الباب الثاني
المتجهات
Vectors

في الباب الأول كان تعاملنا مع المصفوفات وقليلا مع المتجهات. في هذا الباب سوف نناقش خواص المتجهات، والتي تعتبر تمهيدا لدراسة الفضاءات الاتجاهية التي سوف تدرس في الباب الرابع. بداية سوف نحيد عن دراستنا لأنظمة المعادلات الخطية ولكن في الفصل ٢-٢ سوف نصوغ ربط بين التراكيب الخطية وأنظمة المعادلات الخطية. هذا الربط يسمح لنا بفهم أنظمة المعادلات الخطية على مستوى أعلى.

٢-١ العمليات على المتجهات Vector Operations

في هذا الفصل نعرف عمليات جديدة تتعلق بالمتجهات، ونجمع بعض الخواص الأساسية لهذه العمليات. نبدأ بالتذكير بتعريف المتجه على أنه قائمة مرتبة من الأعداد المركبة، تكتب رأسيا كما في تعريف ١-٢-٣.

تعريف ٢-١-١. الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^m$ هو مجموعة كل متجهات الأعمدة من الحجم m ومركباتها من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

عندما تعرف مجموعة مثل هذه باستخدام فقط متجهات الأعمدة التي جميع مركباتها من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، فإنها تكتب $\mathbb{R}^m$ وتعرف بالفضاء الإقليدي ذو البعد m. مصطلح متجه يستخدم على نطاق واسع بطرق مختلفة. سبق أن عرفنا المتجه بأنه قائمة مرتبة تكتب رأسيا. ويمكن أن يعرف ببساطة على أنه قائمة مرتبة من الأعداد، وربما تكتب على الصورة $\langle 2,-1,3,5 \rangle$. أيضا يمكن تفسيره على أنه نقطة في m بُعد، مثل $(2,3,-1)$ تمثل نقطة في ثلاثة أبعاد بالنسبة إلى محاور x، y و z. مع تفسيره كنقطة، يمكننا رسم سهم من نقطة الأصل إلى النقطة والذي يتوافق مع كون المتجه له اتجاه ومقدار.

كل هذه الأفكار يمكن بيان أنها مرتبطة ومتكافئة. خلال هذا المقرر سوف نتعامل مع فكرة أن المتجه هو مجرد قائمة مرتبة من الأعداد، في ترتيب خاص.

نبدأ دراستنا بإعطاء معنى تساوي متجهين. كذلك نعرف عمليتين على مجموعة المتجهات $\mathbb{C}^m$ وهما جمع متجهين وضرب متجه في قياسي.

تعريف ٢-١-٢. نفرض $u,v \in \mathbb{C}^m$ متجهين. إذن u و v يكونا **متساويان** equal ونكتب $u=v$ ، إذا كان $[u]_i=[v]_i$ لكل $1 \le i \le m$. أي أن المتجهين يكونا متساويين إذا كانت مركباتهما المتناظرة متساوية.

تعريف ٢-١-٣. نفرض $u=[u_i], v=[v_i] \in \mathbb{C}^m$ متجهين. **مجموع المتجهين** sum u و v ، يكتب $u+v$ ، يعرف بالصورة $[u+v]_i=[u]_i+[v]_i$ ، $1 \le i \le m$.

لذلك عملية جمع متجهات تأخذ متجهين من نفس الحجم وتضمهما (بطريقة طبيعية) لتعطي متجه جديد له نفس الحجم.

مثال ٢-١-٤. نعتبر المتجهين في $\mathbb{C}^4$

$$v=\begin{bmatrix}-1\\5\\2\\-7\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u=\begin{bmatrix}2\\-3\\4\\2\end{bmatrix}$$

إذن

$$u+v=\begin{bmatrix}2\\-3\\4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\5\\2\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+(-1)\\-3+5\\4+2\\2+(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\6\\-5\end{bmatrix}$$

العملية الثانية تأخذ شيئين من نوعين مختلفين، متجه وعدد وتضمهما لتعطي متجه. خلال هذا المقرر، هذا العدد يسمى **قياسي** scalar للتأكيد على أنه ليس متجه.

تعريف ٢-١-٥. نفرض $u \in \mathbb{C}^m$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، إذن المضاعف القياسي للمتجه u بالعدد α هو المتجه $[\alpha u]_i=\alpha[u]_i$.

لاحظ أننا فعلنا نوع من الضرب هنا ولكننا عرفنا نوعا آخر، ربما يظهر كأنه بطريقة طبيعية. استخدمنا هنا التجاور (وضع الرمزين متجاورين) لنرمز لهذه العملية بدلا من استخدام رمز كما فعلنا في حالة جمع متجهين. لذلك، هذا قد يحدث بعض الغموض. عندما نضع الرمزين متجاورين، هل نجري عملية الضرب المعروفة لدينا ونستخدمها منذ سنوات، أم نفعل ضرب متجه في قياسي، وهي العملية التي تم تعريفها الآن؟ أنظر للأشياء لديك،إذا كان الأول قياسي والثاني متجه، نجري العملية الجديدة، ويكون ناتج هذه العملية متجه آخر.

لاحظ كيف أن ملائمة الرموز يمكن أن تساعد هنا. إذا كتبنا الكميات القياسية بالحروف الإغريقية الصغيرة من بداية حروف الهجاء (مثل $\alpha, \beta, \ldots$) والمتجهات بالحروف اللاتينية الصغيرة من نهاية حروف الهجاء (مثل $u, v, \ldots$) ، يكون لدينا بعض الإشارات حول الأشياء التي نتعامل معها.

مثال ٢-١-٦. نفرض $u \in \mathbb{C}^5$ و $\alpha = 6 (\in \mathbb{C})$ حيث

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\alpha u = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(2) \\ 6(-1) \\ 6(0) \\ 6(5) \\ 6(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

خواص فضاء المتجهات Vector Space Properties

مع تعريف جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي، يمكننا صياغة وبرهان العديد من الخواص لكل عملية، وبعض الخواص التي تربط العمليتين. الآن نجمع عشرة من هذه الخواص سوف نرجع لها فيما بعد.

نظرية ٢-١-٧. نفرض أن $\mathbb{C}^m$ هي مجموعة متجهات العمود من الحجم m مع عملية جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي. إذن

١- إذا كان $u,v \in \mathbb{C}^m$ ، فإن $u+v \in \mathbb{C}^m$. أي أن عملية جمع متجهات الأعمدة مغلقة على $\mathbb{C}^m$.

٢- إذا كان $u \in \mathbb{C}^m$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، فإن $\alpha u \in \mathbb{C}^m$. أي أن عملية ضرب متجه عمود في قياسي تكون مغلقة على $\mathbb{C}^m$.

٣- إذا كان $u,v \in \mathbb{C}^m$، فإن $u+v=v+u$. أي أن عملية جمع متجهات الأعمدة عملية إبدالية.

٤- إذا كان $u,v,w \in \mathbb{C}^m$ ، فإن $(u+v)+w=u+(v+w)$. أي أن عملية جمع متجهات الأعمدة عملية دامجة.

٥- يوجد متجه ، 0، يسمى المتجه الصفري بحيث $u+0=0+u$ لكل $u \in \mathbb{C}^m$.

٦- إذا كان $u \in \mathbb{C}^m$، فإنه يوجد متجه $-u \in \mathbb{C}^m$ بحيث $u+(-u)=0$. أي وجود المعكوس الجمعي لمتجهات الأعمدة.

٧- إذا كان $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ و $u \in \mathbb{C}^m$، فإن $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$. أي أن عملية ضرب متجه في قياسي عملية دامجة.

٨- إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ و $u,v \in \mathbb{C}^m$، فإن $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$. أي أن عملية ضرب متجه في قياسي توزيعية على عملية جمع متجهين.

٩- إذا كان $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ و $u \in \mathbb{C}^m$، فإن $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$. أي أن جمع قياسيين توزيعي على الضرب في متجه.

١٠- إذا كان $u \in \mathbb{C}^m$، فإن $1u=u$.

البرهان: على الرغم من أن بعض هذه الخواص قد يبدو واضح جدا، إلا أنها تحتاج إلى برهان. ومع ذلك البرهان ليس ممتع كثيرا وأقرب للملل.

سوف نبرهن حالة من التوزيع بعناية ونترك برهان بقية الأجزاء للقارئ كتمرين.

$$\begin{aligned}[(\alpha+\beta)u]_i &= (\alpha+\beta)[u]_i \\ &= \alpha[u]_i+\beta[u]_i \\ &= [\alpha u]_i+[\beta u]_i \\ &= [\alpha u+\beta u]_i\end{aligned}$$

حيث أن المركبات المتناظرة في المتجهين $(\alpha+\beta)u$ و $\alpha u+\beta u$ متساوية لكل $1\le i\le m$ ، فمن تعريف تساوي متجهين فإن المتجهان يكونا متساويان.

عند استخدام الرمز $-u$ ، ينبغي الحذر. هذا هو المتجه الذي إذا أضيف إلى u يكون الناتج هو المتجه الصفري 0. هذه خاصية أساسية لجمع المتجهات. يمكن حساب $-u$ باستخدام عملية أخرى، الضرب في قياسي. يمكن إثبات ذلك مباشرة بكتابة

$$[-u]_i=-[u]_i=(-1)[u]_i=[(-1)u]_i$$

نظرية ٢-١-٨. نفرض أن $u,v,w\in\mathbb{C}^m$. إذا كان $u+v=u+w$ ، فإن $v=w$.

البرهان: نفرض أن $u,v,w\in\mathbb{C}^m$ و $u+v=u+w$، إذن

$$\begin{aligned}v &= 0+v \\ &= (-u+u)+v \\ &= -u+(u+v) \\ &= -u+(u+w) \\ &= (-u+u)+w \\ &= 0+w \\ &= w\end{aligned}$$

نظرية ٢-١-٩. لأي $u\in\mathbb{C}^m$ ، $0u=0$.

البرهان: نفرض $u\in\mathbb{C}^m$. إذن

$$\begin{aligned}0 &= 0u+(-0u) \\ &= (0+0)u+(-0u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (0u + 0u) + (-0u) \\
&= 0u + (0u + (-0u)) \\
&= 0u + 0 \\
&= 0u
\end{aligned}$$

نظرية ٢-١-١٠. لأي قياسي α ، إذا كان 0 هو المتجه الصفري فإن $\alpha 0 = 0$.

البرهان: نفرض c أي قياسي، إذن

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha 0 + (-\alpha 0) \\
&= \alpha(0 + 0) + (-\alpha 0) \\
&= (\alpha 0 + \alpha 0) + (-\alpha 0) \\
&= \alpha 0 + (\alpha 0 + (-\alpha 0)) \\
&= \alpha 0 + 0 \\
&= \alpha 0
\end{aligned}$$

تمارين ٢-١

١- أحسب

$$4\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

٢- حل المعادلة الاتجاهية في x أو وضح لماذا يكون الحل غير موجود

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

٣- حل المعادلة الاتجاهية في α أو وضح لماذا يكون الحل غير موجود

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}$$

٤- حل المعادلة الاتجاهية في α أو وضح لماذا يكون الحل غير موجود

$$\alpha\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\\6\end{bmatrix}$$

٥- أوجد قيمة كل من α و β التي تحقق المعادلة

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

٦- أوجد قيمة كل من α و β التي تحقق المعادلة

$$\alpha\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$$

٧- أكتب الأسباب (غالبا تكون خواص فضاء المتجهات) التي استخدمت في الخطوات الواردة في برهان نظريات ٢-١-٨، ٢-١-٩، ٢-١-١٠.

نفرض أننا عرفنا عملية جديدة على $\mathbb{C}^m$ ، تسمى الطرح بالصورة $[u-v]_i=[u]_i-[v]_i$ ، حيث $u,v\in\mathbb{C}^m$.

٨- برهن أنه يمكن التعبير عن طرح متجهين بدلالة العمليتان الأساسيتان الأخريان. أي أثبت أن $u-v=u+(-1)v$.

٩- برهن، بإعطاء مثال عكسي، أن عملية طرح المتجهات ليست إبدالية وليست دامجة.

١٠- برهن أن $\alpha(u-v)=\alpha u-\alpha v$ حيث α قياسي و u و v متجهان.

٢-٢ التراكيب الخطية Linear Combinations

في الفصل السابق عرفنا عملية جمع متجهات وضرب متجه في قياسي. هاتان العمليتان كافيتان لإنشاء كائن جديد يعرف بالتركيبة الخطية، هذا الكائن سوف نستخدمه كثيرا خلال هذا المقرر.

تعريف ٢-٢-١. نفرض أنه لدينا n متجه $u_1,u_2,\ldots,u_n$ في $\mathbb{C}^m$ و n قياسي $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. التعبير

$$u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+\ldots,\alpha_n u_n$$

يسمى **تركيبة خطية** linear combination من المتجهات $u_1,u_2,\ldots,u_n$.

لذلك، هذا التعريف يأخذ عدد من المتجهات وعدد مساوي له من الكميات القياسية ويضمهم معا باستخدام عمليتي ضرب متجه في قياسي وجمع المتجهات ليعطي متجها جديدا من نفس حجم المتجهات الأصلية. عندما يوظف تعريف أو نظرية تركيبة خطية، نعتقد أن طبيعة الأشياء الداخلة هي متجهات وكميات قياسية ونوع الشيء الناتج وهو متجه واحد.

مثال ٢-٢-٢. في $\mathbb{C}^6$ نفرض أن

$$\alpha_1=1 \text{ ، } \alpha_2=-4 \text{ ، } \alpha_3=2 \text{ ، } \alpha_4=-1$$

$$u_1=\begin{bmatrix}2\\4\\-3\\1\\2\\9\end{bmatrix} \text{ ، } u_2=\begin{bmatrix}6\\3\\0\\-2\\1\\4\end{bmatrix} \text{ ، } u_3=\begin{bmatrix}-5\\2\\1\\1\\-3\\0\end{bmatrix} \text{ ، } u_4=\begin{bmatrix}3\\2\\-5\\7\\1\\3\end{bmatrix}$$

إذن التركيبة الخطية لها تكون

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\alpha_4u_4$$

$$= (1)\begin{bmatrix}2\\4\\-3\\1\\2\\9\end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix}6\\3\\0\\-2\\1\\4\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}-5\\2\\1\\1\\-3\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}3\\2\\-5\\7\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\\4\\-3\\1\\2\\9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-24\\-12\\0\\8\\-4\\-16\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-10\\4\\2\\2\\-6\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\-2\\5\\-7\\-1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-35\\-6\\4\\4\\-9\\-10\end{bmatrix}$$

يمكن تكوين تركيبة خطية من نفس المتجهات إذا غيرنا الكميات القياسية.

نفرض $\beta_1 = 3$ ، $\beta_2 = 0$ ، $\beta_3 = 5$ ، $\beta_4 = -1$ ، إذن

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4$$

$$= (3)\begin{bmatrix}2\\4\\-3\\1\\2\\9\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}6\\3\\0\\-2\\1\\4\end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix}-5\\2\\1\\1\\-3\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}3\\2\\-5\\7\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -9 \\ 3 \\ 6 \\ 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \\ 20 \\ 1 \\ 1 \\ -10 \\ 24 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه كلما استطعنا الاحتفاظ بمجموعة المتجهات ثابتة واستخدام مجموعات مختلفة من الكميات القياسية فإننا ننشئ متجهات مختلفة. يمكنك إنشاء العديد من التراكيب الخطية الجديدة من المتجهات u_1, u_2, u_3, u_4. هنا سؤال، ما هي المتجهات التي يمكن إنشاؤها؟ هل تعتقد أنه يمكننا تكوين المتجه w باختيارات معينة للكميات القياسية؟ حيث

$$w = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \\ 5 \\ -17 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

هل تعتقد أنه يمكننا تكوين أي متجه في $\mathbb{C}^6$ بتغيير اختيار الكميات القياسية؟ هذان السؤالان الأخيران أساسيان وسوف يتم الإجابة عنهما فيما بعد.

مثال ٢-٢-٣. نعتبر نظام المعادلات الخطية

$$-7x_1 - 6x_2 - 12x_3 = -33$$
$$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 24$$
$$x_1 + 4x_3 = 5$$

يمكن إعادة كتابة هذا النظام في صورة تساوي متجهي عمود كما يلي

$$\begin{bmatrix} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ x_1 + 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بكتابة الطرف الأيسر في هذه المعادلة كتركيبة خطية من متجهات نحصل على

$$\begin{bmatrix} -7x_1 \\ 5x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6x_2 \\ 5x_2 \\ 0x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12x_3 \\ 7x_3 \\ 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

يمكننا إعادة كتابة كل من هذه المتجهات كحاصل ضرب كمية قياسية في متجه محدد.

$$x_1\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

الآن يمكن إعادة صياغة مسألة حل نظام المعادلات الخطية إلى مسألة تحديد الكميات القياسية التي تجعل هذه المعادلة الاتجاهية محققة. في مثال ١-٢-١٨ أثبتنا أن هذا النظام له حل وحيد وهو $x_1 = -3$ ، $x_2 = 5$ ، $x_3 = 2$.

لذلك يمكننا كتابة التركيبة الخطية كما يلي

$$(-3)\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

علاوة على ذلك يمكن القول بأن هذه الكميات القياسية تكون وحيدة، حيث أنها نتجت عن حل وحيد.

لاحظ كيف أن المتجهات الثلاثة في هذا المثال هم أعمدة مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات. هذه هي الملاحظة الأولي للعلاقة المهمة بين المتجهات التي تكون أعمدة مصفوفة والمصفوفة نفسها.

مثال ٢-٢-٤. نظام المعادلات

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

يمكن أن يكتب كتساوي متجهين كما يلي

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بوضع الطرف الأيسر على صورة تركيبة خطية نحصل على

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ 0x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بإعادة كتابة كل من هذه المتجهات كحاصل ضرب كمية قياسية في متجه محدد نحصل على

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

باختزال المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات صفيا نجد أن النظام متوافق وبه متغيرات حرة، ومن ثم يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول. على سبيل المثال الحلان

$$x_3 = 1 \ ، \ x_2 = 3 \ ، \ x_1 = 2$$

و $$x_3 = 0 \ ، \ x_2 = 2 \ ، \ x_1 = 3$$

يمكن استخدامهما معا لنقول أن

$$(2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هذه المعادلة نعيد كتابتها بالصورة

$$(2)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}-(3)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-(2)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}-(0)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بالتجميع نحصل على

$$(-1)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

لاحظ أن هذه المتجهات الثلاث هي أعمدة مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات. هذه المعادلة تقول أنه توجد تركيبة خطية من هذه الأعمدة تساوي المتجه الصفري. ولكن هذه أيضا تقول أن

$$x_3 = 1 \text{ ، } x_2 = 1 \text{ ، } x_1 = -1$$

تكون حل غير تافه لنظام المعادلات المتجانس الذي له مصفوفة معاملات النظام الأصلي. هذا يقرر أن المصفوفة تكون شاذة.

النظرية التالية تلخص لنا بعض ما ورد في المثالين السابقين.

نظرية ٢-٢-٥. نرمز إلى أعمدة المصفوفة A من درجة $m \times n$ بالرموز $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. إذن $x \in \mathbb{C}^m$ يكون حل لنظام المعادلات الخطية $Ax = b$ إذا وفقط إذا كان b تساوي تركيبة خطية من أعمدة A مكونة بمركبات x.

$$[x]_1 A_1 + [x]_2 A_2 + [x]_3 A_3 + \dots + [x]_n A_n = b$$

البرهان: نكتب نظام المعادلات $Ax = b$ على الصورة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

لاحظ أن العنصر في مصفوفة المعاملات A في الصف i العمود j له رمزان (اسمان) ، $[A]_{ij}$ باعتباره معامل x_j في المعادلة رقم i في نظام المعادلات و $[A_j]_i$ باعتباره المركبة رقم i في متجه العمود في العمود رقم j في مصفوفة المعاملات A. بالمثل العنصر رقم i في b له اسمان. b_i من المعادلة الخطية رقم i في نظام المعادلات و $[b]_i$ باعتباره المركبة رقم i في المتجه b. حيث أن النظرية تكافؤ، فإن البرهان يكون اتجاهين.

الاتجاه الأول: نفرض أنه لدينا تساوي اتجاهي بين كل من b وتركيبة خطية من أعمدة A. إذن لكل $1 \le i \le m$ يكون

$$\begin{aligned}
b_i &= [b]_i \\
&= [[x]_1 A_1 + [x]_2 A_2 + [x]_3 A_3 + \ldots + [x]_n A_n]_i \\
&= [[x]_1 A_1]_i + [[x]_2 A_2]_i + [[x]_3 A_3]_i + \ldots + [[x]_n A_n]_i \\
&= [x]_1[A_1]_i + [x]_2[A_2]_i + [x]_3[A_3]_i + \ldots + [x]_n[A_n]_i \\
&= [x]_1 a_{i1} + [x]_2 a_{i2} + [x]_3 a_{i3} + \ldots + [x]_n a_{in} \\
&= a_{i1}[x]_1 + a_{i2}[x]_2 + a_{i3}[x]_3 + \ldots + a_{in}[x]_n
\end{aligned}$$

وهذا يبين أن المركبة رقم i في x يكون حل للمعادلة رقم i في نظام المعادلات $LS(A,b)$ لكل $1 \le i \le m$، بتعبير آخر x يكون حل لنظام المعادلات $LS(A,b)$.

