الباب الرابع
الفضاءات الاتجاهية
Vector Spaces

الآن أصبح لدينا مجموعة من الأدوات الحسابية ومن ثم يمكننا البدء في دراسة الجبر الخطي على المستوى النظري بصورة أكثر.

الجبر الخطي هو دراسة شيئين أساسيين، الفضاءات الاتجاهية والتحويلات الخطية. هذا الباب سوف يرتكز على السابق. قوة الرياضيات غالبا تستمد من تعميم العديد من الأوضاع المختلفة إلى صيغة مجردة، وهذا هو تماما الذي سوف نحاول فعله في هذا الباب.

٤ـ١ الفضاءات الاتجاهية Vector Spaces

في هذا الفصل نقدم التعريف الرسمي للفضاء الاتجاهي، الأمر الذي يؤدي إلى مزيد من التجريد. بعد التعريف ندرس معظم الخواص الأساسية.

تعريف ٤ـ١ـ١. نفرض V مجموعة غير خالية (عناصرها تسمى متجهات بصرف النظر عن ماهية هذه العناصر) معرف عليها عمليتين: **جمع متجهين** vector addition والتي تضم عنصرين من V ويرمز لها بالرمز "+"، **الضرب في قياسي** scalar multiplication ، الذي يضم عدد مركب مع عنصر من V ويكتبا متجاورين. V مع هاتان العمليتان تسمى **فضاء اتجاهي** vector space على $\mathbb{C}$ ، إذا تحققت الخواص التالية.

١- إذا كان $u, v \in V$ ، فإن $u + v \in V$. أي أن عملية جمع المتجهات مغلقة على V.

٢- إذا كان $u \in V$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، فإن $\alpha u \in V$. أي أن عملية الضرب في قياسي تكون مغلقة على V.

٣- إذا كان $u, v \in V$، فإن $u + v = v + u$. أي أن عملية جمع المتجهات عملية إبدالية.

٤- $u, v, w \in V$ ، فإن $(u + v) + w = u + (v + w)$. أي أن عملية جمع متجهات عملية دامجة.

٥- يوجد متجه ، 0، يسمى المتجه الصفري بحيث $u+0=0+u$ لكل $u \in V$.

٦- إذا كان $u \in V$، فإنه يوجد متجه $-u \in V$ بحيث $u+(-u)=0$. أي وجود المعكوس الجمعي للمتجه.

٧- إذا كان $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $u \in V$، فإن $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$. أي أن عملية الضرب في قياسي عملية دامجة.

٨- إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ و $u, v \in V$، فإن $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$. أي أن عملية ضرب متجه في قياسي توزيعية على عملية جمع متجهين.

٩- إذا كان $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $u \in V$، فإن $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$. أي أن جمع قياسيين توزيعي على الضرب في متجه.

١٠- إذا كان $u \in V$، فإن $1u=u$.

الآن هناك بعض الملاحظات الهامة. العديد من هذه الملاحظات سوف يكون أيسر بعد دراسة الأمثلة التالية بعد هذه الملاحظات.

المسلمة axiom هي أمر بديهي يستمد صدقه من نفسه. أحيانا يكون أمر أساسي أن نتفق على قبول المسلمات بدون برهان. عادة تكون هي البدايات المنطقية التي يتم بناء النظريات عليها. البعض قد يشير إلى الخواص العشر في تعريف ٤-١-١ بأنها مسلمات، مما يعني أن الفضاء الاتجاهي هو كائن طبيعي والخواص العشر تكون ضرورية للفضاء الاتجاهي. بدلا عن ذلك سوف نؤكد على أننا نبدأ بتعريف الفضاء الاتجاهي.

كما سوف نرى فيما يأتي، العناصر في V يمكن أن تكون أي شيء، ومع هذا فهي تسمى متجهات. فيما سبق تعاملنا مع متجهات، ولكن ينبغي التأكيد على أن ما تعاملنا به من متجهات الأعمدة هي مجرد كميات قياسية رتبت في أعمدة من حجم معين. في سياق مماثل، استخدمنا الرمز "+" لسنوات طويلة لتمثل جمع عددين (كميتين قياسيتين). هنا تم توسيع استخدام الجمع لمتجهات الأعمدة وجمع مصفوفات، الآن نحن بصدد إعادة تدويرها لأبعد من ذلك ونفرض أنها ترمز إلى جمع المتجهات في أي فضاء اتجاهي ممكن. لذلك عندما نصف فضاء اتجاهي يجب أن نعرف ماذا تعني "+". نفس التعليق يطبق

على الضرب في قياسي. وعلى العكس يمكن أن نعين العمليتين بأي شكل، طالما أن الخواص العشرة تكون محققة.

في تعريف ٤-١-١، الكميات القياسية ليس بالضرورة أن تكون أعداد مركبة. هذه يمكن أن تكون من ما يسمى في الرياضيات المتقدمة بالحقل F. من أمثلة الحقول، مجموعة الأعداد المركبة، مجموعة الأعداد الحقيقية، مجموعة الأعداد الكسرية، وحتى المجموعة المنتهية، الأعداد الثنائية $\{0,1\}$. ويوجد الكثير غيرها. في هذه الحالة نقول أن V فضاء اتجاهي على الحقل F.

الفضاء الاتجاهي يتركب من ثلاثة أشياء، مجموعة وعمليتان. عادة نستخدم نفس الرمز لكلا من المجموعة و الفضاء الاتجاهي نفسه.

أمثلة للفضاءات الاتجاهية

الآن نقدم مخزون من الأمثلة للتعامل معها لتصبح متوافقة مع الخصائص العشرة للفضاء الاتجاهي. بعض الأمثلة سوف نقوم بشرحها وتحقيق الخواص العشرة بالتفصيل وبعضها سوف نشير لتوضيحه إلى نظريات سابقة.

مثال ٤-١-٢. الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^m$.

