الباب السادس

التحويلات الخطية وسطوح الدرجة الثانية

Linear transformation and conicoid

(١.٦) تصنيف سطوح الدرجة الثانية باستخدام القيم الذاتية

ليكن T تحويلة خطية عمودية (T مصفوفة التحويلة) بحيث

$$x = T\,y\,,\; y = (y_1\; y_2\; y_3)\;\;,\;\; T = (t_{ij}), i\,, j = 1, 2, 3$$

ومن ثم إذا كان لدينا مقدار تربيعي $F(x_1\,, x_2, x_3)$ فإن

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &\equiv x^t A\, x \\ &\equiv y^t\, T^t\, A\, T\, y \end{aligned} \qquad (1)$$

وليكن $B = T^t\, A\, T$ فإن

$$F(x_1, x_2, x_3) = y^t\, B\, y \qquad (2)$$

واضح أن B مصفوفة متماثلة لأن A متماثلة أيضا (من الجبر الخطي).

ومن ثم نلاحظ أن المقدار التربيعي (1) يتحول إلى المقدار التربيعي (2). فإذا كانت T مصفوفة عمودية فإن $T^t = T^{-1}$ ومن ثم فإن $B = T^{-1}\, A\, T$ أي أن المصفوفة B تماثل (تشابه) المصفوفة A.

ومن المعروف في الجبر إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإنه توجد تحويلة عمودية تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية B تماثل A أي أن

$$B = T^{-1}\, A\, T = (\lambda_i \delta_{ij})$$

حيث λ_i هي القيم الذاتية (الحقيقية) للمصفوفة A وبالتالي نحصل على:—

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i, j=1}^{3} \lambda_i\, \delta_{ij}\, y_i\, y_j = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, y_i^2$$

حيث عدد المعاملات المختلفة عن الصفر تساوي رتبة المصفوفة A . وتسمى هذه الصورة بالصورة القياسية للمقدار التربيعي، ونوضح ذلك بالمثال التالي :ـ

مثال (١) : حدد نوع السطح ووضعه في الفراغ

$$F(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$$

الحل: مصفوفة المقدار التربيعي هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة هي $\operatorname{Det}(A - \lambda I) = 0$ أو $(\lambda - 6)(\lambda + 3)^2 = 0$

أي أن $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -3$

وتصبح الصورة القياسية للمقدار التربيعي الممثل للسطح هي :

$$6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2 = 0 \quad \text{or} \quad y_2^2 + y_3^2 - 2y_1^2 = 0$$

وهذه المعادلة تمثل مخروط (من الدراسة السابقة)؟ رأسه نقطة الأصل.

نعتبر معادلة السطح (في صورة أعم من السابقة).

$$x^t A x + 2 B x + d = 0 \qquad (3)$$

أو

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + d = 0$$

ولتكن T مصفوفة تحويلة خطية عمودية $x = T\ y$ بحيث تكون المصفوفة $B = T^t A T$ مصفوفة قطرية وعليه فإن (3) تأخذ الصورة

$$y^t B y + 2 B T y + d = 0 \qquad (4)$$

أو

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3} c_i\, y_i + d = 0 \qquad (5)$$

الجزء الخطي يتلاشى بنقل المحاور أو إكمال المربع، ونوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٢) : أوجد الصورة القياسية لمعادلة السطح (وحدد نوعه ووضعه في الفراغ).

$$P_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \equiv 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 = 0$$

وكذلك أوجد المصفوفة العمودية التي تحول كثيرة الحدود P_3 إلى الصورة القياسية.

الحل: المصفوفة A التي تناظر الجزء التربيعي من معادلة السطح المعطى هي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نحاول إيجاد القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة A .

المعادلة المميزة هي $\operatorname{Det}\left(A - \lambda I\right) = 0$ ، ومنها نحصل على

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0$$

والمتجهات المميزة المناظرة لهذه القيم المميزة يمكن الحصول عليها بالطرق المعروفة وهي

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
على الترتيب (واضح أنها متعامدة).

نحاول جعل هذه المتجهات عبارة عن متجهات الوحدة (اتجاهات المحاور الجديدة) وذلك بقسمة كل متجه على طوله أي أننا نحصل على

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

ومن ثم تكون المصفوفة T (العمودية) هي

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \ , & 0 \ , & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

والتي تعرف التحويل $x = T\,y$ والذي يعطى اتجاه المحاور في الفراغ أي أن T مصفوفة تحويل الدوران.