الاتجاه الآخر: نفرض أن x يكون حل لنظام المعادلات $LS(A,b)$. إذن لكل $1 \le i \le m$ يكون

$$\begin{aligned}
[b]_i &= b_i \\
&= a_{i1}[x]_1 + a_{i2}[x]_2 + a_{i3}[x]_3 + \ldots + a_{in}[x]_n \\
&= [x]_1 a_{i1} + [x]_2 a_{i2} + [x]_3 a_{i3} + \ldots + [x]_n a_{in} \\
&= [x]_1[A_1]_i + [x]_2[A_2]_i + [x]_3[A_3]_i + \ldots + [x]_n[A_n]_i \\
&= [[x_1 A_1]_i + [[x_2 A_2]_i + [[x_3 A_3]_i + \ldots + [[x_n A_n]_i
\end{aligned}$$

$$=[[x]_1 A_1 + [x]_2 A_2 + [x]_3 A_3 + \ldots + [x]_n A_n]_i$$

لذلك مركبات المتجه b ومركبات المتجه الذي يكون تركيبة خطية من أعمدة A يكونا متساويان لكل $1 \le i \le m$ ومن ثم يكون المتجهان متساويان حسب تعريف تساوي متجهين.

هذه النظرية تخبرنا أن حلول أنظمة المعادلات الخطية تكون تراكيب خطية من متجهات أعمدة مصفوفة المعاملات تنتج متجه الثوابت b. أو بتعبير آخر قُل أن حل نظام المعادلات $LS(A,b)$ هو إجابة السؤال "كيف يمكننا تكوين المتجه b كتركيبة خطية من متجهات أعمدة A"؟

الصورة الاتجاهية لمجموعات الحلول

سبق أن كتبنا حلول أنظمة معادلات خطية في صورة متجهات أعمدة. على سبيل المثال، في مثال ١-٢-١٨ نظام المعادلات كان له الحل $x_1 = -3$، $x_2 = 5$، $x_3 = 2$ والذي يكتب على الصورة

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الآن، سوف نستخدم متجهات الأعمدة والتراكيب الخطية للتعبير عن كل الحلول لنظام من المعادلات الخطية بصورة محكمة ومفهومة. أولا هنا مثالين سوف يحفزان على دراسة النظرية التالية.

مثال ٢-٢-٦. لنظام المعادلات الخطية

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 8$$
$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4$$

الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة هو

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا نجد أن $r = 2$ عمود محوري. أيضا $D = \{1,2\}$، لذلك المتغيرات التابعة تكون هي x_1 و x_2 . $F = \{3,4,5\}$ ، لذلك المتغيرات الحرة هي x_3 و x_4 . سوف نعطي تعبير عام لحل النظام بطريقتين مختلفتين وكلاهما تصل إلى نفس الخلاصة.

أولا سوف نحلل متجه الحلول. بإعادة ترتيب كل معادلة ممثلة في الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة بالحل في المتغيرات التابعة في كل صف نحصل على تساوي متجهين

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3x_3 + 2x_4 \\ -x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

الآن نستخدم تعريف جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي للتعبير عن هذا المتجه كتركيبة خطية

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_4 \\ 3x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سوف نعطي نفس التركيبة الخطية أسرع قليلا، باستخدام ثلاثة خطوات. مع أن الطريقة السابقة كانت تعليمية، إلا أن الطريقة التالية هي المفضلة عندنا.

الخطوة 1: نكتب متجه المتغيرات كمتجه ثابت مضافا إليه تركيبات خطية للمتغيرات الحرة التي عددها $n-r$، باستخدام المتغيرات الحرة ككميات قياسية.

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}\\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}\\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: نستخدم 0's و 1's لتأكيد التساوي لعناصر المتجهات التي لها دليل في F (التي تناظر المتجهات الحرة)

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\ \\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}\\ \\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}\\ \\0\\1\end{bmatrix}$$

الخطوة 3: لكل متغير تابع، استخدم المصفوفة الموسعة لصياغة معادلة تعبر عن المتغير التابع كمقدار ثابت مضافا إليه مضاعف متغير حر. حول هذه المعادلة إلى عناصر في المتجهات بحيث تؤكد التساوي للمتغيرات التابعة.

$$x_1=4-3x_3+2x_4 \quad \Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ \\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-3\\ \\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\ \\0\\1\end{bmatrix}$$

$$x_2=0-1x_3+3x_4 \quad \Rightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix}$$

هذه الصيغة النهائية تكون مرضية ومفيدة . على سبيل المثال، يمكننا تكوين حلول بسرعة وذلك باختيار قيم للمتغيرات الحرة، ومن ثم نحسب التراكيب الخطية. مثل

$$x_3 = 2,\ x_4 = -5 \ \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 \\ -17 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أو

$$x_3 = 1,\ x_4 = 3 \ \Rightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بينما هذه الطريقة تكون مفيدة وسريعة في تكوين الحلول، فهي أفضل لأنها تخبرنا على وجه التحديد ماذا يشبه كل حل. نعلم أن مجموعة الحل لانهائية، ولكن الآن يمكننا القول بأن حل يكون مضاعف معين للمتجه $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ مضافا إليه مضاعف معين للمتجه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

مضافا إليه متجه ثابت $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

لذلك نأخذ فقط ثلاثة متجهات لوصف كل مجموعة الحلول اللانهائية، بالإضافة إلى معرفة كيفية وضع المتجهات الثلاثة في تركيبة خطية.

هذه الطريقة مهمة وأساسية، ومن ثم نعتبر مثال آخر.

مثال ٢-٢-٧. نعتبر النظام الخطي المكون من $m = 5$ معادلات في $n = 7$ متغيرات، وله المصفوفة الموسعة A

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 5 & 21 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -8 & 5 & 1 & 1 & -6 & -15 \\ 3 & 3 & -9 & 3 & 6 & 5 & 2 & -24 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -9 & -30 \end{bmatrix}$$

باختزال المصفوفة صفيا نحصل على

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 9 & 15 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0 & 0 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

يوجد $r = 4$ أعمدة محورية. أيضا $D = \{1,2,5,6\}$ ومن ثم المتغيرات التابعة تكون x_1 ، x_2 ، x_5 و x_6 . $F = \{3,4,7,8\}$ ومن ثم يوجد $n - r = 3$ متغيرات حرة وهي x_3 ، x_4 و x_7. سوف نعطي تعبير عام لحل النظام بطريقتين مختلفتين، التحليل والإنشاء.

أولا نحلل متجه الحل. بإعادة ترتيب كل معادلة ممثلة في الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة بالحل في المتغيرات التابعة في كل صف نحصل على تساوي متجهين

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-2x_3+3x_4-9x_7 \\ -10+5x_3-4x_4+8x_7 \\ x_3 \\ x_4 \\ 11+6x_7 \\ -21-7x_7 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

الآن نستخدم تعريف جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي للتعبير عن هذا متجه الحل العام كتركيبة خطية

$$= \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_4 \\ -4x_4 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9x_7 \\ 8x_7 \\ 0 \\ 0 \\ 6x_7 \\ -7x_7 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

الآن نكون نفس التركيبة الخطية عن طريق الخطوات الثلاث.

الخطوة 1:نكتب متجه المتغيرات كمتجه ثابت مضافا إليه تركيبات خطية للمتغيرات الحرة التي عددها $n-r$، باستخدام المتغيرات الحرة ككميات قياسية.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: نستخدم $0's$ و $1's$ لتأكيد التساوي لعناصر المتجهات التي لها دليل في F (التي تناظر المتجهات الحرة)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ 1 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ 0 \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: لكل متغير تابع، نستخدم المصفوفة الموسعة لصياغة معادلة تعبر عن المتغير التابع كمقدار ثابت مضافا إليه مضاعف متغير حر. نحول هذه المعادلة إلى عناصر في المتجهات بحيث تؤكد التساوي للمتغيرات التابعة.

$$x_1 = 15 - 2x_3 + 3x_4 - 9x_7 \Rightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ \\ 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ \\ 1 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 0 \\ 1 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -9 \\ \\ 0 \\ 0 \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -10 + 5x_3 - 4x_4 + 8x_7 \Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\-10\\0\\0\\ \\ \\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\5\\1\\0\\ \\ \\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}3\\-4\\0\\1\\ \\ \\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}-9\\8\\0\\0\\ \\ \\1\end{bmatrix}$$

$$x_5=11+6x_7 \quad \Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\-10\\0\\0\\11\\ \\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\5\\1\\0\\0\\ \\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}3\\-4\\0\\1\\0\\ \\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}-9\\8\\0\\0\\6\\ \\1\end{bmatrix}$$

$$x_6=-21-7x_7 \quad \Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\-10\\0\\0\\11\\-21\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\5\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}3\\-4\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}-9\\8\\0\\0\\6\\-7\\1\end{bmatrix}$$

هذه الصيغة النهائية تكون مرضية ومفيدة . على سبيل المثال، يمكننا تكوين حلول بسرعة وذلك باختيار قيم للمتغيرات الحرة، ومن ثم نحسب التراكيب الخطية. مثل

$$x_3 = 2,\ x_4 = -4,\ x_7 = 3 \ \Rightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ 40 \\ 2 \\ -4 \\ 29 \\ -42 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أو ربما

$$x_3 = 5,\ x_4 = 2,\ x_7 = 1 \ \Rightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 5 \\ 2 \\ 17 \\ -28 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذلك يمكننا التعبير بصورة محكمة عن كل الحلول لهذا النظام الخطي باستخدام أربعة متجهات ثابتة، بالإضافة إلى الموافقة على كيفية ضمهم في تركيبات خطية لتكوين متجهات الحل.

نفرض أننا أخبرنا بأن المتجه w أسفل، يكون حل لهذا النظام من المعادلات. هل يمكن تحويل المسألة إلى كتابة w كتركيبة خطية من المتجهات c، u_1 ، u_2 و u_3 ؟

$$w=\begin{bmatrix}100\\-75\\7\\9\\-37\\35\\-8\end{bmatrix}\text{، } c=\begin{bmatrix}15\\-10\\0\\0\\11\\-21\\0\end{bmatrix}\text{، } u_1=\begin{bmatrix}-2\\5\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\text{، } u_2=\begin{bmatrix}3\\-4\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\text{، } u_3=\begin{bmatrix}-9\\8\\0\\0\\6\\-7\\1\end{bmatrix}$$

هل كنت تعتقد منذ أسابيع قليلة أنك تستطيع بسرعة ويسر كتابة كل الحلول لنظام خطي من خمس معادلات في سبعة متغيرات؟

الآن نعطي صياغة للمثالين الأخيرين المهمين كنظرية.

نظرية ٢-٢-٨. نفرض أن $[A\,|\,b]$ هي المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية المتوافق $LS(A,b)$ المكون من m معادلة في n متغير. نفرض أن B مصفوفة من الحجم $m\times(n+1)$ في الشكل الصفي المدرج المختزل مكافئة صفيا للمصفوفة الموسعة للنظام. نفرض أن B تحتوي r عمود محوري، لها الأدلة $D=\{d_1,d_2,\dots,d_r\}$ بينما الأعمدة $n-r$ غير المحورية لها الأدلة $F=\{f_1,f_2,\dots,f_{n-r},r+1\}$. نعرف المتجهات c و u_j من الحجم n، حيث $1\le j\le n-r$ ، كما يلي

$$[c]_i=\begin{cases}0 & \text{if } i\in F\\ [B]_{k,n+1} & \text{if } i\in D,\ i=d_k\end{cases}$$

$$[u_j]_i=\begin{cases}1 & \text{if } i\in F,\ i=f_j\\ 0 & \text{if } i\in F,\ i\ne f_j\\ -[B]_{k,f_j} & \text{if } i\in D,\ i=d_k\end{cases}$$

إذن مجموعة الحلول لنظام المعادلات $LS(A,b)$ هي

$$S=\{c+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_{n-r}u_{n-r}:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-r}\in\mathbb{C}\}$$

البرهان: بداية، $LS(A,b)$ تكافئ نظام المعادلات الخطية الذي مصفوفته الموسعة هي B ، لذلك نحتاج فقط إلى بيان أن S هي حل النظام الذي مصفوفته الموسعة هي B. خلاصة هذه النظرية أن مجموعة الحل تساوي المجموعة S.

نبدأ ببيان أن كل عنصر في S يكون حقا حل للنظام. نفرض $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-r}$ اختيار للكميات القياسية استخدمت لوصف عناصر في S. لذلك عنصر في S، والذي نعتبره حل مقترح يكون

$$x = c+\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_{n-r}u_{n-r}$$

عندما يكون $r+1\le l\le n$ ، فإن الصف l في المصفوفة B يكون صف صفري، لذلك المعادلة الممثلة بهذا الصف تكون دائما محققة، دون اعتبار لمتجه الحل الذي نقترحه. لذلك سوف نركز على الصفوف التي تمثل المعادلات $1\le l\le r$. سوف نوجد قيمة المعادلة l من النظام الممثل بالمصفوفة B بالنسبة لمتجه الحل المقترح x ونشير إلى قيمة الطرف الأيسر في المعادلة بالرمز β_l .

$$\beta_l=[B]_{l1}[x]_1+[B]_{l2}[x]_2+[B]_{l3}[x]_3+\ldots+[B]_{ln}[x]_n$$

وحيث أن $[B]_{ld_i}=0$ لكل $1\le i\le r$ ماعدا $[B]_{ld_l}=1$، نجد أن β_l تبسط إلى

$$\beta_l=[x]_{d_l}+[B]_{lf_1}[x]_{f_1}+[B]_{lf_2}[x]_{f_2}+\ldots+[B]_{lf_{n-r}}[x]_{f_{n-r}}$$

لاحظ أنه لكل $1\le i\le n-r$

$$\begin{aligned}[x]_{f_i} &= [c]_{f_i}+\alpha_1[u_1]_{f_i}+\alpha_2[u_2]_{f_i}+\ldots+\alpha_i[u_i]_{f_i}+\ldots\\ &\qquad +\alpha_{n-r}[u_{n-r}]_{f_i}\\ &= 0+\alpha_1(0)+\alpha_2(0)+\ldots+\alpha_i(1)+\ldots+\alpha_{n-r}(0)\\ &= \alpha_i\end{aligned}$$

لذلك، β_l تبسط أكثر، وبفك الحد الأول

$$\begin{aligned}\beta_l &= [x]_{d_l}+[B]_{lf_1}\alpha_1+[B]_{lf_2}\alpha_2+\ldots+[B]_{lf_{n-r}}\alpha_{n-r}\\ &= [c+\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\ldots+\alpha_{n-r}u_{n-r}]_{d_l}\end{aligned}$$

$$+[B]_{lf_1}\alpha_1+[B]_{lf_2}\alpha_2+[B]_{lf_3}\alpha_3+\ldots+[B]_{lf_{n-r}}\alpha_{n-r}$$
$$=[c]_{d_l}+\alpha_1[u_1]_{d_l}+\alpha_2[u_2]_{d_l}+\ldots+\alpha_{n-r}[u_{n-r}]_{d_l}$$
$$+[B]_{lf_1}\alpha_1+[B]_{lf_2}\alpha_2+[B]_{lf_3}\alpha_3+\ldots+[B]_{lf_{n-r}}\alpha_{n-r}$$
$$=[B]_{l,n+1}$$
$$+\alpha_1(-[B]_{lf_1})+\alpha_2(-[B]_{lf_2})+\ldots+\alpha_{n-r}(-[B]_{lf_{n-r}})+$$
$$[B]_{lf_1}\alpha_1+[B]_{lf_2}\alpha_2+[B]_{lf_3}\alpha_3+\ldots+[B]_{lf_{n-r}}\alpha_{n-r}$$
$$=[B]_{l,n+1}$$

لذلك β_l بدأت كطرف أيسر للمعادلة l في نظام المعادلات الممثل بالمصفوفة B ، والآن نعلم أنها تساوي $[B]_{l,n+1}$ ، الحد الثابت في المعادلة l لهذا النظام. لذلك اختيار اختياري لمتجه من S يجعل كل معادلة في النظام محققة ومن ثم يكون حل للنظام. إذن كل عنصر في S يكون حل للنظام

بالنسبة للاتجاه الآخر من البرهان، نفرض x متجه حل للنظام الذي مصفوفته الموسعة B. من المناسب وللتبسيط نرمز لعناصر x بالرمز x_i، بتعبير آخر $x_i=[x]_i$. نرغب في بيان أن متجه الحل هذا يكون أيضا عنصر في المجموعة S. نبدأ بالملاحظة أن متجهات الحل تجعل المعادلة l في النظام محققة لكل $1\le l\le m$.

$$[B]_{l,1}x_1+[B]_{l,2}x_2+[B]_{l,3}x_3+\ldots+[B]_{l,n}x_n=[B]_{l,n+1}$$

عندما $l\le r$، الأعمدة المحورية في B عناصرها في الصف l أصفار ماعدا في العمود d_l، الذي سوف يحتوي 1. لذلك لكل $1\le l\le r$، معادلة l تبسط إلى

$$1x_{d_l}+[B]_{l,f_1}x_{f_1}+[B]_{l,f_2}x_{f_2}+[B]_{l,f_3}x_{f_3}+\ldots$$
$$+[B]_{l,f_{n-r}}x_{f_{n-r}}=[B]_{l,n+1}$$

وهذا يسمح لنا بكتابة

$$[x]_{d_l}=x_{d_l}$$
$$=[B]_{l,n+1}-[B]_{l,f_1}x_{f_1}-[B]_{l,f_2}x_{f_2}-[B]_{l,f_3}x_{f_3}-\ldots$$

$$-[B]_{l,f_{n-r}} x_{f_{n-r}}$$
$$= [c]_{d_l} + x_{f_1}[u_1]_{d_l} + x_{f_2}[u_2]_{d_l} + x_{f_3}[u_3]_{d_l} + \ldots + x_{f_{n-r}}[u_{n-r}]_{d_l}$$
$$= [c + x_{f_1}u_1 + x_{f_2}u_2 + x_{f_3}u_3 + \ldots + x_{f_{n-r}}u_{n-r}]_{d_l}$$

هذا يخبرنا بأن عناصر متجه الحل x المناظرة للمتغيرات التابعة (الأدلة في D)، تساوي تلك التي في المتجه في المجموعة S. مازلنا في حاجة إلى اختبار العناصر الأخرى في متجه الحل x المناظرة للمتغيرات الحرة (الأدلة في F) لبيان أنها تساوي العناصر لنفس العنصر في المجموعة S. لإتمام ذلك، نفرض أن $i \in F$ و $i = f_j$. إذن

$$[x]_i = x_i = x_{f_j}$$
$$= 0 + 0x_{f_1} + 0x_{f_2} + 0x_{f_3} + \ldots + 0x_{f_{j-1}} + 1x_{f_j} +$$
$$0x_{f_{j+1}} + \ldots + 0x_{f_{n-r}}$$
$$= [c]_i + x_{f_1}[u_1]_i + x_{f_2}[u_2]_i + x_{f_3}[u_3]_i + \ldots + x_{f_j}[u_j]_i +$$
$$\ldots + x_{f_{n-r}}[u_{n-r}]_i$$
$$= [c + x_{f_1}u_1 + x_{f_2}u_2 + x_{f_3}u_3 + \ldots + x_{f_{n-r}}u_{n-r}]_i$$

لذلك عناصر x و $c + x_{f_1}u_1 + x_{f_2}u_2 + x_{f_3}u_3 + \ldots + x_{f_{n-r}}u_{n-r}$ تكون متساوية وبالتالي هما متجهان متساويان. وحيث أن $x_{f_1}, x_{f_2}, x_{f_3}, \ldots, x_{f_{n-r}}$ كميات قياسية، فإن x يتطابق مع عناصر S، لذلك S تحتوي كل حلول النظام.

لاحظ أن كلا الجزأين في برهان النظرية يشير إلى أن $\alpha_i = [x]_{f_i}$. بتعبير آخر، الكميات القياسية الاختيارية، α_i، في وصف المجموعة S فعليا لها أكثر من معنى، هي قيم المتغيرات الحرة $[x]_{f_i}$، $1 \le i \le n-r$. لذلك غالبا نستغل هذه الملاحظة في وصفنا لمجموعات الحل.

