الباب الأول
أنظمة المعادلات الخطية
Systems of Linear Equations

المعادلات الخطية تظهر في معظم فروع العلم مثل الاقتصاد، العلوم الطبيعية (الرياضيات ، الفيزياء و الكيمياء)، والعلوم البيولوجية (علم الحيوان، علم النبات، علم الجيولوجيا) وغيرها من العلوم الأخرى.

في حياتنا العادية اليومية نستخدم المعادلات الخطية. فإذا ذهب شخص ليشتري من محل لبيع الخضار والفاكهة وكان معه مبلغ Q من المال ويريد أن يشتري طماطم وفاصوليا وبصل وتفاح. كم الكمية بالكيلو التي يمكن أن يشتريها من كل صنف إذا علم أن سعر الكيلو من هذه الأصناف هو a ، b، c و d على الترتيب. يمكن وضع هذه المسألة في الصورة $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = Q$. هذه معادلة خطية حيث x_1، x_2 ، x_3 و x_4 هي الكميات التي يمكن أن يشتريها من كل صنف. معرفة قيم x_1، x_2 ، x_3 و x_4 هو حل هذه المعادلة.

المعادلة الخطية في n متغير $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي معادلة على الصورة $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ أعداد معلومة. حل المعادلة الخطية هي قيم المتغيرات التي تحقق المعادلة.

على سبيل المثال $2x + 3y = 6$ معادلة خطية تمثل خط مستقيم يمر بالنقاط $(3,0)$ و $(0,2)$، وكل منها تمثل حل للمعادلة. بالمثل $2x + 3y + 4z = 12$ تكون معادلة خطية تمثل خط مستقيم يمر بالنقاط $(6,0,0)$ ، $(0,4,0)$ و $(0,0,3)$، وكل منها تمثل حل للمعادلة.

١-١ نظام المعادلات الخطية system of linear equations

تعريف ١-١-١. نظام المعادلات الخطية system of linear equations هو تجمع من m معادلة خطية في n من المتغيرات (المجاهيل) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ على الصورة

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\quad &\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}$$

حيث a_{ij} ، b_i ، x_i تأخذ قيمها من حقل الأعداد المركبة لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$. a_{ij} تسمى معاملات المتغيرات.

الآن نعطي تعريف مفهوم حل نظام المعادلات الخطية.

تعريف ١-١-٢. حل solution نظام المعادلات الخطية في المتغيرات $x_1,x_2,\dots,x_n$ هو قائمة مرتبة من الأعداد المركبة $s_1,s_2,\dots,s_n$ بحيث إذا عوضنا عن x_i بـ s_i ، لكل $i=1,2,\dots,n$ فإن الطرف الأيسر في كل معادلة يساوي الطرف الأيمن لها. أي أن كل المعادلات تكون محققة في آن واحد.

قبل أن نناقش كل الحالات الممكنة لحل نظام من المعادلات الخطية، نعطي تعريف لمجموعة حلول نظام المعادلات الخطية.

تعريف ١-١-٣. مجموعة حلول solution set نظام من المعادلات الخطية هي المجموعة التي تحتوي كل حل لنظام المعادلات الخطية ولا تحتوي شيء غير ذلك. لاحظ أن مجموعة الحلول لنظام من المعادلات الخطية قد تكون لانهائية وقد تكون هي المجموعة الخالية ϕ في حالة عدم وجود أي حل للنظام.

المثال التالي يوضح لنا المفاهيم الواردة في التعريفات السابقة.

مثال ١-١-٤. نعتبر نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_4&=7\\ x_1+x_2+x_3-x_4&=3\\ 3x_1+x_2+5x_3-7x_4&=1 \end{aligned}$$

هنا، لدينا $n=4$ متغيرات، $m=3$ معادلات، أيضا

$$a_{11}=1,\ a_{12}=2,\ a_{13}=0,\ a_{14}=1,\quad b_1=7$$
$$a_{21}=1,\ a_{22}=1,\ a_{23}=1,\ a_{24}=-1,\ b_2=3$$

$$a_{31}=3,\ \ a_{32}=1,\ \ a_{33}=5,\ \ a_{34}=-7,\ \ b_3=1$$

يمكننا التحقق من أن $x_1=-2,\ x_2=4,\ x_3=2,\ x_4=1$ يكون حل لهذا النظام من المعادلات. ولكن ليس هذا هو الحل الوحيد، على سبيل المثال، $x_1=-12,\ x_2=11,\ x_3=1,\ x_4=-3$ يكون أيضا حل لهذا النظام من المعادلات، ويمكن إيجاد حلول أخرى. لذلك مجموعة الحلول لهذا النظام من المعادلات الخطية تحتوي على الأقل عنصرين.

الحالات الممكنة لمجموعات الحلول

المثال التالي يوضح لنا الحالات الممكنة لمجموعات الحلول لنظام من المعادلات الخطية.

مثال ١-١-٥. نعتبر نظام المعادلات المكون من معادلتين في متغيرين

$$2x_1+3x_2=3$$
$$x_1-x_2=4$$

إذا رسمنا حلول هذه المعادلات، كل معادلة على حدة، في المستوى x_1x_2 ، سوف نحصل على مستقيمين أحدهما ميله سالب والآخر ميله موجب. هذان المستقيمان يشتركان على وجه التحديد في نقطة واحدة $(x_1,x_2)=(3,-1)$ ، وهو الحل $x_1=3$ و $x_2=-1$. من الهندسة، نعتقد أن هذا هو الحل الوحيد لهذا النظام من المعادلات ونقول أن الحل وحيد.

الآن نعتبر النظام مع اختلاف المعادلة الثانية

$$2x_1+3x_2=3$$
$$4x_1+6x_2=6$$

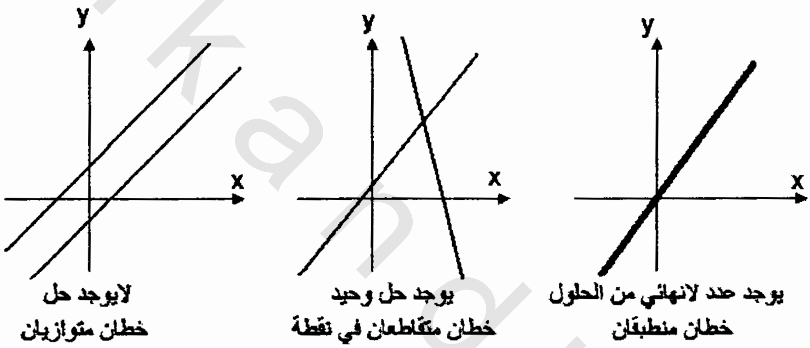
إذا رسمنا حلول هذه المعادلات، كل معادلة على حدة، في المستوى x_1x_2 ، سوف نحصل على مستقيمين منطبقين. أي أنه يوجد عدد لانهائي من النقاط يحقق المعادلتين. لاحظ أن المعادلة الثانية ما هي إلا مضاعف للمعادلة الأولى. سوف نتعلم فيما بعد كيف نصف هذه المجموعة اللانهائية من الحلول.

الآن نعطي تعديل طفيف على المعادلة الثانية لنحصل على النظام الثالث من المعادلات الخطية

$$2x_1 + 3x_2 = 3$$
$$4x_1 + 6x_2 = 10$$

برسم حلول هاتان المعادلتان نحصل على مستقيمين لهما نفس الميل، أي متوازيان. ومن ثم، لا توجد أي نقاط مشتركة بين هذين المستقيمين، لذلك مجموعة الحلول لهذا النظام هي المجموعة الخالية، أي لا يوجد حل لهذا النظام من المعادلات.

هذا المثال يوضح لنا كل الحالات الممكنة. في نظرية لاحقة، سوف نبين أن كل نظام من المعادلات الخطية يكون له مجموعة حلول تكون خالية أو تحتوي حل وحيد أو تحتوي عدد لانهائي من الحلول.



الأنظمة المتكافئة وعمليات المعادلات

مع كل هذا الحديث عن إيجاد مجموعة الحلول لنظام من المعادلات الخطية، لابد أن نكون على استعداد لتعلم كيفية إيجاد مجموعات الحلول هذه. الآن نبدأ بتعريف يعطينا المعنى الدقيق للكلمة الشائعة في سياق أنظمة المعادلات الخطية.

تعريف ١-١-٦. الأنظمة المتكافئة Equivalent Systems. نظامان من المعادلات الخطية يقال أنهما **متكافئان** equivalent إذا كانت مجموعتي الحلول لهما متساوية.

لاحظ هنا أن نظامين من المعادلات الخطية قد يبدو أنهما مختلفان جدا ولكن يظل لهما مجموعتي حلول متساويتين، وعندها نقول أن النظامين متكافئين. معادلتان خطيتان في متغيرين قد يمكن رسمهما في مستقيمين متقاطعين في نقطة واحدة. نظام مختلف مكون من ثلاث

معادلات في متغيرين قد يمكن رسمهم في ثلاثة مستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة، هي نفس النقطة المشتركة في النظام الأول. من التعريف، نقول أن هذان النظامان، الذي يبدو أنهما مختلفان تماما، يكونا متكافئان، حيث أن لهما مجموعتين من الحلول متطابقتين.

بهذا التعريف يمكننا أن نبدأ في وصف طريقة حل الأنظمة الخطية. إذا أعطينا نظام من المعادلات الخطية الذي يبدوا أنه صعب الحل، نود أن نحصل على نظام مكافئ يكون أيسر في إيجاد الحل. حيث أن النظامان لهما نفس مجموعة الحلول، فإننا نقوم بحل النظام الأيسر حلا ويكون هو حل للنظام الأصعب حلا. الآن نقدم الأدوات اللازمة لجعل هذه الطريقة قابلة للتنفيذ.

تعريف ١-١-٧. عمليات المعادلات. إذا أعطينا نظام من المعادلات الخطية، فإن العمليات الثلاث التالية تحول النظام إلى نظام مختلف، وكل عملية تسمى **عملية معادلات** equation operation.

١- تبديل وضع معادلتين في ترتيب المعادلات في النظام.

٢- ضرب كل حدود معادلة معينة في كمية غير صفرية.

٣- ضرب كل حدود معادلة معينة في كمية وإضافة الناتج إلى معادلة أخرى، كل حد إلى نظيره، وترك المعادلة الأولى كما هي ووضع الناتج بدلا عن المعادلة الأخرى (بتعبير آخر، إضافة مضاعفات معادلة إلى معادلة أخرى).

هذه الأوصاف قد تبدو غامضة بعض الشيء، ولكن البرهان والأمثلة سوف توضح المقصود بكل حالة وتجعله جليا.

الآن سوف نعطي نظرية تبين أن العمليات على المعادلات تحول نظام من المعادلات معطى إلى نظام آخر مكافئ له. وحسب تعريف التكافؤ، فإن النظامان، المعطى والمحول، يكون لهما مجموعتي حلول متطابقتين. لذلك، لبيان تكافؤ النظامين سوف نبين أن مجموعتي الحلول لهما تكونا متطابقتان.

نظرية ١-١-٨. عمليات المعادلات تحافظ على مجموعات الحلول. بتطبيق إحدى عمليات المعادلات على نظام من المعادلات الخطية، فإن النظام الأصلي والنظام المحول يكونا متكافئين.

البرهان: سوف نعتبر كل عملية ، من عمليات المعادلات، على حدة ونبين أن مجموعتي الحلول للنظامين تكونا متطابقتين.

نعتبر نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

١- واضح أن ترتيب وضع المعادلات في النظام لا يؤثر في مجموعة الحلول. ومن ثم فإن إعادة ترتيب المعادلات لا يؤثر في مجموعة الحلول.

٢- نفرض أن $\alpha \neq 0$ عدد. نفرض أننا اخترنا ضرب حدود المعادلة رقم i في α لنكون نظام المعادلات الجديد

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \ldots + \alpha a_{in}x_n &= \alpha b_i \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

نفرض S هي مجموعة الحلول لنظام المعادلات المعطى وT هي مجموعة الحلول للنظام المحول.

(أ) سوف نبين أن $S \subseteq T$. نفرض

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in S$ حل لنظام المعادلات الأصلي. بإهمال المعادلة رقم i لحظيا، نجد أن هذا الحل يجعل كل المعادلات الأخرى في النظام المحول تكون محققة. أيضا نعلم أن

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = b_i$$

بضرب هذه المعادلة في α نحصل على

$$\alpha a_{i1}\beta_1 + \alpha a_{i2}\beta_2 + \ldots + \alpha a_{in}\beta_n = \alpha b_i$$

والتي تبين أن المعادلة رقم i في النظام المحول تكون أيضا محققة. من ذلك نستنتج أن $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in T$ ومن ثم يكون $S \subseteq T$.

(ب) الآن نبين أن $T \subseteq S$. نفرض

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in T$$

حل للنظام المحول. بإهمال الصف رقم i لحظيا، نعلم أن هذا الحل يجعل بقية المعادلات في النظام الأصلي تكون محققة. أيضا نعلم أن

$$\alpha a_{i1}\beta_1 + \alpha a_{i2}\beta_2 + ... + \alpha a_{in}\beta_n = \alpha b_i$$

بضرب هذه المعادلة في $\frac{1}{\alpha}$، حيث $\alpha \neq 0$، نحصل على

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n = b_i$$

وهذا يبين أن المعادلة رقم i في النظام الأصلي تكون محققة والذي يبين أن $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in S$. ومن ثم $T \subseteq S$.