المجموعة $\mathbb{C}^m$ المكونة من كل متجهات الأعمدة من الحجم m (تعريف ٢-١-١). التساوي: تساوي العناصر المتناظرة عنصرا بعنصر (تعريف ٢-١-٢). جمع المتجهات: الجمع العادي المعرف في تعريف ٢-١-٣ الضرب في قياسي: هو الضرب في قياسي العادي المعرف في تعريف ٢-١-٥.

هل هذه المجموعة مع هذه العمليات تحقق الخواص العشرة؟ الإجابة بنعم والتفاصيل يمكن التحقق منها بسهولة بالرجوع إلى نظرية ٣-١-٧.

مثال ٤-١-٣. الفضاء الاتجاهي للمصفوفات، M_{mn}.

المجموعة: M_{mn} مجموعة كل المصفوفات من الحجم $m \times n$ وعناصرها من $\mathbb{C}$.

التساوي: تساوي العناصر المناظرة (تعريف ٣-١-٢).

جمع المتجهات: جمع المصفوفات العادي (تعريف ٣-١-٣).

الضرب في قياسي: ضرب مصفوفة في قياسي (تعريف ٣-١-٥).

هل هذه المجموعة مع هذه العمليات تحقق الخواص العشرة للفضاء الاتجاهي؟ الإجابة بنعم والتفاصيل يمكن التحقق منها بسهولة بالرجوع إلى نظرية ٣-١-٧.

لذلك مجموعة كل المصفوفات من حجم معين تكون فضاء اتجاهي. وهو ما يخول لنا تسمية المصفوفة متجه، حيث أن المصفوفة عنصر في فضاء اتجاهي. على سبيل المثال، إذا كان $A,B\in M_{3,4}$ فإننا نقول أن A و B "متجهات".

مثال ٤-١-٤. الفضاء الاتجاهي لكثيرات الحدود من درجة n، P_n.

المجموعة: P_n، مجموعة كل كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي n في المتغير x ومعاملاتها من $\mathbb{C}$.

التساوي:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$$

إذا وفقط إذا كان $a_i=b_i$ لكل $0\le i\le n$

جمع المتجهات:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)=$$
$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$$

الضرب في قياسي:

$$\alpha(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=$$
$$(\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+(\alpha a_2)x^2+\ldots+(\alpha a_n)x^n$$

هذه المجموعة مع هذه العمليات تحقق الخواص العشرة، على الرغم أننا لن نعطي كل التفاصيل هنا، إلا أننا سوف نعطي بعض التعليقات ونجري بعض التفاصيل. أولا، المتجه الصفري، كما نتوقع يمكن التحقق أنه يحقق الخاصية

$$0=0+0x+0x^2+\ldots+0x^n$$

المعكوس الجمعي

$$-(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=$$
$$(-a_0)+(-a_1)x+(-a_2)x^2+\ldots+(-a_n)x^n$$

الآن نبرهن خاصية الدمج لجمع المتجهات

$$\begin{aligned}
u+(v+w) \\
&= (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+ \\
&\qquad ((b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)+ \\
&\qquad\quad (c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n)) \\
&= (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+ \\
&\qquad (b_0+c_0)+(b_1+c_1)x+(b_2+c_2)x^2+\ldots+(b_n+c_n)x^n \\
&= (a_0+(b_0+c_0))+(a_1+(b_1+c_1))x+ \\
&\qquad (a_2+(b_2+c_2))x^2+\ldots+(a_n+(b_n+c_n)x^n \\
&= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n \\
&\qquad +(c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n) \\
&= ((a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+ \\
&\qquad (b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n))+ \\
&\qquad\quad (c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n) \\
&= (u+v)+w
\end{aligned}$$

لاحظ كيف أن تطبيق خاصية الدمج للأعداد المركبة في وسط هذه السلسلة من المتساويات جعل البرهان الكلي يحدث. بقية الخواص هي تطبيق مباشر لتعريف جمع المتجهات (كثيرات الحدود). إثبات بقية الخواص العشر يكون بنفس الأسلوب.

مثال ٤-١-٥. الفضاء الاتجاهي للمتتابعات اللانهائية.

المجموعة: $\mathbb{C}^\infty=\{(c_0,c_1,c_2,c_3,\ldots):c_i\in\mathbb{C}, i\in\mathbb{N}\}$.

التساوي: $(c_0,c_1,c_2,\ldots)=(d_0,d_1,d_2,\ldots)$ إذا وفقط إذا كان $c_i=d_i$ لكل $i\geq 0$.

جمع المتجهات:

$$(c_0,c_1,c_2,\ldots)+(d_0,d_1,d_2,\ldots)=(c_0+d_0,c_1+d_1,c_2+d_2,\ldots)$$

الضرب في قياسي: $\alpha(c_0,c_1,c_2,\ldots)=(\alpha c_0,\alpha c_1,\alpha c_2,\ldots)$.

هذا سوف يذكرنا الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^m$ ، إلا أن قائمة الكميات القياسية كتبت أفقيا مع الفواصل كمحددات وتسمح بالطول إلى ما لانهاية. كيف يكون المتجه الصفري ؟ كيف يكون المعكوس الجمعي؟ هل يمكنك إثبات خاصية الدمج لجمع المتجهات؟

مثال ٤-١-٦. الفضاء الاتجاهي للدوال. نفرض X أي مجموعة.

المجموعة: $F = \{f : f : X \to \mathbb{C}\}$.

التساوي: $f = g$ إذا وفقط إذا كان $f(x) = g(x)$ لكل $x \in X$.