نظرية ٢-٢-٨ تعطي صياغة لما حدث في الخطوات الثلاث في مثال ٢-٢-٧ النظرية سوف تكون مفيدة في برهان نظريات أخرى، وهي مفيدة لأنها ببساطة تخبرنا عن عملية دقيقة لوصف مجموعة حل

لانهائية. يمكننا برمجة الحاسب لكي يجري هذه العملية بمجرد أن نعطى المصفوفة الموسعة المختزلة صفيا مع علمنا بأن أن النظام متوافق.

مثال ٢-٢-٩. نعتبر نظام المعادلات الخطية من أربع معادلات في سبعة متغيرات والذي مصفوفته الموسعة في الشكل الصفي المدرج المختزل هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا يوجد $r=3$ أعمدة محورية بأدلة $D=\{1,3,4\}$. لذلك يوجد $r=3$ متغيرات تابعة هي x_1 ، x_3 و x_4. الأعمدة غير المحورية لها الأدلة $F=\{2,5,6,7,8\}$ ، لذلك يوجد $n-r=4$ متغير حر هي x_2، x_5 ، x_6 و x_7 .

الخطوة 1: نكتب متجه المتغيرات (x) كمتجه ثابت (c) مضافا إليه تركيبة خطية من $n-r=4$ متجه (u_1,u_2,u_3,u_4) ، باستخدام المتغيرات الحرة ككميات قياسية.

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_6\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: لكل متغير حر، نستخدم 0's و 1's لتأكيد التساوي للعناصر المتناظرة للمتجهات. انتبه إلى نمط 0's و 1's في هذه المرحلة، لأن

ذلك سوف يكون مفيدا فيما بعد. سوف نعطي نظرية هامة في نهاية هذا الفصل والبرهان يعتمد أساسا على هذه الملاحظة.

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\0\\\\\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}\\1\\\\\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}\\0\\\\\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_6\begin{bmatrix}\\0\\\\\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}\\0\\\\\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

الخطوة 3: لكل متغير تابع، نستخدم المصفوفة الموسعة لصياغة معادلة تعبر عن المتغير التابع على صورة ثابت مضافا إليه مضاعفات المتغيرات الحرة. حول هذه المعادلة إلى عناصر في المتجهات التي تؤكد التساوي لكل متغير تابع كل على حده.

$$x_1=4-4x_2-2x_5-1x_6+3x_7 \;\Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\\\\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-4\\1\\\\\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-2\\0\\\\\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_6\begin{bmatrix}-1\\0\\\\\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}3\\0\\\\\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$x_3=2+0x_2-x_5+3x_6-5x_7 \;\Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\2\\ \\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-4\\1\\0\\ \\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\ \\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_6\begin{bmatrix}-1\\0\\3\\ \\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}3\\0\\-5\\ \\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$x_4=1+0x_2-2x_5+6x_6-6x_7 \;\Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-4\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_6\begin{bmatrix}-1\\0\\3\\6\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}3\\0\\-5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

الآن يمكننا استخدام هذا التعبير النهائي لبناء حلول للنظام بطريقة سريعة. حاول بناء حلول متعددة لهذا النظام (أنظر إلى قيم المتغيرات الحرة في كل حل ولاحظ أن المتجه c يأخذ القيم 0's في هذه المواضع).

أعطينا وصفا لمجموعة حلول لانهائية، أسست على مجرد خمسة متجهات، تجمع في تركيبا خطية لتعطي الحلول. هذه الطريقة مهمة ومن ثم فسوف نعطي مثالا آخر. نعلم أننا إذا ناقشنا نظاما من المعادلات الخطية فإنه يكون من السهل مناقشة النظام المتجانس المناظر.

مثال ٢-٢-١٠. نعتبر نظام المعادلات المكون من خمس معادلات في خمسة متغيرات والتي مصفوفة المعاملات له هي

$$L=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 & 4 \\ -6 & -5 & -4 & -4 & 6 \\ 10 & 7 & 7 & 10 & -13 \\ -7 & -5 & -6 & -9 & 10 \\ -4 & -3 & -4 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

سوف نوظف هذه المصفوفة على أنها مصفوفة معاملات لنظام متجانس ونشير إليها بالرمز L. ومن ثم سوف نحل النظام المتجانس $LS(L,0)$ المكون من $m=5$ معادلة في $n=5$ متغير. إذا كونا المصفوفة الموسعة، فإننا نضيف عمود سادس إلى L كل عناصره أصفار. عند إجراء عمليات الصفوف، هذا العمود السادس سوف يظل كله أصفار. لذلك سوف نقتصر فقط على اختزال مصفوفة المعاملات، ونتذكر أن العمود السادس كله أصفار. المصفوفة المختزلة تكون

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا يوجد $r=3$ عمود محوري بأدلة $D=\{1,2,3\}$. لذلك يوجد $r=3$ متغير تابع هي x_1 ، x_2 و x_3 . الأعمدة غير المحورية عددها $n-r=2$ أدلتها $F=\{4,5\}$ ، ومن ثم يوجد $n-r=2$ متغير حر هما x_4 و x_5.

لاحظ أنه إذا أضفنا العمود الذي كله أصفار لتكوين المصفوفة الموسعة للنظام، فإن الدليل 6 سوف يظهر في المجموعة F ، وتبعا لذلك سوف نهمله عندما نكتب المتغيرات الحرة. لذلك لاشيء يفقد بعدم تكوين مصفوفة موسعة (في حالة النظام المتجانس). وربما يكون هذا

تحسين، حيث أن كل دليل في F الآن يستخدم للإشارة إلى متغير في النظام الخطي.

الخطوة 1: نكتب متجه المتغيرات (x) كمتجه ثابت (c) مضافا إليه تركيبة خطية من $n-r=2$ متجه (u_1,u_2) ، باستخدام المتغيرات الحرة ككميات قياسية.

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: لكل متغير حر، نستخدم 0's و 1's لتأكيد التساوي للعناصر المتناظرة للمتجهات. انتبه إلى نمط 0's و 1's في هذه المرحلة.

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\ \\ \\ 0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}\\ \\ \\ 1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}\\ \\ \\ 0\\1\end{bmatrix}$$

الخطوة 3: لكل متغير تابع، نستخدم المصفوفة الموسعة لصياغة معادلة تعبر عن المتغير التابع على صورة ثابت مضافا إليه مضاعفات المتغيرات الحرة، تذكر أن العمود السادس المحذوف كله أصفار. حول هذه المعادلة إلى عناصر في المتجهات التي تؤكد التساوي لكل متغير تابع كل على حده.

$$x_1=0-1x_4+2x_5 \;\;\Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \\ \\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\ \\ \\1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\ \\ \\0\\1\end{bmatrix}$$

$$x_2=0+2x_4-2x_5 \quad\Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\2\\ \\1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\-2\\ \\0\\1\end{bmatrix}$$

$$x_3=0-2x_4+1x_5 \quad\Rightarrow$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

المتجه c سوف يأخذ دائما $0's$ لكل عناصره التي تناظر المتغيرات الحرة. ومع ذلك، حيث أننا بصدد حل نظام متجانس، فإن المصفوفة الموسعة المختزلة صفيا لها العمود رقم $n+1=6$ كله أصفار ومن ثم كل عناصر c تكون أصفار. لذلك يمكننا كتابة

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=0+x_4\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

سوف يحدث دائما أن حلول النظام المتجانس يكون لها $c=0$. لذلك التعبير للحلول لدينا يكون مرضيا. في هذا المثال، التعبير يقول أن الحلول تكون هي التراكيب الخطية الممكنة من المتجهين

$$u_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

بدون ذكر لأي متجه ثابت يوجد في التركيبة الخطية.

هذه الملاحظة سوف تحفزنا للفصل التالي والتعريف الأساسي في ذلك الفصل، وبعد ذلك سوف نختم الفصل بإعطاء صياغة لهذا الوضع.

الحلول الخاصة ، الأنظمة المتجانسة

النظرية التالية تخبرنا بأنه من أجل إيجاد كل الحلول لنظام من المعادلات الخطية، يكفي إيجاد حل واحد ومن ثم نوجد كل الحلول للنظام المتجانس المناظر. هذا يوضح جزء من اهتمامنا بالفضاء الصفري، مجموعة كل الحلول لنظام متجانس.

نظرية ٢-٢-١١. نفرض أن w حل لنظام المعادلات الخطية $LS(A,b)$. إذن y يكون حل للنظام $LS(A,b)$ إذا وفقط إذا كان $y=w+z$ لمتجه ما $z\in N(A)$.

البرهان: نفرض أن $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$ هي أعمدة مصفوفة المعاملات A.

الاتجاه الأول: نعتبر $y=w+z$ و $z\in N(A)$. إذن

$$
\begin{aligned}
b &= [w]_1 A_1 + [w]_2 A_2 + [w]_3 A_3 + \dots + [w]_n A_n \\
&= [w]_1 A_1 + [w]_2 A_2 + [w]_3 A_3 + \dots + [w]_n A_n + 0 \\
&= [w]_1 A_1 + [w]_2 A_2 + [w]_3 A_3 + \dots + [w]_n A_n \\
&\qquad + [z]_1 A_1 + [z]_2 A_2 + [z]_3 A_3 + \dots + [z]_n A_n \\
&= ([w]_1 + [z]_1) A_1 + ([w]_2 + [z]_2) A_2 + \\
&\qquad ([w]_3 + [z]_3) A_3 + \dots + ([w]_n + [z]_n) A_n \\
&= [y]_1 A_1 + [y]_2 A_2 + [y]_3 A_3 + \dots + [y]_n A_n
\end{aligned}
$$

بتطبيق نظرية ٢-٢-٨ نجد أن y يكون حل للنظام $LS(A,b)$.

الاتجاه العكسي: نفرض أن y يكون حل للنظام $LS(A,b)$. إذن

$$
\begin{aligned}
0 &= b - b \\
&= [y]_1 A_1 + [y]_2 A_2 + [y]_3 A_3 + \dots + [y]_n A_n \\
&\qquad - ([w]_1 A_1 + [w]_2 A_2 + [w]_3 A_3 + \dots + [w]_n A_n) \\
&= [y-w]_1 A_1 + [y-w]_2 A_2 \\
&\qquad + [y-w]_3 A_3 + \dots + [y-w]_n A_n
\end{aligned}
$$

من نظرية ٢-٢-٥ نجد أن $y-w$ يكون حل للنظام المتجانس $LS(A,0)$ ومن تعريف ١-٤-٩ $y-w \in N(A)$. بتعبير آخر $y-w=z$ متجه ما $z \in N(A)$. نعيد كتابته $y=w+z$ ، كما هو مطلوب.

بعد برهان نظرية ١-٥-١٣ علقنا على نفي أحد اتجاهي النظرية. مصفوفات المعاملات غير الشاذة تؤدي إلى حلول وحيدة لكل اختيار لمتجهات الثوابت. ماذا يقال في حالة المصفوفات الشاذة؟ المصفوفة الشاذة A يكون لها فضاء صفري غير خالي (نظرية ١-٥-١٢). لمتجه ثوابت b، النظام $LS(A,b)$ يمكن أن يكون غير متوافق، بمعنى أنه لا يوجد حلول. ولكن إذا كان يوجد على الأقل حل واحد (w) ، فإن نظرية ٢-٢-١١ تخبرنا بأنه يوجد عدد لانهائي من الحلول بسبب قاعدة الفضاء الصفري اللانهائي للمصفوفة الشاذة. لذلك نظام المعادلات بمصفوفة معاملات شاذة لا يكون له أبدا حل وحيد. مع مصفوفة معاملات شاذة إما

لا يوجد حل أو يوجد عدد لانهائي من الحلول، اعتمادا على اختيار متجه الثوابت (b).

مثال ٢-٢-١٢. نعتبر نظام المعادلات الخطية

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 8$$
$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4$$

في مثال ٢-٢-٦ وضحنا هذا النظام متوافق وأن فضاء الصفرية له غير تافه. نفرض أن A ترمز إلى مصفوفة المعاملات لهذا النظام. نبدأ بالحلول الثلاثة

$$y_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{، } y_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{، } y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سوف نختار y_1 كي تلعب دور w في منطوق نظرية ٢-٢-١١، أي من المتجهات الثلاث المذكورة هنا (أو غيرها) يمكن أن يختار. لتوضيح النظرية، ينبغي أن نكون قادرين على كتابة كل من هذه الحلول الثلاثة كمجموع w مع حل لنظام المعادلات المتجانس المناظر. حيث أن 0 دائما حل للنظام المتجانس، يمكننا بسهولة كتابة

$$y_1 = w = w + 0$$

حلول النظام المتجانس $LS(A,0)$ هي تحديدا عناصر الفضاء الصفري لمصفوفة المعاملات، والتي تكون كتطبيق لنظرية ٢-٢-٨ هي

$$N(A) = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{C} \right\}$$

إذن

$$y_2=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-1\\-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}+\left((-2)\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$=w+z_2$$

حيث

$$z_2=\begin{bmatrix}4\\-1\\-2\\-1\end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix}$$

من الواضح أنه يكون حل للنظام المتجانس حيث أنه كتب كتركيبة خطية من المتجهات التي تصف الفضاء الصفري لمصفوفة المعاملات.

أيضا

$$y_3=\begin{bmatrix}7\\8\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\7\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}+\left((-1)\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$=w+z_3$$

حيث

$$z_3=\begin{bmatrix}7\\7\\-1\\2\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix}$$

من الواضح أنه يكون حل للنظام المتجانس حيث أنه كتب كتركيبة خطية من المتجهات التي تصف الفضاء الصفري لمصفوفة المعاملات.

هنا نظرة أخرى لهذه النظرية، في سياق هذا المثال. نعتبر حلين جديدين لنظام المعادلات الأصلي، وليكن

$$y_5=\begin{bmatrix}-4\\2\\4\\2\end{bmatrix} \text{ و } y_4=\begin{bmatrix}11\\0\\-3\\-1\end{bmatrix}$$

ونكون الفرق بينهما

$$u=\begin{bmatrix}11\\0\\-3\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4\\2\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\-2\\-7\\-3\end{bmatrix}$$

ليس من قبيل الصدفة أن u يكون حل للنظام المتجانس (تحقق من ذلك). بتعبير آخر، الفرق بين أي حلين لنظام المعادلات الخطية يكون عنصر في فضاء الصفرية لمصفوفة المعاملات. هذه طريقة مكافئة لصياغة نظرية ٢-٢-١١.

تمارين ٢-٢

١- المصفوفة التالية هي المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية اختزلت صفيا إلى الشكل الصفي المدرج المختزل. أكتب الصورة الاتجاهية لحلول هذا النظام.

$$\begin{bmatrix}1&3&0&6&0&9\\0&0&1&-2&0&-8\\0&0&0&0&1&3\end{bmatrix}$$

٢- أوجد التركيبة الخطية من المتجهات

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\\-5\end{bmatrix}\right\}$$

التي تساوي المتجه

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

٣- لأنظمة المعادلات في تمارين ٣-١-٤، ٣-١-٥، ٣-١-٦، ٣-١-٧، لقائمة الحلول الفردية (سواء للنظام الأصلي أو النظام المتجانس المناظر)، عبر عن متجه الثوابت كتركيبة خطية من متجهات الأعمدة لمصفوفة المعاملات. تحقق من التساوي بحساب التركيبة الخطية. بالنسبة للأنظمة التي ليس لها حلول، بين أنه يكون من المستحيل كتابة متجه الثوابت كتركيبة خطية من أعمدة مصفوفة المعاملات. لاحظ أيضا أنه للأنظمة المتجانسة، الحلول تظهر كتركيبات خطية مساوية للصفر.

٤- أوجد الصيغة الاتجاهية لحلول نظام المعادلات

$$\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 &= 6 \\
x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 14x_4 - 4x_5 &= 15 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= -1 \\
-2x_1 + 4x_2 - 12x_4 + x_5 &= -7
\end{aligned}$$

٢-٣ المجموعات المولدة Spanning Sets

في هذا الفصل سوف نقدم طريقة محكمة لوصف مجموعة لانهائية من المتجهات وذلك باستخدام التراكيب الخطية. هذا سوف يعطينا طريقة ملائمة لوصف مجموعة حل النظام الخطي، الفضاء الصفري لمصفوفة والعديد من مجموعات المتجهات الأخرى.

امتداد مجموعة متجهات

في مثال ٢-٢-١٠ رأينا أن مجموعة حل نظام متجانس موصوفة على أنها كل التركيبات الخطية الممكنة من متجهين معينين. هذه طريقة مفيدة لتكوين أو وصف مجموعات لانهائية من المتجهات، لذلك هذه الفكرة نصوغها في تعريف.

تعريف ٢-٣-١. نفرض $S=\{u_1,u_2,\dots,u_p\}$ مجموعة من المتجهات. **امتداد** S span، $\langle S\rangle$ ، هو مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة من $u_1,u_2,\dots,u_p$. في صورة رمزية

$$\langle S\rangle=\{\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_pu_p:\alpha_i\in\mathbb{C},1\le i\le p\}$$
$$=\left\{\sum_{i=1}^{p}\alpha_iu_i:\alpha_i\in\mathbb{C},1\le i\le p\right\}$$

الامتداد هو مجموعة من المتجهات، نعتقد أنها تكون لانهائية، ماعدا في حالة واحدة (متى تكون منتهية؟). لذلك نبدأ بتجمع منتهي من المتجهات S (p منها محددة) ونستخدم هذه المجموعة لوصف مجموعة لانهائية من المتجهات. لتوضيح هذه الفكرة نعتبر بعض الأمثلة.

مثال ٢-٣-٢. نعتبر مجموعة S مكونة من خمسة متجهات من $\mathbb{C}^4$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix}\right\}$$

ونعتبر المجموعة اللانهائية من المتجهات $\langle S\rangle$ المكونة من كل التراكيب الخطية الممكنة من عناصر S. هنا أربعة متجهات محددة نعلم أنها عناصر في $\langle S\rangle$، حيث سوف نكونها طبقا لتعريف ٢-٣-١.

$$w=(2)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\2\\28\\10\end{bmatrix}$$

$$x=(5)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}+(-6)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix}+(4)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-26\\-6\\2\\34\end{bmatrix}$$

$$y=(1)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\\17\\-4\end{bmatrix}$$

$$z=(0)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

الهدف من مجموعة هو تجميع الأشياء التي لها خاصية معينة مشتركة، ولاستبعاد الأشياء التي ليس لها تلك الخاصية. لذلك السؤال الأساسي حول مجموعة هو إذا أعطينا شيء هل هذا الشيء يكون عنصر في المجموعة أم لا. هيا نتعلم أكثر حول $\langle S\rangle$ وذلك بالتحقق أي العناصر ينتمي للمجموعة، وأيها لا ينتمي

أولا هل $u = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}$ يكون عنصر في $\langle S \rangle$؟ أي هل توجد كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ بحيث

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بتطبيق نظرية ٢-٢-٥ نحول البحث عن هذه الكميات القياسية إلى البحث عن حل لنظام المعادلات الخطية الذي مصفوفته الموسعة هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 9 & 19 \\ 1 & -1 & -5 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

والتي تختزل إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

عند هذه النقطة نجد أن النظام متوافق (نظرية ١-٣-٦) لذلك يوجد حل للكميات القياسية الخمس $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. وهذا دليل يكفي للقول بأن $u \in \langle S \rangle$. إذا أردنا مزيدا من الأدلة يمكننا حساب حل فعلي، مثلا

$\alpha_1 = 2$ ، $\alpha_2 = 1$ ، $\alpha_3 - 2$ ، $\alpha_4 = -3$ ، $\alpha_5 = 2$

هذا الحل الخاص يسمح لنا بكتابة

$$(2)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix}$$

$$=u=\begin{bmatrix}-15\\-6\\19\\5\end{bmatrix}$$

وهذا يجعل من الواضح أن $u \in \langle S \rangle$.

الآن نعتبر متجه آخر. هل $v=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$ يكون عنصر في $\langle S \rangle$ ؟ أي هل توجد كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ بحيث

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}+\alpha_5\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix}=v=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

بتطبيق نظرية ٢-٢-٥ نحول البحث عن هذه الكميات القياسية إلى البحث عن حل لنظام المعادلات الخطية الذي مصفوفته الموسعة هي

$$\begin{bmatrix}1&2&7&1&-1&3\\1&1&3&1&0&1\\3&2&5&-1&9&2\\1&-1&-5&2&0&-1\end{bmatrix}$$

والتي تختزل إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عند هذه النقطة نجد أن النظام غير متوافق (نظرية ١-٣-٦) لذلك لا يوجد حلول للكميات القياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. هذا يكفي للقول بأن $v \notin \langle S \rangle$. وتنتهي الحكاية.

مثال ٢-٣-٣. نبدأ بمجموعة منتهية بها ثلاثة متجهات من الحجم 3.

$$S = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ونعتبر المجموعة اللانهائية $\langle S \rangle$. متجهات S يمكن أن تختار لتكون أي شيء، ولكن لأسباب سوف تتضح فيما بعد، اخترنا الأعمدة الثلاث لمصفوفة المعاملات لنظام المعادلات الخطية الذي تمت مناقشته في مثال ١-٣-٩.