٣- نفرض α عدد. نفرض أننا ضربنا المعادلة رقم i في α وأضفنا الناتج إلى المعادلة رقم j للحصول على نظام جديد من المعادلات

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
(\alpha a_{i1} + a_{j1})x_1 + (\alpha a_{i2} + a_{j2})x_2 + ... & \\
+ (\alpha a_{in} + a_{jn})x_n &= \alpha b_i + b_j \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

نفرض أن S هي مجموعة الحلول لنظام المعادلات المعطى وT هي مجموعة الحلول للنظام المحول.

(أ) سوف نبين أن $T \subseteq S$. نفرض

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in S$$

حل لنظام المعادلات الأصلي. بإهمال المعادلة رقم j، لحظيا، نجد أن هذا الحل يجعل كل المعادلات الأخرى في النظام المحول تكون محققة. باستخدام حقيقة أن الحل يجعل المعادلتين رقم i ورقم j في النظام الأصلي محققة، نحصل على

$$\begin{aligned}
(\alpha a_{i1}+a_{j1})\beta_1+(\alpha a_{i2}+a_{j2})\beta_2+\ldots+(\alpha a_{in}+a_{jn})\beta_n \\
&=\alpha a_{i1}\beta_1+\alpha a_{i2}\beta_2+\ldots+\alpha a_{in}\beta_n \\
&\qquad +a_{j1}\beta_1+a_{j2}\beta_2+\ldots+a_{jn}\beta_n \\
&=\alpha(a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\ldots+a_{in}\beta_n) \\
&\qquad +a_{j1}\beta_1+a_{j2}\beta_2+\ldots+a_{jn}\beta_n \\
&=\alpha b_i+b_j
\end{aligned}$$

وهذا يبين أن المعادلة رقم j في النظام المحول تكون محققة، ومن ثم $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in T$ وبالتالي $S\subseteq T$.

(ب) الآن نبين أن $T\subseteq S$. نفرض أن

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in T$$

حل للنظام المحول. بإهمال المعادلة رقم j، لحظيا، نعلم أن هذا الحل يجعل المعادلات الأخرى من النظام المحول محققة. ومن ثم نجد أن

$$\begin{aligned}
a_{j1}\beta_1+a_{j2}\beta_2+\ldots+a_{jn}\beta_n \\
&=a_{j1}\beta_1+a_{j2}\beta_2+\ldots+a_{jn}\beta_n+\alpha b_i-\alpha b_i \\
&=a_{j1}\beta_1+a_{j2}\beta_2+\ldots+a_{jn}\beta_n \\
&\qquad +(\alpha a_{i1}\beta_1+\alpha a_{i2}\beta_2+\ldots+\alpha a_{in}\beta_n)-\alpha b_i \\
&=a_{j1}\beta_1+\alpha a_{i1}\beta_1+a_{j2}\beta_2+\alpha a_{i2}\beta_2+\ldots \\
&\qquad +a_{jn}\beta_n+\alpha a_{in}\beta_n-\alpha b_i \\
&=(a_{j1}+\alpha a_{i1})\beta_1+(a_{j2}+\alpha a_{i2})\beta_2+\ldots \\
&\qquad +(a_{jn}+\alpha a_{in})\beta_n-\alpha b_i \\
&=\alpha b_i+b_j-\alpha b_i
\end{aligned}$$

$$= b_j$$

هذا يبين أن المعادلة رقم j في النظام الأصلي تكون محققة. ومن ثم $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in S$. لذلك $T \subseteq S$.

نظرية ١-١-٨ هي أداة مهمة لإكمال طريقة حل نظام من المعادلات الخطية. سوف نستخدم عمليات المعادلات للانتقال من نظام للمعادلات الخطية إلى نظام آخر، كل منها له نفس مجموعة الحلول. مع الاستخدام الصحيح لعمليات المعادلات، نصل إلى معادلات أبسط في الحل. المثالين التاليين يوضحان الفكرة.

مثال ١-١-٩. نعتبر نظام مكونة من ثلاث معادلات خطية في ثلاثة متغيرات

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5$$
$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6$$

بضرب المعادلة الأولى في $\alpha = -1$ وجمعها على المعادلة الثانية:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1$$
$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6$$

بضرب المعادلة الأولى في $\alpha = -2$ وجمعها على المعادلة الثالثة:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1$$
$$0x_1 + 2x_2 + 1x_3 = -2$$

بضرب المعادلة الثانية في $\alpha = -2$ وجمعها على المعادلة الثالثة:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1$$
$$0x_1 + 0x_2 - 1x_3 = -4$$

بضرب المعادلة الثالثة في $\alpha = -1$:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

$$0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 4$$

وهذا يمكن كتابته على الصورة

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_2 + x_3 = 1$$
$$x_3 = 4$$

وهذا نظام من المعادلات يمكن حله بسهولة جدا. حيث المعادلة الثالثة تتطلب أن $x_3 = 4$. بالتعويض بهذه القيمة في المعادلة الثانية نحصل على $x_2 = -3$، وأخيرا من المعادلة الأولى، بالتعويض بهاتين القيمتين نحصل على $x_1 = 2$. لاحظ أن هذا هو الحل الوحيد للنظام الأخير، حيث أننا كنا مجبرين على اختيار هذه القيم التي تحقق النظام. وحيث أننا أجرينا عمليات المعادلات على نظام للحصول على النظام التالي له، فإن كل هذه الأنظمة المذكورة تكون متكافئة ومن ثم يكون $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, 4)$ هو الحل الوحيد لنظام المعادلات الأصلي.

مثال ١-١-١٠. نعتبر النظام المكون من ثلاث معادلات في أربعة متغيرات، هذا النظام هو الذي تم اعتباره في مثال ١-١-٤ وأعطينا له أحد الحلول.

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 1$$

بضرب المعادلة الأولى في $\alpha = -1$ وجمعها على المعادلة الثانية:

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7$$
$$0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -4$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 1$$

بضرب المعادلة الأولى في $\alpha = -3$ وجمعها على المعادلة الثالثة:

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7$$
$$0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -4$$

$$0x_1-5x_2+5x_3-10x_4=-20$$

بضرب المعادلة الثانية في $\alpha=-5$ وجمعها على المعادلة الثالثة:

$$x_1+2x_2+0x_3+x_4=7$$
$$0x_1-x_2+x_3-2x_4=-4$$
$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0$$

بضرب المعادلة الثانية في $\alpha=-1$:

$$x_1+2x_2+0x_3+x_4=7$$
$$0x_1+x_2-x_3+2x_4=4$$
$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0$$

بضرب المعادلة الثانية في $\alpha=-2$ وجمعها على المعادلة الأولى:

$$x_1+0x_2+2x_3-3x_4=-1$$
$$0x_1+x_2-x_3+2x_4=4$$
$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0$$

وهذا يمكن إعادة كتابته كما يلي

$$x_1+2x_3-3x_4=-1$$
$$x_2-x_3+2x_4=4$$
$$0=0$$

ماذا تعني المعادلة $0=0$؟ هذه المعادلة تكون محققة لأي اختيارات لقيم المتغيرات x_1,x_2,x_3,x_4، ومن ثم نعتبر فقط المعادلتين الأولى والثانية. يمكننا معالجة المعادلة الثانية دون اعتبار للمتغير x_1 . نختار كميات معينة لكل من x_3 و x_4 ، مثلا $x_3=a$ و $x_4=b$. بالتعويض بهذه الكميات في المعادلة الأولى نحصل على

$$x_1+2a-3b=-1$$

ومنها يكون $x_1=-1-2a+3b$

بالمثل المعادلة الثانية تعطي

$$x_2-a+2b=4$$

ومنها يكون $x_2 = 4 + a - 2b$.

إذن اختيارنا الاختياري لقيم المتغيرين x_3 و x_4 (a و b) يتحول إلى قيم معينة للمتغيرين x_1 و x_2 . الحل الذي سبق ذكره في مثال ١-١-٤ يمكن الحصول عليه بوضع $a = 2$ و $b = 1$. الآن يمكننا بسرعة إيجاد عدد (لانهائي) إضافي من الحلول. باختيار $a = 5$ و $b = -2$ نحصل على $x_1 = -17$ و $x_2 = 13$ ويمكننا التحقق من أن

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17, 13, 5, -2)$$

يجعل المعادلات الثلاث محققة.

مجموعة الحلول تكتب على الصورة

$$S = \{(-1 - 2a + 3b, 4 + a - 2b, a, b) : a, b \in \mathbb{C}\}$$

تمارين ١-١

١- كم حل لنظام المعادلات $3x + 2y = 4$ ، $6x + 4y = 8$؟ وضح إجابتك.

٢- كم حل لنظام المعادلات $3x + 2y = 4$ ، $6x + 4y = -2$؟ وضح إجابتك.

٣- أوجد حل لنظام المعادلات في مثال ١-١-١٠ عندما $x_3 = 6$ و $x_4 = 14$.

٤- أوجد كل حلول نظام المعادلات الخطية فيما يلي:

(أ) $3x + 2y = 1$ ، $x - y = 2$ ، $4x + 2y = 2$.

(ب) $x + 2y = 8$ ، $x - y = 2$ ، $x + y = 4$.

(ج) $x + y - z = -1$ ، $x - y - z = -1$ ، $z = 2$.

(د)
$$\begin{aligned} x + y - z &= -5 \\ x - y - z &= -3 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

١-٢ الشكل الصفي المدرج Row-Echelon Form

بعد أن قمنا بحل بعض أنظمة المعادلات الخطية، نلاحظ أنه ليس مهما ما هي أسماء المتغيرات، ولكن المهم ما هي الأعداد التي تؤثر كمعاملات لها. نظام المعادلات في المتغيرات x_1, x_2, x_3 يكون هو نفس النظام إذا غيرنا تسمية هذه المتغيرات إلى a,b,c واحتفظنا بكل الثوابت في مواضعها.

في هذا الفصل سوف نستخدم صورة مختصرة مرتبة لنظام المعادلات الخطية، تسمى مصفوفة، ومن ثم نستخدم المصفوفات بطريقة منظمة للحصول على مجموعات حلول أنظمة المعادلات الخطية.

الصورة المصفوفية والصورة الاتجاهية لنظام المعادلات الخطية

تعريف ١-٢-١. المصفوفة matrix هي شكل مستطيل مرتب من الأعداد من $\mathbb{C}$، هذه الأعداد مرتبة في صفوف وأعمدة. إذا كان عدد صفوف مصفوفة يساوي m وعدد أعمدتها n فيقال أن المصفوفة من الحجم $m \times n$. كل عدد من الأعداد المرتبة في مصفوفة يسمى عنصر في المصفوفة ويوصف العنصر في مصفوفة عن طريق رقم الصف ورقم العمود الذي يقع فيهما العنصر.

نستخدم الحروف الكبيرة $A, B, C,\ldots$ لنرمز لمصفوفة ونستخدم الحروف الصغيرة $a,b,c,\ldots$ لنرمز إلى عناصر المصفوفة. للإشارة إلى حجم المصفوفة A نكتب $A_{m\times n}$ للدلالة على أن المصفوفة من الحجم $m \times n$. ونكتب $[A]_{ij}$ للدلالة على العنصر الذي يقع في الصف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة A. يتم ترقيم الصفوف من أعلى إلى أسفل والأعمدة من اليسار إلى اليمين. أيضا يمكن الرمز للمصفوفة بالرمز $\left[a_{ij}\right]$.

مثال ١-٢-٢. المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة من الحجم 3×4 فيها العنصر في الصف الثاني في العمود الثالث هو $[B]_{23}=-1$ بينما $[B]_{32}=-2$..

عندما نجري العمليات على المعادلات فإن أسماء المتغيرات لا يكون لها أي اعتبار، فسواء كانت المتغيرات هي x_1,x_2,x_3 أو هي x,y,z أو a,b,c فإن هذا لن يكون له أي تأثير. الآن نعطي بعض الرموز والمصطلحات التي تيسر عملية وصف نظام المعادلات وحل النظام ومجموعة الحلول.

تعريف ١-٢-٣. متجه العمود من الحجم m هو m من الأعداد المرتبة في قائمة رأسية تبدأ من أعلى وتنتهي أسفل. الأعداد في المتجه تسمى **مركبات** components المتجه.

على سبيل المثال $\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$ متجه عمود من الحجم 3 بينما $\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\5\end{bmatrix}$ متجه عمود من الحجم 4.

على وجه العموم متجه العمود a من الحجم n يكتب على الصورة

$$a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة المتجه بالصورة المختصرة $a=[a_i]$.

متجه العمود الذي كل الأعداد فيه أصفار يسمى المتجه الصفري. المتجه

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

متجه عمود صفري.

تعريف ١-٢-٤. لنظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

المصفوفة من الحجم $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى **مصفوفة المعاملات** coefficient matrix.

المتجه من الحجم m

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

يسمى **متجه الثوابت** vector of constants.

