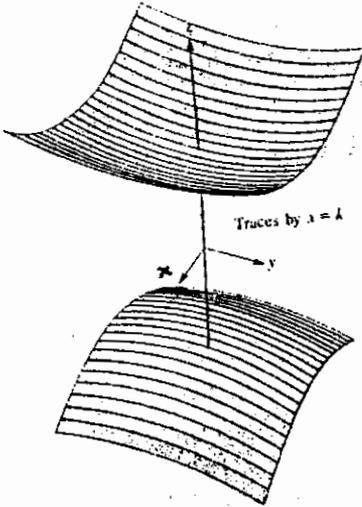
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = k^2 - 1$$

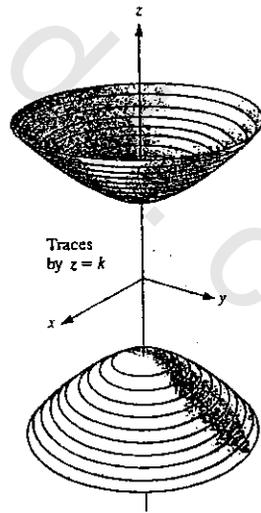
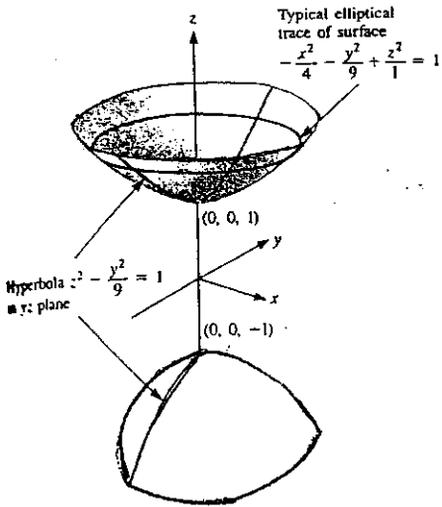
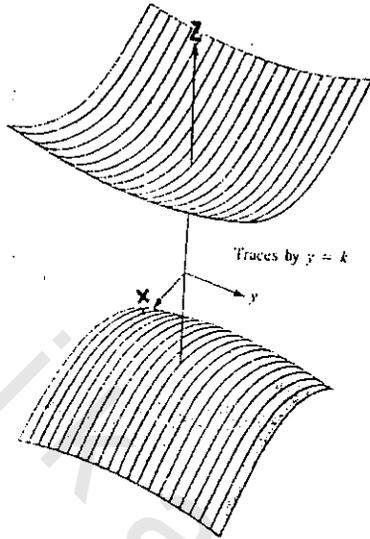
وهي تصف قطع ناقص ويلاحظ أن قيم k الكبيرة تعطي قطع ناقص أكبر، أنظر شكل (١٤).

السطح (١) مكون من قطاعات ناقصة — كيف أخذ السطح اسمه — للإجابة على هذا السؤال ندرس أثر السطح بالمستوى $(y z)x = 0$ وبالتعويض في (١) نحصل على

$$z^2 - \frac{y^2}{9} = 1$$

وهي تمثل قطع زائد في المستوى $y z$ وبالتالي نكون قد توصلنا إلى شكل السطح أنظر شكل (١٥).

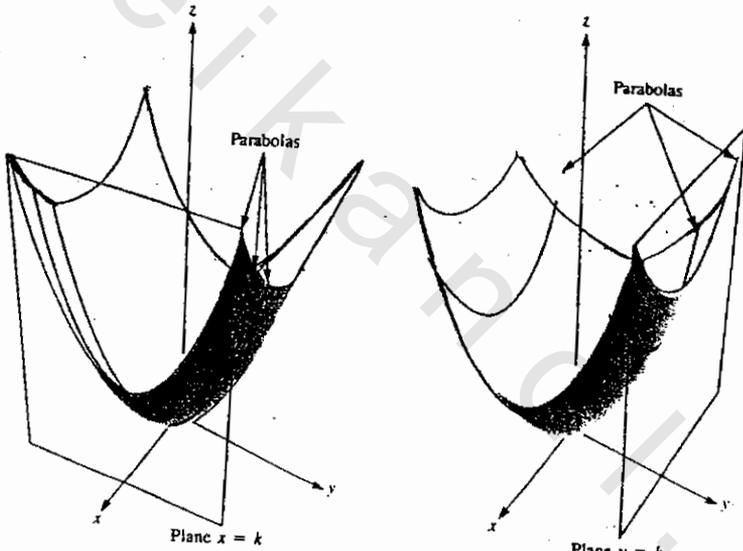




Traces parallel to the xy plane are ellipses.