جمع المتجهات: $f + g$ هي الدالة التي مخرجاتها تعرف بالصورة $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

الضرب في قياسي: αf هي الدالة التي مخرجاتها تعرف بالصورة $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

لذلك هذه تكون مجموعة كل الدوال في متغير واحد التي تأخذ عناصر المجموعة X إلى الأعداد المركبة. قد تكون درست الدوال في متغير واحد التي الأعداد الحقيقية إلى الأعداد الحقيقية والتي قد تكون مجموعة طبيعية أكثر في الاستخدام من X. ولكن طالما أننا نتعامل مع كميات قياسية من الأعداد المركبة، نحتاج إلى تعيين مدي الدوال بالأعداد المركبة. ندرس التعريفات بعناية، العمليات كيف تنفذ العملية، مع التمييز بين الاستخدامات المختلفة لإشارة"+" والتجاور في الضرب. على سبيل المثال (خاصية الصفر) الدالة z حيث $z(x) = 0$ لكل $x \in X$.

الفضاء الاتجاهي للدوال هام جدا للرياضيات والفيزياء، حيث حقل القياسيات قد يكون هو حقل الأعداد الحقيقية، ولذلك مدى الدوال قد يكون أيضا الأعداد الحقيقية.

مثال ٤-١-٧. الفضاء الاتجاهي للمجموعة المنفردة.

المجموعة: $Z = \{z\}$.

التساوي: بديهي.

الجمع: $z + z = z$.

الضرب في قياسي: $\alpha z = z$

هنا نريد تحديد طبيعة z التي تجعل هذه المجموعة مع العمليات المعرفة تحقق الخواص العشرة للفضاء الاتجاهي. ما هو المتجه الصفري لهذا الفضاء الاتجاهي؟ المجموعة ذات عنصر واحد، لذلك لن يكون لدينا خيارات متعددة. هل $z = 0$ ؟ واضح أن z ينبغي أن تسلك سلوك الصفر. ومن ثم فإن هذا الفضاء لا يحتوي سوى المتجه الصفري.

ربما تكون بعض التعريفات والتحققات تبدو كأنها واضحة أو عملية آلية، ولكن المثال التالي سوف يقنعك بأن هذا ضروريا. سوف ندرس هذا المثال بعناية.

مثال ٤-١-٨.

المجموعة: $C = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$.

الجمع: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$.

الضرب في قياسي: $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1)$.

الآن، كأني أسمعك تقول بأنك لا تستطيع أن تفعل ذلك. وردي هو أنا أستطيع. هل أنا حر في تعريف المجموعة والعمليات بأي طريقة أرضى بها. قد لا تكون طبيعية، أو حتى مفيدة، ولكن سوف نتحقق الآن أنها تعطينا مثال لفضاء اتجاهي.

جمع متجهين وحاصل ضرب متجه في قياسي كلاهما عمليات على أعداد مركبة ومن ثم تحقق خاصية الإغلاق.

خاصية الإبدال للجمع:

$$\begin{aligned}
u + v &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) \\
&= (y_1 + x_1 + 1, y_2 + x_2 + 1) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) \\
&= v + u
\end{aligned}$$

خاصية الدمج للجمع:

$$\begin{aligned}
u + (v + w) &= (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)) \\
&= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1 + 1, y_2 + z_2 + 1) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1 + 1) + 1, x_2 + (y_2 + z_2 + 1) + 1) \\
&= (x_1 + y_1 + z_1 + 2,\ x_2 + y_2 + z_2 + 2) \\
&= ((x_1 + y_1 + 1) + z_1 + 1,\ (x_2 + y_2 + 1) + z_2 + 1)
\end{aligned}$$

$$= (x_1 + y_1 + 1,\ x_2 + y_2 + 1) + (z_1, z_2)$$
$$= ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2)$$
$$= (u + v) + w$$

خاصية الصفر: المتجه الصفري هو $0 = (-1,-1)$. الآن أسمعك تصيح لا لا يجب أن يكون $(0,0)$. صبرا تمهل علي لحظة حتى نختبر هذا المقترح.

$$u + 0 = (x_1, x_2) + (-1,-1)$$
$$= (x_1 + (-1) + 1, x_2 + (-1) + 1) = (x_1, x_2) = u$$

خاصية المعكوس الجمعي: لكل متجه u ، يجب أن يوجد معكوس جمعي، $-u$. هنا يكون $-(x_1, x_2) = (-x_1 - 2, -x_2 - 2)$. للتحقق من ذلك

$$u + (-u) = (x_1, x_2) + (-x_1 - 2, -x_2 - 2)$$
$$= (x_1 + (-x_1 - 2) + 1, x_2 + (-x_2 - 2) + 1)$$
$$= (-1,-1) = 0$$

خاصية الدمج للضرب في قياسي:

$$\alpha(\beta u) = \alpha(\beta(x_1, x_2))$$
$$= \alpha(\beta x_1 + \beta - 1,\ \beta x_2 + \beta - 1)$$
$$= (\alpha(\beta x_1 + \beta - 1) + \alpha - 1,\ \alpha(\beta x_2 + \beta - 1) + \alpha - 1)$$
$$= ((\alpha\beta x_1 + \alpha\beta - \alpha) + \alpha - 1,\ (\alpha\beta x_2 + \alpha\beta - \alpha) + \alpha - 1)$$
$$= (\alpha\beta x_1 + \alpha\beta - 1,\ \alpha\beta x_2 + \alpha\beta - 1)$$
$$= (\alpha\beta)(x_1, x_2))$$
$$= (\alpha\beta)u$$

خاصية توزيع الضرب في قياسي على جمع متجهين:

$$\alpha(u + v)$$
$$= \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$
$$= \alpha(x_1 + y_1 + 1,\ x_2 + y_2 + 1)$$

$$= (\alpha(x_1 + y_1 + 1) + \alpha - 1, \alpha(x_2 + y_2 + 1) + \alpha - 1)$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha y_2 + \alpha + \alpha - 1)$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha - 1 + \alpha y_1 + \alpha - 1 + 1, \alpha x_2 + \alpha - 1 + \alpha y_2 + \alpha - 1 + 1)$$
$$= ((\alpha x_1 + \alpha - 1) + (\alpha y_1 + \alpha - 1) + 1, (\alpha x_2 + \alpha - 1) + (\alpha y_2 + \alpha - 1) + 1)$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1) + (\alpha y_1 + \alpha - 1, \alpha y_2 + \alpha - 1)$$
$$= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2)$$
$$= \alpha u + \alpha v$$