المتجه

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

يسمى **متجه الحلول** solution vector.
قد يستخدم متجه الحلول للإشارة إلى المتغيرات وقد يستخدم للإشارة إلى قيم هذه المتغيرات التي تكون حل للنظام.

تعريف ١-٢-٥. لنظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad &\dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

المعادلة $Ax = b$ تسمى **الصورة المصفوفية لنظام المعادلات**، حيث A هي مصفوفة المعاملات ، x هو متجه المتغيرات (متجه الحل) ، و b هو متجه الثوابت. فيما يلي سوف نستخدم الرمز $LS(A,b)$ للدلالة على نظام المعادلات الخطية الذي له مصفوفة المعاملات A ومتجه الثوابت b.

تعريف ١-٢-٦. نفرض نظام من المعادلات الخطية مكون من m معادلة في n متغير له مصفوفة المعاملات A ومتجه الثوابت b. **المصفوفة الموسعة** augmented matrix للنظام هي المصفوفة من الحجم $m \times (n+1)$، حيث الأعمدة الـ n الأولى هي أعمدة المصفوفة A والعمود رقم $n+1$ هو متجه الثوابت b. المصفوفة الموسعة تكتب على الصورة $[A\,|\,b]$.

المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية تحتوي كل المعلومات الهامة عن هذا النظام، حيث أهملت أسماء المتغيرات وعلاقتها بالمتغيرات هو فقط موضع معاملاتها في المصفوفة. من المهم ملاحظة أن المصفوفة الموسعة هي مصفوفة وليست نظام معادلات.

على وجه الخصوص المصفوفة الموسعة ليس لها حل، على الرغم من أنها سوف تكون مفيدة في إيجاد حلول لنظام المعادلات المصاحب لها. ومع ذلك فالمصفوفة الموسعة دائما تناظر نظام من المعادلات الخطية والعكس أيضا صحيح. لذلك يكون من المغري محاولة إهمال الفرق بينهما.

مثال ١-٢-٧. نعتبر نظام المعادلات الخطية

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

عمليات الصفوف Row Operations

المصفوفة الموسعة تخلصنا من الملل الناتج من استمرار كتابة المتغيرات أثناء حل نظام المعادلات الخطية. أيضا هي تخلصنا من أي ارتباط بأسماء هذه المتغيرات. في الفصل السابق تعرضنا للعمليات على المعادلات وأثبتنا أنها تحافظ على مجموعة الحلول للنظام. التعريف والنظرية التاليين سوف تطبقان نفس هذه الأفكار على المصفوفات الموسعة.

تعريف ١-٢-٨. العمليات الثلاث التالية تحول المصفوفة من الحجم $m \times n$ إلى مصفوفة أخرى مختلفة من نفس الحجم ، وكل عملية منها تسمى **عملية صف** row operation.

١- تبديل موضع صفين.

٢- ضرب كل عناصر صف معين في عدد غير صفري.

٣- إضافة مضاعفات صف إلى صف آخر.

سوف نستخدم الرموز المختصرة التالية للدلالة على هذه العمليات:

١- $R_i \leftrightarrow R_j$: تبديل موضع الصفين رقم i ورقم j.

٢- αR_i: ضرب عناصر الصف رقم i في العدد $\alpha \neq 0$.

٣- $\alpha R_i + R_j$: ضرب عناصر الصف رقم i في العدد α وإضافة الناتج إلى الصف رقم j، دون تغيير الصف رقم i.

تعريف ١-٢-٩. المصفوفتان A و B يقال أنهما **متكافئتان صفيا row-equivalent** إذا أمكن الحصول على إحدى المصفوفتين من الأخرى عن طريق متتابعة من عمليات الصفوف.

مثال ١-٢-١٠. المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 5 & 2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 6\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 6\\ 3 & 0 & -2 & -9\\ 2 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

متكافئتان صفيا. حيث

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 5 & 2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 6\end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 6\\ 5 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 6\\ 3 & 0 & -2 & -9\\ 2 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

أيضا يمكننا القول أن أي اثنتين من هذه المصفوفات تكونا متكافئين صفيا.

لاحظ أن عمليات الصف الثلاث جميعها منعكسة (قابلة للانعكاس). لذلك لن نميز بين كون A متكافئة صفيا مع B وكون B متكافئة صفيا مع A.

التعريف السابق تم تصميمه لكي يجعل النظرية التالية ممكنة، والتي تقول أن المصفوفات المتكافئة صفيا تمثل أنظمة معادلات لها مجموعات حلول متطابقة.

نظرية ١-٢-١١. نفرض أن A و B مصفوفتان موسعتان متكافئتان صفيا. إذن نظامي المعادلات الخطية المناظرين لهاتين المصفوفتين يكونا متكافئين.

البرهان: إذا أجرينا عملية صف على مصفوفة موسعة، فإن هذا يكون له نفس تأثير إجراء عملية المعادلات المشابهة على نظام المعادلات المناظر. بنفس الطريقة المتبعة في برهان نظرية ١-١-٨ يمكننا بيان أن كل من هذه العمليات على الصفوف تحافظ على مجموعة الحلول لنظام المعادلات المناظر.

الآن نبدأ طريقة الحل بنظام من المعادلات الخطية، نمثله بمصفوفة موسعة، نجري عمليات الصفوف (والتي تحافظ على مجموعة الحلول للنظام المناظر) للحصول على مصفوفة موسعة أبسط، نحول المصفوفة مرة أخرى إلى نظام معادلات أبسط ونوجد حل هذا النظام. بمعرفة هذا الحل نكون قد حصلنا على حل النظام الأصلي.

مثال ١-٢-١٢. سوف نستخدم المصفوفة الموسعة في إيجاد مجموعة حلول نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=4\\ x_1+3x_2+3x_3&=5\\ 2x_1+6x_2+5x_3&=6\end{aligned}$$

نكون المصفوفة الموسعة

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&4\\1&3&3&5\\2&6&5&6\end{bmatrix}$$

بإجراء عمليات الصفوف

$$\begin{bmatrix}1&2&2&4\\1&3&3&5\\2&6&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow{-1R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&2&2&4\\0&1&1&1\\2&6&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_1+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

لذلك المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ تكون متكافئة صفيا مع المصفوفة A. من نظرية ١-٢-١١ نظام المعادلات التالي يكون له نفس مجموعة الحل مثل النظام الأصلي

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_2 + x_3 = 1$$
$$x_3 = 4$$

حل هذا النظام أيسر، وهذا الحل هو حل النظام الأصلي. من المعادلة الثالثة $x_3 = 4$. بالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $x_2 = -3$ ، ومن المعادلة الأولى نحصل على $x_1 = 2$. ومن ثم يكون الحل $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, 4)$ وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه في مثال ١-١-٩.

الشكل الصفي المدرج المختزل reduced row-echelon form

المثال السابق يوضح بجلاء تعريف ١-٢-٩ ونظرية ١-٢-١١ ولكن لا يزال هناك سؤالان لم تتم الإجابة عنهما. ما هو الشكل الأبسط للمصفوفة؟ وكيف يمكن الحصول عليه؟ إجابة السؤال الأول تعطى في التعريف التالي:

تعريف ١-٢-١٣. المصفوفة تكون في **الشكل الصفي المدرج المختزل** reduced row-echelon form إذا كانت تحقق الشروط التالية:

١- إذا كان هناك صف جميع عناصره أصفار فإن هذا الصف يقع أسفل الصفوف الأخرى التي تحتوي عناصر غير صفرية.
٢- أول عنصر غير صفري في أقصى اليسار في الصف يكون 1.
٣- أول عنصر غير صفري في أقصى اليسار في الصف يكون هو العنصر الوحيد غير الصفري في العمود الواقع فيه هذا العنصر.
٤- نعتبر عنصرين غير صفريين في أقصى اليسار، أحدهما في الصف رقم i والعمود رقم j، والآخر في الصف رقم s والعمود رقم t. إذا كان $s>i$ فإن $t>j$.

الصف الذي يتكون فقط من أصفار يسمى **صف صفري** zero row والعنصر غير الصفري في أقصى اليسار في صف غير صفري يسمى **قيادي 1** leading 1. العمود الذي يحتوي عنصر قيادي 1 يسمى **عمود محوري** pivot column. عدد الصفوف غير الصفرية نرمز له بالرمز r وهو يساوي عدد العناصر القيادية 1 وعدد الأعمدة المحورية.

مجموعة الأعمدة المحورية يرمز لها بالصورة $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_r\}$ حيث $d_1<d_2<\ldots<d_r$ بينما مجموعة الأعمدة غير المحورية يرمز لها بالصورة $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_{n-r}\}$ حيث $f_1<f_2<\ldots<f_{n-r}$.

الميزة الأساسية للشكل الصفي المدرج المختزل هو نمط العناصر القيادية 1 التي تحقق الشرطين الثاني والرابع تذكرنا بدرجات سلم أو انحدار الماء من أعلى جبل.

مثال ١-٢-١٤. المصفوفة التالية تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة تحتوي صفين صفريين. وثلاثة عناصر 1 قيادية. لذلك $r=3$. الأعمدة 1، 5 و 6 هي ثلاثة أعمدة محورية، لذلك $D=\{1,5,6\}$ ومن ثم $F=\{2,3,4,7,8\}$.

مثال ١-٢-١٥. المصفوفة التالية ليست في الشكل الصفي المدرج المختزل

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الشروط الأربعة جميعها غير محققة.

نظرية ١-٢-١٦. نفرض أن A مصفوفة. إذن توجد مصفوفة B بحيث يكون

١- A و B متكافئان صفيا.

٢- B في الشكل الصفي المدرج المختزل.

البرهان: نفرض أن A لها m صف و n عمود. سوف نصف عملية لتحويل A إلى B عن طريق عمليات الصفوف. هذه العملية تسمى جاوس- جوردان Gauss-Jordan للحذف. للسهولة أثناء هذه العملية، i سوف تشير إلى رقم الصف الذي تم تحويله، j تشير إلى رقم العمود الذي تم تحويله و r تظل هي عدد الصفوف غير الصفرية.

١- نضع $j=0$ و $r=0$.

٢- نزيد j بمقدار 1. إذا كانت j تساوي $n+1$ ، نتوقف.

٣- نختبر عناصر A في العمود j في الصفوف من $r+1$ إلى m. إذا كانت كل هذه العناصر أصفار نذهب إلى الخطوة 2 .

٤- نختار صف من بين الصفوف من $r+1$ إلى m الذي به عنصر غير صفري في العمود رقم j. نفرض أن i هو دليل هذا الصف.

٥- نزيد r بمقدار 1.

٦- نستخدم عملية الصف الأولى لتبديل الصفين i و r.
٧- نستخدم عملية الصفوف الثانية لتحويل العنصر في الصف r والعمود j إلى 1.
٨- نستخدم عملية الصفوف الثالثة مع الصف r لتحويل كل عنصر آخر في العمود j إلى صفر.
٩- نذهب إلى الخطوة 2 .

نتيجة هذه العملية أن المصفوفة A تتحول إلى مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل والتي نرمز لها بالرمز B. الآن نحتاج إلى برهان هذه الخلاصة ببيان أن المصفوفة المحولة تحقق الخواص الواردة في التعريف. بداية المصفوفة المحولة تم الحصول عليها عن طريق إجراء عمليات على الصفوف (الخطوات 6، 7 و 8) ومن ثم A و B تكونا متكافئتان صفيا.

قليل من العمل يجعلنا على يقين من أن B تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل. سوف نوضح كما بدأنا خطوة 2، أن الأعمدة الأولى التي عددها j في المصفوفة تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل به r صف غير صفري. على وجه الخصوص هذا يكون محقق عند البداية حيث $j = 0$. حيث المصفوفة ليس بها أعمدة ومن ثم من البديهي أن تحقق شروط التعريف بصفوف غير صفرية عددها $r = 0$.

في الخطوة 2 تم زيادة j بمقدار 1 وبدأنا العمل في العمود الثاني. هناك ناتجين للخطوة 3. نفرض أن كل عنصر في العمود j في الصفوف من $r+1$ إلى m يكون صفر. إذن بدون أي تغيير نعلم أن الأعمدة الأولى التي عددها j في المصفوفة يكون لها الصفوف الأولى التي عددها r تظل في الشكل الصفي المدرج المختزل مع الصفوف الأخيرة التي عددها $m-r$ تظل كلها أصفار.

بدلا عن ذلك، نفرض أن العنصر في الصف i من العمود j غير صفري. لاحظ، لأن $r+1 \leq i \leq m$ ، نعلم أن العناصر $j-1$ الأولى من هذا الصف جميعها أصفار. الآن من خطوة 5 نزيد r بمقدار 1 ومن ثم نشرع في بناء صف غير صفري جديد. في خطوة 6 نبدل الصف r مع الصف i. في الأعمدة j الأولى تظل الصفوف $r-1$ الأولى في الشكل الصفي المدرج المختزل بعد التبديل. في خطوة 7

نضرب الصف r في عدد غير صفري بحيث يجعل 1 في العمود j في الصف i ولا نغير أي صفوف أخرى. هذا القيادي الجديد هو العنصر الأول غير الصفري في الصف الواقع فيه وموضعه على يمين كل العناصر القيادية $1's$ في الصفوف السابقة له التي عددها $r-1$. مع خطوة 8 نتأكد أن كل العناصر في العمود الذي يحتوي هذا القيادي الجديد 1 تكون أصفار، كما هو مطلوب في الشكل الصفي المدرج المختزل. أيضا الصفوف من $r+1$ إلى m جميعها الآن أصفار في الأعمدة j الأولى، لذلك نحن الآن لدينا صف جديد غير صفري، وهو ما يتوافق مع زيادة r بمقدار 1. علاوة على ذلك، حيث أن العناصر $j-1$ الأولى في الصف r كلها أصفار، استخدام العملية الثالثة للصفوف لن يهدم أي من السمات الضرورية للصفوف من 1 إلى $r-1$ والصفوف من $r+1$ إلى m في الأعمدة من 1 إلى $j-1$.