أولا، على سبيل المثال، لاحظ أن

$$v = (5)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (7)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

يكون في $\langle S \rangle$ ، حيث أنه تركيبة خطية من u_1, u_2, u_3 . بإيجاز نكتب $v \in \langle S \rangle$. لا يوجد هناك شيء سحري حول الكميات القياسية $\alpha_1 = 5,\ \alpha_2 = -3,\ \alpha_3 = 7$، ولكن يمكن أن تأخذ أي شيء آخر. كرر هذا الجزء من المثال مع نفسك، باستخدام قيم مختلفة للكميات القياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. ماذا يحدث إذا اخترت كل هذه الكميات أصفار؟

إذن تعلمنا كيف ننشئ بسرعة عينة من عناصر $\langle S \rangle$. هناك سؤال يختلف قليلا يظهر، إذا أعطينا متجه من الحجم الصحيح ونسأل هل هذا المتجه يكون عنصر في $\langle S \rangle$. على سبيل المثال هل $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ يكون في $\langle S \rangle$؟ بصورة مختصرة هل $w \in \langle S \rangle$؟

للإجابة عن هذا السؤال نبحث عن كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ بحيث يكون

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = w$$

من نظرية ٢-٢-٥ حل هذه المعادلة الاتجاهية هو حل نظام المعادلات

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 8$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 5$$

بتكوين المصفوفة الموسعة لهذا النظام واختزالها صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هذا النظام له عدد لانهائي من الحلول (يوجد متغير حر x_3) ، ولكن كل ما نحتاج إليه هو متجه حل واحد. الحل

$$\alpha_1 = 2,\ \ \alpha_2 = 3,\ \ \alpha_3 = 1$$

يخبرنا أن $(2)u_1 + (3)u_2 + (1)u_3 = w$

لذلك نحن الآن مقتنعون بأن $w \in \langle S \rangle$.

لاحظ أنه يوجد عدد لانهائي من الطرق لإجابة هذا السؤال بالإيجاب. نستطيع اختيار حلول مختلفة، مثلا يمكننا اختيار المتغير الحر بالصفر

$$\alpha_1 = 3,\ \ \alpha_2 = 2,\ \ \alpha_3 = 0$$

يبين أن $(3)u_1+(2)u_2+(0)u_3=w$

بإجراء الحسابات في هذا الحل الثاني يمكن التحقق من أن w تكون في امتداد S. وبالطبع يوجد عدد لانهائي من الطرق التي يمكن التحقق بها من أن w تكون عنصر في $\langle S\rangle$.

دعنا نسأل سؤال من نفس النوع، ولكن الآن مع $y=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}$ ، بمعنى

هل $y\in\langle S\rangle$ ؟

لذلك نبحث عن كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ بحيث يكون

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=y$$

من نظرية ٢-٢-٥ حل هذه المعادلة الاتجاهية هو حل نظام المعادلات

$$\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=2$$
$$2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4$$
$$\alpha_1+\alpha_2=3$$

بتكوين المصفوفة الموسعة لهذا النظام واختزالها صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

هذا النظام غير متوافق (نظرية ١-٣-٦)، حيث يوجد عمود محوري في العمود الأخير من المصفوفة الموسعة. من نظرية ٢-٢-٥ لا توجد كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ بحيث تكون تركيبة خطية من المتجهات u_1,u_2,u_3 تكون مساوية للمتجه y. ومن ثم $y\notin\langle S\rangle$.

هناك ثلاثة أشياء يمكن ملاحظتها من هذا المثال.الأول، من السهل تكوين متجه في $\langle S\rangle$. الثاني، من الممكن أن بعض المتجهات تنتمي إلى $\langle S\rangle$ (مثل w) بينما متجهات أخري لا ينتمي إلى $\langle S\rangle$ (مثل y).

الثالث، تقرير ما إذا كان متجه معطى ينتمي إلى $\langle S\rangle$ يؤدي إلى حل نظام من المعادلات الخطية والسؤال عن ما إذا كان النظام متوافق.

مثال ٢-٣-٤. نعتبر المجموعة المنتهية المكونة من ثلاثة متجهات من الحجم 3

$$R=\{v_1,v_2,v_3\}=\left\{\begin{bmatrix}-7\\5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\5\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-12\\7\\4\end{bmatrix}\right\}$$

التي هي أعمدة مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات

$$-7x_1-6x_2-12x_3=-33$$
$$5x_1+5x_2+7x_3=24$$
$$x_1+4x_3=5$$

(هذا النظام سبق تحليله في مثال ١-٢-١٨)

ونعتبر المجموعة اللانهائية $\langle R\rangle$.

بداية، لاحظ على سبيل المثال أن

$$x=(2)\begin{bmatrix}-7\\5\\1\end{bmatrix}+(4)\begin{bmatrix}-6\\5\\0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}-12\\7\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\9\\-10\end{bmatrix}$$

يكون في $\langle R\rangle$، حيث أنه تركيبة خطية من v_1,v_2,v_3، أي أن $x\in\langle R\rangle$. حاول اختيار قيم أخرى للكميات القياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$، وأنظر أي المتجهات يمكن أن تكونها كعناصر في $\langle R\rangle$.

الآن نسأل، إذا كان لدينا متجه، هل يكون عنصر في $\langle R\rangle$، على سبيل المثال، هل $z=\begin{bmatrix}-33\\24\\5\end{bmatrix}$ يكون في $\langle R\rangle$؟ أي هل $z\in\langle R\rangle$ ؟

للإجابة عن هذا السؤال نبحث عن كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ بحيث يكون

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = z$$

من نظرية ٢-٢-٥ حلول هذه المعادلة الاتجاهية هي حلول نظام المعادلات

$$-7\alpha_1 - 6\alpha_2 - 12\alpha_3 = -33$$
$$5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 = 24$$
$$\alpha_1 + 4\alpha_3 = 5$$

بتكوين المصفوفة الموسعة واختزالها صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

هذا النظام له حل وحيد

$\alpha_1 = -3$ ، $\alpha_2 = 5$ و $\alpha_3 = 2$

هذا يخبرنا بأن

$$(-3)v_1 + (5)v_2 + (2)v_3 = z$$

لذلك نكون مقتنعون حقا أن $z \in \langle R \rangle$. لاحظ أنه في هذه الحالة توجد طريقة وحيدة للإجابة عن السؤال، حيث أن الحل وحيد.

دعنا نسأل عن متجه آخر، هل $x = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$ يكون في $\langle R \rangle$ ؟

نبحث عن كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ بحيث يكون

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = x$$

من نظرية ٢-٢-٥ حلول هذه المعادلة الاتجاهية هي حلول نظام المعادلات

$$-7\alpha_1 - 6\alpha_2 - 12\alpha_3 = -7$$
$$5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 = 8$$

$$\alpha_1 + 4\alpha_3 = -3$$

بتكوين المصفوفة الموسعة واختزالها صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

هذا النظام له حل وحيد

$\alpha_1 = 1$ ، $\alpha_2 = 2$ و $\alpha_3 = -1$

هذا يخبرنا بأن

$$(1)v_1 + (2)v_2 + (-1)v_3 = x$$

لذلك نكون مقتنعون حقا أن $x \in \langle R \rangle$. لاحظ أنه في هذه الحالة توجد طريقة وحيدة للإجابة عن السؤال، حيث أن الحل وحيد.

سوف نستمر في اختبار متجهات أخرى لعضويتها في $\langle R \rangle$. السؤال حول العضوية في $\langle R \rangle$ يؤدي حتما إلى نظام من ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ بمصفوفة معاملات أعمدتها هي المتجهات v_1, v_2, v_3. هذه المصفوفة الخاصة ليست شاذة، لذلك نظرية ١-٥-١٣ تضمن أن النظام يكون له حل (هذا الحل يكون وحيد). لذلك بغض النظر عن المتجه المختار z، سوف نكتشف أنه عنصر في $\langle R \rangle$. بتعبير مختلف، كل متجه من الحجم 3 يكون في $\langle R \rangle$، أي أن $\langle R \rangle = \mathbb{C}^3$.

المجموعات المولدة لفضاءات الصفرية

رأينا في مثال ٢-٢-١٠ أنه عندما يكون نظام المعادلات متجانس، مجموعة الحل يمكن التعبير عنها بالشكل الموصوف في نظرية ٢-٢-٨ حيث المتجه c هو المتجه الصفري. يمكننا أساسا تجاهل هذا المتجه، لذلك الباقي من التعبير للحل يشبه تركيبة خطية اختيارية حيث الكميات القياسية هي المتجهات الحرة والمتجهات هي $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-r}$. والذي يبدو جليا كأنه امتداد. هذا هو جوهر النظرية التالية.

نظرية ٢-٣-٥. نفرض أن A مصفوفة من درجة $m \times n$ وأن B مصفوفة مكافئة لها صفيا في الشكل الصفي المدرج المختزل. نفرض أن

B لهـا r عمـود محـوري بأدلـة تعطـى بالمجموعـة $D=\{d_1,d_2,d_3,\ldots,d_r\}$، بينما $n-r$ عمـود غير محوري أدلتها $F=\{f_1,f_2,f_3,\ldots,f_r,n+1\}$. نكـون $n-r$ متجـه z_j ، $1\le j\le n-r$ ، من الحجم n

$$[z_j]_i=\begin{cases}1 & \text{if } i\in F,\ i=f_j\\ 0 & \text{if } i\in F,\ i\ne f_j\\ -[B]_{k,f_j} & \text{if } i\in D,\ i=d_k\end{cases}$$

إذن الفضاء الصفري لـلمصفوفة A يعطى بـالصورة

$$N(A)=\langle\{z_1,z_2,z_3,\ldots,z_{n-r}\}\rangle$$

البرهان: نعتبر النظام المتجانس $LS(A,0)$ الذي مصفوفة معاملاته هي A . مجموعة الحل له، S ، من تعريف ١-٤-٩ هي فضاء الصفرية $N(A)$ للمصفوفة A. نفرض أن B' ترمز إلى المصفوفة الناتجة من الاختزال الصفي للمصفوفة الموسعة لهذا النظام المتجانس. حيث أن النظام متجانس، العمود الأخير في المصفوفة الموسعة سوف يكون كله أصفار، وبعد أي عدد من عمليات الصف، العمود سوف يظل كله أصفار. لذلك B' لها العمود الأخير كله أصفار.

الآن بتطبيق نظرية ٢-٢-٨ على B'، بعد ملاحظة أن النظام المتجانس يجب أن يكون متوافق (نظرية ١-٤-٣). المتجه c جميع عناصره التي لها دليل في F تكون أصفار. بالنسبة للعناصر التي أدلتها في D ، القيمة تكون $-[B']_{k,n+1}$ ، ولكن بالنسبة إلى B' أي عنصر في العمود الأخير (دليله $n+1$) يكون صفر. لذلك $c=0$. المتجهات z_j، $1\le j\le n-r$ تتطـابق مـع المتجهـات u_j ، $1\le j\le n-r$، الموصوفة في نظرية ٢-٢-٨ بوضع الكل معا وتطبيق تعريف ٢-٣-١ في الخطوة الأخيرة،

$$\begin{aligned}N(A)&=S\\&=\{c+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_{n-r}u_{n-r}:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-r}\in\mathbb{C}\}\end{aligned}$$

$$= \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{n-r} u_{n-r} : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{C}\}$$
$$= \langle \{z_1, z_2, \ldots, z_{n-r}\} \rangle$$

لاحظ أن الفروض في نظرية ٢-٢-٨ ونظرية ٢-٣-٥ مختلفة قليلا. في الأولى، B تكون هي المصفوفة المختزلة صفيا لمصفوفة موسعة لنظام خطي، بينما في الأخيرة، B هي الاختزال الصفي لمصفوفة اختيارية . فهم هذا الشيء الدقيق الآن يمنع وجود لبس فيما بعد.

مثال ٢-٣-٦.(المجموعة الممتدة لفضاء الصفرية) أوجد مجموعة متجهات S بحيث أن فضاء الصفرية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

يكون مولد بـ S، أي أن $\langle S \rangle = N(A)$.

الحل: فضاء الصفرية للمصفوفة A هو مجموعة كل حلول النظام المتجانس $LS(A,0)$. إذا أوجدنا صيغة المتجه للحلول لهذا النظام المتجانس (نظرية ٢-٢-٨) فإن المتجهات u_j ، $1 \le j \le n-r$ في التركيبة الخطية هي تحديدا المتجهات z_j ، $1 \le j \le n-r$ الموصوفة في نظرية ٢-٣-٥. لذلك يمكننا محاكاة مثال ٢-٢-١٠ للوصول إلى هذه المتجهات. نبدأ باختزال A صفيا. النتيجة تكون

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مع $D = \{1,2,4\}$ و $F = \{3,5\}$ ندرك أن x_3 و x_5 تكون متجهات حرة ويمكننا ترجمة كل صف غير صفري كتعبير للمتغيرات التابعة

x_1، x_2 و x_4 (على الترتيب) بدلالة المتغيرات الحرة x_3 و x_5 . بهذا يمكننا كتابة صيغة المتجه لمتجه الحلول كما يلي

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_3 - 4x_5 \\ x_3 + 2x_5 \\ x_3 \\ -3x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن حسب رموز نظرية ٢-٣-٥،

$$z_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ،} \quad z_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و

$$N(A) = \langle \{z_1, z_2\} \rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

مثال ٢-٣-٧. (فضاء الصفرية باعتباره امتداد) دعنا نعبر عن فضاء الصفرية للمصفوفة A كامتداد لمجموعة متجهات، بتطبيق نظرية ٢-٣-٥ بشكل مختصر قدر الإمكان بدون الرجوع لنظام المعادلات المتجانس تحت الاعتبار (على عكس مثال ٢-٣-٦)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & -4 & -4 & -7 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نظرية ٢-٣-٥ تنشئ متجهات الامتداد أولا باختزال المصفوفة صفيا. الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A يكون هو

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سوف نتبع آليا الوصف في نظرية ٢-٣-٥ . هنا نسير في خطوتين كبيرتين

أولا، الأعمدة غير المحورية لها الأدلة $F=\{3,5,6\}$ ، لذلك سوف ننشئ $n-r=6-3=3$ متجهات مع نمط من 1's و 0's المشار إليها بالأدلة في F. هذا هو تحقيق السطرين الأولين من الحالات الثلاث للمتجهات المعرفة z_j ، $1\leq j\leq n-r$.

$$z_1=\begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_2=\begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_3=\begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كل من هذه المتجهات يظهر طبقا لوجود عمود ليس عمودا محوريا. العناصر الباقية لكل عمود هي عناصر الأعمدة غير المحورية اختيرت ووزعت على المواضع الخالية مرتبة (هذه المواضع لها الأدلة في المجموعة D) . هذا يحقق السطر الثالث من الحالات الثلاث للمتجهات المعرفة z_j ، $1 \le j \le n-r$.

$$z_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذلك من نظرية ٢-٣-٥ يكون

$$N(A) = \left\langle \{z_1, z_2, z_3\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

نعلم أن فضاء الصفرية للمصفوفة A هو مجموعة حل النظام المتجانس $LS(A,0)$ ، ولكن لم يوجد في هذا التطبيق لنظرية ٢-٣-٥ أي فرصة للإشارة إلى المتغيرات أو المعادلات لهذا النظام. هذه التفاصيل اختفت جميعا في برهان نظرية ٢-٣-٥.

هنا مثال سوف يختبر في آن واحد عملية إنشاء الامتداد ونظرية ٢-٣-٥، بينما أيضا يمهد الطريق للفصل التالي.

مثال ٢-٣-٨. نبدأ بمجموعة من أربعة متجهات من الحجم 3.

$$T = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

ونعتبر المجموعة اللانهائية $W = \langle T \rangle$. متجهات T تم اختيارها لتكون هي الأعمدة الأربع لمصفوفة معاملات نظام المعادلات

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 8$$
$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4$$

والذي تمت مناقشته في مثال ٢-٢-٦ اختبر أن المتجه

$$z_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يكون حل للنظام المتجانس $LS(D,0)$ المناظر لهذا النظام(هو المتجه z_2 المعطى عن طريق وصف الفضاء الصفري لمصفوفة المعاملات D من نظرية ٢-٣-٥).

بتطبيق نظرية ٢-٢-٥ يمكن كتابة التركيبة الخطية

$$2w_1 + 3w_2 + 0w_3 + 1w_4 = 0$$

والتي يمكن حلها في w_4

$$w_4 = (-2)w_1 + (-3)w_2$$

هذه المعادلة تقول أنه كلما قابلنا المتجه w_4، يمكن استبداله بتركيبة خطية معينة من المتجهات w_1 و w_2 . لذلك استخدام w_4 في المجموعة T إلى جانب w_1 و w_2 يعتبر إسرافا. مثال لما نقصده هنا يمكن أن يوضح بالحسابات.

$$5w_1 + (-4)w_2 + 6w_3 + (-3)w_4$$

$$\begin{aligned}
&= 5w_1 + (-4)w_2 + 6w_3 + (-3)((-2)w_1 + (-3)w_2) \\
&= 5w_1 + (-4)w_2 + 6w_3 + (6w_1 + 9w_2) \\
&= 11w_1 + 5w_2 + 6w_3
\end{aligned}$$

لذلك ما بدأ باعتباره تركيبة خطية من المتجهات w_1, w_2, w_3, w_4 تم اختزاله ليكون تركيبة خطية من المتجهات w_1, w_2, w_3. برهان حذر باستخدام تساوي مجموعتين يسمح لنا الآن باستنتاج أن هذا الاختزال ممكن لأي متجه في W، لذلك

$$W = \langle \{w_1, w_2, w_3\} \rangle$$

لذلك امتداد مجموعة المتجهات، W، لم يتغير، ولكن تم وصفه بامتداد مجموعة من ثلاثة متجهات بدلا عن وصفه بمجموعة من أربعة متجهات. علاوة على ذلك، يمكننا التحقق من اختزال آخر مماثل.

اختبر أن المتجه

$$z_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكون حل للنظام المتجانس $LS(D, 0)$ المناظر لهذا النظام (هو المتجه z_1 المعطى عن طريق وصف الفضاء الصفري لمصفوفة المعاملات D من نظرية ٢-٣-٥).

بتطبيق نظرية ٢-٢-٥ يمكن كتابة التركيبة الخطية

$$(-3)w_1 + (-1)w_2 + 1w_3 = 0$$

والتي يمكن حلها في w_3

$$w_3 = 3w_1 + 1w_2$$

هذه المعادلة تقول أنه كلما قابلنا المتجه w_3، يمكن استبداله بتركيبة خطية معينة من المتجهات w_1 و w_2. لذلك كما سبق، المتجه w_3 غير مطلوب في وصف المجموعة W بشرط وجود w_1 و w_2. لذلك

$$W = \langle \{ w_1, w_2 \} \rangle$$

لذلك W بدأت كامتداد لمجموعة من أربعة متجهات، والآن وضحنا (بالاستفادة من حلول نظام متجانس) أن W يمكن أن توصف كامتداد لمجموعة من متجهين فقط. ولكن لا يمكن الذهاب أبعد من ذلك، فمن غير الممكن استبعاد أي من المتجهين w_1 و w_2 بطريقة مماثلة بحيث تختزل المجموعة إلى متجه واحد.

ماذا عن المجموعة الأصلية من أربعة متجهات التي سمحت لنا بأن نعتبر بعض المتجهات على أنها زائدة؟ وما هي المتجهات التي يمكن استبعادها؟ ولماذا نحن توقفنا عند متجهين باقيين؟ الإجابة على هذه الأسئلة هي تحفيز لدراسة الاستقلال الخطي، وهو موضوع دراستنا في الفصل التالي.

تمارين ٢-٣

١- لكل أنظمة المعادلات الخطية في تمارين ١-٣ (٤ – ١٠) أكتب عناصر مجموعات الحلول للأنظمة المتجانسة المناظرة، بما يوافق نظرية ٢-٢-٨ ومن ثم أكتب فضاء الصفرية لمصفوفة المعاملات لكل نظام كامتداد لمجموعة من المتجهات، كما هو موصوف في نظرية ٢-٣-٥.

٢- نفرض أن $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ، $W = \langle S \rangle$ و $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -12 \\ -5 \end{bmatrix}$.

هل $x \in W$ ؟ إذا كان كذلك أوجد تركيبة خطية صريحة تبين ذلك.

٣- نفرض أن $S=\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$ ، $W=\langle S\rangle$ و $y=\begin{bmatrix}5\\1\\3\\5\end{bmatrix}$. هل $y\in W$ ؟ إذا كان كذلك أوجد تركيبة خطية صريحة تبين ذلك.