توزيع مجموع كميتين قياسيتين على الضرب في قياسي:

$$(\alpha + \beta)u$$
$$= (\alpha + \beta)(x_1, x_2)$$
$$= ((\alpha + \beta)x_1 + (\alpha + \beta) - 1, (\alpha + \beta)x_2 + (\alpha + \beta) - 1)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_1 + \alpha + \beta - 1, \alpha x_2 + \beta x_2 + \alpha + \beta - 1)$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha - 1 + \beta x_1 + \beta - 1 + 1, \alpha x_2 + \alpha - 1 + \beta x_2 + \beta - 1 + 1)$$
$$= ((\alpha x_1 + \alpha - 1) + (\beta x_1 + \beta - 1) + 1, (\alpha x_2 + \alpha - 1) + (\beta x_2 + \beta - 1) + 1)$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha - 1, \alpha x_2 + \alpha - 1) + (\beta x_1 + \beta - 1, \beta x_2 + \beta - 1)$$
$$= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2)$$
$$= \alpha u + \alpha v$$

وجود 1:

$$1u = 1(x_1, x_2) = (x_1 + 1 - 1, x_2 + 1 - 1) = (x_1, x_2) = u$$

إذن C تكون فضاء اتجاهي.

لاحظ أنه في حالة المتجه الصفري والمعكوس الجمعي، فقط كان لدينا اقتراح لما هو محتمل ثم نتأكد من صحة هذا الاقتراح. يمكنك محاولة اكتشاف كيفية الوصول إلى هذه الاختيارات، ولكن ينبغي أن تفهم أن عملية الوصول لهذه الاختيارات ليست من مكونات البرهان نفسه.

خواص الفضاء الاتجاهي

القسم السابق زودنا بعدد وافر من الأمثلة على الفضاءات الاتجاهية، معظمها يحتوي على أشياء رياضية هامة ومفيدة مع عمليات طبيعية. في

هذا القسم سوف نبرهن بعض الخواص العامة للفضاءات الاتجاهية. بعض هذه النتائج قد يبدوا واضحا، ولكن من المهم أن نفهم لماذا هو ضروري أن نصوغها ونبرهنها. ثمة فرضية نمطية سوف تكون " نفرض V فضاء اتجاهي". من هذه الفرضية سوف نفترض أن الخواص العشر في تعريف ٤-١-١ تكون محققة، ولا شيء أكثر من ذلك.

أولا سوف نبين أنه يوجد متجه صفري واحد. لاحظ أن الخواص اشتملت فقط على ضرورة وجود متجه صفري ولم تذكر أي شيء عن إمكانية وجود أكثر من متجه صفري. ذلك لأنه يمكننا استخدام الخواص العشر للفضاء الاتجاهي لنعلم أنه لا يمكن أن يوجد أكثر من متجه صفري واحد.

نظرية ٤-١-٩. نفرض V فضاء اتجاهي. إذن المتجه الصفري 0 يكون وحيد.

البرهان: لكي نبرهن وحدانية المتجه الصفري، نفرض وجود متجهين صفريين ونبرهن على أنهما متساويا.

نفرض أن 0_1 و 0_2 متجهين صفريين في V. إذن

$$\begin{aligned} 0_1 &= 0_1 + 0_2 \\ &= 0_2 + 0_1 \\ &= 0_2 \end{aligned}$$

وهذا يبرهن أن المتجه الصفري يكون وحيد.

النظرية التالية توضح لنا أيضا أن المعكوس الجمعي يكون وحيد.

نظرية ٤-١-١٠. نفرض أن V فضاء اتجاهي. لكل $u \in V$، المعكوس الجمعي $-u$ يكون وحيدا.

البرهان: نفرض $-u_1$ و $-u_2$ معكوسين جمع للمتجه u. إذن

$$\begin{aligned} -u_1 &= -u_1 + 0 \\ &= -u_1 + (u + -u_2) \\ &= (-u_1 + u) + -u_2 \\ &= -u_1 + 0 \\ &= -u_1 \end{aligned}$$

لذلك المعكوس الجمعي يكون وحيدا.
النظريات الثلاث التالية رغم أنها تبدو بسيطة إلا أنها توضح لنا تأثير الصفر كمتجه وقياسي. رغم أننا نكتب نفس الرمز لكلا المعنيين إلا أنه يكون مفهوما ضمنا هل المقصود هو قياسي أم متجه.

نظرية ٤-١-١١. نفرض أن V فضاءا اتجاهيا و $u \in V$. إذن $0u = 0$.

البرهان: في المعادلة $0u = 0$ واضح أن الصفر في الطرف الأيمن يكون قياسي بينما في الطرف الأيمن يكون متجه.
حيث أن 0 قياسي و u متجه فإن $0u$ يكون متجه (تعريف ٤-١-١).
لذلك $0u$ يكون له معكوس جمعي $-0u$. الآن

$$
\begin{aligned}
0u &= 0 + 0u \\
&= (-(0u) + 0u) + 0u \\
&= -(0u) + (0u + 0u) \\
&= -(0u) + (0+0)u \\
&= -(0u) + 0u \\
&= 0
\end{aligned}
$$

نظرية ٤-١-١٢. نفرض أن V فضاءا اتجاهيا و $\alpha \in \mathbb{C}$. إذن $\alpha 0 = 0$.