لذلك، عند هذه المرحلة، الأعمدة j الأولى في المصفوفة تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل. عندما تزيد خطوة 2 في النهاية j إلى $n+1$، فإن العملية تكون قد اكتملت وكل الأعمدة التي عددها n في المصفوفة تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل، مع r التي تعطي عدد الصفوف غير الصفرية.

الآن نجمل ما سبق. نبدأ بنظام من المعادلات الخطية، نمثل هذا النظام بالمصفوفة الموسعة. نستخدم عمليات الصفوف لتحويل المصفوفة الموسعة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل، بالطريقة الواردة في برهان نظرية ١-٢-١٦. نظرية ١-٢-١٦ تخبرنا بأن المصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل التي حصلنا عليها تكون متكافئة صفيا مع المصفوفة الموسعة الأصلية. وحيث أن المصفوفة المحولة يكون لها نفس مجموعة الحلول، يمكننا تحليل المصفوفة المحولة بدلا عن المصفوفة الأصلية بالنظر إليها كمصفوفة موسعة لنظام من المعادلات الخطية مختلف. الحصول على مجموعة الحلول للنظام الممثل بالمصفوفة الموسعة المحولة يكون أيسر، كما يتضح من الأمثلة التالية والفصل التالي.

خلال هذا الكتاب سوف نرى أن معظم الخواص الهامة لمصفوفة يمكن التعرف عليها بالتعامل مع المصفوفة المكافئة صفيا لها في الشكل

الصفي المدرج المختزل. لهذا السبب يكون من المهم معرفة أن المصفوفة B التي نضمن وجودها من نظرية ١-٢-١٦ تكون أيضا وحيدة.

نظرية ١-٢-١٧. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B و C مصفوفتان من الحجم $m \times n$ متكافئتان صفيا مع A وفي الشكل الصفي المدرج المختزل. إذن $B = C$.

البرهان: بداية نؤكد على عدم وجود أي فروض لعلاقات بين B و C غير أنهما في الشكل الصفي المدرج المختزل وكلاهما تكون متكافئة صفيا مع A.

إذا كان B و C كلاهما متكافئة صفيا مع A فإنهما تكونا متكافئان صفيا مع بعضهما البعض. عمليات الصفوف المكررة على مصفوفة تضم الصفوف بعضها إلى بعض باستخدام عمليات خطية ومتطابقة في كل عمود. الملاحظة الأساس لهذا البرهان هي أن كل صف بمفرده في B يكون مرتبط خطيا مع صفوف C. هذه العلاقة تختلف لكل صف في B ولكن بمجرد تثبيت الصف، العلاقة تكون هي نفسها عبر الأعمدة. بصورة أكثر دقة توجد كميات قياسية δ_{ik} ، $1 \le i, k \le m$ ، بحيث لأي $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ ،

$$[B]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} [C]_{kj}$$

يمكن قراءة هذه بقولنا أن العنصر في الصف i من B في العمود j يكون دالة خطية في العناصر في كل الصفوف من C التي تقع أيضا في العمود j. الكميات القياسية δ_{ik} تعتمد على أي صف من B تحت الاعتبار (i في دليل δ_{ik}) ولكن هي نفسها لكل عمود (δ_{ik} لا تعتمد على j).

الآن نستثمر حقيقة أن B و C في الشكل الصفي المدرج المختزل. نذكر أن العمود المحوري كله أصفار ماعدا عنصر وحيد يكون 1. إذا كانت E مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل و d_l هو دليل عمود محوري فإن $[E]_{kd_l} = 1$ على وجه التحديد عندما $k = l$ وتساوي صفر عدا ذلك. لاحظ أيضا ان أي عنصر في E والذي يكون

أسفل العنصر في الصف l وعلى يسار العمود d_l يكون أيضا صفر.
بتعبير آخر، إذا نظرنا إلى أمثلة المصفوفات في الشكل الصفي المدرج المختزل واختيار عنصر قيادي 1، باقي العناصر في العمود تكون أصفار والربع الأيسر السفلي من المصفوفة الذي يبدأ هنا كله يكون أصفار.

نفرض عدم وجود علاقة حول شكل B و C، نفرض B لها r صف غير صفري ونرمز للأعمدة المحورية فيها بالرمز $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_r\}$. بالنسبة إلى C، نفرض r' ترمز إلى عدد الصفوف غير الصفرية ونرمز للأعمدة المحورية بالرمز $D'=\{d'_1,d'_2,\ldots,d'_r\}$.

توجد أربع خطوات في البرهان، الثلاث الأول حول بيان أن B و C لهما نفس العدد من الأعمدة المحورية في نفس المواضع.

الخطوة الأولى. نفرض أن $d_1<d'_1$. إذن

$$\begin{aligned}
1&=[B]_{1d_1}\\
&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{1k}[C]_{kd_1}\\
&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{1k}(0) \qquad\qquad (\,d_1<d'_1)\\
&=0
\end{aligned}$$

كل العناصر في C تكون أصفار حيث أنها تقع أسفل يسار العنصر القيادي 1 في الصف 1 والعمود d'_1 في C. وهذا تناقض. لذلك $d_1\geq d'_1$. بأسلوب مشابه، وبعكس وضع B و C يمكننا استنتاج أن $d_1\leq d'_1$. ومنها نحصل على $d_1=d'_1$.

الخطوة الثانية. نفرض أننا حددنا أن $d_1=d'_1$، $d_2=d'_2$، ...، $d_p=d'_p$. دعنا الآن نبين أن $d_{p+1}=d'_{p+1}$، وذلك بالعمل في اتجاه التناقض. نفرض أن $d_{p+1}<d'_{p+1}$. لقيم l حيث $1\leq l\leq p$ يكون

$$0=[B]_{p+1,d_l}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \delta_{p+1,k} [C]_{kd_l}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \delta_{p+1,k} [C]_{kd'_l}$$

$$= \delta_{p+1,l} [C]_{ld'_l} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m} \delta_{p+1,k} [C]_{kd'_l}$$

$$= \delta_{p+1,l} (1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m} \delta_{p+1,k} (0)$$

$$= \delta_{p+1,l}$$

الآن

$$1 = [B]_{p+1,d_{p+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \delta_{p+1,k} [C]_{kd_{p+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \delta_{p+1,k} [C]_{kd_{p+1}} + \sum_{k=p+1}^{m} \delta_{p+1,k} [C]_{kd_{p+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (0) [C]_{kd_{p+1}} + \sum_{k=p+1}^{m} \delta_{p+1,k} [C]_{kd_{p+1}}$$

$$= \sum_{k=p+1}^{m} \delta_{p+1,k} [C]_{kd_{p+1}}$$

$$= \sum_{k=p+1}^{m} \delta_{p+1,k} (0) \qquad (d_{p+1} < d'_{p+1})$$

$$= 0$$

هذا التناقض يبين أن $d_{p+1} \geq d'_{p+1}$. بنفس طريقة المناقشة يمكننا استنتاج أن $d_{p+1} \leq d'_{p+1}$ ومن ثم يكون $d_{p+1} = d'_{p+1}$.

الخطوة الثالثة.الآن نبرهن على أن $r=r'$. نفرض أن $r'<r$.
بالمناقشات السابقة نعلم أن $d_1=d'_1$، $d_2=d'_2$، ...، $d_{r'}=d'_{r'}$.
لقيم $1\le l\le r'<r$ يكون

$$\begin{aligned}
0&=[B]_{rd_l}\\
&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{rk}[C]_{kd_l}\\
&=\sum_{k=1}^{r'}\delta_{rk}[C]_{kd_l}+\sum_{k=r'+1}^{m}\delta_{rk}[C]_{kd_l}\\
&=\sum_{k=1}^{r'}\delta_{rk}[C]_{kd_l}+\sum_{k=r'+1}^{m}\delta_{rk}(0)\\
&=\sum_{k=1}^{r'}\delta_{rk}[C]_{kd_l}\\
&=\sum_{k=1}^{r'}\delta_{rk}[C]_{kd'_l}\\
&=\delta_{rl}[C]_{ld'_l}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{r'}\delta_{rk}[C]_{kd'_l}\\
&=\delta_{rl}(1)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{r'}\delta_{rk}(0)\\
&=\delta_{rl}
\end{aligned}$$

الآن نختبر عناصر الصف r في B،

$$\begin{aligned}
[B]_{rj}&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{rk}[C]_{kj}\\
&=\sum_{k=1}^{r'}\delta_{rk}[C]_{kj}+\sum_{k=r'+1}^{m}\delta_{rk}[C]_{kj}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{r'} \delta_{rk}[C]_{kj} + \sum_{k=r'+1}^{m} \delta_{rk}(0)$$
$$= \sum_{k=1}^{r'} \delta_{rk}[C]_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{r'} 0[C]_{kj}$$
$$= 0$$

لذلك الصف r يكون كله صف صفري وهو ما يناقض أن هذا هو الصف الأخير من أسفل في B الذي لا يكون صفري. لذلك $r' \geq r$.
بأسلوب مشابه وبعكس وضع B و C سوف نستنتج أن $r' \leq r$ ومن ثم $r' = r$.
بضم الخطوات الثلاث نحصل على $D = D'$. بتعبير آخر B و C يكون لهما نفس الأعمدة المحورية في نفس المواضع.
الخطوة الرابعة. في هذه الخطوة النهائية سوف نحدد قيم δ_{ij} . لاحظ أنه يمكننا استخدام قيم d_i تبادليا لكل من B و C .

$$1 = b_{id_i}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}[C]_{kd_i}$$
$$= \delta_{il}[C]_{ld_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m} \delta_{ik}[C]_{kd_i}$$
$$= \delta_{il}(1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m} \delta_{ik}(0)$$
$$= \delta_{il}$$

أخيرا بتطبيق قيم δ_{il}، يمكننا بيان أن $B = C$.
لقيم $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ يكون

$$[B]_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}[C]_{kj}$$
$$=\delta_{ji}[C]_{ij}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\delta_{ik}[C]_{kj}$$
$$=(1)[C]_{ij}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}(0)[C]_{kj}$$
$$=[C]_{ij}$$

لذلك B و C لهما عناصر متساوية ومن ثم تكونا نفس المصفوفة.

الآن نعود إلى بعض الأمثلة لاستخدام التعريفات والنظريات في حل أنظمة من المعادلات الخطية.

مثال ١-٢-١٨. أوجد مجموعة حلول نظام المعادلات

$$-7x_1-6x_2-12x_3=-33$$
$$5x_1+5x_2+7x_3=24$$
$$x_1+4x_3=5$$

الحل: المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\begin{bmatrix}-7 & -6 & -12 & -33\\ 5 & 5 & 7 & 24\\ 1 & 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

نستخدم عمليات الصفوف لتحويل هذه المصفوفة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل، أولا مع $j=1$

$$\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 5\\ 5 & 5 & 7 & 24\\ -7 & -6 & -12 & -33\end{bmatrix}\xrightarrow{-5R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ -7 & -6 & -12 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow{7R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

الآن مع $j = 2$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{6R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

أخيرا مع $j = 3$

$$\xrightarrow{\frac{5}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{13}{5}R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

هذه مصفوفة موسعة لنظام بسيط جدا من المعادلات الخطية وهو $x_1 = -3$ ، $x_2 = 5$ ، $x_3 = 2$ والذي من الواضح أن له حل. أيضا يمكن ملاحظة أن هذا هو الحل الوحيد لهذا النظام. لذلك مجموعة الحلول تكون $S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

ويمكن كتابة الحل أيضا بالصورة $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 5, 2)$.

