المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي جعل العلم النافع طريقاً موصلاً لرضاه، وصراطاً يتبعه من أراد هداه، ويحيد عنه من ضل واتبع هواه، ومن أضل ممن اتبع هواه بغير هدىً من الله، وأشهد أن لا إله إلا الله رفع شأن العلم وأهله حتى وصلوا من المجد منتهاه، ومن العز أعلى ذراه، فمن سلك طريقاً يبتغي فيه علماً؛ سهل الله له به طريقاً إلى جنته وعلاه، وأشهد أن محمداً عبده ورسوله الرحمة المهداة، والنعمة المسداة، صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه الهداة التقاة، ومن سار على نهجه إلى يوم لقاه.

أما بعد فهذا كتاب مقدمة في الجبر الخطي أقدمه للمكتبة العربية حسبة لله وخدمة لأبنائي الدارسين إسهاما مني في تبسيط تدريس العلوم الحديثة وخاصة الرياضيات .

الجبر الخطي هو فرع من فروع الرياضيات القديمة قدم الرياضيات نفسها. إن حل معادلة خطية بسيطة على الشكل $ax+b=0$ يمكن اعتباره المسألة الأصلية لهذا الموضوع . على الرغم من أن هذه المسألة ليس فيها أي صعوبة على الإطلاق ، و الطريقة التي يحل بها (أي إذا كان $a\neq 0$ فإن الحل الوحيد يعطى بالصورة $x=-b/a$ ، إذا كانت $a=0$ و $b\neq 0$ فإنه لا يوجد حل، أخيرا، يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كان a و b كلاهما صفر) ، جنبا إلى جنب مع خصائص ، دالة التناظر الخطية $y=ax+b$ ، تعتبر هي النماذج الأساسية للأفكار والأساليب في الجبر الخطي . على سبيل المثال ، الفكرة الأساسية وراء حل نظام المعادلات الخطية في عدة متغيرات هو تحويل هذا النظام من خلال سلسلة من عمليات المعادلات إلى نظام يتكون من مجموعة من المعادلات البسيطة وذلك بحذف متغيرات.

دراسة أنظمة المعادلات الخطية اكتسبت معنا جديدا بعد ظهور الهندسة التحليلية، لقد كان من الممكن اختزال كل الأسئلة الأساسية حول الترتيبات من مستقيمات ومستويات في الفضاء إلى دراسة مثل هذه الأنظمة الجبرية. هنا فكرة رائعة وهي خفية لمعظم العمليات الحسابية: نبدأ بمشكلة في الهندسة، نترجم المسألة إلى لغة الجبر، نقوم بحل المشكلة الناتجة باستخدام أدوات الجبر، وأخير نحول الحل إلى الهندسة.

يمكننا القول بكل ثقة أنه لا يوجد فرع من فروع العلم لا يطبق الجبر الخطي. التطبيقات في العالم الحقيقي تحتاج إلى الجبر الخطي. لذلك الجبر الخطي يعتبر من المقررات الأساسية لدراسة العلوم والاقتصاد والهندسة وإدارة الأعمال.

الجبر الخطي هو واحد من أكثر فروع الرياضيات البحتة أهمية. إنه يستخدم في العديد من المجالات في الرياضيات البحتة. فعلى سبيل المثال: الجبر: نظرية التمثيل (في الواقع الغرض الأساسي من نظرية التمثيل هو حل مسائل في الجبر بتحويلها إلى لغة الجبر الخطي). التحليل: التحليل الدالي (في الواقع التحليل الدالي هو بأسلوب ما، الجبر الخطي لا نهائي البعد). المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الجزئية. التوبولوجي والهندسة: الهندسة التفاضلية (الهدف الأساسي من الهندسة التفاضلية هو فهم الرواسم بين متعددات الطيات بتقريبها إلى رواسم خطية). وهكذا. في الواقع من الصعب الاعتقاد بأن فرع من الرياضيات لا يستخدم الجبر الخطي. يمكننا الاستمرار في سرد فروع أخرى من الرياضيات ولكن هذا سوف يطول.

هذا الكتاب يتكون من خمسة وثلاثين فصلا موزعة على ثمانية أبواب.