البرهان: لاحظ أن α قياسي 0 متجه ومن ثم $\alpha 0$ يكون متجه. أيضا $\alpha 0$ له معكوس جمعي $-\alpha 0$. الآن

$$
\begin{aligned}
\alpha 0 &= 0 + \alpha 0 \\
&= (-(\alpha 0) + \alpha 0) + \alpha 0 \\
&= -(\alpha 0) + (\alpha 0 + \alpha 0) \\
&= -(\alpha 0) + \alpha(0+0) \\
&= -(\alpha 0) + \alpha 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

نظرية ٤-١-١٣. نفرض أن V فضاءا اتجاهيا و $u \in V$. إذن $-u = (-1)u$.

البرهان:

$$\begin{aligned}
-u &= -u+0 \\
&= -u+0u \\
&= -u+(1+(-1))u \\
&= -u+(1u+(-1)u) \\
&= -u+(u+(-1)u) \\
&= (-u+u)+(-1)u \\
&= 0+(-1)u \\
&= (-1)u
\end{aligned}$$

بسبب هذه النظرية يمكننا كتابة التركيبة الخطية $6u_1+(-4)u_2$ بالصورة $6u_1-4u_2$.

نظرية ٤-١-١٤. نفرض أن V فضاءا اتجاهيا و $\alpha\in\mathbb{C}$. إذا كان $\alpha u=0$ فإن إما $\alpha=0$ أو $u=0$.

البرهان: سوف نبرهن هذه النظرية بتحليلها إلى حالتين. الأولى يبدو أنها بديهية ولكن منطق الحجة يجعلها لا تزال مشروعة.

الحالة الأولى: نفرض $\alpha=0$. في هذه الحالة النظرية تكون صحيحة.

الحالة الثانية: نفرض $\alpha\neq 0$

$$\begin{aligned}
u &= 1u \\
&= \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)u && \alpha\neq 0 \\
&= \frac{1}{\alpha}(\alpha u) \\
&= \frac{1}{\alpha}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

وفي هذه الحالة أيضا تكون النظرية صحيحة. ومن ثم النظرية تكون صحيحة في كلتا الحالتين.

عندما نقول أن V فضاء اتجاهي، هذا يعني أنه يكون لدينا مجموعة أشياء (تسمى متجهات)، ولكن نعلم أيضا أنه يكون لدينا عمليتين (جمع متجهين و الضرب في قياسي) هاتان العمليتان تسلكان وفقا للخواص

العشرة الواردة في تعريف ٤-١-١ واحدة تضم متجهين لتعطي متجه، والأخرى تأخذ متجه وقياسي لتنتج متجه كنتيجة. لذلك إذا كان $u_1, u_2, u_3 \in V$، فإن التعبير مثل

$$5u_1 + 7u_2 - 13u_3$$

يكون غير واضح في أي من الفضاءات الاتجاهية التي نوقشت في هذا الفصل. الشيء الناتج سوف يكون متجه آخر في الفضاء الاتجاهي. إذا حاولنا تسمية هذا التعبير تركيبة خطية فإن هذا يكون صحيحا. أربعة من التعريفات التي كانت محورية في مناقشاتنا في الباب الثاني كانت تنص على أن المتجهات هي متجهات أعمدة،ولكن تم الاحتفاظ بها بصورة كافية بحيث يمكن تطبيقها على أي فضاء اتجاهي. فقط تعتمد فقط على وجود المتجهات، جمع المتجهات والضرب في قياسي ذات معنى.

تمارين ٤-١

١- نفرض V هي المجموعة $\mathbb{C}^2$، مع جمع المتجهات العادي والضرب في قياسي معرف بالصورة

$$\alpha x = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{C}^2$$

حدد ما إذا كانت V مع هذه العمليات فضاء اتجاهي.

٢- نفرض V هي المجموعة $\mathbb{C}^2$، مع جمع المتجهات العادي والضرب في قياسي معرف بالصورة

$$\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

حدد ما إذا كانت V مع هذه العمليات فضاء اتجاهي.

٣- نفرض أن V هي المجموعة $\mathbb{C}^2$، مع الضرب في قياسي العادي وجمع متجهين معرف بالصورة

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + w \\ x + z \end{bmatrix}$$

حدد ما إذا كانت V مع هذه العمليات فضاء اتجاهي.

٤- نفرض أن V هي المجموعة $M_{2,2}$ مع الضرب في قياسي العادي، ولكن الجمع معرف بالصورة $A+B=O_{2,2}$ لكل المصفوفات A و B من الحجم 2×2. حدد ما إذا كانت V مع هذه العمليات فضاء اتجاهي.

٥- نفرض V هي المجموعة $M_{2,2}$ مع الجمع العادي، ولكن الضرب في قياسي معرف بالصورة $\alpha A=O_{2,2}$ لكل المصفوفات A من الحجم 2×2. حدد ما إذا كانت V مع هذه العمليات فضاء اتجاهي.

٦- نعتبر المصفوفات التالية من الحجم 3×3، α عدد مركب. حدد هل هذه المجموعة تكون فضاء اتجاهي مع العمليات العادية للجمع والضرب في قياسي للمصفوفات.

(أ) كل المصفوفات على الصورة $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$.

(ب) كل المصفوفات على الصورة $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

(ج) كل المصفوفات على الصورة $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

(د) كل المصفوفات على الصورة $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

٧- وضح لماذا نحتاج إلى تعريف الفضاء الاتجاهي P_n على أنه مجموعة كل كثيرات الحدود من درجات أقل من أو تساوي n بدلا من مجموعة كثيرات الحدود من درجة n فقط.

٨- مجموعــة الأعـــداد الـــصحيحة هـــي $\mathbb{Z}$. هـــل المجموعـــة $\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ مـع العمليـات العاديـة لجمـع متجهـين وضرب متجه في قياسي تكون فضاءا اتجاهيا؟

٤-٢ الفضاءات الجزئية Subspaces

الفضاء الجزئي هو فضاء اتجاهي محتوى في فضاء اتجاهي آخر. لذلك كل فضاء جزئي هو فضاء اتجاهي في نفسه، ولكن أيضا معرف بالنسبة إلى فضاء اتجاهي آخر (أكبر). سوف نكتشف بعد قليل أننا بالفعل على معرفة بعدد كبير من الفضاءات الجزئية من الفصول السابقة.