مثال ١-٢-١٩. أوجد مجموعة حلول نظام المعادلات

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

الحل: المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

نحول هذه المصفوفة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل. أولا مع $j = 1$،

$$\xrightarrow{2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

الآن مع $j = 2$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{1R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات الممثل بهذه المصفوفة الموسعة يحتاج إلى معالجة تختلف قليلا عن النظام في المثال السابق. أولا الصف الأخير في المصفوفة يعطي المعادلة $0 = 0$ ، وهذه دائما محققة، لذلك هي لا تعطي أي قيود على الحلول الممكنة ومن ثم نهمل هذه المعادلة ونحلل المعادلتين الأخريين وهما

$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_2 - x_3 = 2$$

بينما يكون من السهل حل هذا النظام، إلا أنه يظهر أن له العديد من الحلول. على سبيل المثال، باختيار $x_3 = 1$ نجد أن $x_1 = 2$ و

$x_2 = 3$، وهـذه جميعـا تعطـي حـل. كـذلك باختيـار $x_3 = 0$ نجـد أن $x_1 = 3$ و $x_2 = 2$، وهذه جميعا أيضا تعطي حل. وعموما، اختيار أي قيمة للمتغير x_3 سوف يناظرها قيم للمتغيرين x_1 و x_2 وتكون سويا حـل. فـي هـذه الحالـة x_3 يـسمى متغيـر **حـر** free أو **مـستقل** independent. ولكن لماذا قلنا x_3 ولم نقل أي متغير آخر؟ لاحظ أن العمود الثالث في المصفوفة الموسعة ليس بـه عنصر قيادي 1 وبالتـالي لا يكـون عمـود محـوري. مـع هـذه الفكـرة يمكننـا إعـادة ترتيـب هاتـان المعادلتان، بحل كل معادلة في المتغير الذي يناظر عنصر قيادي 1 في ذلك الصف.

$$x_1 = 3 - x_3$$
$$x_2 = 2 + x_3$$

لكتابة مجموعة متجهات الحلول، لدينا

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 - x_3 \\ 2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

لذلك هذا النظام يكون له عدد لانهائي من الحلول. ويمكن كتابة مجموعة الحلول على الصورة $S = \{(3-a, 2+a, a) : a \in \mathbb{C}\}$.

مثال ١-٢-٢٠. ناقش إمكانية حل نظام المعادلات الخطية

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 2$$
$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2$$

الحل: المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

نحول هذه المصفوفة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل، أولا مع $j=1$ ،

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

الآن مع $j=2$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

أخيرا مع $j=4$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_3+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الآن نحلل المعادلات في نظام المعادلات الممثل بهذه المصفوفة الموسعة. المعادلة الثالثة سوف تُقرأ $1 = 0$. وهذا غير صحيح على أي حال. لا يوجد أي اختيار للمتغيرات يجعل هذه المعادلة محققة ومن ثم فإنه لا يمكننا جعل كل المعادلات محققة في آن واحد. لذلك هذا النظام ليس له حل وبالتالي فإن مجموعة الحل تكون هي المجموعة الخالية ϕ.

لاحظ أنه كان يمكننا الوصول إلى هذه النتيجة أسرع. بعد إجراء عملية الصف $-7R_2 + R_3$ نجد أن المعادلة الثالثة تُقرأ $-5 = 0$ ، وهذه عبارة كاذبة. حيث أن النظام الممثل بهذه المصفوفة ليس له حل فإن أي من الأنظمة الممثلة لا يكون له حل.

هذه الأمثلة الثلاثة توضح لنا أن المدى الكلي لإمكانية الحلول لنظام المعادلات الخطية هو- لا يوجد حل، يوجد عدد لانهائي من الحلول أو يوجد حل وحيد. هذه الحالات سوف تناقش بصورة محكمة في الفصل التالي.

تمارين ١-٢

١- هل المصفوفة التالية تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل؟ لماذا؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢- استخدم عمليات الصف لتحويل المصفوفة التالية إلى الشكل الصفي المدرج المختزل

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

٣- أوجد كل حلول نظام المعادلات التالي وذلك باستخدام المصفوفة الموسعة وعمليات الصف.

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7$$

في التمارين ٤- ١٠ كون المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات المعطى، حول المصفوفة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل باستخدام عمليات الصف. ومن ثم صف مجموعة الحلول لنظام المعادلات الأصلي.

٤-
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

٥-
$$-7x_1 - 6x_2 - 12x_3 = -33$$
$$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 24$$
$$x_1 + 4x_3 = 5$$

٦-
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = -7$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 9x_4 = -7$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = -8$$

٧-
$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 8$$
$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4$$

٨-
$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 2$$
$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2$$

٩-
$$\begin{aligned} 33x_1 - 16x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= -27 \\ 99x_1 - 47x_2 + 27x_3 - 7x_4 &= -77 \\ 78x_1 - 36x_2 + 17x_3 - 6x_4 &= -52 \\ -9x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

١٠-
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 6 \\ -x_1 + 4x_2 &= -14 \\ 3x_1 + 10x_2 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 &= 20 \\ 6x_1 + 9x_2 &= 18 \end{aligned}$$

في التمارين ١١- ١٤ أوجد كل الحلول لنظام المعادلات المعطى. ضع المصفوفة الموسعة للنظام في الشكل الصفي المدرج المختزل ثم اكتب مجموعة الحلول مستخدما رموز المجموعات.

١١-
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 &= 14 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -19 \end{aligned}$$

١٢-
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ 10x_1 - 10x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

١٣-
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= -26 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -4 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 11x_4 &= -10 \end{aligned}$$

١٤-
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 12x_3 - 5x_4 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -10 \end{aligned}$$

في التمارين ١٥- ١٨ حول المصفوفة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل مشيرا إلى عمليات الصف المستخدمة في كل خطوة.

١٥- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 6 & 12 \end{bmatrix}$.

١٦- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$.

١٧- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

١٨- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

١٩- نعتبر المصفوفتين

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & 8 & -3 \end{bmatrix} \text{ ، } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

اختزل صفيا كل من هاتين المصفوفتين ثم بين أن الشكل الصفي المدرج المختزل لكل من B و C يتطابقان.

٢٠- برهن على أن علاقة التكافؤ الصفي بين المصفوفات تكون علاقة تكافؤ على مجموعة المصفوفات من الحجم $m \times n$.

١-٣ أنواع مجموعات الحلول Types of Solution Sets

الآن نحن بصدد اهتمام إضافي حول تحليل الشكل الصفي المدرج المختزل المشتق من المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية. على وجه الخصوص سوف نرى كيفية معالجة الحالة عندما يكون هناك عدد لانهائي من الحلول للنظام وسوف نبرهن على أن كل نظام من المعادلات الخطية يكون له إما صفر أو واحد أو عدد لانهائي من الحلول. بهذه الأدوات سوف نتمكن من حل أي نظام خطي.

الأنظمة المتوافقة

الآن ننتقل بحل أنظمة المعادلات الخطية من حقل المهارة إلى حقل العلم.

تعريف ١-٣-١. نظام المعادلات الخطية يسمى **متوافق** consistent إذا كان له على الأقل حل واحد. إذا لم يكن للنظام أي حل فإنه يسمى **غير متوافق** inconsistent.

نرغب في تحديد ما إذا كان نظام المعادلات متوافق أو غير متوافق. وفي حالة كونه متوافق كيف نكون قادرين على تحليل نوع الحلول الممكنة. يمكننا فعل ذلك بتحليل الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة باستخدام القيمة r ومجموعات الأعمدة D و F التي سبق تعريفها في تعريف ١-٢-١٣.

العديد من الأسئلة حول المصفوفات وأنظمة المعادلات يمكن الإجابة عنها بمجرد معرفة r و D و F. اختيار الحرفين D و F نسبة إلى تعريف المتغيرات المرتبطة dependent والمتغيرات المستقلة free. المثال التالي يوضح لنا هذه الأمور.

مثال ١-٣-٢. نعتبر المصفوفة من الحجم 5×9 في الشكل الصفي المدرج المختزل

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

في الشكل الصفي المدرج المختزل يكون لدينا

$r=4$

$d_1=1 \quad d_2=3 \quad d_3=4 \quad d_4=7$

$f_1=2 \quad f_2=5 \quad f_3=6 \quad f_4=8 \quad f_5=9$.

لاحظ أن المجموعتين $D=\{d_1,d_2,d_3,d_4\}=\{1,3,4,7\}$

و $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}=\{2,5,6,8,9\}$

ليس بينهما أي أشياء مشتركة وهما مجتمعان تغطيان كل الأعمدة في B ومن ثم تكونان تجزيئا لمجموعة الأعمدة المشار إليها.

العدد r هو الشيء المنفرد الأكثر أهمية في المعلومات التي يمكن الحصول عليها من الشكل الصفي المدرج المختزل لمصفوفة. هو يعرف عدد الصفوف غير الصفرية، ولكن حيث أن كل صف غير صفري يكون له قيادي 1، هو أيضا يحدد عدد العناصر القيادية $1's$ الموجودة. لكل قيادي 1، يكون لدينا عمود محوري، لذلك r تكون أيضا هي عدد الأعمدة المحورية. إجمالا، r تكون هي عدد الصفوف غير الصفرية، عدد العناصر القيادية $1's$ وعدد الأعمدة المحورية.

قبل الشروع في برهان بعض النظريات حول الاحتمالات الممكنة لمجموعات حلول أنظمة المعادلات، دعنا نحلل بعناية، على سبيل المثال، نظام خاص له عدد لانهائي من الحلول.

مثال ١-٣-٣ نعتبر نظام من أربع معادلات خطية في سبعة متغيرات، أي أن $m=4$ و $n=7$

$$x_1+4x_2-x_4+7x_6-9x_7=3$$
$$2x_1+8x_2-x_3+3x_4+9x_5-13x_6+7x_7=9$$
$$2x_3-3x_4-4x_5+12x_6-8x_7=1$$
$$-x_1-4x_2+2x_3+4x_4+8x_5-31x_6+37x_7=4$$

هذا النظام له مصفوفة موسعة من الحجم 4×8 متكافئة صفيا مع المصفوفة (تحقق من ذلك)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك هنا نجد أن $r=3$ و

$$D=\{d_1,d_2,d_3\}=\{1,3,4\}$$

و

$$F=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}=\{2,5,6,7,8\}$$

نفرض أن i ترمز إلى أي من الصفوف غير الصفرية التي عددها $r=3$. إذن الدليل d_i يكون لعمود محوري. في هذه الحالة يكون من اليسير استخدام المعادلة الممثلة بالصف i لكتابة تعبير للمتغير x_{d_i}. سوف يكون دالة خطية في المتغيرات x_{f_1} ، x_{f_2} ، x_{f_3} ، x_{f_4} (لاحظ أن $f_5=8$ لا تعين متغير، ولكن تخبرنا أن العمود الأخير ليس عمودا محوريا).

الآن نكون هذه التعبيرات الثلاثة

$$x_{d_1}=x_1=4-4x_2-2x_5-x_6+3x_7 \qquad (i=1)$$

$$x_{d_2}=x_3=2-x_5+3x_6-5x_7 \qquad (i=2)$$

$$x_{d_3}=x_4=1-2x_5+6x_6-6x_7 \qquad (i=3)$$

كل عنصر في المجموعة $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$ يكون دليل لمتغير ما عدا $f_5=8$. نشير إلى $x_{f_1}=x_2$ ، $x_{f_2}=x_5$ ، $x_{f_3}=x_6$ و $x_{f_4}=x_7$ كمتغيرات حرة (مستقلة)، حيث أنها تسمح بفرض أي تراكيب ممكنة للقيم التي يمكن أن نتخيلها ويمكننا الاستمرار لبناء حل للنظام بحل المعادلات المنفردة لقيم المتغيرات الأخرى (التابعة).

كل عنصر في $D=\{d_1,d_2,d_3\}=\{1,3,4\}$ يكون دليل لمتغير ، نشير للمتغيرات $x_{d_1}=x_1$ ، $x_{d_2}=x_3$ ، $x_{d_3}=x_4$ كمتغيرات مرتبطة، حيث أنها تعتمد على المتغيرات المستقلة. بصورة أكثر دقة،

لكل اختيار ممكن لقيم المتغيرات المستقلة نحصل على مجموعة محددة من القيم للمتغيرات التابعة التي تكون مع بعضها حلا للنظام.
للتعبير عن الحلول في صورة مجموعة نكتب

$$\left\{\begin{bmatrix} 4-4x_2-2x_5-x_6+3x_7 \\ x_2 \\ 2-x_5+3x_6-5x_7 \\ 1-2x_5+6x_6-6x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} : x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{C}\right\}$$

الشرط بأن $x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{C}$ يعني أن المتغيرات x_2, x_5, x_6, x_7 تكون متغيرات حرة لنفترض لها أي قيم ممكنة.

هذا الأسلوب النظامي لحل نظام من المعادلات يسمح لنا بإنشاء وصف دقيق لمجموعة الحلول لأي نظام متوافق بمجرد إيجاد الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة. عندما تكون مجموعة المتغيرات الحرة هي المجموعة الخالية فإننا نحصل على حل وحيد.

استخدام الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات لتحديد طبيعة مجموعة الحلول هي الفكرة الأساس، لذلك دعنا نناقش مثال آخر . ولكن قبل المثال نعتبر التعريف التالي:

تعريف ١-٣-٤. نفرض أن A مصفوفة موسعة لنظام متوافق من المعادلات الخطية و B متكافئة صفيا مع A في الشكل الصفي المدرج المختزل. نفرض أن j دليل لعمود محوري في B . إذن المتغير x_j يكون **متغير تابع** dependent. المتغير الذي لا يكون تابع يسمى **متغير مستقل** independent أو **حر** free.

بدراسة هذا التعريف بعناية قد نتعجب ونتساءل ماذا لو كان النظام في n متغير والعمود $n+1$ عمود محوري؟ سوف نبين فيما بعد أن هذا لا يمكن أن يحدث لأي نظام متوافق.

مثال ١-٣-٥. نعتبر نظام من خمس معادلات خطية في خمسة متغيرات.