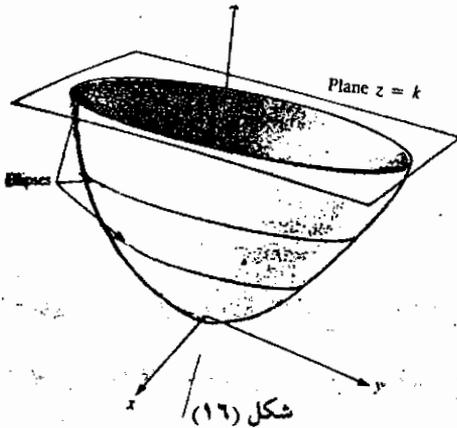
مثال (١٥): أدرس مقاطع السطح $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ موضعا ذلك بالرسم.

الحل: المقطع بالمستوى $z = 0$ هو نقطة. المقطع بالمستوى $z = k$ هو قطع ناقص يزيد في المساحة كلما زادت k . المقطع بالمستوى $x = k$ هو قطع مكافئ وأيضا المقطع بالمستوى $y = k$ هو قطع مكافئ كما هو موضح بشكل (١٦)



The surface $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (elliptic paraboloid)

The surface $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (elliptic paraboloid)



مثال (١٦): أدرس مقاطع السطح $z = y^2 - x^2$.

الحل: مقطع السطح بالمستوى $x = 0$ هو قطع مكافئ $z = y^2$. مقطعه بالمستوى $z = 1$

هو قطع زائد قائم $y^2 - x^2 = 1$. ومقطعه بالمستوى $z = -1$ هو قطع زائد قائم

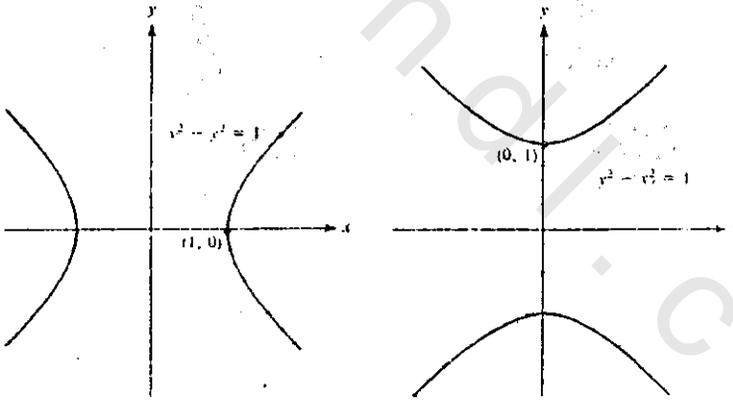
$$x^2 - y^2 = 1$$

وعموما مقطع السطح المعطى بالمستوى $z = k$ هو قطع زائد $y^2 - x^2 = k$ يزيد في

أبعاده كلما زادت k كما هو موضح في شكل (١٧).

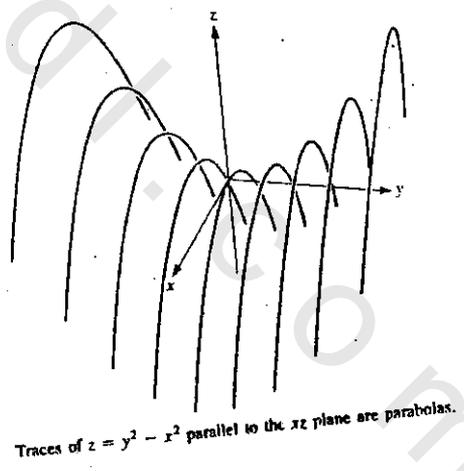
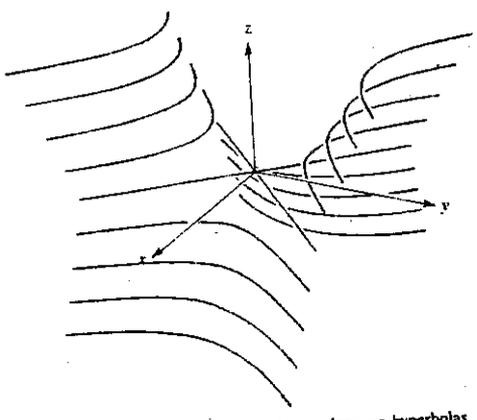
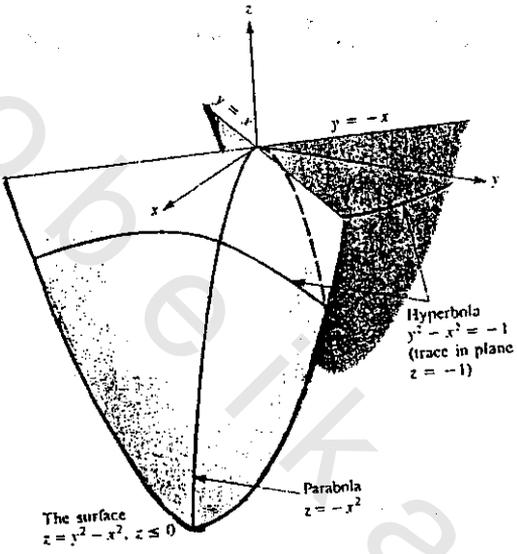
وكذلك المقطع بالمستوى $y = k$ قطاعات مكافئة في المستويات التي توازي المستوى