وبذلك تصبح معادلة السطح هي :

$$3\,y_1^2 + 2\,y_2^2 + \frac{6\,y_1}{\sqrt{3}} + \frac{4\,y_2}{\sqrt{2}} = 0$$

وبنقل المحاور (إكمال المربع) نصل إلى

$$3\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$$

والسطح يمثل اسطوانة ناقصية دليلها قطع ناقص مركزه $o'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ في الإحداثيات $o'y'_1\,y'_2$ وأنصاف أقطار محاوره هي $1, \sqrt{\frac{2}{3}}$

حيث $y'_1 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, y'_2 = y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ويمكن الحصول على اتجاه المحاور الأصلية بالتعويض عن y_i بدلالة x_i وذلك باستخدام $y = T^t x$ أي باستخدام التحويل العمودي العكسي.

<u>مثال (٣) :</u> حول كثيرة الحدود

$$P_2(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5 = 0$$

إلى الصورة القياسية ومن ثم حدد نوع السطح الذي تمثله ــ وأوجد التحويل المستخدم لذلك.

<u>الحل:</u> بنفس الأسلوب المستخدم في المثال السابق نجد أن

$$\operatorname{Det}(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

وهذه المعادلة تأخذ الصورة $-\lambda(1-\lambda)^2 + 3\lambda = 0$

ومن السهل أن نتبين أن الجذور المميزة وهي

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$$

والمتجهات المميزة (اتجاه المحاور الجديدة) التي تناظر القيم المميزة هي على الترتيب

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{2}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{bmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$$

وبالتالي مصفوفة التحويل هي $x = T\,y$, $T = \left(\xi^1\ \xi^2\ \xi^3\right)$ واضح أنها مصفوفة عمودية.

كثيرة الحدود المعطاة تأخذ الصورة

$$(1+\sqrt{3})y_1^2 + (1-\sqrt{3})y_3^2 + 5 = 0$$

أو

$$\frac{(\sqrt{3}-1)y_3^2}{5} - \frac{(1+\sqrt{3})y_1^2}{5} = 1$$

وهي تمثل أسطوانة زائدية دليلها قطع زائد موجود في المستوى $y_2 = 0$ ومحوره الحقيقي على امتداد محور y_3 ومحوره المرافق على امتداد محور y_1 ومركزه في المستوى $y_2 = 0$ وأنصاف المحاور هي $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(\frac{\sqrt{3}-1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

واتجاه المحاور تعطى بدلالة الإحداثيات الأصلية باستخدام التحويل (الدوراني) العكسي.

<u>مثال (٤):</u> حدد نوع السطح الممثل بالمعادلة

$$36x^2 + 9y^2 - 4z^2 + 18y + 16z - 43 = 0$$

<u>الحل:</u> بإكمال المربع للحدود التي تحتوي على y, z نحصل على (أو نقل المحاور)

$$36x^2 + 9(y+1)^2 - 4(z-2)^2 = 36$$

نفرض أن

$$x = x',\ y' = y+1,\ z' = z-2 \qquad \text{(تحويل الإنتقال)}$$

إذن المعادلة المعطاة تأخذ الصورة القياسية

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{9} = 1$$

وهذه هي معادلة سطح زائدي ذو طية واحدة، إحداثيات مركزه هي $(x', y', z')=(0,0,0)$ ولهذا بما أن $x=x',\ y=y'-1,\ z=z'+2$ فإن إحداثيات المركز في الإحداثيات xyz هي $(0, -1, 2)$. في هذا المثال لم نلجأ إلى دوران المحاور لأن المثال لا يحتوي على الحدود المختلطة.