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 11x_5 = 13$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 16$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_4 + 10x_5 = 21$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 20x_5 = 38$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 22$$

والذي له المصفوفة الموسعة في الصورة الصفية المختزلة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الأعمدة 1، 3 و 4 أعمدة محورية، لذلك $D = \{1,3,4\}$. من ذلك نعلم أن المتغيرات x_1 ، x_3 و x_4 تكون متغيرات تابعة وكل من الصفوف غير الصفرية $r = 3$ في المصفوفة المختزلة صفيا سوف يعطي تعبير لواحد من هذه المتغيرات الثلاثة. المجموعة F هي أدلة كل الأعمدة الأخرى، $F = \{2,5,6\}$. العمود الذي دليله 6 في F يعني أن العمود الأخير ليس عمود محوري وهذا النظام يكون متوافق(النظرية التالية). الأدلة المتبقية في F تناظر متغيرات حرة، لذلك x_2 و x_5 تكون هي المتغيرات الحرة. المعادلات الثلاث الناتجة والتي تصف الحل هي

$$x_1 = 6 + x_2 - 3x_5 \qquad (x_{d_1} = x_1)$$
$$x_3 = 1 + 2x_5 \qquad (x_{d_2} = x_3)$$
$$x_4 = 9 - 4x_5 \qquad (x_{d_3} = x_4)$$

يجب على القارئ التأكد من أنه قد فهم كيف تم تكوين هذه المعادلات وملاحظة كيف أن وضع العناصر القيادية 1's يحدد المتغيرات في

الطرف الأيسر في كل معادلة. يمكننا وصف مجموعة الحلول بصورة تامة كما يلي

$$S=\left\{\begin{bmatrix}6+x_2-3x_5\\ x_2\\ 1+2x_5\\ 9-4x_5\\ x_5\end{bmatrix}:x_2,x_5\in\mathbb{C}\right\}$$

نظرية ١-٣-٦. نفرض أن A هي المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية في n متغير. نفرض أن B مصفوفة مكافئة صفيا لـ A وفي الشكل الصفي المدرج المختزل بها r صف غير صفري. إذن نظام المعادلات يكون غير متوافق إذا وفقط إذا كان العمود $n+1$ في B عمود محوري.

البرهان: نفرض أن العمود $n+1$ في B عمود محوري. إذن القيادي 1 للصف r يقع في العمود $n+1$ للمصفوفة B. لذلك الصف r في المصفوفة B، والذي يبدأ بأصفار متتابعة عددها n يكون ممثل بالمعادلة $0=1$ وهي معادلة غير صحيحة على الإطلاق. حيث أن هذه المعادلة غير صحيحة لأي اختيارات لقيم المتغيرات، فإنه لا يوجد حل لمعادلات النظام ويكون النظام غير متوافق.

في الاتجاه الآخر، نريد إثبات أنه إذا كان النظام غير متوافق فإن العمود $n+1$ في B يكون محوري. لإتمام ذلك سوف نستخدم طريقة البرهان غير المباشر باستخدام المكافئ العكسي بأن نفرض أن العمود $n+1$ في B عمود ليس محوري ونصل إلى أن نظام المعادلات يكون متوافق.

إذا كان العمود $n+1$ في B ليس محوري، فإن القيادي 1 في الصف r يكون موضوع في أحد الأعمدة من 1 إلى n. لذلك كل 1,s القيادية للصفوف السابقة تكون أيضا في الأعمدة من 1 إلى n. بتعبير آخر، حيث أن القيادي الأخير ليس في العمود الأخير، فإنه لا يوجد 1 قيادي في العمود الأخير. الآن نكون حل للنظام بوضع كل

متغير تابع بالعنصر في العمود الأخير للصف المناظر للقيادي 1 ونضع كل متغير حر بالصفر. أي أن

$$x_{d_i} = [B]_{i,n+1} \qquad 1 \le i \le r$$

$$x_{f_i} = 0 \qquad 1 \le i \le n-r$$

هذه القيم للمتغيرات تجعل المعادلات الممثلة بالصفوف r الأولى في B كلها تكون محققة. الصفوف التي أرقامها أكبر من r (إذا وجدت) كلها تكون صفرية، لذلك تكون ممثلة بالمعادلة $0 = 0$ وهذه أيضا تكون محققة. الآن كونا حل واحد لنظام المعادلات الممثل بالمصفوفة B ومن ثم حل لنظام المعادلات الممثل بالمصفوفة A. لذلك يمكننا القول بأن النظام متوافق.

جمال هذه النظرية في أنها تعني أنه يمكننا استنتاج ما إذا كان النظام متوافق أم غير متوافق بالنظر فقط إلى مجرد عنصر واحد في الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة.

لاحظ أنه للنظام المتوافق، الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة يكون له $n+1 \in F$ ، لذلك العنصر الأكبر في F لا يشير إلى متغير. أيضا للنظام غير المتوافق $n+1 \in D$ ومن ثم لا يوجد معنى لمناقشة ما إذا كانت المتغيرات حرة أم تابعة، حيث أنه لا يوجد حل. أنظر مرة أخرى إلى تعريف ١-٣-٤ لترى كيف أننا لسنا بحاجة إلى اعتبار إمكانية الإشارة إلى x_{n+1} كمتغير تابع.

من نظرية ١-٣-٦، يمكننا اكتشاف العلاقة بين r و n للنظام المتوافق. يمكننا التمييز بين حالة الحل الوحيد وحالة العدد اللانهائي من الحلول. علاوة على ذلك يمكننا تقرير أن هذان هما الاحتمالان الوحيدان.

نظرية ١-٣-٧. نفرض أن A هي المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية المتوافق في n متغير. نفرض أن B مصفوفة مكافئة صفيا لـ A وفي الشكل الصفي المدرج المختزل بها r عمود محوري. إذن $r \le n$. إذا كان $r = n$، فإن النظام يكون له حل وحيد، وإذا كان $r < n$ فإن النظام يكون له عدد لانهائي من الحلول.

البرهان: لاحظ أن B تحتوي $n+1$ عمود، لذلك يكون لها على الأكثر $n+1$ عمود محوري، أي أن $r \le n+1$. إذا كان $r = n+1$ ، فإن

كل عمود في B يكون محوري، وبخاصة العمود الأخير يكون محوري. من نظرية ١-٣-٦ النظام يكون غير متوافق، وهذا يناقض الفرض. لذلك $r \le n$.

عندما يكون $r = n$ ، نجد أنه يوجد $n - r = 0$ متغير حر (أي أن $F = \{n+1\}$) والحل الوحيد يعطى بوضع المتغيرات التي عددها n بالعناصر n الأولى في العمود $n+1$ في B.

عندما يكون $r < n$ ، يكون لدينا $n - r > 0$ متغير حر. نختار واحد من هذه المتغيرات الحرة ونضع المتغيرات الحرة الأخرى كلها أصفار. الآن نضع المتغير الحر الذي تم اختياره بأي قيمة ثابتة. إذن يكون من الممكن تعيين قيم المتغيرات التابعة لإنشاء حل للنظام. بوضع قيم مختلفة للمتغير الحر المختار، بهذا السلوك يمكننا إنشاء عدد لا نهائي من الحلول.

المتغيرات الحرة Free Variables

النظرية التالية تصوغ الخلاصة من الفقرة الأخيرة في برهان النظرية السابقة والتي تسمح لنا صراحة بذكر عدد المتغيرات الحرة في النظام المتوافق.

نظرية ١-٣-٨. نفرض أن A هي المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية المتوافق في n متغير. نفرض أن B مصفوفة مكافئة صفيا لـ A وفي الشكل الصفي المدرج المختزل تحتوي r صف غير صفري. إذن مجموعة الحلول يمكن وصفها باستخدام $n - r$ متغير حر.

البرهان: أنظر برهان نظرية ١-٣-٧

مثال ١-٣-٩. لكل من أنظمة المعادلات التالية، r و n معطاة. يمكننا استخدام هذه المعلومات بطريقة مفيدة.

(أ)
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

أنظر مثال ١-٢-١٨ ، $r = 2$ ، $n = 3$ ، يوجد $n - r = 1$ متغير حر. يوجد عدد لانهائي من الحلول.

(ب)
$$-7x_1-6x_2-12x_3=-33$$
$$5x_1+5x_2+7x_3=24$$
$$x_1+4x_3=5$$
أنظر مثال ١-٢-١٨ $r=3$ ، $n=3$، يوجد $n-r=0$ متغير حر. يوجد حل وحيد.

(ج)
$$2x_1+3x_2=5$$
$$-x_1+4x_2=6$$
$$3x_1+10x_2=2$$
$$3x_1-x_2=-1$$
$$6x_1+9x_2=3$$
$r=3$ ، $n=2$ ، العمود 3 محوري. النظام غير متوافق.

(د)
$$2x_1+x_2+7x_3-7x_4=2$$
$$-3x_1+4x_2-5x_3-6x_4=3$$
$$x_1+x_2+4x_3-5x_4=2$$
أنظر مثال ١-٢-٢٠ ، $r=3$ ، $n=4$. العمود الخامس عمود محوري. من نظرية ١-٣-٦ النظام غير متوافق.

النظرية التالية رغم سهولة برهانها، إلا أنها في غاية الأهمية حيث أنها تلخص لنا ما تم ذكره في هذا الفصل. لاحظ أن هذه النظرية تمت الإشارة إليها أولا في مثال ١-١-٥ وبعد ذلك أشير إليها في العديد من الأمثلة.

نظرية ١-٣-١٠. أي نظام من المعادلات الخطية إما لا يكون له حل أو يكون له حل وحيد أو عدد لانهائي من الحلول.

البرهان: من التعريف، نظام المعادلات يكون متوافق أو غير متوافق. إذا كان غير متوافق فإنه يكون ليس له حل. بالنسبة للنظام المتوافق، من نظرية ١-٣-٧ يوجد حل وحيد أو عدد لانهائي من الحلول.

النظرية التالية تضاف إلى ما لدينا من أدوات لتحديد مجموعة الحلول لنظام من المعادلات الخطية.

نظرية ١-٣-١١. نفرض أنه لدينا نظام متوافق من المعادلات الخطية يتكون من m معادلة في n متغير. إذا كان $n > m$ فإن النظام يكون له عدد لا نهائي من الحلول.

البرهان: نفرض أن المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات متكافئة صفيا مع المصفوفة B في الشكل الصفي المدرج المختزل والتي لها r صف غير صفري. حيث أن B بها m صف كعدد كلي، عدد الصفوف غير الصفرية يكون أقل. لذلك $r \leq m$. هذا مع الفرض بأن $n > m$، نجد أن النظام يكون له مجموعة حل توصف عن طريق على الأقل متغير واحد حر، لأن $n - r \geq n - m > 0$.

النظام المتوافق بمتغيرات حرة يكون له عدد لانهائي من الحلول كما هو معطى في نظرية ١-٣-٧.

لاحظ أنه لاستخدام هذه النظرية نحتاج إلى معرفة أن النظام متوافق، سويا مع القيم m و n. ليس من الضروري حساب الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة. هذا هو جوهر المثال التالي.

مثال ١-٣-١٢. نعتبر نظام المعادلات الخطية من ثلاث معادلات في أربعة متغيرات، $m = 3$ و $n = 4$

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 8$$
$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4$$

الحل $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 2$ و $x_4 = 1$ يمكن اختباره بسهولة بالتعويض. بمعرفتنا لهذا الحل، يكون النظام متوافق. هذا مع $n > m$ يسمح لنا بتطبيق نظرية ١-٣-١١ واستنتاج أن النظام له عدد لانهائي من الحلول.

تمارين ١-٣

١- كيف يمكن بسهولة تقرير متى يكون نظام من المعادلات الخطية متوافق أم لا؟

٢- نفرض أننا حولنا المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية إلى الشكل الصفي المدرج المختزل. كيف يمكننا تحديد المتغيرات التابعة والمستقلة (الحرة)؟

٣- ما هي مجموعات الحل الممكنة لنظام من المعادلات الخطية؟

في التمارين ٤- ١٠ أوجد مجموعة الحل لنظام المعادلات. أعط قيم n و r وفسر النتائج في ضوء النظريات في هذا الفصل.

٤-
$$\begin{aligned} x_1+4x_2+3x_3-x_4&=5\\ x_1-x_2+x_3+2x_4&=2\\ 4x_1+x_2+6x_3+5x_4&=9 \end{aligned}$$

٥-
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=3\\ 2x_1-4x_2+x_3+x_4&=2\\ x_1-2x_2-2x_3+3x_4&=1 \end{aligned}$$

٦-
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=3\\ x_1+x_2+x_3-x_4&=1\\ x_1+2x_3-x_4&=2 \end{aligned}$$

٧-
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4&=2\\ x_1+x_2+x_3-x_4&=2\\ x_1+x_3-x_4&=2 \end{aligned}$$

٨-
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=1\\ 2x_1-x_2+x_3&=2\\ 3x_1+x_2+x_3&=4\\ x_2+2x_3&=6 \end{aligned}$$

٩-
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1\\ 2x_1-x_2+x_3&=2\\ 3x_1+x_2+x_3&=4\\ 5x_2+2x_3&=1 \end{aligned}$$

-١٠
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 8x_2 - 7x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

١١- تحدث بالتفصيل عن مجموعة حل أنظمة المعادلات التي لها الخصائص التالية. أذكر بوضوح النظريات المستخدمة في ما تصل إليه من نتائج.