الباب الأول، بعنوان أنظمة المعادلات الخطية، يتكون من خمسة فصول ويتناول بالدراسة والتحليل أنظمة المعادلات الخطية. في الفصل الأول يتم تعريف نظام المعادلات الخطية ومجموعات الحل للنظام والحالات الممكنة لمجموعات الحل وتعريف الأنظمة المتكافئة والعمليات على المعادلات التي تحول نظام المعادلات إلى نظام مكافئ له نفس مجموعة الحل ولكنه أيسر في إيجاد مجموعة الحل. أما الفصل الثاني فقد تم تخصيصه لدراسة الصورة المصفوفية والصورة الاتجاهية لنظام المعادلات الخطية وطريقة تحويل مصفوفة النظام الموسعة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل باستخدام عمليات الصفوف. علاقة نوع مجموعة الحل بعدد الأعمدة المحورية والصفوف غير الصفرية في الشكل الصفي المدرج المختزل هي موضوع الفصل الثالث. أما الفصل

الرابع فيتناول دراسة حلول أنظمة المعادلات المتجانسة وفضاء الصفرية لمصفوفة المعاملات. الفصل الخامس هو الأخير في هذا الباب وقد خصص لدراسة نوع من أنظمة المعادلات حيث مصفوفة المعاملات تكون مربعة. في هذا الفصل يتم إعطاء أول تعريف للمصفوفة غير الشاذة وكذلك فضاء الصفرية لها.

الباب الثاني يخصص لدراسة المتجهات والتي تعتبر تمهيدا لدراسة الفضاءات الاتجاهية. يتكون هذا الباب من ستة فصول. في الفصل الأول نقدم العمليات على متجهات الأعمدة (تساوي متجهين، جمع متجهين، وضرب متجه في قياسي) وخواص فضاء متجهات الأعمدة من الحجم m، $\mathbb{C}^m$. الفصل الثاني يخصص لدراسة التراكيب الخطية والصورة الاتجاهية لمجموعة الحلول. في الفصل الثالث نقدم صيغة محكمة لوصف مجموعة لانهائية من المتجهات وذلك باستخدام التراكيب الخطية وهو ما يعطينا طريقة ملائمة لوصف مجموعة حل النظام الخطي وفضاء الصفرية لمصفوفة والعديد من مجموعات المتجهات الأخرى. الاستقلال الخطي لمجموعة من المتجهات هو واحد من أكثر المفاهيم أهمية في الجبر الخطي جنبا إلى جنب مع مفهوم الامتداد وهما موضوع الدراسة في الفصل الرابع. في هذا الفصل أيضا يتم تقديم العلاقة بين خاصية الشذوذ لمصفوفة واستقلال متجهات أعمدتها. في الفصل الخامس نقدم دراسة المجموعات المرتبطة خطيا وطريقة لتصفية المتجهات باستبعاد المتجهات التي تكون ارتباط خطي من بقية المتجهات للحصول على مجموعة مستقلة خطيا ويكون لها نفس المجموعة المولدة بالمجموعة الأصلية. الفصل السادس هو الأخير في هذا الباب تم تخصيصه لدراسة المتجهات وتقديم تعريف وخواص الضرب الداخلي والمعيار. أيضا تمت دراسة عملية جرام شميدت التي تحول مجموعة من المتجهات المستقلة خطيا إلى مجموعة متعامدة. في نهاية الفصل تم تقديم مفهوم المجموعة العيارية المتعامدة من المتجهات.

الباب الثالث يتكون من ستة فصول تختص بدراسة المصفوفات. في الفصل الأول تم تقديم تعريف العمليات على المصفوفات وخواص الفضاء الاتجاهي المكون من كل المصفوفات من الحجم $m \times n$

وتعريف وخواص كل من مدور المصفوفة ، المصفوفات المتماثلة ، المرافق المركب لمصفوفة وقرين المصفوفة. الفصل الثاني تم تخصيصه لدراسة ضرب المصفوفات حيث تم تعريف ضرب مصفوفة في متجه ومن ثم نستخدم هذا التعريف في تعريف ضرب المصفوفات لتتحول بعد ذلك إلى صورة ضرب المصفوفات عنصرا بعنصر. في نهاية الفصل تم تقديم مفهوم المصفوفات الهيرميتية. اهتم الفصل الثالث بتقديم مفهوم المصفوفة المنعكسة ومعكوس المصفوفة وكيفية حساب معكوس مصفوفة وخواص المعكوس وحل نظام من المعادلات الخطية عن طريق معكوس المصفوفة. في الفصل الرابع نستكمل دراسة معكوس المصفوفة بمعرفة علاقته بالمصفوفة الشاذة وشروط وجود المعكوس، كما تم إعطاء تعريف المصفوفة الواحدية وعلاقتها بالضرب الداخلي. الفصل الخامس تم تخصيصه لدراسة فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة لمصفوفة. الفصل السادس والأخير في هذا الباب يتناول أربع مجموعات جزئية تصاحب المصفوفة، ثلاث منها سبق تقديمها في الفصول السابقة وهي فضاء الصفرية وفضاء الصفوف وفضاء الأعمدة والرابعة نقدمها في هذا الفصل وهي فضاء الصفرية الأيسر. الهدف من هذا الفصل هو إيجاد مجموعة مستقلة خطيا تولد كل من هذه المجموعات الجزئية الأربع.