xz أنظر شكل (١٨).



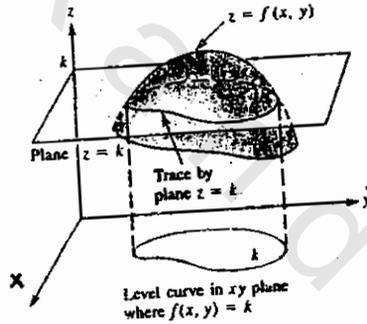
شكل (١٧)

من كل هذه المعلومات تكون قد رسمنا جزء من سطح السرج الذي يقع أسفل المستوى xy كما هو واضح من شكل (١٨) وجزء السطح السرج موجود أعلى المستوى xy ، أنظر شكل (١٨).



(٤.٤) تطبيقات (المنحنيات المتوازية) Level Curves

لما سبق يتضح حتى وإن كانت الدالة $z = f(x, y)$ بسيطة فإن لها شكل معقد في رسمه. توجد طريقة أخرى لدراسة سلوك الدالة $z = f(x, y)$ هندسيا. بدلا من رسم الأثر الفعلي للسطح في المستوى $z = k$ ، نرسم مسقط هذا الأثر (المقطع) على المستوى xy . المسقط يسمى منحنى متوازي Level Curve للدالة $f(x, y)$. عند كل النقاط (x, y) على هذا المنحنى المتوازي، الدالة لها القيمة k (انظر شكل (١٩)).



شكل (١٩)

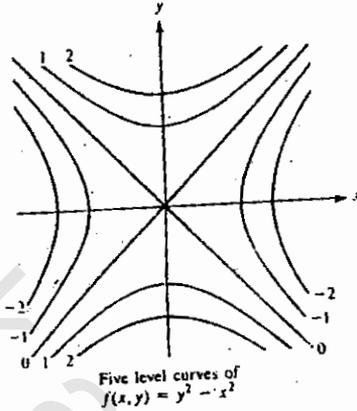
عندما تتحرك على السطح $Z = f(x, y)$ واقفا على المنحنى $f(x, y) = k$ ، مسارك سوف يكون متوازي وارتفاعك altitude عن المستوى xy يظل ثابت وليكن k .

مثال (١٧): ادرس سلوك الدالة $f(x, y) = y^2 - x^2$ بدراسة المنحنيات المتوازية لها.

الحل: لما سبق يمكننا أن نقول أن $f(x, y) = k$ أي $y^2 - x^2 = k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

وليكن على سبيل المثال $k = 0$ (خطوط مستقيمة)، $k = 1, 2$ مقاطعات زائدية،

$k = -1, -2$ مقاطعات زائدية مرافقة وهكذا (انظر شكل (٢٠)).



شكل (٢٠)

والخطوط المتوازية في حياتنا اليومية لها مسميات تختلف باختلاف الموضوعات التي نتناولها فمثلا إذا كانت f تمثل ارتفاع الأرض (الجبال والهضاب) Altitude of land فإن المنحنيات المتوازية تسمى كونتور Contour line وإذا كانت f تمثل الضغط الجوي Air pressure فإن المنحنيات المتوازية تسمى أيزوبار Isobar وهكذا في الطقس والاقتصاد والجاذبية والجيولوجيا.

ملاحظة: السطوح السابقة يمكن تصنيفها إلى سطوح مركزية Central quadric مثل الجسم الناقص والزائدي والمخروط الناقص و سطوح غير مركزية non central أي لها رأس مثل سطح المكافئ الناقص، المكافئ الزائدي.

تمارين (٤)

١- عين معادلة سطح الكرة الناتج عن دوران الدائرة $(y-7)^2 + z^2 = 16, x=0$ حول محور oy ثم عين منحنيات المقطع بمستويات التماثل لها. وكذلك بمستويات توازي مستويات التماثل. وادرس الدوران حول محور z .