(أ) نظام متوافق من 8 معادلات في 6 متغيرات.
(ب) نظام متوافق من 6 معادلات في 8 متغيرات.
(ج) نظام من خمس معادلات في تسعة متغيرات.
(د) نظام من 12 معادلة في 35 متغير.
(هـ) نظام من 6 معادلات في 12 متغير.
(و) نظام من 8 معادلات في 6 متغيرات، الشكل الصفي المدرج المختزل لمصفوفة النظام الموسعة به سبعة أعمدة محورية.

١٢- نفرض B هي مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل مكافئة صفيا للمصفوفة الموسعة لنظام معادلات خطية مكون من m معادلة في n متغير. نفرض r، D و F كما هي معرفة في تعريف ١-٢-١٣ ماذا يمكنك أن تستنتج حول العناصر التالية؟

$$b_{1,d_1},\ b_{3,d_3},\ b_{1,d_3},\ b_{3,d_1},\ b_{d_1,1},\ b_{d_3,3},\ b_{d_1,3},\ b_{d_3,1},\ b_{1,f_1},\ b_{3,f_1}$$

١٣- نظام غير متوافق قد يكون له $r > n$. إذا حاولنا (خطأً) تطبيق نظرية ١-٣-٨ على مثل هذا النظام، كم متغير حر سوف نكتشفها؟

١٤- نفرض أن A هي المصفوفة الموسعة لنظام معادلات في n متغير و B هي المكافئ الصفي لها في الشكل الصفي المدرج المختزل لها r عمود محوري. إذا كان $r = n+1$ ، برهن أن نظام المعادلات يكون غير متوافق. إذا كان $r = n+1$، فإن $D = \{1,2,3,....,n+1\}$ وكل عمود في B يكون عمود محوري. بصفة خاصة العمود $n+1$ يكون عمود محوري. من نظرية ١-٣-٦ النظام يكون غير متوافق.

١-٤ أنظمة المعادلات المتجانسة

Homogeneous Systems of Equations

في هذا الفصل نخصص دراستنا لأنظمة المعادلات الخطية حيث كل معادلة يكون الحد الثابت لها صفر.

حلول الأنظمة المتجانسة

عادة نبدأ بالتعريف.

تعريف ١-٤-١. نظام المعادلات الخطية $LS(A,b)$ يكون **متجانس** homogeneous إذا كان متجه الثوابت هو المتجه الصفري، أي أن $b=0$.

مثال ١-٤-٢. نظام المعادلات الخطية

$$-7x_1-6x_2-12x_3=0$$
$$5x_1+5x_2+7x_3=0$$
$$x_1+4x_3=0$$

نظام متجانس. كذلك النظام التالي يكون متجانس

$$2x_1+x_2+7x_3-7x_4=0$$
$$-3x_1+4x_2-5x_3-6x_4=0$$
$$x_1+x_2+4x_3-5x_4=0$$

هل يمكنك بسرعة إيجاد حل لهذا النظام؟ من الواضح أننا إذا وضعنا كل المتغيرات بأصفار فإن كل المعادلات تكون محققة ومن ثم يكون حل للنظام المتجانس. هذا هو مضمون النظرية التالية.

نظرية ١-٤-٣. نفرض نظام متجانس من المعادلات الخطية. إذن النظام يكون متوافق ويوجد حل وذلك بوضع كل المتغيرات أصفار.

البرهان: نضع كل المتغيرات أصفار. عند التعويض بهذه القيم في كل معادلة، نجد أن الطرف الأيسر يعطي صفر، مهما كانت المعاملات. وحيث أن النظام المتجانس يكون له أصفار في الطرف الأيمن في كل معادلة كحد ثابت، فإن كل معادلة تكون محققة. مع وجود حل يكون النظام متوافق.

حيث أن الحل واضح جدا، الآن نعرف الحل البديهي.

تعريف ١-٤-٤. نفرض نظام متجانس من المعادلات الخطية في n متغير. الحل $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، … ، $x_n = 0$ (أي $x = 0$) يسمى **الحل البديهي** أو **الحل التافه** trivial solution.

الآن نعطي ثلاثة أمثلة سوف نرجع إليها خلال هذا الفصل. سوف نعمل من خلال عمليات الصف ونوجد الشكل الصفي المدرج المختزل. لاحظ التشابه والاختلاف في هذه الأمثلة.

مثال ١-٤-٥. نعتبر نظام المعادلات المتجانس

$$\begin{aligned}-7x_1 - 6x_2 - 12x_3 &= 0\\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 0\\ x_1 + 4x_3 &= 0\end{aligned}$$

والذي تختزل مصفوفته الموسعة إلى الصورة

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

من نظرية ١-٤-٣، هذا النظام يكون متوافق، والحساب $n - r = 3 - 3 = 0$ يعني أن مجموعة الحل تحتوي حل وحيد. لذلك هذا الحل الوحيد يجب أن يكون هو الحل التافه.

مثال ١-٤-٦. نعتبر نظام المعادلات المتجانس

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0\\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\ x_1 + x_2 &= 0\end{aligned}$$

والذي تختزل مصفوفته الموسعة إلى الصورة

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

من نظرية ١-٤-٣، النظام يكون متوافق والحساب $n - r = 3 - 2 = 1$ يعني أنه مجموعة الحلول تحتوي متغير حر، من نظرية ١-٣-٧ يوجد

عدد لانهائي من الحلول. يمكن وصف مجموعة الحل باستخدام المتغير الحر x_3

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}: x_1=-x_3, x_2=x_3\right\}=\left\{\begin{bmatrix}-x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix}: x_3\in\mathbb{C}\right\}$$

هندسيا هذه تمثل النقاط في الفراغ الثلاثي التي تقع على مستقيم يمر بنقطة الأصل.

مثال ١-٤-٧. نعتبر نظام المعادلات المتجانس

$$\begin{aligned}2x_1+x_2+7x_3-7x_4&=0\\-3x_1+4x_2-5x_3-6x_4&=0\\x_1+x_2+4x_3-5x_4&=0\end{aligned}$$

والذي تختزل مصفوفته الموسعة إلى الصورة

$$\begin{bmatrix}1&0&3&-2&0\\0&1&1&-3&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

من نظرية ١-٤-٣، النظام يكون متوافق والحساب $n-r=4-2=2$ يعني أن مجموعة الحل تحتوي متغيران مستقلان. من نظرية ١-٣-٧، هذا النظام له عدد لانهائي من الحلول. يمكننا وصف مجموعة الحل باستخدام المتغيرات الحرة x_3 و x_4

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}: x_1=-3x_3+2x_4,\ x_2=-x_3+3x_4\right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -3x_3 + 2x_4 \\ -x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{C} \right\}$$

لاحظ أنه أثناء إجراء عمليات الصف على المصفوفة الموسعة لنظام متجانس من المعادلات الخطية، العمود الأخير للمصفوفة كله أصفار. أي من عمليات الصف الثلاث المسموح بها سوف تحول الأصفار إلى أصفار ومن ثم، العمود الأخير في المصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل سوف يكون أيضا كله أصفار. لذلك، في هذه الحالة، يمكننا التعامل فقط مع مصفوفة المعاملات ونتذكر أن العمود الأخير بدأ بأصفار وبعد عدد من عمليات الصف يظل صفر.

المثال الأخير يقترح النظرية التالية.

نظرية ١-٤-٨. نفرض نظام متجانس من المعادلات الخطية مكون من m معادلة في n متغير، حيث $n > m$. إذن النظام يكون له عدد لانهائي من الحلول.

مثال ١-٤-٥ ومثال ١-٤-٦ يختصان بأنظمة متجانسة من المعادلات الخطية عندما $n = m$ وهناك فرق جوهري بين المثالين. أحد النظامين له حل وحيد بينما الآخر له عدد لانهائي من الحلول. هذه تحديدا هي الاحتمالات الممكنة للنظام المتجانس ويتضح أن كل منهما ممكن (بخلاف الحالة عندما $n > m$ ، حيث نظرية ١-٤-٣ تخبرنا أن هناك إمكانية واحدة فقط للنظام المتجانس).

فضاء الصفرية لمصفوفة Null Space of a Matrix

مجموعة حلول النظام المتجانس (والتي من نظرية ١-٤-٣ تكون غير خالية) تكون على درجة من الاهتمام تضمن اسمها. ومع ذلك نعرفها كخاصية لمصفوفة المعاملات، وليست كخاصية لأي نظام من المعادلات.

تعريف ١-٤-٩. فضاء الصفرية null space لمصفوفة A ، يرمز له بالرمز $N(A)$ ، هو مجموعة كل المتجهات التي تكون حلول للنظام المتجانس $LS(A,0)$.

مثال ١-٤-١٠. نعتبر النظام المتجانس

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_4 + 7x_6 - 9x_7 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 + 9x_5 - 13x_6 + 7x_7 &= 0 \\ 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 12x_6 - 8x_7 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 - 31x_6 + 37x_7 &= 0 \end{aligned}$$

المتجهان

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad y = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يقعان في فضاء الصفرية لمصفوفة المعاملات لنظام المعادلات. بينما المتجه

$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لا ينتمي إلى فضاء الصفرية حيث أنه ليس حلا للنظام المتجانس، حيث على سبيل المثال يفشل في تحقيق حتى المعادلة الأولى.

مثال ١-٤-١١. أحسب فضاء الصفرية للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 7 & -3 & -8\\ 1 & 0 & 2 & 4 & 9\\ 2 & 2 & -2 & -1 & 8\end{bmatrix}$$

الحل: لإيجاد فضاء الصفرية $N(A)$ للمصفوفة A المعطاة يكون، حسب التعريف، المطلوب هو حل نظام المعادلات المتجانس $LS(A,0)$. نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام المتجانس لنحصل على

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

المتغيرات (للنظام المتجانس) x_3 و x_5 متغيرات حرة (حيث أن الأعمدة 1، 2، 4 أعمدة محورية)، لذلك نكتب المعادلات الممثلة بالمصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل في الصورة

$$x_1=-2x_3-x_5$$
$$x_2=3x_3-4x_5$$
$$x_4=-2x_5$$

لذلك يمكننا كتابة مجموعة اللانهائية للحلول باستخدام متجهات الأعمدة

$$N(A)=\left\{\begin{bmatrix}-2x_3-x_5\\ 3x_3-4x_5\\ x_3\\ -2x_5\\ x_5\end{bmatrix}: x_3,x_5\in\mathbb{C}\right\}$$

مثال ١-٤-١٢. أحسب فضاء الصفرية للمصفوفة

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: لإيجاد فضاء الصفرية $N(C)$ للمصفوفة A المعطاة يكون، حسب التعريف، المطلوب هو حل نظام المعادلات المتجانس $LS(C,0)$. نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام المتجانس لنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لا توجد متغيرات حرة في النظام المتجانس الممثل بالمصفوفة المختزلة، لذلك يوجد فقط الحل التافه، المتجه الصفري 0. لذلك يمكننا كتابة مجموعة الحل كما يلي

$$N(C) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

تمارين ١-٤

١- ما هو الصحيح دائما بالنسبة لمجموعة حلول النظام المتجانس من المعادلات؟

٢- نفرض أن نظام متجانس من المعادلات يحتوي 13 متغير في 8 معادلات. كم حل يكون لهذا النظام؟ لماذا؟

٣- صف باستخدام الكلمات دون الرموز فضاء الصفرية لمصفوفة.

٤- في التمارين ٤-١٤ في الفصل ١-٢ أوجد حل نظام المعادلات المتجانس المناظر لكل نظام معادلات معطى.

في التمارين ٥-١٠ أوجد حل نظام المعادلات المتجانس

٥- $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

٦- $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

٧- $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

٨- $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

٩- $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

١٠- $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 8x_2 - 7x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

١١- أحسب فضاء الصفرية $N(A)$ للمصفوفة A حيث

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

١٢- أحسب فضاء الصفرية $N(B)$ للمصفوفة B حيث

$$B=\begin{bmatrix} -6 & 4 & -36 & 6 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ -3 & 2 & -18 & 3 \end{bmatrix}$$

١٣- تحدث بتفصيل عن مجموعة حل كل من الأنظمة التالية. تأكد من توضيح ما هي النظريات المستخدمة للوصول إلى هذه النتيجة.

(أ) نظام متجانس من 8 معادلات في 8 متغيرات.

(ب) نظام متجانس من 8 معادلات في 9 متغيرات.

(ج) نظام متجانس من 8 معادلات في 7 متغيرات.

١٤- نعتبر نظام متجانس من المعادلات الخطية $LS(A,0)$، ونفرض أن $u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ حل لنظام المعادلات. برهن أن $v=\begin{bmatrix} 4u_1 \\ 4u_2 \\ 4u_3 \\ \vdots \\ 4u_n \end{bmatrix}$ يكون أيضا حل لنظام المعادلات $LS(A,0)$.