٤- نفرض $R=\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\\0\end{bmatrix}\right\}$. هل $y=\begin{bmatrix}1\\-1\\-8\\-4\\-3\end{bmatrix}$ تكون في R؟

٥- نفرض $R=\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\\0\end{bmatrix}\right\}$. هل $z=\begin{bmatrix}1\\1\\5\\3\\1\end{bmatrix}$ تكون في R؟

٦- نفرض $S=\left\{\begin{bmatrix}-6\\5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$. نفرض $W=\langle S\rangle$ و $y=\begin{bmatrix}-5\\3\\0\end{bmatrix}$. هل $y\in W$ ؟ إذا كان كذلك أوجد تركيبة خطية صريحة تبين ذلك.

٧- نفرض $S=\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\5\\1\end{bmatrix}\right\}$. نفرض $W=\langle S\rangle$ و $w=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$. هل $w\in W$ ؟ إذا كان كذلك أوجد تركيبة خطية صريحة تبين ذلك.

٢-٤ الاستقلال الخطي Linear Independence

الاستقلال الخطي هو واحد من أكثر المفاهيم أهمية في الجبر الخطي جنبا إلى جنب مع مفهوم الامتداد. لذلك في هذا الفصل سوف نجلي هذا المفهوم.

مجموعات المتجهات المستقلة خطيا Linearly Independent Sets of Vectors

نظرية ٢-٢-٥ تخبرنا بأن حل نظام متجانس من المعادلات الخطية يكون تركيبة خطية من أعمدة مصفوفة المعاملات والتي تساوي المتجه الصفري. استخدمنا هذا الوضع لصالحنا، مرتين، في مثال ٢-٣-٨ حيث اختزلنا مجموعة المتجهات المستخدمة في إنشاء الامتداد من أربعة إلى اثنين، بتوضيح أن متجهات معينة تكون زائدة. التعريفان التاليان يسمحان لنا بصياغة هذا الوضع.

تعريف ٢-٤-١. نفرض مجموعة المتجهات $S=\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$، العبارة الصحيحة على الصورة

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\dots+\alpha_nu_n=0$$

تكون **علاقة ارتباط خطي** relation of linear dependence على S. إذا كانت صياغة هذه العبارة بشكل تافه، أي أن $\alpha_i=0$ لكل $1\le i\le n$، فإنه في هذه الحالة تسمى **علاقة ارتباط خطي تافه** على S trivial relation of linear dependence.

تعريف ٢-٤-٢. مجموعة المتجهات $S=\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$ تسمى **مرتبطة خطيا** linearly dependent إذا وجدت علاقة ارتباط خطي على S ليست تافهة. في حالة أن علاقة الارتباط الخطي الوحيدة على S تكون هي التافهة، فإن S تسمى **مستقلة خطيا** linearly independent.

لاحظ أن علاقة الارتباط الخطي تكون معادلة. رغم أن معظمها تركيبة خطية، إلا أنها ليست تركيبة خطية. الاستقلال الخطي هو خاصية لمجموعة من المتجهات. من السهل أن نأخذ مجموعة من المتجهات وعدد مساو من الكميات القياسية، كلها أصفار، ونكون تركيبة خطية تساوي المتجه الصفري. إذا كانت الطريقة السهلة هي الطريقة

الوحيدة، فإننا نقول أن مجموعة المتجهات مستقلة خطيا. هنا بضعة أمثلة.

مثال ٢-٤-٣. نعتبر المجموعة المكونة من أربعة متجهات في $\mathbb{C}^5$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\5\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-3\\6\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\7\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

لتحديد الاستقلال الخطي، نكون أولا علاقة الارتباط الخطي

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\1\\2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\5\\2\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}2\\1\\-3\\6\\1\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}-6\\7\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

نعلم أن $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ يكون حل لهذه المعادلة، ولكن هذا غير مفيد على الإطلاق. حيث أنه دائما يكون كذلك بغض النظر عن المتجهات المختارة. المهم بالنسبة لنا معرفة هل هناك حل آخر. نظرية ٢-٢-٥ تخبرنا بأنه يمكن إيجاد مثل هذه الحلول كحلول للنظام المتجانس $LS(A,0)$ ، حيث مصفوفة المعاملات أعمدتها هي هذه المتجهات الأربعة والتي عندما تختزل صفيا نحصل على

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2&-6\\-1&2&1&7\\3&-1&-3&-1\\1&5&6&0\\2&2&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&4\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

يمكن حل هذا النظام بصورة تامة، ولكن بالنسبة لهذا المثال كل من نحتاج إليه هو حل غير تافه بوضع المتغير الحر الوحيد x_4 بأي قيمة غير الصفر ، مثل $x_4 = 1$، نحصل على حل غير صفري

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بإتمام تطبيق نظرية ٢-٢-٥ نحصل على

$$2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

هذه علاقة ارتباط خطي على S ليست تافهة، ومن ذلك نستنتج أن S تكون مرتبطة خطيا.

مثال ٢-٤-٤. نعتبر المجموعة المكونة من أربعة متجهات في $\mathbb{C}^5$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

لتحديد الاستقلال الخطي، نكون أولا علاقة الارتباط الخطي

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\1\\2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\5\\2\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}2\\1\\-3\\6\\1\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}-6\\7\\-1\\1\\1\end{bmatrix}=0$$

نعلم أن $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ يكون حل لهذه المعادلة، ولكن هذا غير مفيد على الإطلاق. حيث أنه دائما يكون كذلك بغض النظر عن المتجهات المختارة. المهم بالنسبة لنا معرفة هل هناك حل آخر. نظرية ٢-٢-٥ تخبرنا بأنه يمكن إيجاد مثل هذه الحلول كحلول للنظام المتجانس $LS(B,0)$ ، حيث مصفوفة المعاملات أعمدتها هي هذه المتجهات الأربعة والتي عندما تختزل صفيا نحصل على

$$B=\begin{bmatrix}2&1&2&-6\\-1&2&1&7\\3&-1&-3&-1\\1&5&6&1\\2&2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

من شكل هذه المصفوفة، نجد أنه لا يوجد متغيرات حرة، لذلك الحل يكون وحيد، ولأن النظام متجانس فإن الحل الوحيد يكون هو الحل التافه. الآن نعلم أنه توجد طريقة وحيدة لتجميع المتجهات الأربعة في T إلى علاقة ارتباط خطي وهذه الطريقة هي الطريقة السهلة الواضحة. في هذه الحالة نقول أن المجموعة T تكون مستقلة خطيا.

مثالي ٢-٤-٣ و ٢-٤-٤ يرتكزان على حل نظام متجانس من المعادلات لتحديد الاستقلال الخطي. يمكننا تنظيم هذه العملية في نظرية تحفظ الوقت.

نظرية ٢-٤-٥. نفرض أن $S=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n\}\subseteq\mathbb{C}^m$ مجموعة من المتجهات و A هي مصفوفة من درجة $m\times n$ أعمدتها هي

المتجهات في S. إذن S تكون مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان النظام المتجانس $LS(A,0)$ له حل وحيد.

البرهان: نفرض أن $LS(A,0)$ له حل وحيد. حيث أنه نظام متجانس فإن الحل الوحيد يجب أن يكون هو الحل التافه $x=0$. من نظرية ٢-٢-٥، هذا يعني أن علاقة الارتباط الخطي الوحيدة على S هي العلاقة التافهة. لذلك S تكون مستقلة خطيا.

لإثبات الاتجاه الآخر، سوف نبرهن المكافئ العكسي. نفرض أن $LS(A,0)$ ليس له حل وحيد. حيث أنه نظام متجانس، فإنه يكون متوافق (نظرية ١-٤-٣)، ومن ثم يجب أن يكون له عدد لانهائي من الحلول (نظرية ١-٣-١٠). واحد من هذه الحلول يجب أن يكون غير تافه (في الواقع معظم هذه الحلول يكون كذلك)، لذلك نختار واحد منها. من نظرية ٢-٢-٥ هذا الحل غير التافه يعطي علاقة ارتباط خطي على S غير تافهة، لذلك يمكننا استنتاج أن S تكون مرتبطة خطيا.

حيث أن نظرية ٢-٤-٥ تكون تكافؤ، فإنه يمكننا استخدامها لتحديد الاستقلال الخطي والارتباط الخطي لأي مجموعة من المتجهات، مجرد تكوين مصفوفة وتحليل الشكل الصفي المدرج المختزل لها. دعنا نوضح ذلك بأمثلة أخرى.

مثال ٢-٤-٦. هل مجموعة المتجهات التالية تكون مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا؟

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\2\\-1\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\3\\-4\\5\\1\end{bmatrix}\right\}$$

الحل: نظرية ٢-٤-٥ تقترح دراسة المصفوفة A التي أعمدتها هي المتجهات في S. بصفة خاصة نهتم بحجم مجموعة حل النظام المتجانس $LS(A,0)$. لذلك نختزل المصفوفة A صفيا

$$A=\begin{bmatrix}2&6&4\\-1&2&3\\3&-1&-4\\4&3&5\\2&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

الآن $r=3$ ، لذلك يوجد $n-r=3-3=0$ متغير حر ومن ثم نجد أن $LS(A,0)$ يكون له حل وحيد (نظرية ١-٤-٣و ١-٣-٨). من نظرية ٢-٤-٥، المجموعة S تكون مستقلة خطيا.

مثال ٢-٤-٧. هل مجموعة المتجهات التالية تكون مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا؟

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\2\\-1\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\3\\-4\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

الحل: نظرية ٢-٤-٥ تقترح دراسة المصفوفة A التي أعمدتها هي المتجهات في S. بصفة خاصة نهتم بحجم مجموعة حل النظام المتجانس $LS(A,0)$. لذلك نختزل المصفوفة A صفيا

$$A=\begin{bmatrix}2&6&4\\-1&2&3\\3&-1&-4\\4&3&-1\\2&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

الآن $r=2$ ، لذلك يوجد $n-r=3-2=1$ متغير حر ومن ثم نجد أن $LS(A,0)$ يكون له عدد لانهائي من الحلول (نظرية ١-٤-٣ و ١-٣-٨). من نظرية ٢-٤-٥، المجموعة S تكون مرتبطة خطيا.

لأنها تكافؤ، نظرية ٢-٤-٥ تعطينا طريقة مباشرة لتحديد ما إذا كانت مجموعة متجهات مستقلة أو مرتبطة خطيا.

بمراجعة مثال ٢-٤-٦ ومثال ٢-٤-٧ نجد أنهما يختلفان قليلا ، يختلفان فقط في الموضعين الأخيرين في المتجه الثالث. هذا ينتج عنه اختلاف في المصفوفات عندما تختزل صفيا ومن ثم اختلاف في قيمة r، عدد الصفوف غير الصفرية. لاحظ أيضا أننا أقل اهتماما بمجموعة الحل الفعلية ولكن اهتمامنا الأكبر على شكل أو حجم المجموعة. هذه الملاحظات تسمح لنا بعمل تحسين طفيف على نظرية ٢-٤-٥.

نظرية ٢-٤-٨. نفرض أن $S=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}\subseteq\mathbb{C}^m$ مجموعة من المتجهات و A هي مصفوفة من الحجم $m\times n$ أعمدتها هي المتجهات في S. نفرض B هي مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل متكافئة صفيا مع A ونفرض r ترمز إلى عدد الأعمدة المحورية في B. إذن S تكون مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان $n=r$.

البرهان: نظرية ٢-٤-٥ تقول أن الاستقلال الخطي لـ S يكافئ أن النظام الخطي المتجانس $LS(A,0)$ يكون له حل وحيد. حيث أن $LS(A,0)$ يكون متوافق (نظرية ١-٤-٣) ، نطبق نظرية ١-٣-٧ لنرى أن الحل يكون وحيد تحديدا عندما $n=r$.

لذلك الآن نقدم مثال للطريقة الأكثر مباشرة لتحديد ما إذا كانت مجموعة متجهات الأعمدة مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا. بينما هذه الطريقة يمكن أن تكون سهلة وسريعة، لا تنسى التسلسل المنطقي من تعريف الاستقلال الخطي خلال نظام المعادلات المتجانس الذي يجعله ممكنا.

مثال ٢-٤-٩. هل مجموعة المتجهات

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9\\-6\\-2\\3\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\\4\\2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-2\\1\\4\\3\\2\end{bmatrix}\right\}$$

تكون مستقلة خطيا؟

الحل: نظرية ٢-٤-٨ تقترح علينا أن نضع هذه المتجهات في مصفوفة كأعمدة ونحلل الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة،

$$\begin{bmatrix}2&9&1&-3&6\\-1&-6&1&1&-2\\3&-2&1&4&1\\1&3&0&2&4\\0&2&0&1&3\\3&1&1&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

الآن نحتاج فقط لحساب أن $r=4<5=n$ لنقرر، بالنسبة إلى نظرية ٢-٤-٨ أن S تكون مجموعة مرتبطة خطيا.

مثال ٢-٤-١٠. نعتبر مجموعة من 9 متجهات في $\mathbb{C}^4$

$$R=\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\1\\-3\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\2\\9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-2\\4\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-6\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\5\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

لكي نستخدم نظرية ٢-٤-٥ نكون مصفوفة C من درجة 4×9 أعمدتها هي المتجهات في R

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 & 0 & 5 & 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 & 4 & -6 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 9 & 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

لتحديد هل النظام المتجانس $LS(C,0)$ له حل وحيد أم لا، من الطبيعي أن نختزل صفيا هذه المصفوفة. ولكن في هذا المثال بصفة خاصة، يمكن أن نفعل شيء أفضل. نظرية ١-٤-٨ تخبرنا بأنه حيث أن النظام متجانس في $n=9$ متغيرات و $m=4$ معادلات و $n>m$ ، يجب أن يوجد عدد لانهائي من الحلول. وحيث أنه لا يوجد حل وحيد، من نظرية ٢-٤-٥ المجموعة تكون مرتبطة خطيا.

الوضع في مثال ٢-٤-١٠ يكون من البراعة بحيث يكفي لصياغته في النظرية التالية

نظرية ٢-٤-١١. نفرض أن $S=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n\}\subseteq\mathbb{C}^m$ و $n>m$. إذن S تكون مرتبطة خطيا.

البرهان: نكون المصفوفة A من الحجم $m\times n$ التي أعمدتها v_i ، $1\le i\le n$. نعتبر النظام المتجانس $LS(A,0)$. من نظرية ١-٤-٨ النظام يكون له عدد لانهائي من الحلول. وحيث أن النظام ليس له حل وحيد، نظرية ٢-٤-٥ تقول أن أعمدة A تكون مجموعة مرتبطة خطيا، كما هو مطلوب.

الاستقلال الخطي والمصفوفات غير الشاذة

الآن نخصص إلى المجموعات من n متجه في $\mathbb{C}^n$.

مثال ٢-٤-١٢. في مثال ١-٥-٣ تعرضنا بالدراسة لنظام معادلات كانت مصفوفة المعاملات له هي

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أعمدة هذه المصفوفة هل تكون مجموعة مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا؟
من مثال ١-٥-٣، نعلم أن هذه المصفوفة A تكون شاذة. وطبقا لتعريف المصفوفة غير الشاذة (تعريف ١-٥-٢) النظام المتجانس $LS(A,0)$ يكون له عدد لانهائي من الحلول. ومن نظرية ٢-٤-٥، أعمدة هذه المصفوفة تكون مرتبطة خطيا.

مثال ٢-٤-١٣. في مثال ١-٥-٤ تعرضنا بالدراسة لنظام معادلات مصفوفة المعاملات له هي

$$B=\begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

أعمدة هذه المصفوفة هل تكون مجموعة مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا؟
من مثال ١-٥-٤ نعلم أن هذه المصفوفة B تكون غير شاذة. وطبقا لتعريف المصفوفة غير الشاذة (تعريف ١-٥-٢) النظام المتجانس $LS(A,0)$ يكون له حل وحيد. ومن نظرية ٢-٤-٥، أعمدة هذه المصفوفة تكون مستقلة خطيا.

في المثالين السابقين، نظامي المعادلات لهما خواص متضادة بالنسبة لأعمدة مصفوفتي المعاملات، وهذا ليس من قبيل المصادفة. هنا النظرية، ومن ثم سوف نُحدِث التكافؤات للمصفوفات غير الشاذة.

نظرية ٢-٤-١٤. نفرض A مصفوفة مربعة. إذن A تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كانت أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.

البرهان: المصفوفة A تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كان $LS(A,0)$ له حل وحيد (تعريف ١-٢-٥) إذا وفقط إذا كان أعمدة A مستقلة خطيا (نظرية ٢-٤-٥).

النظرية التالية هي تحديث لنظرية ١-٥-١٤.

نظرية ٢-٤-١٥. نفرض A مصفوفة مربعة. العبارات التالية تكون متكافئة

١- A مصفوفة غير شاذة.
٢- الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A هو مصفوفة الوحدة.

٣- الفضاء الصفري للمصفوفة A يحتوي فقط المتجه الصفري، أي أن $N(A)=\{0\}$.

٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار ممكن للمتجه b.

٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.

البرهان: نظرية ٢-٤-١٤ هي تكافؤ آخر للمصفوفة غير الشاذة، لذلك يمكننا إضافتها إلى التكافؤات الواردة في نظرية ١-٥-١٤.

فضاءات الصفرية، الامتداد، الاستقلال الخطي

Null Spaces, Spans, Linear Independence

نظرية ٢-٣-٥ وفرت لنا $n-r$ متجه التي يمكن استخدامها مع تركيبة الامتداد لبناء كل فضاء صفرية لمصفوفة. كما ألمحنا في مثال ٢-٣-٨، وكما سوف نرى فيما بعد، المجموعات المرتبطة خطيا تحمل معها المتجهات الزائدة عندما تستخدم لبناء مجموعة كامتداد. هدفنا الآن هو بيان أن هذه المتجهات المعطاة في نظرية ٢-٣-٥ تكون مجموعة مستقلة خطيا، لذلك في معنى واحد تكون كافية وفعالة قدر المستطاع لوصف فضاء الصفرية. لاحظ أن المتجهات z_j ، $1\le j\le n-r$ تظهر أولا في صورة المتجه لحلول نظام خطي اختياري (نظرية ٢-٢-٨). نفس المتجهات تظهر مرة أخرى في تكوين الامتداد في الخلاصة في نظرية ٢-٣-٥ . حيث أن هذه النظرية الثانية خصصت للأنظمة المتجانسة، الفرق الحقيقي الوحيد هو أن المتجه c في نظرية ٢-٢-٨ هو المتجه الصفري في النظام المتجانس. أخيرا نظرية ٢-٤-١٧ سوف توضح أن نفس هذه المتجهات تكون مجموعة مستقلة خطيا. سوف نمهد الطريق لبرهان هذه النظرية بمثال كبير نسبيا. ادرس المثال بعناية لأنه سوف يجعل فهم البرهان أيسر.

مثال ٢-٤-١٦ . بفرض أننا مهتمون بفضاء الصفرية لمصفوفة A من الحجم 3×7 مختزلة صفيا إلى

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & -5\end{bmatrix}$$

المجموعة $F=\{3,4,6,7\}$ هي مجموعة الأدلة للمتغيرات الأربعة الحرة التي سوف تستخدم في وصف مجموعة حل النظام المتجانس $LS(A,0)$. بتطبيق نظرية ٢-٣-٥ يمكننا البدء في تكوين مجموعة من أربعة متجهات امتدادها يكون هو فضاء الصفرية للمصفوفة A، نرمز لمجموعة المتجهات بالرمز T.

$$N(A)=\langle T\rangle=\langle\{z_1,z_2,z_3,z_4\}\rangle=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} \\ \\ 1\\0\\ \\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} \\ \\ 0\\1\\ \\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} \\ \\ 0\\0\\ \\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} \\ \\ 0\\0\\ \\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

حتى الآن تم تكوين هذه المتجهات قدر المستطاع اعتمادا على معلوماتنا من محتوى المجموعة F. هذه المعلومات تسمح لنا بتحديد العناصر في المواضع 3، 4 ، 6 و 7 ، بينما تركت المواضع 1، 2 و 5 خالية. الآن قبل أن نفعل أي شيء دعنا نسأل إذا كانت T مستقلة خطيا؟ نبدأ بعلاقة ارتباط خطي على T وننظر ما يمكن أن نعلمه عن الكميات القياسية.

$$0=\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\alpha_3 z_3+\alpha_4 z_4$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix} \\ \\ 1\\0\\ \\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} \\ \\ 0\\1\\ \\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix} \\ \\ 0\\0\\ \\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix} \\ \\ 0\\0\\ \\0\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

بتطبيق تعريف تساوي متجهين على نهايتي هذه السلسلة من التساوي، نجد أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. لذلك علاقة الترابط الخطي الوحيدة على T تكون هي العلاقة التافهة. ومن تعريف ٢-٤-١، المجموعة T تكون مستقلة خطيا. السمة المهمة في هذا المثال هي كيف أن سلوك 0's و 1's في المتجهات الأربعة أدت إلى استنتاج الاستقلال الخطي.