هنا نعطي التعريف الأساسي في هذا الفصل.

تعريف ٤-٢-١. نفرض أن V و W فضاءان اتجاهيان لهما نفس تعريف جمع المتجهين وضرب متجه في قياسي و $W \subseteq V$. إذن W تكون **فضاء جزئي** subspace من V.

مثال ٤-٢-٢. نعتبر المجموعة

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \right\}$$

واضح أن $W \subseteq \mathbb{C}^3$. نعلم من مثال ٤-١-٢ أن $\mathbb{C}^3$ فضاء اتجاهي. هل W فضاء اتجاهي؟ هل هي تحقق الخواص العشر في تعريف الفضاء الاتجاهي عندما نستخدم نفس العمليات؟ هذا هو السؤال الأساسي.

نفرض أن $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ و $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ متجهان من W. نعلم أن هذه المتجهات لا يمكن أن تكون اختيارية على وجه العموم. هذه المتجهات يجب أن تكتسب عضويتها في W من تحقيقها لشرط العضوية. فمثلا x يجب أن تحقق الشرط $2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0$ بينما y يجب أن تحقق الشرط $2y_1 - 5y_2 + 7y_3 = 0$. أول سؤال هل $x + y \in W$ ؟ عندما تكون مجموعة المتجهات هي $\mathbb{C}^3$ فإن الإجابة ببساطه هي نعم. الآن الإجابة ليست واضحة. لاحظ أولا أن

$$x+y=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{bmatrix}$$

نستطيع اختبار شرط عضوية هذا المتجه إلى W كما يلي: حيث أن $x\in W$ فإن $2x_1-5x_2+7x_3=0$ و $y\in W$ فإن $2y_1-5y_2+7y_3=0$. لذلك

$$\begin{aligned}2(x_1+y_1)-5(x_2+y_2)+7(x_3+y_3)\\&=2x_1+2y_1-5x_2-5y_2+7x_3+7y_3\\&=(2x_1-5x_2+7x_3)+(2y_1-5y_2+7y_3)\\&=0+0\\&=0\end{aligned}$$

لذلك نجد أن $x+y\in W$.

إذا كان α قياسي و $x\in W$ فهل دائما يكون $\alpha x\in W$؟ للإجابة على هذا السؤال لاحظ حيث أن $x\in W$ فإن $2x_1-5x_2+7x_3=0$. لذلك

$$\alpha x=\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\alpha x_3\end{bmatrix}$$

ويمكن اختبار عضوية هذا المتجه في W. الآن

$$\begin{aligned}2(\alpha x_1)-5(\alpha x_2)+7(\alpha x_3)&=\alpha(2x_1-5x_2+7x_3)\\&=\alpha 0\\&=0\end{aligned}$$

لذلك دائما يكون $\alpha x\in W$.

إذا كانت W تحتوي متجها صفريا فإنه يكون وحيدا. المتجه الصفري في $\mathbb{C}^3$ أيضا ينبغي أن يحقق المطلوب عند جمعه على عناصر W. ومن ثم فإنه من المرجح أن يكون المتجه الصفري في W هو نفس

المتجه الصفري في $\mathbb{C}^3$. يمكننا بسهولة إثبات أن $0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ هو المتجه الصفري في W.

مع المتجه الصفري يمكننا السؤال الآن عن المعكوس الجمعي. كما هو المتوقع ، الطبيعي أن يكون المعكوس في W هو نفس المعكوس في $\mathbb{C}^3$. للتأكد من ذلك إذا $x \in W$ فهل يكون $-x \in W$؟

$$-x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

نختبر انتماء هذا المتجه إلى W. نعلم أن $x \in W$ يعني أن $2x_1-5x_2+7x_3=0$. الآن

$$2(-x_1)-5(-x_2)+7(-x_3)=-(2x_1-5x_2+7x_3)=-0=0$$

ومن ثم يكون $-x \in W$.

هل عملية جمع المتجهات في W تكون إبدالية؟ بالتأكيد لا يوجد شيء يمنع من أن تكون عملية جمع المتجهات في W إبدالية طالما أنها كانت إبدالية على المجموعة الأكبر $\mathbb{C}^3$. في الواقع الخواص الخمس الباقية لا تتأثر بالتقييد على المجموعة W ومن ثم تكون محققة.

لذلك W تحقق الخواص العشر ومن ثم تكون فضاء اتجاهي وبالتالي يكتسب مسمى فضاء جزئي من $\mathbb{C}^3$.

في مثال ٤-٢-٢ مضينا خلال الخواص العشر قبل أن نتأكد أن W تكون فضاء جزئي. ولكن ست من هذه الخواص كانت سهلة في إثباتها ويمكن أن نتكئ على بعض خواص الفضاء الاتجاهي (المجموعة الأكبر) لجعل الأربعة الأخرى أيسر في البرهان. النظرية التالية تعطينا طريقة أيسر لاختبار أن مجموعة جزئية تكون فضاء اتجاهي.

نظرية ٤-٢-٣. نفرض V فضاء اتجاهي و W مجموعة جزئية من V، $W \subseteq V$. إذن W مع نفس العمليات المعرفة على V، تكون فضاء جزئي إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية

١- W تكون مجموعة غير خالية، $W \neq \phi$.