نعطي الآن مثال وطريقة حله تشابه الطرق السابقة ولكن بإسلوب أسهل لأن المثال بسيط:

<u>مثال (٥):</u> حدد نوع السطح الممثل بالمعادلة $x^2 - yz - y + 1 = 0$

<u>الحل:</u> لحذف الحد yz نفرض أن

$$\begin{aligned} y &= y'\cos\phi - z'\sin\phi \\ z &= y'\sin\phi + z'\cos\phi \qquad (1) \\ x &= x' \end{aligned}$$

أي بدوران المحاور في المستوى yz بزاوية ϕ مع ثبوت نقطة الأصل وكذلك محور x ثابت (العمودي على المستوى yz) أي أن

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (2)$$

إذن المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$\begin{aligned} x'^2 - (y'\cos\phi - z'\sin\phi)(y'\sin\phi + z'\cos\phi) \\ - (y'\sin\phi - z'\sin\phi) + 1 = 0 \end{aligned}$$

المعامل a'_{23} للحد $y'z'$ يعطى بالآتي :

$$a'_{23} = \sin^2\phi - \cos^2\phi$$

لحذف الحد $y'z'$ يجب وضع $a'_{23} = 0$ أي أن

$$\phi=\frac{\pi}{4}\ ,\sin\phi=\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن مصفوفة الدوران هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ومن ثم المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$x'^2-\frac{y'^2}{2}+\frac{z'^2}{2}-\frac{y'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{2}}+1=0$$

بإكمال المربع نحصل على

$$x'^2-\frac{1}{2}\left(y'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(z'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1=0$$

بوضع $x'=x'', y'+\frac{1}{\sqrt{2}}=y'', z'+\frac{1}{\sqrt{2}}=z''$ (تحويل الإنتقال).

وبالتالي المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$\frac{y''^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{z''^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{x''^2}{1^2}=1$$

وهذه هي معادلة مجسم زائدي ذو طيتين مركزه $(x'', y'', z'')=(0,0,0)$ في الإحداثيات $x''\ y''\ z''$ وبالتالي إحداثيات مركزه في الإحداثيات $x'\ y'\ z'$ هي $(x', y', z')=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ وبالتعويض في التحويل (1) عن $\phi=\frac{\pi}{4}, x', y', z'$ نحصل على إحداثيات المركز في الإحداثيات xyz وهي

ولإيجاد اتجاه المحاور نستخدم التحويل العكسي للتحويل (2). $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
أعمدة مصفوفة التحويل (2) تمثل اتجاه المحاول الجديدة.

هذا المثال يمكن دراسته باستخدام القيم الذاتية لمصفوفة الجزء التربيعي من معادلة السطح.

وإليك صياغة أخرى لبعض أمثلة من السطوح في شكل مجموعات نقطية.

مثال (٦): بنقل ودوران المحاور حدد نوع المحل الهندسي Q المعرف بالمجموعة

$$Q = \{X : X = (x_1\ x_2)^t \in R^2 \wedge 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 + 2 = 0\}$$

وأوجد اتجاه المحاور الجديدة ووضع المحل الهندسي في الفراغ.

الحل: نفرض أن

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ d = 2$$

أي أن Q تعطى من

$$X^t A X + 2 B^t X + d = 0$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي 5,1 والمتجهات الذاتية المناظرة هي على الترتيب:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة العمودية P التي تحقق

$$P^t A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نحصل عليها كالآتي:

اتجاه المحاور الجديدة نحصل عليه من L_2, L_1 بجعل كل منهما طوله الوحدة أي أن:

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{-\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ومنها يكون

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

باستخدام التحويل $x = P\,y$ نحصل على :

$$Q' : 5\,y_1^2 + y_2^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}\,y_1 + \frac{6}{\sqrt{2}}\,y_2 + 2 = 0$$

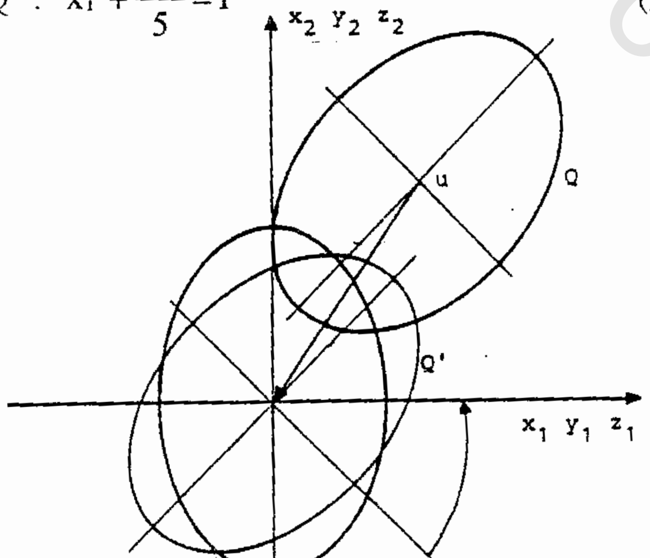
باستخدام تحويل الانتقال

$$(y_1, y_2) \rightarrow \left(\overline{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \overline{x}_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