٢- عين معادلة الجسم الناقصي الناتج عن دوران القطع الناقص $z=7, \frac{(x-9)^2}{64} + \frac{(y-8)^2}{25} = 1$ حول محور التماثل الذي يوازي ox وادرس مقاطعه بمستويات توازي مستويات التماثل له.

٣- كون معادلة الجسم الزائدي الناتج عن دوران القطع الزائد $y=19, \frac{(x-16)^2}{25} - \frac{(z-14)^2}{22} = 1$ حول محوره التخيلي وادرس مقاطعه بمستويات توازي مستويات التماثل له.

٤- حدد نوع الأسطوانة التالية وأوضاعها في الفراغ وذلك باستخدام فكرة المقاطع بمستويات مختلفة.

(i) $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, 4x^2 + 3y^2 - 16z^2 - 48 = 0$

(ii) $x^2 - 5y^2 = 0, x^2 - 3y^2 - 5z^2 = 0$

(iii) $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0, x^2 + 7y^2 + 5z^2 = 0$

(إرشاد : الأسطوانات السابقة هي عبارة عن الأسطوانات المقامة على المنحنى الناتج من

تقاطع سطوح الدرجة الثانية المعطاة. لذلك أوجد المنحنى الناتج من التقاطع بحذف أحد

المتغيرات بين المعادلات المعطاة لتحصل على معادلة في متغيرين في الفراغ).

٥- أثبت أن المستوى $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z + z_0}{2} = 0$ المار بالنقطة (x_0, y_0, z_0)

الواقعة على الجسم المكافئ الزائدي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + z = 0$ يقطع هذا الجسم في

خطين مستقيمين وأوجدتهم.

٦- أوجد المستقيمين L_1, L_2 الذي يتقاطع فيهما المستوى $2x + y - z = 0$ مع

سطح المخروط $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ ومن ثم اعط وصف كامل للمستقيمات

L_1, L_2 وأوجد اتجاههما.

٧- أوجد معادلة السطح الدوراني الناشئ عن دوران المنحنى

$z = 0, x^2 - 2y + 4 = 0$ حول المحور $y = 0, z = 0$ (حول محور x) وعين

مقاطعته بمستويات توازي مستويات الإحداثيات.

٨- كون معادلة السطح الناتج من دوران الخط المستقيم

$$\left. \begin{array}{l} z = ax + b \\ z = cy + d \end{array} \right\}, (a, b, c, d \neq 0)$$

حول محور z . ناقش الحالة التي فيها $b = d$. وأدرس مقاطعه بمستويات توازي

مستويات الإحداثيات.

٩- أوجد نقاط تقاطع الخط المستقيم $-\frac{1}{3}(x+5) = y - 4 = \frac{1}{7}(z-1)$ مع سطح

الدرجة الثانية

$$12x^2 - 17y^2 + 7z^2 = 7$$

١٠- أوجد معادلات المستويات المماسية للسطح $7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$ والتي

تمر بالخط $7x - 6y + 9 = 0, z = 3$

١١- بين أن المستوى $3x + 12y - 6z - 17 = 0$ يمس السطح

$$3x^2 - 6y^2 + 4z^2 + 17 = 0$$

وأوجد نقطة التماس ووحدة المتجهات في اتجاه العمودي على السطح.

١٢- أوجد معادلات المستويات المماسية للسطح

$$4x^2 - 5y^2 + 7z^2 + 13 = 0$$

والتي توازي المستوى $4x + 20y - 21z = 0$ وأوجد نقاط التماس.

١٣- أوجد معادلات المستويين الذين يحتويان الخط المستقيم

$$7x + 10y - 30 = 0, 5y - 3z = 0$$

$$7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60 \quad \text{وكل منهما يمس الجسم الناقص}$$

(إرشاد: في التمارين من ١١.١٤ استخدم شرط تماس المستوى $\ell x + m y + n z = p$

للسطح $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ والذي يمكن الحصول عليه في الصورة

$$\left(\frac{\ell^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}\right) = p^2$$

١٤- أستخدم شرط تماس مستوى مع سطح الدرجة الثانية (استخدم المعطيات في الإرشاد

السابق).

١٥- أثبت أن الشرط اللازم لأن يكون المستوى $Lx + my + nz + k = 0$ مماساً

$$\text{للسطح } ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0 \text{ هو } \frac{L^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} + \frac{k^2}{d} = 0$$

١٦- أثبت أن الشرط اللازم لكي يكون المستوى $Lx + my + nz + k = 0$

$$\text{مماساً للسطح } ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0 \text{ هو } aL^2 + b m^2 + c n^2 + d k^2 = 2nk$$

(إرشاد: في (15)، (16) أوجد معادلة المستوى المماس للسطح المعطى وقارنها بالمستوى المعطى)