برهان نظرية ٢-٤-١٧ في الحقيقة هو واضح تماما ويعتمد على سلوك 0's و 1's التي تظهر في المتجهات z_j ، $1 \leq j \leq n-r$ في العناصر التي تظهر في مواضع الأعمدة غير المحورية. سوف نسير جنبا إلى جنب كما فعلنا في دراسة مثال ٢-٤-١٦. هذا البرهان أيضا هو أول مثال جيد لكيفية برهان الخلاصة التي تقول أن مجموعة مستقلة خطيا.

نظرية ٢-٤-١٧. (أساسات فضاءات الصفرية)

نفرض أن A مصفوفة من درجة $m \times n$، B مصفوفة مكافئة صفيا للمصفوفة A في الشكل الصفي المدرج المختزل لها عدد r من الأعمدة المحورية. نفرض $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_r\}$ و $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-r}\}$ مجموعتي أدلة الأعمدة المحورية وغير المحورية، على الترتيب، في B. نكون $n-r$ متجه z_j ، $1 \leq j \leq n-r$ ، من الحجم n كما يلي

$$[z_j]_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in F, i = f_j \\ 0 & \text{if } i \in F, i \neq f_j \\ -[B]_{k,f_j} & \text{if } i \in D, i = d_k \end{cases}$$

نعرف المجموعة $S = \{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-r}\}$. إذن

١- $N(A) = \langle S \rangle$.

٢- S تكون مجموعة مستقلة خطيا.

البرهان: لاحظ أولا أن المتجهات z_j ، $1 \leq j \leq n-r$ هي تماما نفس المتجهات المعرفة في نظرية ٢-٣-٥. أيضا فروض نظرية ٢-٣-٥ هي نفس فروض النظرية التي نحن بصدد برهانها. ومن ثم ببساطة نحصل على خلاصة نظرية ٢-٣-٥ وهي $N(A) = \langle S \rangle$. وهذا هو نصف النظرية السهل، ولكن النصف الآخر ليس أصعب كثيرا. فيما يلي نوضح أن S تكون مجموعة مستقلة خطيا.

لإثبات أن مجموعة تكون مستقلة خطيا، نحتاج إلى أن نبدأ بعلاقة ارتباط خطي ونخلص إلى أن الكميات القياسية المتضمنة فيها يجب أن تكون جميعها أصفار. لذلك، لبيان أن S تكون مجموعة مستقلة خطيا نبدأ بالتالي

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \ldots + \alpha_{n-r} z_{n-r} = 0$$

لكل j، $1 \leq j \leq n-r$ ، نعتبر التساوي بين العناصر الفردية في طرفي هذه المتساوية في الموضع f_j .

$$\begin{aligned} 0 &= [0]_{f_j} \\ &= [\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \ldots + \alpha_{n-r} z_{n-r}]_{f_j} \\ &= [\alpha_1 z_1]_{f_j} + [\alpha_2 z_2]_{f_j} + [\alpha_3 z_3]_{f_j} + \ldots + [\alpha_{n-r} z_{n-r}]_{f_j} \\ &= \alpha_1 [z_1]_{f_j} + \alpha_2 [z_2]_{f_j} + \alpha_3 [z_3]_{f_j} + \ldots + \alpha_{n-r} [z_{n-r}]_{f_j} \\ &= \alpha_1 [z_1]_{f_j} + \alpha_2 [z_2]_{f_j} + \alpha_3 [z_3]_{f_j} + \ldots + \\ &\qquad \alpha_{j-1} [z_{j-1}]_{f_j} + \alpha_j [z_j]_{f_j} + \alpha_{j+1} [z_{j+1}]_{f_j} + \ldots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{n-r}[z_{n-r}]_{f_j} \\
&= \alpha_1(0)+\alpha_2(0)+\alpha_3(0)+\ldots+ \\
&\qquad \alpha_{j-1}(0)+\alpha_j(1)+\alpha_{j+1}(0)+\ldots+\alpha_{n-r}(0) \\
&= \alpha_j
\end{aligned}$$

لذلك لكل $1 \le j \le n-r$، يكون $\alpha_j = 0$، وهذه الخلاصة تخبرنا أن علاقة الارتباط الخطي الوحيدة على $S = \{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-r}\}$ تكون هي العلاقة التافهة. ومن ثم، حسب تعريف ٢-٤-١، المجموعة تكون مستقلة خطيا، كما هو مطلوب.

تمارين ٢-٤

في التمارين ١- ٦ حدد ما إذا كانت مجموعة المتجهات مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا. عندما تكون المجموعة مرتبطة خطيا، كون علاقة ارتباط خطي غير تافهة.

١- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

٢- $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

٣- $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$.

٤- $\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\2\\5\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\1\\2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$.

٥- $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\-1\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\4\\-2\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\-2\\0\end{bmatrix}\right\}$.

٦- $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}10\\-7\\0\\10\\4\end{bmatrix}\right\}$.

٧- للمصفوفة B التالية، أوجد مجموعة S تكون مستقلة خطيا وامتدادها هو فضاء الصفرية للمصفوفة B، أي $N(B)=\langle S\rangle$.

$$B=\begin{bmatrix}-3&1&-2&7\\-1&2&1&4\\1&1&2&-1\end{bmatrix}$$

٨- للمصفوفة A التالية، أوجد مجموعة S تكون مستقلة خطيا وامتدادها هو فضاء الصفرية للمصفوفة A، أي $N(A)=\langle S\rangle$.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 5\\ 3 & 6 & 1 & 2 & 7\\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

٩- أوجد مجموعة متجهات الأعمدة T بحيث
(أ) $\langle T\rangle = N(B)$ ، (ب) T تكون مجموعة مستقلة خطيا.

حيث $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ -4 & -3 & 1 & -7\\ 1 & 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

١٠- أوجد مجموعة S مستقلة خطيا وامتدادها يكون هو فضاء الصفرية للمصفوفة A حيث

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3\\ 3 & 2 & -8 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

١١- لأنظمة المعادلات الخطية الواردة في تمارين ١-٣(٤-١٠) اعتبر حلول الأنظمة المتجانسة المناظرة. من مجموعة الحل حدد ما إذا كانت الأعمدة في مصفوفة المعاملات تكون مجموعة مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا. في حالة كونها مرتبطة خطيا استخدم احد عينات الحلول لتكوين علاقة ارتباط خطي غير تافهة على مجموعة أعمدة مصفوفة المعاملات.

١٢- أوجد مجموعة S مستقلة خطيا وامتدادها يكون هو فضاء الصفرية للمصفوفة A حيث

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 6 & -8\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -6 & 7\end{bmatrix}$$

١٣- نفرض $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ مجموعة من ثلاثة متجهات في $\mathbb{C}^{20}$.
برهن أن المجموعة
$$T=\{2v_1+3v_2+v_3, v_1-v_2-2v_3, 2v_1+v_2-v_3\}$$
تكون مرتبطة خطيا.

١٤- نفرض $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ مجموعة من ثلاثة متجهات في $\mathbb{C}^{20}$.
برهن أن المجموعة
$$T=\{2v_1+3v_2+v_3, v_1-v_2+2v_3, 2v_1+v_2-v_3\}$$
تكون مستقلة خطيا.

١٥- نعتبر مجموعة المتجهات W من $\mathbb{C}^3$. أوجد مجموعة T مكونة من ثلاثة متجهات من W بحيث يكون $W=\langle T\rangle$ ، حيث
$$W=\langle\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}\rangle=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

١٦- برهن أنه إذا كانت مجموعة من المتجهات تحتوي المتجه الصفري فإن المجموعة تكون مرتبطة خطيا.

١٧- نفرض أن S مجموعة متجهات مستقلة خطيا و T مجموعة جزئية من S، أي أن $T\subseteq S$. برهن أن T تكون مستقلة خطيا.

١٨- نفرض أن T مجموعة متجهات مرتبطة خطيا و T مجموعة جزئية من S ، أي أن $T\subseteq S$. برهن على أن S تكون مرتبطة خطيا.

١٩- نفرض $\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n\}$ مجموعة من المتجهات. برهن على أن $\{v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,\dots,v_n-v_1\}$ تكون مجموعة مرتبطة خطيا.

٢٠- نفرض أن $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ مجموعة مستقلة خطيا في $\mathbb{C}^{47}$.
برهن أن $\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3,v_1+v_2+v_3+v_4\}$ تكون مجموعة مستقلة خطيا.

٢١- نفرض أن A مصفوفة من درجة $m \times n$ أعمدتها مستقلة خطيا والنظام الخطي $LS(A,b)$ متوافق. بين أن هذا النظام يكون له حل وحيد (لاحظ أننا لم نشترط أن تكون المصفوفة مربعة).

٢-٥ الارتباط الخطي والتوليد

Linear Dependence and Spans

في أي مجموعة مرتبطة خطيا يوجد دائما متجه يمكن كتابته كتركيبة خطية من بقية المتجهات. هذا هو جوهر النظرية التالية (نظرية ٢-٥-١). ربما هذا سوف يوضح استخدام كلمة "مرتبطة". في المجموعة المرتبطة خطيا، على الأقل متجه واحد يعتمد على المتجهات الأخرى.

في الواقع نظرية ٢-٥-١ هي تكافؤ، البعض يستخدم هذا الشرط على أنه تعريف للترابط الخطي. لذلك الاستقلال الخطي يعرف على أنه المعكوس المنطقي للارتباط الخطي. بالطبع، اخترنا أن نأخذ تعريف ٢-٤-١ كتعريف لنا ومن ثم تأتي نظرية ٢-٥-١ كنظرية.

المجموعات المرتبطة خطيا والامتداد

إذا استخدمنا مجموعة مرتبطة خطيا لتكوين امتداد، فإنه دائما يمكننا تكوين نفس المجموعة اللانهائية بمجموعة تقل متجه واحد في الحجم. سوف نوضح هذا السلوك في مثال. مع ذلك، هذا لا يمكن أن يكون ممكن إذا بنينا الامتداد من مجموعة مستقلة خطيا. لذلك بسلوك معين، استخدام مجموعة مستقلة خطيا لتكوين امتداد هي أفضل طريقة- لا توجد أي متجهات إضافية تستخدم لبناء كل التراكيب الخطية الضرورية. الآن نعطي النظرية والمثال.

نظرية ٢-٥-١. نفرض أن $S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ مجموعة من المتجهات. إذن S تكون مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا كان يوجد دليل t، $1\le t\le n$ بحيث أن u_t يكون تركيبة خطية من المتجهات $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_{t-1},u_{t+1},\ldots,u_n$.

البرهان: نفرض أن S مرتبطة خطيا، لذلك توجد علاقة ارتباط خطي غير تافهة وذلك من تعريف. أي أنه توجد كميات قياسية α_i، $1\le i\le n$، ليست جميعها أصفار بحيث

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_nu_n=0$$

حيث أن α_i لا يمكن أن تكون كلها أصفار، نختار واحدة منها ولتكن α_t ليست صفر. إذن

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{-1}{\alpha_t}(-\alpha_t u_t)\\ &= \frac{-1}{\alpha_t}(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{t-1}u_{t-1} + \alpha_{t+1}u_{t+1} + \ldots + \alpha_n u_n)\\ &= \frac{-\alpha_1}{\alpha_t}u_1 + \ldots + \frac{-\alpha_{t-1}}{\alpha_t}u_{t-1} + \frac{-\alpha_{t+1}}{\alpha_t}u_{t+1} + \ldots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_t}u_n\end{aligned}$$

وحيث أن القيم $\frac{\alpha_i}{\alpha_t}$ أيضا تكون قياسية، يكون لدينا تعبير لـ u_t كتركيبة خطية من باقي العناصر في S.

في الاتجاه الآخر، نفرض أن u_t تركيبة خطية من باقي العناصر في S. نكتب هذه التركيبة الخطية كما يلي

$$u_t = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_{t-1}u_{t-1} + \beta_{t+1}u_{t+1} + \ldots + \beta_n u_n$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t-1}, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_n$ كميات قياسية. إذن

$$\begin{aligned}\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_{t-1}u_{t-1} + (-1)u_t + \beta_{t+1}u_{t+1} + \ldots + \beta_n u_n\\ &= u_t + (-1)u_t\\ &= (1 + (-1))u_t\\ &= 0u_t = 0\end{aligned}$$

لذلك الكميات القياسية $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t-1}, \beta_t = -1, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_n$ تعطي تركيبة خطية غير تافهة للمتجهات في S ومن ثم تكون S مرتبطة خطيا .

هذه النظرية يمكن استخدامها أحيانا متكررة لتخفيض حجم مجموعة من المتجهات المستخدمة في بناء امتداد. رأينا بعض من هذه في مثال ٢-٣-٨ ولكن في المثال التالي سوف نعطي بعض التفصيلات الدقيقة.

مثال ٢-٥-٢. نعتبر المجموعة المكونة من أربعة متجهات في $\mathbb{C}^5$

$$R=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-7\\6\\-11\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\1\\2\\1\\6\end{bmatrix}\right\}$$

ونعرف $V=\langle R\rangle$.

لكي نستخدم نظرية ٢-٤-٥ ، نكون مصفوفة D من الحجم 5×4 ونختزلها صفيا لكي نتعرف على حلول النظام المتجانس $LS(D,0)$

$$D=\begin{bmatrix}1&2&0&4\\2&1&-7&1\\-1&3&6&2\\3&1&-11&1\\2&2&-2&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

يمكننا إيجاد عدد لانهائي من الحلول لهذا النظام معظمها غير تافهة، ويمكننا اختيار أي واحد منها لبناء ارتباط خطي على R. نفرض أننا بدأنا بـ $x_4=1$ لإيجاد الحل

$$\begin{bmatrix}-4\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

لذلك يمكننا كتابة علاقة الارتباط الخطي على R

$$(-4)v_1+0v_2+(-1)v_3+1v_4=0$$

نظرية ٢-٥-١ تضمن أنه يمكننا حل علاقة الارتباط الخطي هذه في متجه ما في R، ولكن اختيار أيها متروك لنا. ومع ذلك لاحظ أن v_2 له معامل صفر، ومن ثم لا نستطيع الحل في v_2. ربما علاقة ارتباط أخرى

تعطي معامل غير صفري لـ v_2 إذا كنا نريد الحل في هذا المتجه. للأسف هذا المثال تم تصميمه بحيث ينتج معامل صفر في هذا الموضع، كما يمكن مشاهدته من حل النظام المتجانس. كل حل له $x_2 = 0$.

حسنا، إذا كنا مقتنعين بأنه لا يمكن الحل في v_2، دعنا نحل في متجه آخر وليكن v_3.

$$v_3 = (-4)v_1 + 0v_2 + 1v_4 = (-4)v_1 + 1v_4$$

الآن سوف نوضح أن هذه المعادلة الخاصة تسمح لنا بكتابة

$$V = \langle R \rangle = \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \rangle = \langle \{v_1, v_2, v_4\} \rangle$$

في جوهره إعلان أن v_3 متجه زائد في مهمة بناء V كامتداد. هذا التوضيح هو مساواة مجموعتين. نفرض $R' = \{v_1, v_2, v_4\}$ و $V' = \langle R' \rangle$. نود بيان أن $V = V'$.

أولا نبين أن $V' \subseteq V$. حيث أن كل متجه في R' يكون في R ، أي متجه يمكن تكوينه في V' كتركيبة خطية من R' أبضا يمكن تكوينه كمتجه في V بنفس التركيبة الخطية من نفس المتجهات في R. وهذا أمر واضح.

الآن نبين أن $V \subseteq V'$. نفرض v متجه في V، إذن توجد كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ بحيث

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3((-4)v_1 + 1v_4) + \alpha_4 v_4 \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ((-4\alpha_3)v_1 + \alpha_3 v_4) + \alpha_4 v_4 \\ &= (\alpha_1 - 4\alpha_3)v_1 + \alpha_2 v_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)v_4 \end{aligned}$$

هذه المعادلة تبين أن v يمكن كتابته كتركيبة خطية من المتجهات في R' ومن ثم يكون عنصر في V'. لذلك $V \subseteq V'$، وبالتالي $V = V'$.

إذا كان R' مرتبطة خطيا (هي ليست كذلك)، فإنه يمكننا اختزال المجموعة أكثر. لاحظ أنه يمكننا حذف أي من المتجهات v_1 ، v_3 و

v_4، ولكن لا يمكن حذف v_2 لأنه ضروري في إنشاء V حيث لا يمكن التعويض عنه بأي تركيبة خطية من v_1 ، v_3 و v_4.

تصفية المتجهات

في مثال ٢-٥-٢ استخدمنا أربعة متجهات لبناء امتداد. بعلاقة ارتباط خطي معنا استطعنا استبعاد واحد من هذه المتجهات الأربعة وإنشاء نفس الامتداد من مجموعة جزئية من ثلاثة متجهات فقط من المجموعة الأصلية المكونة من أربعة متجهات. كان هناك بعض الحذر في اختيار أي من المتجهات يتم استبعاده. في المثال التالي، سوف نعطي طريقة أكثر منهجية حول كيفية اختيار المتجهات التي يمكن حذفها من مجموعة مرتبطة خطيا بحيث نحافظ على الامتداد.

مثال ٢-٥-٣. نعتبر المجموعة S من سبعة متجهات في $\mathbb{C}^4$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\8\\0\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\\-3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\9\\-4\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-13\\12\\-31\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-9\\7\\-8\\37\end{bmatrix}\right\}$$

نعرف $W=\langle S\rangle$.

واضح أن المجموعة S مرتبطة خطيا، من نظرية ٢-٤-١١، حيث لدينا $n=7$ متجهات في $\mathbb{C}^4$. لذلك يمكننا تقليص حجم S بعض الشيء وتظل تنشئ W كامتداد بمجموعة أقل من المتجهات.

كآلية لتحديد علاقات الترابط الخطي بين متجهات S، نضع متجهات الأعمدة السبعة في S كأعمدة لمصفوفة

$$A=[A_1\,|\,A_2\,|\ldots|\,A_7]=\begin{bmatrix}1&4&0&-1&0&7&-9\\2&8&-1&3&9&-13&7\\0&0&2&-3&-4&12&-8\\-1&-4&2&4&8&-31&37\end{bmatrix}$$

من نظرية ٢-٢-٥، حل غير تافه للنظام المتجانس $LS(A,0)$ سوف يعطينا علاقة ارتباط خطي غير تافهة على أعمدة A (التي هو عناصر في المجموعة S). الاختزال الصفي للمصفوفة A هو المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك يمكننا بسهولة تكوين حلول للنظام المتجانس $LS(A,0)$ باستخدام المتجهات الحرة x_2,x_5,x_6,x_7. أي حل سوف يعطينا علاقة ارتباط خطي على أعمدة B. هذه الحلول تسمح لنا بالحل في أحد متجهات الأعمدة كتركيبة خطية من المتجهات الأخرى ونزيل هذا المتجه من المجموعة. سوف نمضي في تشكيل هذه التراكيب الخطية بطريقة منهجية.

نضع المتغير الحر $x_2=1$ ونضع بقية المتغيرات الحرة أصفار. إذن حل النظام $LS(A,0)$ يكون

$$x=\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذي يمكن استخدامه لإنشاء تركيبة خطية

$$(-4)A_1+1A_2+0A_3+0A_4+0A_5+0A_6+0A_7=0$$

وهذه يمكن ترتيبها وحلها في A_2 مما يؤدي إلى أن A_2 يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية من $\{A_1, A_3, A_4\}$

$$A_2 = 4A_1 + 0A_3 + 0A_4$$

هذا يعني أن A_2 يكون زائد ، ويمكن إنشاء W بمجموعة أصغر بإزالة هذا المتجه.

$$W = \langle\{A_1, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}\rangle$$

من الناحية الفنية هذا التساوي يحتاج إلى برهان، بنفس أسلوب مثال ٢-٣-٨، ولكن سوف نتخطى هذا المطلوب هنا وفي الفقرات القليلة التالية.