الباب الرابع، عنوانه الفضاءات الاتجاهية، يتكون من خمسة فصول، يتناول دراسة الفضاءات الاتجاهية في صورتها العامة (المجردة). في الفصل الأول يتم تقديم تعريف الفضاء الاتجاهي في صورته العامة وبعض الأمثلة والخواص الأساسية للفضاءات الاتجاهية. في الفصل الثاني نقدم تعريف الفضاءات الجزئية وأمثلة لبعض الفضاءات الجزئية والشروط الثلاثة التي يجب أن تتحقق في مجموعة كي تكون فضاءا جزئيا. الاستقلال الخطي والمجموعات المولدة في الفضاءات الاتجاهية المجردة هي من المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي وهي موضوع الدراسة في الفصل الثالث. في الفصل الرابع نقدم تعريف الأساس وأمثلة على الأساسات وأساسات الفضاءات الجزئية المولدة بمتجهات أعمدة وعلاقة الأساسات بالمصفوفات غير

الشاذة والأساسات المتعامدة والإحداثيات. أما الفصل الخامس وهو الأخير في هذا الباب فقد خصص لدراسة تعريف بعد الفضاء الاتجاهي، البعد اللانهائي، البعد النهائي و خواص البعد. أيضا تم تعريف رتبة وصفرية المصفوفة سواء كانت شاذة أو غير شاذة.

الباب الخامس يتناول مفهوم المحددات ويتكون من فصلين. في الفصل الأول نقدم تعريف المصفوفات الأولية وعلاقة المصفوفات الأولية بعمليات الصفوف وبعد ذلك نقدم تعريف محدد المصفوفة وكيفية حساب المحددات. في الفصل الثاني نتناول خواص المحددات وتأثير عمليات الصف والضرب في مصفوفات أولية على قيمة المحددات وأخيرا نقدم علاقة المصفوفات الشاذة بقيمة المحدد.

الباب السادس يتكون من ثلاثة فصول ويتناول بالدراسة والتحليل القيم الذاتية للمصفوفات. الفصل الأول يتعرض لتعريف القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة وكذلك كثيرة الحدود المميزة وإثبات وجود القيم الذاتية. أيضا نقدم كيفية حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية كما نقدم مفهوم التعدد الجبري والتعدد الهندسي للقيم الذاتية. في الفصل الثاني نتعرض لخواص القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات غير الشاذة والقيم الذاتية للمصفوفات الهيرميتية. في الفصل الثالث نقدم تعريف المصفوفات المتشابهة وبيان أن علاقة التشابه علاقة تكافؤ كما نقدم مفهوم التقطير وهو تشابه مصفوفة مع مصفوفة قطرية ومتى تكون المصفوفة قابلة للتقطير. في نهاية الفصل نقدم تطبيقا لاستخدام القيم الذاتية والتقطير في إيجاد صيغة مغلقة لمتتابعة فيوبانشي.

الباب السابع يتكون من أربعة فصول ويتناول بالدراسة موضوع التحويلات الخطية. في الفصل الأول نقدم تعريف التحويل الخطي بين الفضاءات الاتجاهية ونقدم بعض الأمثلة على التحويلات الخطية. كذلك علاقة التحويلات الخطية بالمصفوفات وتأثير التحويلات الخطية على التراكيب الخطية. أيضا نقدم كيفية إنتاج تحويل خطي جديد من تحويلات معلومة وذلك عن طريق الجمع والضرب في قياسي وتحصيل تحويلين. في الفصل الثاني يكون موضوع الدراسة هو التحويلات