نحصل على الصيغة القياسية Q'' حيث

$$Q'' : \overline{x}_1^2 + \frac{\overline{x}_2^2}{5} = 1$$

(قطع ناقص)



مثال (٧) : بدوران وإنتقال المحاور حدد نوع السطح R^3 حيث

$$Q=\{X : X=(x_1,x_2,x_3)^t \in R^3 \wedge 3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_1x_3$$
$$+4x_2x_3+2x_3^2-4x_1+2x_2-4x_3+2=0$$

الحل: نعتبر المصفوفات الآتية: $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&2\\1&2&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\ d=2$

إذن

$$Q=\{X \mid X\in R^3 \wedge X^t A X+2B^t X+C=0\}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي 0 ,2 ,5 والمتجهات الذاتية المقابلة هي

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

والتي تحقق من سابقا أن $P^{-1}AP=P^tAP=\operatorname{diag}(5,2,0)$

نأخذ إتجاه دوران المحاور (محاور عيارية متعامدة) في الصورة:

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t,\ S_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)^t,\ S_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^t$$

وتصبح مصفوفة الدوران هي:

$$P=(S_1\ \ S_2\ \ S_3)$$

بدوران المحاور على الصورة $x=P^{-1}y$ (دوران في الاتجاه العكسي لتجنب الحسابات المعقدة) تصبح Q في الصورة:

$$Q':\ 5y_1^2+2y_2^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,y_1+\frac{2}{3}\sqrt{6}y_2-\sqrt{2}y_3+2=0 \qquad (*)$$

وبنقل المحاور إلى النقطة $O'\left(\frac{\sqrt{3}}{15}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{10}\right)^t$ حيث

$$(y_1, y_2, y_3) \to (z_1, z_2, z_3) + O'$$

تصبح المعادلة (*)

$$Q'': 5 z_1^2 + 2 z_2^2 - \sqrt{2}\, z_3 = 0$$

وفي الصورة القياسية $5 z_1^2 + 2 z_2^2 = \sqrt{2}\, z_3$

مجسم مكافئ ناقص (حدد وضعه في الفراغ؟) على الصورة

$$\frac{z_1^2}{\frac{\sqrt{2}}{5}} + \frac{z_2^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = z_3$$

مقاطعه بمستويات توازي مستويات الإحداثيات عبارة عن قطع ناقص بشرط أن $z_3 = h > 0$ وقطاعات مكافئة محورها هو محور $O'z_3$.

(٢.٦) تصنيف سطوح الدرجة الثانية بدون حساب القيم الذاتية:

نفرض أن لدينا سطح درجة ثانية معطى بمعادلة من الدرجة الثانية في الفراغ على هذه الصورة:

$$X^T A X + 2 B X + d = 0 \qquad (1)$$

نعطي تصنيف لمعادلة الدرجة الثانية في R^3 بنفس الأسلوب الذي درسه الطالب سابقا في R^2 والذي يعتمد على إشارات القيم الذاتية للمصفوفة $A = (a_{ij})$ وهي مصفوفة متماثلة. هذه الإشارات تتحدد بالتأكيد إذا علمت إشارات بعض المحددات وهذه الطريقة تحدد نوع السطح المقابل لمعادلة الدرجة الثانية دون التعرض لوضعه في الفراغ ولذلك نتبع الآتي: نفرض أن:

$$\sigma_1(A) = a_1 + a_2 + a_3 = \mathrm{tr}(A),$$

$$\sigma_2(A)=\text{Det}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\text{Det}\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}+\text{Det}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix},$$

$$\sigma_3(A)=\text{Det}\,A\,.$$

ليس من الصعب استخدام الجبر الخطي في توضيح أن إشارات $\sigma_i(A)$ تحدد بطريقه وحيده، إشارات القيم الذاتية للمصفوفة A.