٢- إذا كان $x, y \in W$ ، فإن $x + y \in W$.
٣- إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in W$ فإن $\alpha x \in W$.
البرهان: في الاتجاه الأول نفرض أن W تكون فضاء اتجاهي. إذن W تكون مجموعة غير خالية حيث أنها تحتوي المتجه الصفري وذلك من تعريف الفضاء الاتجاهي. أيضا، لكون W فضاء اتجاهي فإنها تحقق شرط الإغلاق لعمليتي جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي. إذن W تحقق الشروط الثلاثة الواردة في النظرية.

في الاتجاه الآخر، نفرض أن W تحقق الشروط الثلاثة الواردة في النظرية. والمطلوب إثبات أن W تحقق الخواص العشر في تعريف الفضاء الاتجاهي. الشرطين الثاني والثالث في النظرية هي نفس خواص الإغلاق لعمليتي جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي. وهذا يحقق الخاصيتين الأولى و الثانية من تعريف ٤-١-١. الفرض بأن V فضاء اتجاهي يؤدي إلى تحقق الخواص الثالثة ، الرابعة ، السابعة، الثامنة ، التاسعة والعاشرة من تعريف ٤-١-١ ومن ثم تتحقق للمتجهات في W.

نفرض $x \in W$. من الشرط الثالث في النظرية $(-1)x \in W$. ولكن من نظرية ٤-١-١٠، $(-1)x = -x$ ، ومن ثم $-x \in W$. $-x$ هو المعكوس الجمعي لـ x في V، ولكن أيضا يستمر بهذه الخاصية عندما ينظر إليه كعنصر في المجموعة الجزئية W.

حيث أن W مجموعة غير خالية، يمكننا اختيار عنصر $z \in W$. من الفقرة السابقة، $-z \in W$. من الشرط الأول في النظرية يكون

$$0 = z + (-z) \in W$$

لذلك W تحتوي المتجه الصفري.

مما سبق W تحقق كل الخواص في تعريف ٤-١-١ ومن ثم تكون فضاء اتجاهي وبالتالي فضاء اتجاهي جزئي من V.

هذه النظرية يمكن صياغتها بقولنا أن الفضاء الجزئي هو مجموعة جزئية (من الفضاء الاتجاهي) غير خالية بحيث تكون مغلقة بالنسبة لعملية جمع المتجهات وعملية ضرب متجه في قياسي.

مثال ٤-٢-٤. P_4 هو الفضاء الجزئي لكثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 4. نعرف المجموعة الجزئية W كما يلي

$$W=\{p(x): p\in P_4, p(2)=0\}$$

واضح أن $x^2-x-2\in W$ بينما $x^4+x^3-7\notin W$. لذلك W تكون مجموعة غير خالية.

إغلاق الجمع: نفرض أن $p,q\in W$. إذن $p(2)=0$ و $q(2)=0$. الآن $(p+q)(2)=p(2)+q(2)=0+0=0$. وهذا يعني أن $p+q\in W$.

نفرض أن $\alpha\in\mathbb{C}$ و $p\in W$. إذن $p(2)=0$. الآن

$$(\alpha p)(2)=\alpha p(2)=\alpha 0=0$$

ومن ثم يكون $\alpha p\in W$.

إذن الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣ تكون محققة ومن ثم W يكون فضاء جزئي من P_4.

حيث أن نظرية ٤-٢-٣ هي تكافؤ، يمكننا التأكيد على أن مجموعة جزئية لا تكون فضاء جزئي إذا فَقِدَ شرط من الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣ . ومع ذلك حيث أن الفضاء الجزئي هو في ذاته فضاء اتجاهي فإنه يمكننا أيضا البحث عن فَقْد واحدة من الخواص العشر الواردة في تعريف ٤-١-١.

مثال ٤-٢-٥

(أ) نعتبر المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}^2$

$$W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}: 3x_1-5x_2=12\right\}$$

المتجه الصفري في $\mathbb{C}^2$ ، $0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ مطلوب أن يكون أيضا متجه صفري في W. ومع ذلك $0\notin W$، حيث أن $3(0)-5(0)=0\neq 12$.

ومن ثم W لا تكون فضاء جزئي من $\mathbb{C}^2$ لأنها فشلت أن تكون فضاء اتجاهي بذاتها لفقدها خاصية وجود المتجه الصفري.

(ب) نعتبر المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}^2$

$$X=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}:x_1x_2=0\right\}$$

يمكننا التحقق من أن $0\in X$، ومن ثم فإن منهج المعالجة في (أ) لن يعطينا نتيجة. ومع ذلك لاحظ أن

$$x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in X \quad \text{و} \quad y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\in X$$

ولكن

$$x+y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\notin X$$

إذن X فقدت شرط الإغلاق بالنسبة لجمع المتجهات ومن ثم لا تكون فضاءا جزئيا.

مثال ٤-٢-٦. نعتبر المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}^2$

$$Y=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}:x_1,x_2\in\mathbb{Z}\right\}$$

حيث $\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

الآن $0\in Y$ ، و Y مغلقة بالنسبة لجمع المتجهات. ولكن إذا حاولنا في عملية الضرب في قياسي، لاحظ أن $\alpha=\frac{1}{2}\in\mathbb{C}$ و $x=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\in Y$

ولكن

$$\alpha x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}\notin Y$$

ومن ثم Y ليست مغلقة بالنسبة للضرب في قياسي وبالتالي ليست فضاء جزئي.

يوجد مثالين لفضاءين جزئيين بديهيين. نفرض أن V أي فضاء اتجاهي. إذن V تكون مجموعة جزئية من نفسها وهي فضاء اتجاهي. ومن ثم، من تعريف ٤-٢-١ ، تكون فضاءا جزئيا من نفسها. المجموعة التي تحتوي المتجه الصفري فقط $\{0\}$ تكون أيضا فضاءا جزئيا. حيث

أن هذان الفضاءان الجزئيان واضحان وبالتالي لا يثيرا الاهتمام، فإنه يشار إليهما بأنهما بديهيان.