الخطية الأحادية وتعريف نواة التحويل وعلاقة النواة بصفة الأحادية للتحويل وكذلك علاقة التحويلات الخطية الأحادية بالاستقلال الخطي والبعد وأخيرا تحصيل التحويلات الخطية الأحادية. في الفصل الثالث نتناول بالدراسة التحويلات الخطية الفوقية حيث نقدم تعريف التحويل الخطي الفوقي ومدى التحويل والعلاقة بين خاصية الفوقية للتحويل الخطي ومدى التحويل وعلاقة التحويلات الخطية الفوقية بالمجموعات المولدة وتحصيل التحويلات الفوقية. الفصل الرابع يخصص للتحويلات الخطية المنعكسة حيث نعرف التحويل الخطي المنعكس ومتى يكون التحويل الخطي منعكس كما نقدم مفهوم التماثل بين الفضاءات الاتجاهية ورتبة وصفرية التحويل الخطي.

الباب الثامن هو الأخير في هذا الكتاب ويتكون من أربعة فصول تتناول بالدراسة موضوع التمثيل. تعاملنا السابق مع التحويلات الخطية يولد لدينا قناعة بأنه يمكننا تحويل كثير من الأسئلة حول الفضاءات الاتجاهية إلى أسئلة حول أنظمة من المعادلات الخطية أو فضاءات جزئية من $\mathbb{C}^m$. الفصل الأول يتناول عملية تمثيل المتجه وهي كيفية ربط كل متجه في الفضاء الاتجاهي العام بمتجه عمود في $\mathbb{C}^n$ وتعيين إحداثيات المتجه بالنسبة للأساسات المختلفة. في الفصل الثاني نقدم التمثيل عن طريق مصفوفة حيث نوسع العلاقة بين التحويلات الخطية والمصفوفات إلى وضع التحويلات الخطية بين الفضاءات الاتجاهية المجردة. أيضا نتعرض لعملية تكوين تمثيلات مصفوفية جديدة من تمثيلات قديمة. كذلك نقدم علاقة نواة التحويل بصفرية التمثيل المصفوفي وعلاقة مدى التحويل بفضاء الأعمدة للتحويل المصفوفي. في الفصل الثالث نتناول بالدراسة كيفية اختلاف التمثيل المصفوفي باختلاف الأساس وما هو أفضل تمثيل ممكن وأي الأساسات الذي يؤدي إلى أفضل تمثيل وهذه الدراسة تتطلب تعريف القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للتحويل الخطي ومصفوفة تغيير الأساس. في نهاية الفصل نقدم كيفية حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للتحويل الخطي والتي تعتبر خواص ذاتية للتحويل ولا تعتمد على التمثيل المصفوفي للتحويل. في الفصل الرابع نقدم التقطير العياري المتعامد والتمثيل المصفوفي

المثلث العلوي والمصفوفات الطبيعية وكيفية استخدام تحويلات التشابه لتقطير مصفوفة.

خلال عرض المادة العلمية حاولنا عرضها بصورة مبسطة ووضعنا بجوار كل مصطلح علمي ترجمته باللغة الانجليزية عند وروده للمرة الأولى لكي يتعرف عليه القارئ وحتى لا يكون هناك غموض في معنى المصطلح خاصة مع تعدد الترجمات.كذلك أوردنا عددا وافيا من الأمثلة المحلولة التي توضح المعنى المقصود من التعريف أو المفهوم المقدم. وفي نهاية كل فصل أوردنا عددا كافيا من التمارين التي تغطي المادة العلمية الواردة في هذا الفصل حتى يتمكن الطالب من اختبار مدى استيعابه للمفاهيم الواردة وذلك بمحاولة حل هذه التمارين.

في نهاية الكتاب أوردنا قائمة المراجع التي اعتمد عليها المؤلف في صياغة المحتوى العلمي للكتاب.

لفهم هذا الكتاب ينبغي للقارئ أن يكون ملما بالخواص الأساسية لنظرية المجموعات والخواص الأساسية للأعداد المركبة وكذلك طرق البرهان وخاصة البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي.

وفي الختام أسأل الله العظيم أن يتقبل هذا العمل وأن يجعله خالصا لوجهه الكريم وأن يكون نافعا ومفيدا لأبنائنا الدارسين كما أسأله سبحانه وتعالى التوفيق لهم، ونطلب الدعاء من كل من يقرأ في هذا الكتاب.

المؤلف

أ.د/ فتحي هشام خضر

جماد آخر ١٤٣٥هـ - أبريل ٢٠١٤م

obeikandl.com