لدراسة سطوح الدرجة الثانية نستخدم كذلك المصفوفة الموسعة أو الممددة A^* Agumented matrix والتي تأخذ الشكل: $A^*=\left[\begin{array}{c|c}A & B^T\\ \hline B & d\end{array}\right]$ (المصفوفات الجزئة)، وطبقا لرتبة المصفوفة الموسعة A^* يمكننا الحصول على صور أكثر تميزا للسطوح. ونعرض ذلك في الجدول الآتي:

Signs of $\sigma_1(M),\sigma_2(M),\sigma_3(M)$	Signs of $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$	Graph if rank $A^*=4$	Graph if rank $A^*=3$	Graph if rank $A^*=2$	Graph if rank $A^*=1$
$\sigma_2>0;\sigma_3\neq0$ σ_1,σ_2 have the same sign	All the same and nonzero	Elliposoid or empty	Point	--	--
$\sigma_3\neq0$; either $\sigma_2<0$ or σ_1,σ_3 have opposite sign	All nonzero, not all the same	Hyperboloid of one or two sheets	Elliptic cone	--	--
$\sigma_2>0,\sigma_3=0$	λ_1,λ_2 nonzero and of same sign $\lambda_3=0$	Elliptic paraboloid	Elliptic cylinder or empty	Line	--

Signs of $\sigma_1(M), \sigma_2(M), \sigma_3(M)$	Signs of $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Graph if rank $\overset{*}{A}$=	Graph if rank $\overset{*}{A}$=	Graph if rank $\overset{*}{A}$=	Graph if rank $\overset{*}{A}$=
$\sigma_2 < 0, \sigma_3 = 0$	λ_1, λ_2 nonzero and of opposite signs; $\lambda_3 = 0$	Hyperbolic paraboloid	Hyperbolic cylinder	Two intersecting planes	--
$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$	$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$	--	Paraboic cylinder	2 parallel planes or empty	Plane

مثال (٨) : حدد نوع السطح في R^3 الذي له المعادلة

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 2x + 4y + 1 = 0$$

الحل: من المعادلة المعطاة يكون

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن

$$\sigma_1(A) = 5, \sigma_2(A) = -5, \sigma_3(A) = \text{Det } A = 0, \text{rank } A^* = 3$$

إذن السطح أسطوانة زائدية.

مثال (٩) : حدد نوع السطح في R^3 الذي له المعادلة

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - x - y = 0$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3(A) = \text{Det } A = 0$$

$$\sigma_2(A) = \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

$$\sigma_4(A^*) = \text{Det } A^* = 0, \sigma_3(A^*) = -\frac{3}{4} < 0$$

$$\sigma_2(A^*) = (\text{مجموع محددات } 2\times 2) = \frac{5}{2} > 0, \sigma_1(A^*) = 4 > 0$$

بما أن $\sigma_4(A^*) = 0, \sigma_3(A^*) \neq 0$ إذن $\text{rank } A^* = 3$ وبالتالي السطح يكون إما فئة خالية أو إسطوانة ناقصية. بما أن $\sigma_3(A^*)$ و $\sigma_1(A^*)$ ليس لهما نفس الإشارة وغير صفرين، $\sigma_2(A^*) > 0$ إذن السطح اسطوانة ناقصية.

تمارين (٦)

١ـ حدد أنواع السطوح الآتية وأوضاعها في الفراغ وأوجد المستويات الأساسية لها.
أثبت أن المستويات الأساسية إما توازي أو منطبقة على المستويات الإحداثية.

(i) $x^2+3y^2+4z^2-4x+18y+20=0$

(ii) $9x^2-4y^2-8y-5z-14=0$

(iii) $xy+z^2-3z+1=0$

(iv) $xz+y-4=0$

(v) $9x^2-4y^2-8y-5z-14=0$

(vi) $y^2+5z^2-5x-6y+10z-1=0$

٢ـ بدوران المحاور بزوايا مناسبة حول المعادلة

$$10x^2+13y^2+13z^2-4xy-4xz+8yz-36=0$$

إلى الصورة القياسية وحدد نوع السطح الذي تمثله وكذلك أوجد اتجاه المحاور الجديدة.

٣ ـ حدد أنواع المحال الهندسية الآتية (بدون حساب القيم الذاتية):

(1) $xy+z^2=6$

(2) $xy+z^2=-6$

(3) $xy+z^2=0$

(4) $2x^2-y^2+4yz+x-y+1=0$

(5) $2x^2+y^2+z^2+xy=5$

(6) $2x^2+y^2+z^2+2yz=5$

(7) $x^2+y^2+2xy+4xz+4yz-x=0$

(8) $2x^2+3y^2+z^2-2xy+4x-4y+4=0$