١-٥ المصفوفات غير الشاذة Nonsingular Matrices

في هذا الفصل تعتبر نوع خاص من المصفوفات وهو المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة، والتي عندما تعتبر كمصفوفة معاملات فإنها تؤدي إلى نظام من المعادلات عدد المعادلات فيه يساوي عدد المتغيرات. فيما يلي من أبواب سوف يتضح لنا الأهمية الخاصة لهذا النوع من المصفوفات.

النظريات في هذا الفصل سوف توضح العلاقة بين كل من نظام المعادلات (متجانس أو غير متجانس)، المصفوفة الموسعة التي تمثل ذلك النظام، مصفوفة المعاملات، متجه الثوابت، الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفات (المصفوفة الموسعة ومصفوفة المعاملات) و مجموعة الحل. ينبغي توخي الدقة عند القراءة والكتابة والحديث عن أنظمة المعادلات، المصفوفات ، المجموعات والمتجهات. نظام المعادلات ليس مصفوفة، والمصفوفة ليست مجموعة حل ومجموعة الحل ليست نظام معادلات.

تعريف ١-٥-١. المصفوفة التي بها m صف و n عمود تسمى **مربعة** square إذا كان $m = n$. في هذه الحالة نقول أن المصفوفة مربعة من الحجم n. لكي نقرر أن مصفوفة ليست مربعة، نقول أنها مستطيلة.

الآن نعطي تعريف مركزي في الجبر الخطي.

تعريف١-٥-٢. نفرض A مصفوفة مربعة ونفرض أن مجموعة الحل لنظام المعادلات الخطية المتجانس $Ax = 0$ هي $\{0\}$. بتعبير آخر، نفرض أن نظام المعادلات له فقط الحل التافه. إذن A تسمى مصفوفة **غير شاذة** nonsingular. المصفوفة التي ليست غير شاذة تسمى **مصفوفة شاذة** singular.

يمكننا البحث في ما إذا كانت المصفوفة غير شاذة أم لا، أيا كان مصدر المصفوفة، سواء كانت مشتقة من نظام معادلات أو حتى أنها مجرد مصفوفة. التعريف يقول أنه لكي ننجز هذا البحث يجب أن نكون نظام معين من المعادلات (متجانس ومصفوفة المعاملات له هي المصفوفة تحت الاعتبار) وننظر في مجموعة الحل لهذا النظام. في هذا الفصل سوف نقدم نظريات تربط المصفوفات غير الشاذة مع نظام من المعادلات.

ينبغي التنويه هنا إلى أنه ليس له معنى أن نقول نظام معادلات غير شاذ (لأن غير شاذ لا يطلق على نظام المعادلات) أو أن نقول أن المصفوفة من الحجم 5×6 غير شاذة (لأنها ليست مربعة).

مثال ١-٥-٣. مصفوفة المعاملات المشتقة من نظام المعادلات في مثال ١-٢-٧ وهي

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

مصفوفة شاذة، لأنه توجد حلول غير تافهة (غير صفرية) لنظام المعادلات المتجانسة $LS(A,0)$.

مثال ١-٥-٤. مصفوفة المعاملات المشتقة من نظام المعادلات في مثال ١-٢-١٨ وهي

$$B=\begin{bmatrix}-7 & -6 & -12\\ 5 & 5 & 7\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

تكون غير شاذة، لأن الحل الوحيد لنظام المعادلات المتجانس $LS(B,0)$ هو الحل التافه (الحل الصفري).

لاحظ أننا لن نناقش مثال ١-٢-٢٠، هل مصفوفة المعاملات شاذة أم غير شاذة، لأن المصفوفة ليست مربعة.

تعريف ١-٥-٥. المصفوفة المربعة من الحجم m ، يرمز لها بالرمز I_m والتي عناصرها a_{ij} تحقق العلاقة

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases} ، \quad 1\le i,j\le m$$

تسمى **مصفوفة الوحدة** identity matrix من الحجم m.

مثال ١-٥-٦. مصفوفة الوحدة من الحجم 4 هي

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن مصفوفة الوحدة تكون مربعة وفي الشكل الصفي المدرج المختزل. أيضا كل عمود يكون عمود محوري.

نظرية ١-٥-٧. نفرض أن A مصفوفة مربعة و B مصفوفة متكافئة صفيا مع A وفي الشكل الصفي المدرج المختزل. إذن A تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كانت B هي مصفوفة الوحدة.

البرهان: نفرض أن B هي مصفوفة الوحدة. عندما تختزل المصفوفة الموسعة $[A\,|\,0]$ صفيا، فإن الناتج يكون $[B\,|\,0]=[I_n\,|\,0]$. عدد الصفوف غير الصفرية يكون مساويا لعدد المتغيرات في نظام المعادلات $LS(A,0)$، لذلك $n=r$ ، ومن نظرية ١-٣-٨، عدد المتغيرات الحرة يساوي $n-r=0$. لذلك النظام المتجانس يكون له حل وحيد، والذي يجب أن يكون هو الحل التافه. وهذا هو تعريف المصفوفة غير الشاذة.

لبرهان الاتجاه الآخر، إذا كانت A غير شاذة، فإن نظام المعادلات المتجانس $LS(A,0)$ يكون له حل وحيد ولا توجد متغيرات حرة في وصف مجموعة الحل. نظام المعادلات المتجانس يكون متوافق (نظرية ١-٤-٣) لذلك من نظرية ١-٣-٨ يوجد $n-r$ متغير حر. لذلك $n-r=0$ ، ومن ثم $n=r$. إذن B يكون لها n عمود محوري من بين أعمدتها التي عددها n. وهذا يكفي لكي تكون B مصفوفة الوحدة I_n من درجة n.

لاحظ أنه حيث أن النظرية تكافؤ، فإنها دائما تسمح لنا بتحديد ما إذا كانت المصفوفة شاذة أم غير شاذة.

مثال ١ـ٥ـ٨. المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تكافئ صفيا المصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وحيث أن B ليست مصفوفة الوحدة من الحجم 3، فإن A تكون شاذة.

مثال ١ـ٥ـ٩. المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -6 & 12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

تكافئ صفيا المصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وحيث أن C هي مصفوفة الوحدة من الحجم 3، فإن B تكون غير شاذة.

فضاء الصفرية للمصفوفة غير الشاذة

هناك علاقة جلية بين المصفوفة غير الشاذة وفضاءها الصفري كما يتضح من المثالين التاليين.

مثال ١ـ٥ـ١٠. نعتبر المصفوفة الشاذة A في مثال ١ـ٥ـ٨ . فضاء الصفرية هو مجموعة الحل للنظام المتجانس $LS(A,0)$، ويتكون من مجموعة لانهائية من متجهات

$$N(A)=\left\{\begin{bmatrix}-x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix}:x_3\in\mathbb{C}\right\} \quad ، \quad A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

مثال ١-٥-١١. نعتبر المصفوفة غير الشاذة B في مثال ١-٥-٩. فضاء الصفرية هو مجموعة الحل للنظام المتجانس $LS(B,0)$، ويحتوي فقط الحل التافه (الصفري).

$$N(B)=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}-7&-6&12\\5&5&7\\1&0&4\end{bmatrix}$$

هذان المثالان يوضحان النظرية التالية.

نظرية ١-٥-١٢. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذا A تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كان فضاء الصفرية لها يحتوي فقط المتجه الصفري، أي أن $N(A)=\{0\}$.

البرهان: الفضاء الصفري لمصفوفة مربعة A يساوي مجموعة حلول النظام المتجانس $LS(A,0)$. المصفوفة تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كان مجموعة حلول النظام المتجانس $LS(A,0)$ تحتوي فقط الحل التافه. هاتان الملاحظتان تبرهنان التكافؤ في النظرية.

النظرية التالية تخبر بأنه يمكننا معرفة الكثير عن حلول نظام من المعادلات الخطية بمصفوفة معاملات مربعة وذلك باختبار النظام المتجانس المناظر.

نظرية ١-٥-١٣. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذا A تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كان النظام $LS(A,b)$ له حل وحيد لكل اختيار لمتجه الثوابت b.

البرهان: نفرض أن النظام $LS(A,b)$ له حل وحيد لكل اختيار لمتجه الثوابت B. سوف نعتبر اختيار خاص جدا للمتجه b وهو $b=0$. إذن النظام $LS(A,0)$ يكون له حل وحيد. ولكن هذا هو تعريف معنى أن المصفوفة A غير شاذة.

في الاتجاه الآخر، نفرض أن A مصفوف مربعة من درجة n غير شاذة. لذلك، من نظرية ١-٥-٧، يمكن استخدام عمليات الصفوف لتحويل A إلى مصفوفة الوحدة I_n. نكون المصفوفة الموسعة $A'=[A|b]$ ونطبق عليها نفس المتتابعة من عمليات الصف. الناتج سوف يكون المصفوفة $B'=[I_n|c]$ والتي تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل مع $r=n$. المصفوفة الموسعة B' تمثل نظام المعادلات البسيط $x_i=c_i$، $1\le i\le n$. واضح أن المتجه c هو الحل، ومن ثم النظام يكون متوافق (تعريف). مع النظام المتوافق، نستخدم نظرية ١-٣-٨ لحساب المتغيرات الحرة. نجد أنه يوجد $n-r=n-n=0$ متغير حر، وبالتالي فإن الحل يكون وحيد.

هذه النظرية تساعد في توضيح جزء من اهتمامنا بالمصفوفات غير الشاذة. إذا كانت مصفوفة شاذة، فإنه بغض النظر عن متجه عمود الثوابت الذي يرافقها، باستخدام المصفوفة كمصفوفة معاملات دائما يعطي نظام معادلات خطية له حل، والحل دائما يكون وحيدا. لتحديد أن مصفوفة تكون غير شاذة، يكفي مجرد حل نظام خطي، النظام المتجانس الذي له المصفوفة تكون مصفوفة معاملات ومتجه الثوابت هو المتجه الصفري (أو أي متجه آخر).

صياغة نفي الاتجاه الآخر للنظرية هو تمرين جيد. المصفوفة الشاذة لها الخاصية أنه لبعض المتجهات b، النظام $LS(A,b)$ يكون ليس له حل وحيد، بمعنى أنه يكون ليس له حل أو له عدد لانهائي من الحلول.

المصفوفات المربعة غير الشاذة لها قائمة طويلة من الخواص الهامة، التي تبدأ بالقائمة الموجودة في النظرية التالية. بالطبع المصفوفات الشاذة سوف يكون لها عكس كل هذه الخواص.

نظرية ١-٥-١٤. نفرض أن A مصفوفة مربعة. العبارات التالية تكون متكافئة.

١- A تكون غير شاذة.

٢- A تختزل إلى مصفوفة الوحدة.

٣- فضاء الصفرية للمصفوفة A يحتوي فقط المتجه الصفري، $N(A)=\{0\}$.

٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار للمتجه b.
البرهان: العبارة " A غير شاذة " تكافئ بقية العبارات الأخرى وذلك من نظريات ١-٥-٧، ١-٥-١٢، ١-٥-١٣.

تمارين ١-٥

١- بأسلوبك الخاص أعد صياغة تعريف المصفوفة غير الشاذة.
٢- ما هي أيسر طريقة لتقرير ما إذا كانت مصفوفة شاذة أم لا؟
٣- نفرض أنه لدينا نظام من المعادلات ومصفوفة معاملاته غير شاذة. ماذا يمكن أن نقول عن مجموعة حل النظام؟

في التمارين ٤- ٧ حدد ما إذا كانت المصفوفة شاذة أم غير شاذة مع بيان السبب.

٤- $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
٥- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

٦- $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.
٧- $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

٨- أوجد فضاء الصفرية للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -9 \\ 2 & 2 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \\ -1 & 2 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

٩- نفرض A هي مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات التالي. هل A شاذة أم غير شاذة؟ وضح ماذا يمكن أن تستنتج حول مجموعة حل النظام معتمدا فقط على كون المصفوفة A شاذة أو غير شاذة.

$$
\begin{aligned}
-x_1+5x_2 &= -8\\
-2x_1+5x_2+5x_3+2x_4 &= 9\\
-3x_1+6x_2+5x_3+x_4 &= 3\\
7x_1+6x_2+5x_3+x_4 &= 30
\end{aligned}
$$

١٠- ماذا يمكنك أن تقول حول نظام معادلات مكون من 6 معادلات في 6 متغيرات ومصفوفة معاملات شاذة؟

١١- ماذا يمكنك أن تقول حول نظام معادلات غير متجانس بمصفوفة معاملات غير شاذة؟

١٢- نفرض A مصفوفة مربعة و B مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل مكافئة صفيا للمصفوفة A. برهن أنه إذا كانت A شاذة فإن الصف الأخير من B يكون صف صفري.

١٣- نفرض A مصفوفة مربعة. باستخدام تعريف الشكل الصفي المدرج المختزل، أعط برهان للتكافؤ التالي: كل عمود في A يكون محوري إذا وفقط إذا كان A هي مصفوفة الوحدة.

١٤- نفرض A مصفوفة غير شاذة مكافئة صفيا للمصفوفة B. برهن على أن B تكون غير شاذة.

١٥- نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n ونعلم أنه يوجد متجه واحد $b \in \mathbb{C}^n$ بحيث أن النظام $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد. برهن أن A تكون مصفوفة غير شاذة.