الآن نضع المتغير الحر $x_5 = 1$ ونضع بقية المتغيرات الحرة أصفار. إذن حل النظام $LS(A, 0)$ يكون

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذي يمكن استخدامه لإنشاء تركيبة خطية

$$(-2)A_1 + 0A_2 + (-1)A_3 + (-2)A_4 + 1A_5 + 0A_6 + 0A_7 = 0$$

وهذه يمكن ترتيبها وحلها في A_5 مما يؤدي إلى أن A_5 يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية من $\{A_1, A_3, A_4\}$

$$A_5 = 2A_1 + 1A_3 + 2A_4$$

هذا يعني أن A_5 يكون زائد ، ويمكن إنشاء W بمجموعة أصغر بإزالة هذا المتجه.

$$W = \langle \{A_1, A_3, A_4, A_6, A_7\} \rangle$$

نفعل ذلك مرة أخرى، نضع المتغير الحر $x_6 = 1$ ونضع بقية المتغيرات الحرة أصفار. إذن حل النظام $LS(A,0)$ يكون

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذي يمكن استخدامه لإنشاء تركيبة خطية

$$(-1)A_1 + 0A_2 + 3A_3 + 6A_4 + 0A_5 + 1A_6 + 0A_7 = 0$$

وهذه يمكن ترتيبها وحلها في A_6 مما يؤدي إلى أن A_6 يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية من $\{A_1, A_3, A_4\}$

$$A_6 = 1A_1 + (-3)A_3 + (-6)A_4$$

هذا يعني أن A_6 يكون زائد ، ويمكن إنشاء W بمجموعة أصغر بإزالة هذا المتجه.

$$W = \langle \{A_1, A_3, A_4, A_7\} \rangle$$

نضع المتغير الحر $x_7 = 1$ ونضع بقية المتغيرات الحرة أصفار. إذن حل النظام $LS(A,0)$ يكون

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

والذي يمكن استخدامه لإنشاء تركيبة خطية

$$3A_1 + 0A_2 + (-5)A_3 + (-6)A_4 + 0A_5 + 0A_6 + 1A_7 = 0$$

وهذه يمكن ترتيبها وحلها في A_7 مما يؤدي إلى أن A_7 يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية من $\{A_1, A_3, A_4\}$

$$A_7 = (-3)A_1 + 5A_3 + 6A_4$$

هذا يعني أن A_7 يكون زائد ، ويمكن إنشاء W بمجموعة أصغر بإزالة هذا المتجه.

$$W = \langle \{A_1, A_3, A_4\} \rangle$$

نعتقد أننا يمكن أن نتوقف الآن، ولكننا نفذنا هذا الإجراء لكل المتغيرات الحرة، وليس من قبيل الصدفة أن المجموعة $\{A_1, A_3, A_4\}$ تكون مستقلة خطيا (تحقق من ذلك).

ينبغي أن يكون واضح كيف أن كل متغير حر قد استخدم لحذف عمود من المجموعة المستخدمة لامتداد فضاء الأعمدة، وهو جوهر برهان النظرية التالية. متجهات الأعمدة في S لم يتم اختيارها عشوائيا ولكنها أعمدة مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات الخطية الوارد في مثال ١-٣-٣. لاحظ أن المتجه

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

هو متجه الثوابت للنظام المشار إليه. وحيث أن النظام $LS(A,b)$ متوافق، نعلم من نظرية ٢-٢-٥ أن b يكون تركيبة خطية أعمدة A، أو بتعبير آخر $b \in W$. هذا يعني أن b يجب أن تكون تركيبة خطية من فقط مجرد الأعمدة الثلاثة A_1, A_3, A_4 . حاول إيجاد هذه التركيبة. هل تعتقد أنها وحيدة؟

مثال ٢-٥-٣ يستحق دراسة متأنية وبعناية حيث أن هذا المثال يحفز للنظرية التالية.

نظرية ٢-٥-٤ . نفرض أن $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ مجموعة من متجهات أعمدة. نعرف $W = \langle S \rangle$ ونفرض أن A هي المصفوفة التي أعمدتها هي متجهات S. نفرض B هي الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A و $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_r\}$ هي مجموعة الأدلة للأعمدة المحورية في B. إذن

١- $T = \{v_{d_1}, v_{d_2}, v_{d_3}, \ldots, v_{d_r}\}$ تكون مجموعة مستقلة خطيا.

٢- $W = \langle T \rangle$.

البرهان: لإثبات أن T مستقلة خطيا، نبدأ بعلاقة ترابط خطي على T ،

$$0 = \alpha_1 v_{d_1} + \alpha_2 v_{d_2} + \alpha_3 v_{d_3} + \ldots + \alpha_r v_{d_r}$$

ونحاول استنتاج أن الإمكانية الوحيدة للكميات القياسية أن تكون كلها أصفار. نرمز للأعمدة غير المحورية في B بالمجموعة $F = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-r}\}$. يمكننا المحافظة على التساوي بإضافة كمية قيمتها صفر إلى التركيبة الخطية.

$$0 = \alpha_1 v_{d_1} + \alpha_2 v_{d_2} + \alpha_3 v_{d_3} + \ldots + \alpha_r v_{d_r}$$
$$+ 0 v_{f_1} + 0 v_{f_2} + 0 v_{f_3} + \ldots + 0 v_{f_{n-r}}$$

من نظرية ٢-٢-٥، الكميات القياسية في هذه التركيبة الخطية تكون حل للنظام المتجانس. ولكن لاحظ أن هذا هو الحل الذي نحصل عليه بوضع كل متغير حر بالصفر. إذا اعتبرنا وصف متجه الحل في خلاصة نظرية ٢-٢-٨، في حالة النظام المتجانس، نجد أنه إذا وضعت كل المتغيرات الحرة بالصفر فإن الحل الناتج يكون هو الحل التافه. إذن يجب أن يكون $\alpha_i = 0$ ، $1 \le i \le r$. هذا يؤدي إلى أن T تكون مجموعة مستقلة خطيا.

المطلوب الثاني في هذه النظرية هو تساوي مجموعات. حيث أن T مجموعة جزئية من S، أي تركيبة خطية من عناصر من المجموعة T يمكن أيضا اعتبارها تركيبة خطية من عناصر من S . لذلك $\langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle = W$. يبقي إثبات أن $W = \langle S \rangle = \langle T \rangle$.

لكل k ، $1 \le k \le n-r$ نكون حل x للنظام $LS(A,0)$ بوضع المتغيرات الحرة كما يلي

$$x_{f_1} = 0 \text{ ، } x_{f_2} = 0 \text{ ، } x_{f_3} = 0 \text{ ،...، } x_{f_k} = 0 \text{ ، ... ، } x_{f_{n-r}} = 0$$

من نظرية ٢-٢-٨ بقية عناصر متجه الحل هذا تكون

$$x_{d_1} = -[B]_{1,f_k} \text{ ، } x_{d_2} = -[B]_{2,f_k} \text{ ، } x_{d_3} = -[B]_{3,f_k} \text{ ،...، } x_{d_r} = -[B]_{r,f_k} .$$

من هذا الحل نحصل على علاقة ارتباط خطي على أعمدة A،

$$-[B]_{1,f_k} v_{d_1} - [B]_{2,f_k} v_{d_2} + -[B]_{3,f_k} v_{d_3} - \ldots - [B]_{r,f_k} v_{d_r} + 1 v_{f_k} = 0$$

والتي يمكن إعادة ترتيبها لتكون

$$v_{f_k} = [B]_{1,f_k} v_{d_1} + [B]_{2,f_k} v_{d_2} + [B]_{3,f_k} v_{d_3} + \ldots + [B]_{r,f_k} v_{d_r}$$

الآن، نفرض أننا أخذنا عنصر w من $W = \langle S \rangle$ وكتبناه كتركيبة خطية من عناصر S، ولكن الحدود تم تنظيمها طبقا للأدلة في D و F،

$$w = \alpha_1 v_{d_1} + \alpha_2 v_{d_2} + \ldots + \alpha_r v_{d_r} + \beta_1 v_{f_1} + \beta_2 v_{f_2} + \ldots + \beta_{n-r} v_{f_{n-r}}$$

من العلاقة أعلى ، يمكن استبدال كل v_{f_j} بتركيبة خطية من v_{d_i} ،

$$\begin{aligned} w = {} & \alpha_1 v_{d_1} + \alpha_2 v_{d_2} + \ldots + \alpha_r v_{d_r} + \\ & \beta_1 ([B]_{1,f_1} v_{d_1} + [B]_{2,f_1} v_{d_2} + \ldots + [B]_{r,f_1} v_{d_r}) + \end{aligned}$$

$$\beta_2([B]_{1,f_2}v_{d_1}+[B]_{2,f_2}v_{d_2}+\ldots+[B]_{r,f_2}v_{d_r})+$$
$$\vdots$$
$$\beta_{n-r}([B]_{1,f_{n-r}}v_{d_1}+[B]_{2,f_{n-r}}v_{d_2}+\ldots+[B]_{r,f_{n-r}}v_{d_r})+$$

بتكرار تطبيق خواص المتجهات (نظرية ٢-١-٧) يمكن إعادة ترتيب هذا التعبير على الصورة

$$=(\alpha_1+\beta_1[B]_{1,f_1}+\beta_2[B]_{1,f_2}+\beta_3[B]_{1,f_3}+\ldots+\beta_{n-r}[B]_{1,f_{n-r}})v_{d_1}+$$
$$(\alpha_2+\beta_1[B]_{2,f_1}+\beta_2[B]_{2,f_2}+\beta_3[B]_{2,f_3}+\ldots+\beta_{n-r}[B]_{2,f_{n-r}})v_{d_2}+$$
$$\vdots$$
$$(\alpha_r+\beta_1[B]_{r,f_1}+\beta_2[B]_{r,f_2}+\beta_3[B]_{r,f_3}+\ldots+\beta_{n-r}[B]_{r,f_{n-r}})v_{d_r}$$

هذه تعبر عن w كتركيبة خطية من المتجهات في

$$T=\{v_{d_1},v_{d_2},v_{d_3},\ldots,v_{d_r}\}$$

ومن ثم $w\in\langle T\rangle$. لذلك $W=\langle S\rangle\subseteq\langle T\rangle$.

في مثال ٢-٥-٣، استبعدنا متجها واحدا في كل مرة. ولكن في كل مرة، أعدنا كتابة متجه مختلف كتركيبة خطية من تلك المتجهات التي لها أدلة أعمدة من الأعمدة المحورية في الشكل الصفي المدرج المختزل لمصفوفة الأعمدة. في برهان نظرية ٢-٥-٤، أكملنا هذا الاختزال في خطوة كبيرة واحدة. في مثال ٢-٥-٣ وصلنا إلى مجموعة مرتبطة خطيا في نفس الوقت الذي انتهينا فيه من استبعاد المتغيرات الحرة من الاستخدام. هذا لم يكن من قبيل المصادفة، هذا هو جوهر خلاصتنا للاستقلال الخطي في نظرية ٢-٥-٤. المثال التالي تطبيق مباشر لنظرية ٢-٥-٤.

مثال ٢-٥-٥. نعتبر مجموعة من خمسة متجهات في $\mathbb{C}^4$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\1\\-1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\5\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ونفرض $W=\langle S\rangle$. لكي نصل إلى أصغر مجموعة مستقلة خطيا، نتبع الخطوات الموصوفة في نظرية ٢-٥-٤.
نضع المتجهات في S كأعمدة مصفوفة ثم نختزلها صفيا

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 7 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -1 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

الأعمدة 1 و 3 أعمدة محورية (ومن ثم $D=\{1,3\}$)، لذلك المجموعة

$$T=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

تكون مستقلة خطيا ويكون $W=\langle S\rangle=\langle T\rangle$.

حيث أن الشكل الصفي المدرج المختزل لمصفوفة يكون وحيد (نظرية ١-٢-١٧)، العمليات في نظرية ٢-٥-٤ تقودنا إلى مجموعة وحيدة T. ومع ذلك يوجد عدد كبير من الاحتمالات للمجموعة T المستقلة خطيا التي يمكن أن تستخدم في الامتداد لتكوين W. بدون برهان نعطي اثنين من هذه الاحتمالات:

$$T^{*}=\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\3\\0\end{bmatrix}\right\}\text{ ، }\quad T'=\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

برهن أن T' و T^{*} مستقلتان خطيا وأن $W=\langle S\rangle=\langle T'\rangle=\langle T^{*}\rangle$.

مثال ٢-٥-٦. نعتبر مجموعة من خمسة متجهات في $\mathbb{C}^4$

$$R=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-8\\-1\\-9\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-10\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}\right\}$$

من السهل تكوين عناصر المجموعة $X=\langle R\rangle$ ، على سبيل المثال نكون العنصر

$$y=6\begin{bmatrix}2\\1\\3\\2\end{bmatrix}+(-7)\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-8\\-1\\-9\\-4\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-10\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\2\\1\\-3\end{bmatrix}$$

نعلم كيف يمكن استبدال R بمجموعة أصغر (مستقلة خطيا) التي تولد نفس الامتداد. هنا نفعل ذلك

$$\begin{bmatrix}2&-1&-8&3&-10\\1&1&-1&1&-1\\3&0&-9&-1&-1\\2&1&-4&-2&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-3&0&-1\\0&1&2&0&2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

لذلك إذا جمعنا المتجهات الأول والثاني والرابع من R

$$P=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-10\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}\right\}$$

إذن P تكون مستقلة خطيا و $\langle P\rangle=\langle R\rangle=X$، من نظرية ٢-٥-٤ . حيث أننا أنشأنا y كعنصر في $\langle R\rangle$. هل يمكننا كتابة y كتركيبة خطية من فقط ثلاثة متجهات في P ؟ الإجابة، بالطبع، هي نعم. ولكن

دعنا نكون التركيبة الخطية صراحة. من نظرية ٢-٢-٥ يمكن الحصول على هذه التركيبة الخطية بحل نظام المعادلات الخطية حيث متجهات الأعمدة في R تكون أعمدة مصفوفة المعاملات و y كمتجه الثوابت.
بتكوين مصفوفة موسعة لحل هذا النظام

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك، كما هو متوقع، نجد أن

$$1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = y$$

من السمات الرئيسية لهذا المثال هو أن التركيبة الخطية التي تعبر عن y كتركيبة خطية من متجهات P تكون وحيدة. هذا نتيجة للاستقلال الخطي للمجموعة P. المجموعة المستقلة خطيا P أصغر من R، ولكنها تظل كبيرة بشكل كافي (بالكاد) لتكوين عناصر $X = \langle R \rangle$. توجد طرق عديدة لكتابة y كتركيبة خطية من المتجهات في R، ولكن توجد طريقة واحدة لتكوين y كتركيبة خطية من المتجهات الثلاثة في P.

تمارين ٢-٥

١- نفرض T هي مجموعة أعمدة المصفوفة B، نعرف $W = \langle T \rangle$.
أوجد مجموعة R بحيث (أ) تحتوي 3 متجهات. (ب) $R \subseteq T$.
(ج) $W = \langle R \rangle$ حيث.

$$B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -2 & 7\\ -1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

٢- تحقق أن المجموعة $R'=\{v_1,v_2,v_4\}$ في نهاية مثال ٢-٥-٢ تكون مستقلة خطيا.

٣- نعتبر مجموعة المتجهات W في $\mathbb{C}^3$ ، المعطاة أسفل. أوجد مجموعة مستقلة خطيا T تحتوي ثلاث متجهات من W بحيث $\langle W\rangle=\langle T\rangle$،

$$W=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$$

٤- نفرض مجموعة المتجهات S، أوجد مجموعة مستقلة خطيا T بحيث $\langle T\rangle=\langle S\rangle$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-1\\3\end{bmatrix}\right\}$$

٥- نفرض W هي المجموعة المولدة بالمتجهات S التالية، $W=\langle S\rangle$.
أوجد مجموعة T بحيث (أ) امتداد T يكون W، $\langle T\rangle=W$ ، (ب) T تكون مستقلة خطيا، و (ج) $T\subseteq S$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

٦- نفرض أن v_1 و v_2 متجهان في $\mathbb{C}^m$. برهن على أن

$$\langle\{v_1,v_2\}\rangle=\langle\{v_1+v_2,v_1-v_2\}\rangle$$

٢-٦ التعامد Orthogonality

في هذا الفصل نعرف عمليات أكثر على المتجهات ونبرهن بعض النظريات. للوهلة الأولى، هذه التعريفات والنتائج لا تبدو كأنها أساسية لما هو آت، ولكننا سوف نستخدمها كعناصر أساسية في الأجزاء الأخيرة من هذا الكتاب. حيث أننا اخترنا $\mathbb{C}$ لتكون هي مجموعة الكميات القياسية، الجزء التالي قد يكون أكثر تعقيدا مما لو كانت مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. سوف نوضح ونحن نمضي مع الأشياء المعطاة كيف تكون أيسر مع الأعداد الحقيقية.

حساب الأعداد المركبة والمتجهات

نعلم كيف استخدمنا عمليات جمع وضرب الأعداد المركبة في العمليات على المتجهات في $\mathbb{C}^m$. الآن نوسع مفهوم المرافق إلى المتجهات.

تعريف ٢-٦-١. نفرض u متجه في $\mathbb{C}^m$. مرافق المتجه، $\overline{u}$، يعرف كما يلي

$$[\overline{u}]_i = \overline{[u]_i} \quad ، \quad 1 \le i \le m \, .$$

مع هذا التعريف يمكننا بيان أن مرافق متجه العمود يسلك كما هو متوقع مع ملاحظة جمع المتجهات والضرب في قياسي.

نظرية ٢-٦-٢. نفرض أن x و y متجهين في $\mathbb{C}^m$. إذن $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$.

البرهان: لكل $1 \le i \le m$،

$$\begin{aligned}
[\overline{x+y}]_i &= \overline{[x+y]_i} \\
&= \overline{[x]_i + [y]_i} \\
&= \overline{[x]_i} + \overline{[y]_i} \\
&= [\overline{x}]_i + [\overline{y}]_i \\
&= [\overline{x} + \overline{y}]_i
\end{aligned}$$

من تعريف ٢-٦-١ نحصل على $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$.

نظرية ٢-٦-٣. نفرض أن x متجه في $\mathbb{C}^m$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ قياسي. إذن

$$\overline{\alpha x} = \overline{\alpha}\,\overline{x}$$

البرهان: لكل $1 \le i \le m$،

$$\begin{aligned}[\overline{\alpha x}]_i &= \overline{[\alpha x]_i} \\ &= \overline{\alpha [x]_i} \\ &= \overline{\alpha [x]_i} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{[x]_i} \\ &= [\overline{\alpha}\,\overline{x}]_i\end{aligned}$$

إذن من تعريف ٢-٦-١ يكون $\overline{\alpha x} = \overline{\alpha}\,\overline{x}$.

الضرب الداخلي Inner product

تعريف ٢-٦-٤. نفرض أن u و v متجهين في $\mathbb{C}^m$. **الضرب الداخلي** inner product للمتجهين u و v، يرمز له بالرمز $\langle u,v\rangle$، يعرف على أنه الكمية القياسية في $\mathbb{C}$

$$\langle u,v\rangle = \overline{[u]_1}[v]_1 + \overline{[u]_2}[v]_2 + \ldots + \overline{[u]_m}[v]_m = \sum_{i=1}^{m} \overline{[u]_i}[v]_i \, .$$

هذه العملية تختلف عن سابقاتها، حيث أننا بدأنا بمتجهين فأنتجت كمية قياسية.

مثال ٢-٦-٥. حاصل الضرب الداخلي للمتجهين

$$u = \begin{bmatrix} 2+3i \\ 5+2i \\ -3+i \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v = \begin{bmatrix} 1+2i \\ -4+5i \\ 0+5i \end{bmatrix}$$

هو

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= (\overline{2+3i})(1+2i) + (\overline{5+2i})(-4+5i) + (\overline{-3+i})(0+5i) \\ &= (2-3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) + (5-2\mathrm{i})(-4+5\mathrm{i}) + (-3-\mathrm{i})(0+5\mathrm{i}) \\ &= (8+i) + (-10+33i) + (5-15i)\end{aligned}$$

$$=3+19i$$

مثال ٢-٦-٦. حاصل الضرب الداخلي للمتجهين

$$w=\begin{bmatrix}2\\4\\-3\\2\\8\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad x=\begin{bmatrix}3\\1\\0\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

هو

$$\begin{aligned}\langle w,x\rangle &= (\overline{2})3+(\overline{4})1+(\overline{-3})0+(\overline{2})(-1)+(\overline{8})(-2)\\ &= 2(3)+4(1)+(-3)0+2(-1)+8(-2)=-8\end{aligned}$$

في حالة ما إذا كانت جميع عناصر المتجهات أعداد حقيقية (كما في مثال ٢-٦-٦)، فإن الحسابات في الضرب الداخلي تشبه ما يعرف بالضرب القياسي لمتجهين. لذلك يمكن النظر للضرب الداخلي باعتباره تعميم للضرب القياسي لمتجهين من $\mathbb{C}^m$ (بدلا من $\mathbb{R}^m$).

الآن نبرهن بعض النظريات التي سوف تكون مفيدة فيما بعد.

نظرية ٢-٦-٧. نفرض $u,v,w\in\mathbb{C}^m$ ، إذن

١- $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$.

٢- $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$.

البرهان: برهان جزأي النظرية بسيط جدا. سوف نبرهن الجزء الأول ونترك الجزء الثاني كتمرين.

$$\begin{aligned}\langle u+v,w\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\overline{[u+v]_i}[w]_i\\ &= \sum_{i=1}^{m}\overline{([u]_i+[v]_i)}[w]_i\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\overline{[u]_i} + \overline{[v]_i})[w]_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\overline{[u]_i}[w]_i + \overline{[v]_i}[w]_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{[u]_i}[w]_i + \sum_{i=1}^{m} \overline{[v]_i}[w]_i$$

$$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

نظرية ٢-٦-٨. $u, v \in \mathbb{C}^m$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، إذن

١- $\langle \alpha u, v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$.

٢- $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.

البرهان: برهان جزأي النظرية بسيط جدا. سوف نبرهن الجزء الأول ونترك الجزء الثاني كتمرين.

$$\langle \alpha u, v \rangle = \sum_{i=1}^{m} \overline{[\alpha u]_i}[v]_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha [u]_i}[v]_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}\overline{[u]_i}[v]_i$$

$$= \overline{\alpha} \sum_{i=1}^{m} \overline{[u]_i}[v]_i$$

$$= \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$$

نظرية ٢-٦-٩. نفرض u و v متجهين في $\mathbb{C}^m$ ، إذن $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

البرهان:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{m} \overline{[u]_i}[v]_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{[u]_i}\,\overline{\overline{[v]_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{[u]_i\overline{[v]_i}}$$

$$= \overline{\left(\sum_{i=1}^{m} [u]_i\overline{[v]_i}\right)}$$

$$= \overline{\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{[v]_i}[u]_i\right)}$$

$$= \overline{\langle v,u\rangle}$$

المعيار

إذا عالجنا الجبر الخطي بأسلوب هندسي أكثر، طول متجه يكون أمرا طبيعيا، ومعناه يأتي من اسمه. مع الأعداد المركبة، سوف نعرف مفهوما مشابها. لذلك هنا إذا كان c عدد مركب فإن $|c|$ ترمز إلى مقياسه.

تعريف ٢-٦-١٠. معيار المتجه. **معيار** norm المتجه u هو الكمية القياسية في $\mathbb{C}$

$$\|u\| = \sqrt{|[u]_1|^2 + |[u]_2|^2 + |[u]_3|^2 + \ldots + |[u]_m|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |[u]_i|^2}$$

مثال ٢-٦-١١. معيار المتجه

$$u = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 1-6i \\ 2+4i \\ 2+i \end{bmatrix}$$

هو

$$\|u\| = \sqrt{|3+2i|^2 + |1-6i|^2 + |2+4i|^2 + |2+i|^2}$$

$$= \sqrt{13+37+20+5} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

معيار المتجه

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

هو

$$\|v\| = \sqrt{|3|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |4|^2 + |-3|^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{39}$$

لاحظ كيف أن معيار المتجه الذي عناصره أعداد حقيقية هو مجرد طول المتجه. الضرب الداخلي والمعيار يرتبطان حسب النظرية التالية.

نظرية ٢-٦-١٢. نفرض u متجه في $\mathbb{C}^m$. إذن $\|u\|^2 = \langle u,u \rangle$.

البرهان:

$$\|u\|^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} |[u]_i|^2}\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m} |[u]_i|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{[u]_i}[u]_i$$
$$= \langle u,u \rangle$$

عندما تكون كل عناصر متجه أعداد حقيقية فإن نظرية ٢-٦-١٢ تقول أن الضرب القياسي لمتجه مع نفسه يساوي مربع طول المتجه.

نظرية ٢-٦-١٣. نفرض u متجه في $\mathbb{C}^m$. إذن $\langle u,u \rangle \geq 0$ ويتحقق التساوي إذا وفقط إذا كان $u = 0$.

البرهان: من نظرية ٢-٦-١٢ نجد أن

$$\langle u,u\rangle = |[u]_1|^2 + |[u]_2|^2 + |[u]_3|^2 + \ldots + |[u]_m|^2$$

حيث أن كل مقياس مربع فإن كل حد يكون موجب والمجموع يجب أن يكون موجب (لاحظ أنه على وجه العموم الضرب الداخلي يكون عدد مركب ومن ثم لا يقارن بالصفر، ولكن في الحالة الخاصة $\langle u,u\rangle$ يكون عدد حقيقي.)

بالنسبة للجزء الثاني، إذا كان $u = 0$ فإن الحسابات العادية تبين أن $\langle u,u\rangle = 0$. في الاتجاه الآخر، نفرض أن $\langle u,u\rangle = 0$. إذن

$$0 = \langle u,u\rangle = |[u]_1|^2 + |[u]_2|^2 + |[u]_3|^2 + \ldots + |[u]_m|^2$$

الآن لدينا مجموع مربعات يساوي الصفر ومن ثم كل حد يجب أن يساوي صفر. إذن $|[u]_i| = 0$ لكل $1 \le i \le m$ ومنها $[u]_i = 0$ لكل $1 \le i \le m$. إذن من تعريف المتجه الصفري $u = 0$.

لاحظ أن نظرية ٢-٦-١٣ تحتوي ثلاث عبارات شرطية

$$u \in \mathbb{C}^m \Rightarrow \langle u,u\rangle \ge 0$$

$$u = 0 \Rightarrow \langle u,u\rangle = 0$$

$$\langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$$

النتيجة التي حصلنا عليها في نظرية ٢-٦-١٣ تختصر في قولنا أن الضرب الداخلي **موجب التعريف** positive definite.

المتجهات المتعامدة Orthogonal Vectors

تعريف ٢-٦-١٤. المتجهين u و v في $\mathbb{C}^m$ يقال أنهما **متعامدان** orthogonal إذا كان حاصل الضرب الداخلي لهما يساوي صفر، أي إذا كان $\langle u,v\rangle = 0$.

مثال ٢-٦-١٥. المتجهان

$$v=\begin{bmatrix}1-i\\2+3i\\4-6i\\1\end{bmatrix} \quad و \quad u=\begin{bmatrix}2+3i\\4-2i\\1+i\\1+i\end{bmatrix}$$

متعامدان ، حيث أن

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= (2-3i)(1-i)+(4+2i)(2+3i)+\\ &\qquad (1-i)(4-6i)+(1-i)(1)\\ &= (-1-5i)+(2+16i)+(-2-10i)+(1-i)\\ &= 0+0i\end{aligned}$$

سوف نوسع هذا المفهوم إلى مجموعة من المتجهات وذلك باشتراط أن يكون كل متجهين متعامدين.

تعريف ٢-٦-١٦. نفرض أن $S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ مجموعة من المتجهات في $\mathbb{C}^m$. إذن S تكون **مجموعة متعامدة** orthogonal set إذا كان كل متجهين مختلفين في S متعامدين، أي إذا كان $\langle u_i,u_j\rangle=0$ كلما كان $i\neq j$.

الآن نعرف مجموعة متعامدة لها نمط خاص، سوف نشير إليها بشكل متكرر فيما تبقى من أجزاء هذا الكتاب.

تعريف ٢-٦-١٧. نفرض $e_j\in\mathbb{C}^m$ ترمز إلى متجهات الأعمدة المعرفة بالصورة

$$[e_j]_i=\begin{cases}0 & \text{if } i\neq j\\ 1 & \text{if } i=j\end{cases}$$

إذن المجموعة

$$\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_m\}=\{e_j:1\le j\le m\}$$

تسمى **متجهات الوحدة القياسية** standard unit vectors في $\mathbb{C}^m$.

لاحظ أن e_j يتطابق مع العمود رقم j في مصفوفة الوحدة I_m من الحجم m وهو عمود محوري في I_m. هذه الملاحظة سوف تكون

مهمة. سوف نحتفظ بالرمز e_i لهذه المتجهات. ليس من الصعب بيان أن مجموعة متجهات الوحدة القياسية تكون مجموعة متعامدة.

مثال ٢-٦-١٨. مجموعة المتجهات

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1-i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+5i \\ 6+5i \\ -7-i \\ 1-6i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7-34i \\ -8-23i \\ -10-22i \\ 30+13i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2-4i \\ 6+i \\ 4+3i \\ 6-i \end{bmatrix} \right\}$$

تكون مجموعة متعامدة.

الحل: من تعريف حاصل الضرب الداخلي $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$ ، نجد أنه إذا كان $\langle u,v\rangle = 0$ فإنه أيضا يكون $\langle v,u\rangle = 0$. ومن ثم لإثبات أن هذه المجموعة متعامدة، نحتاج إلى إثبات تعامد كل زوج مختلف من المتجهات. وحيث أنه يوجد ستة أزواج مختلفة فيلزم حساب الضرب الداخلي لكل زوج من هذه الأزواج. سوف نحسب الضرب الداخلي لزوج واحد وباقي الأزواج تكون بالمثل.

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_3\rangle &= (1-i)(-7+34i) + (1)(-8-23i) \\ &\quad + (1+i)(-10+22i) + (-i)(30+13i) \\ &= (27+41i) + (-8-23i) + (-32+12i) + (13-30i) \\ &= 0+0i \end{aligned}$$

فيما مضى من هذا الفصل قدمنا مجموعة من التعريفات ومجموعة من النظريات. قد يبادر أحد بالسؤال ما هي جدوى هذه التعريفات والنظريات. الآن نعطي النظرية الأولى التي تبين الفائدة من الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة. أيضا هي أول توضيح لكيفية الوصول إلى الاستقلال الخطي كخلاصة للنظرية.

نظرية ٢-٦-١٩. نفرض S مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية. إذن S تكون مستقلة خطيا.

البرهان: نفرض $S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية. لإثبات الاستقلال الخطي للمجموعة S، يمكننا استدعاء تعريف ٢-٤-١ ونبدأ بعلاقة ارتباط خطي

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\ldots+\alpha_n u_n=0$$

إذن لكل $1\le i\le n$ ، يكون

$$\begin{aligned}\alpha_i\langle u_i,u_i\rangle &=\alpha_1(0)+\alpha_2(0)+\ldots+\alpha_i\langle u_i,u_i\rangle+\ldots+\alpha_n(0)\\ &=\alpha_1\langle u_i,u_1\rangle+\ldots+\alpha_i\langle u_i,u_i\rangle+\ldots+\alpha_n\langle u_i,u_n\rangle\\ &=\langle u_i,\alpha_1 u_1\rangle+\langle u_i,\alpha_2 u_2\rangle+\ldots+\langle u_i,\alpha_n u_n\rangle\\ &=\langle u_i,\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\ldots+\alpha_n u_n\rangle\\ &=\langle u_i,0\rangle=0\end{aligned}$$

وحيث أن u_i مفترض أنه غير صفري، نظرية ٢-٦-١٣ تقول أن $\langle u_i,u_i\rangle$ لا يساوي الصفر ومن ثم α_i يجب أن يساوي الصفر. من ذلك نستنتج أن $\alpha_i=0$ لكل $1\le i\le n$ في أي علاقة ارتباط خطي على S. وهذا يعني أن S تكون مجموعة مستقلة خطيا لأن الطريقة الوحيدة لتكوين علاقة ارتباط خطي على S هي الطريقة التافهة.

عملية جرام- شميدت Gram-Schmidt Procedure

عملية جرام - شميدت في الحقيقة هي نظرية. هي تقول أنه إذا بدأنا بمجموعة S من p من المتجهات المستقلة خطيا، فإنه يمكننا بعدد من الحسابات مع هذه المتجهات الحصول على مجموعة T متعامدة من p متجه بحيث $\langle S\rangle=\langle T\rangle$. العدد الكبير من الحسابات هو في الواقع عملية لإجراء كل الحسابات الضرورية، ويكون من الأفضل إجراؤها باستخدام جهاز الحاسب. ومع ذلك أيضا يكون البرهان له قيمة، حيث قد يكون في بعض الأحيان مطلوب استبدال مجموعة مستقلة خطيا بأخرى متعامدة.

نظرية ٢-٦-٢٠. عملية جرام- شميدت

نفرض $S=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_p\}$ مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات في $\mathbb{C}^m$. نعرف المتجهات u_i ، $1\le i\le p$ كما يلي

$$u_i=v_i-\frac{\langle u_1,v_i\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1-\frac{\langle u_2,v_i\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2-\frac{\langle u_3,v_i\rangle}{\langle u_3,u_3\rangle}u_3-\ldots-\frac{\langle u_{p-1},v_i\rangle}{\langle u_{p-1},u_{p-1}\rangle}u_{p-1}$$

نفرض $T=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_p\}$. إذن T تكون مجموعة متعامدة من متجهات غير صفرية و $\langle T\rangle=\langle S\rangle$.

البرهان: سوف نبرهن النظرية باستخدام الاستنتاج الرياضي على p.
نفرض أن $p=1$. في هذه الحالة $u_1=v_1$ و $T=\{u_1\}=\{v_1\}=S$.
ومن ثم $\langle T\rangle=\langle S\rangle$. بديهي أن T مجموعة متعامدة. إذا كان $u_1=0$ فإن S تكون مرتبطة خطيا، تناقض.

نفرض أن النظرية صحيحة لأي مجموعة بها $p-1$ من المتجهات المستقلة خطيا، ونفرض أن $S=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_p\}$ مجموعة مستقلة خطيا بها p متجه. إذن $S'=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{p-1}\}$ تكون أيضا مستقلة خطيا. لذلك يمكننا تطبيق النظرية على S' لإنشاء مجموعة من المتجهات $T'=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_{p-1}\}$. ومن ثم T' تكون مجموعة متعامدة من متجهات غير صفرية و $\langle T'\rangle=\langle S'\rangle$. نعرف

$$u_p=v_p-\frac{\langle u_1,v_p\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1-\frac{\langle u_2,v_p\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2-\frac{\langle u_3,v_p\rangle}{\langle u_3,u_3\rangle}u_3-\ldots-\frac{\langle u_{p-1},v_p\rangle}{\langle u_{p-1},u_{p-1}\rangle}u_{p-1}$$

نفرض $T = T' \cup \{u_p\}$. نحتاج لبيان أن T لها عديد من الخواص بناء على ما نعلم عن T'. لاحظ أولا أن المعادلة السابقة ليس فيها أي مشكلة حول المقام $\langle u_i, u_i \rangle$ من أن تكون صفر، حيث u_i متجه من T' والتي تتكون من متجهات غير صفرية.

لبيان أن $\langle S \rangle = \langle T \rangle$، نبرهن أولا أن $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$. نفرض $x \in \langle T \rangle$. إذن

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_p u_p$$

الحد $\alpha_p u_p$ هو تركيبة خطية من متجهات من T' و المتجه v_p ، بينما بقية الحدود هي تركيبة خطية من متجهات من T' . حيث أن $\langle T' \rangle = \langle S' \rangle$، أي حد هو مضاعف لمتجه من T' يمكن إعادة كتابته كتركيبة خطية من متجهات من S'. الحد الباقي $\alpha_p v_p$ هو مضاعف لمتجه في S. لذلك نجد أن x يمكن إعادة كتابته كتركيبة خطية من متجهات من S، أي أن $x \in S$.

لبيان أن $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$، نفرض $y \in S$ ، لذلك

$$y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_p v_p$$

نعيد ترتيب المعادلة التي تعرف u_p بحلها في v_p. إذن الحد $\alpha_p v_p$ يكون مضاعف لتركيبة خطية لمتجهات من T . الحدود الباقية تكون تركيبة خطية من $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{p-1}$ وبالتالي عنصر في $\langle T' \rangle = \langle S' \rangle$. لذلك هذه الحدود الباقية يمكن كتابتها كتركيبة خطية من متجهات من T'. لذلك y تكون تركيبة خطية من متجهات من T ، أي أن $y \in \langle T \rangle$.

عناصر T' ليست صفرية، ولكن ماذا عن عناصر u_p ؟ نفرض على العكس أن $u_p = 0$ ،

$$0=u_p=v_p-\frac{\langle u_1,v_p\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1-\frac{\langle u_2,v_p\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2-\frac{\langle u_3,v_p\rangle}{\langle u_3,u_3\rangle}u_3-\dots-\frac{\langle u_{p-1},v_p\rangle}{\langle u_{p-1},u_{p-1}\rangle}u_{p-1}$$

$$v_p=\frac{\langle u_1,v_p\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle u_2,v_p\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\frac{\langle u_3,v_p\rangle}{\langle u_3,u_3\rangle}u_3+\dots+\frac{\langle u_{p-1},v_p\rangle}{\langle u_{p-1},u_{p-1}\rangle}u_{p-1}$$

حيث أن $\langle T'\rangle=\langle S'\rangle$ يمكننا كتابة المتجهات $u_1,u_2,u_3,\dots,u_{p-1}$ في الطرف الأيمن في هذه المعادلة بدلالة المتجهات $v_1,v_2,v_3,\dots,v_{p-1}$ ومن ثم نكون قد عبرنا عن المتجه v_p كتركيبة خطية من المتجهات $p-1$ الأخرى من S. وهذا يؤدي إلى أن S تكون مجموعة مرتبطة خطيا وهو ما يناقض الفرض بأن S مستقلة خطيا.

أخيرا، إنه أمر يسير بيان أن T تكون مجموعة متعامدة، مع أنه قد لا يبدو أنه كذلك. فيما يلي فرق بين ما هو متجه وما هو قياسي. حيث أن T' مجموعة متعامدة، من الاستنتاج، معظم الأزواج في T معروف بالفعل أنها متعمدة. فقط نحتاج لاختبار الضرب الداخلي بين u_p و u_i لكل $1\le i\le p-1$.

$$\langle u_i,u_p\rangle=\left\langle u_i,v_p-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\langle u_k,v_p\rangle}{\langle u_k,u_k\rangle}u_k\right\rangle$$

$$=\langle u_i,v_p\rangle-\left\langle u_i,\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\langle u_k,v_p\rangle}{\langle u_k,u_k\rangle}u_k\right\rangle$$

$$= \langle u_i, v_p \rangle - \sum_{k=1}^{p-1} \left\langle u_i, \frac{\langle u_k, v_p \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \right\rangle$$

$$= \langle u_i, v_p \rangle - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\langle u_k, v_p \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \langle u_i, u_k \rangle$$

$$= \langle u_i, v_p \rangle - \frac{\langle u_i, v_p \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_i, u_i \rangle - \sum_{k \neq i} \frac{\langle u_k, v_p \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} (0)$$

$$= \langle u_i, v_p \rangle - \langle u_i, v_p \rangle - \sum_{k \neq i} (0)$$

$$= 0$$

مثال ٢-٦-٢١. سوف نوضح عملية جرام – شميدت مع ثلاثة متجهات. نبدأ بمجموعة مستقلة خطيا (تحقق من ذلك)

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix} \right\}$$

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2-3i \\ 1-i \\ 2+5i \end{bmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3-i \\ 1+3i \\ -1-i \end{bmatrix}$$

و

$$T=\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1+i\\1\end{bmatrix},\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2-3i\\1-i\\2+5i\end{bmatrix},\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3-i\\1+3i\\-1-i\end{bmatrix}\right\}$$

تكون مجموعة متعامدة (تحقق من ذلك) من متجهات غير صفرية و $\langle T\rangle=\langle S\rangle$، بالطبع T أيضا مستقلة خطيا.

التعريف الأخير الذي يتعلق بالمتجهات المتعامدة.

تعريف ٢-٦-٢٢. نفرض $S=\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات بحيث $\|u_i\|=1$ لكل $1\le i\le n$. إذن S تسمى مجموعة **عيارية متعامدة** orthonormal.

بمجرد أن يكون معنا مجموعة متعامدة، من السهل تحويلها إلى مجموعة عيارية متعامدة وذلك بضرب كل متجه بمقلوب معياره، المتجه الناتج سوف يكون معياره 1. هذا التصرف مع كل متجه لا يؤثر في خواص التعامد.

مثال ٢-٦-٢٣. مجموعة المتجهات

$$T=\{u_1,u_2,u_3\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1+i\\1\end{bmatrix},\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2-3i\\1-i\\2+5i\end{bmatrix},\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3-i\\1+3i\\-1-i\end{bmatrix}\right\}$$

من مثال ٢-٦-٢١ مجموعة متعامدة. نحسب معيار كل متجه

$$\|u_1\|=2 \;،\; \|u_2\|=\frac{1}{2}\sqrt{11} \;،\; \|u_3\|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

بتحويل كل متجه إلى معيار الوحدة نحصل على المجموعة المتعامدة

$$w_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1+i\\1\end{bmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{11}} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2-3i \\ 1-i \\ 2+5i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{11}} \begin{bmatrix} -2-3i \\ 1-i \\ 2+5i \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}} \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3-i \\ 1+3i \\ -1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} -3-i \\ 1+3i \\ -1-i \end{bmatrix}$$

تمارين ٢-٦

١- استخدم طريقة جرام – شميدت لتحويل مجموعة المتجهات المستقلة خطيا إلى مجموعة متعامدة ومن ثم حول معيار كل متجه إلى 1

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1-i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1+i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1-i \\ i \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

٢- نفرض $\{u,v,w\} \subseteq \mathbb{C}^n$ مجموعة متعامدة. برهن أن $u+v$ ليس متعامد مع $v+w$.

٣- نفرض $u,v,w \in \mathbb{C}^n$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و u عمودي على كل من v و w . برهن أن u يكون عمودي على $\alpha v + \beta w$.