يمكننا أيضا استخدام نظرية ٤-٢-٣ لإثبات تقارير أكثر تعميما عن الفضاءات الجزئية، كما يتضح من النظرية التالية.

نظرية ٤-٢-٧. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$. إذن فضاء الصفرية $N(A)$ للمصفوفة A يكون فضاء جزئي من $\mathbb{C}^n$.

البرهان: سوف نختبر الشروط الثلاثة الواردة في نظرية ٤-٢-٣ من تعريف ١-٤-٩ يمكن إعادة الصياغة كما يلي:

$$N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$$

أولا، $0 \in N(A)$ وهذا يكون نتيجة لنظرية ١-٤-٣، إذن $N(A) \neq \phi$.

ثانيا، نفرض $x, y \in N(A)$. لذلك $Ax = 0$ و $Ay = 0$. الآن

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

ومن ثم يكون $x + y \in A$.

ثالثا، نفرض $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in N(A)$. إذن $Ax = 0$. الآن

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0$$

ومن ثم يكون $\alpha x \in N(A)$.

وحيث أن $N(A)$ تحقق الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣، فإنها تكون فضاءا جزئيا.

مثال ٤-٢-٨. نعتبر المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}^5$ المعرفة كما يلي

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} : \begin{matrix} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 + = -5x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 0 \end{matrix} \right\}$$

من الممكن بيان أن W تكون فضاء جزئي من $\mathbb{C}^5$ وذلك باختبار الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣، ولكن هذا قد يكون مملا وليس

سريعا، بدلا عن ذلك، بنظرة جديدة إلى W نلاحظ أنها مجموعة حلول نظام متجانس من المعادلات. نعرف المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -5 & 7 & 1\\ 4 & 6 & 3 & -6 & -5\\ -2 & 4 & 0 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

بعد ذلك نعلم أن $W = N(A)$. من نظرية ٤-٢-٧، W تكون فضاء جزئي.

امتداد مجموعة The Span of a Set

امتداد مجموعة متجهات أعمدة حدث عليه عمل كثير في البابين الثاني والثالث. تعريف الامتداد يعتمد فقط على القدرة على تكوين تراكيب خطية. في أي من الفضاءات الاتجاهية العامة دائما يكون لدينا تعريف لمجموع المتجهات وحاصل ضرب متجه في قياسي. لذلك يمكننا بناء تراكيب خطية وتصنيع امتدادات. في هذا القسم يوجد تعريفين يختلفان اختلافا طفيفا عن تعريفات مرت علينا سابقا لمتجهات الأعمدة.

تعريف ٤-٢-٩. نفرض أن V فضاءا اتجاهيا، $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n$ متجهات و $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ كميات قياسية. **التركيبة الخطية** linear combination لهذه المتجهات والكميات القاسية هي المتجه

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\ldots+\alpha_n u_n .$$

مثال ٤-٢-١٠. في الفضاء الاتجاهي M_{23} للمصفوفات من الحجم 2×3، نعتبر المتجهات

$$x=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}\quad z=\begin{bmatrix}4 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

يمكننا تكوين تركيبة خطية كما يلي

$$\begin{aligned}&2x+4y+(-1)z\\ &=2\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}4 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 6 & -4\\ 4 & 0 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & -4 & 8\\ 20 & 20 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -2 & 4\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 0 & 8\\ 23 & 19 & 17\end{bmatrix}$$

أو كما يلي

$$4x-2y+3z$$
$$=4\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & 12 & -8\\ 8 & 0 & 28\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 2 & -4\\ -10 & -10 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & 6 & -12\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}10 & 20 & -24\\ 1 & -7 & 29\end{bmatrix}$$

عندما ندرك أنه يمكننا تكوين تراكيب خطية في أي فضاء اتجاهي، فإنه يكون من الطبيعي إعادة النظر في تعريف امتداد مجموعة، حيث أنه يكون مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة من مجموعة متجهات.

تعريف ٤-٢-١١. نفرض أن V فضاء اتجاهي و $S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_t\}$ مجموعة متجهات. **امتداد** S span، يرمز له بالرمز $\langle S\rangle$، هي مجموعة كل التراكيب الخطية الممكنة من $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n$، أي أن

$$\langle S\rangle=\{\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t:\alpha_i\in\mathbb{C},1\le i\le t\}$$
$$=\left\{\sum_{i=1}^{t}\alpha_iu_i:\alpha_i\in\mathbb{C},1\le i\le t\right\}$$

نظرية ٤-٢-١٢. نفرض أن V فضاء اتجاهي و $S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_t\}\subseteq V$. إذن امتداد S، $\langle S\rangle$، يكون فضاءا جزئيا.

البرهان: من تعريف ٤-٢-١١ ، الامتداد يحتوي كل التراكيب الخطية من متجهات من الفضاء الاتجاهي V ، بتكرار استخدام خاصية الإغلاق لجمع المتجهات وضرب متجه في قياسي. لذلك $\langle S\rangle$ تكون مجموعة جزئية من V. الآن نختبر الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣.

أولا،
$$\begin{aligned}0&=0+0+0+\ldots+0\\&=0u_1+0u_2+0u_3+\ldots0u_t\end{aligned}$$
أي أننا كتبنا 0 كتركيبة خطية من متجهات S، ومن ثم $0\in\langle S\rangle$ وبالتالي $\langle S\rangle\neq\phi$.

ثانيا، نفرض أن $x,y\in\langle S\rangle$. إذن يوجد كميات قياسية في $\mathbb{C}$ ، $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_t$ و $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_t$ بحيث
$$x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t$$
$$y=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3+\ldots+\beta_tu_t$$
إذن
$$\begin{aligned}x+y&=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t\\&\quad+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3+\ldots+\beta_tu_t\\&=\alpha_1u_1+\beta_1u_1+\alpha_2u_2+\beta_2u_2+\alpha_3u_3+\beta_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t+\beta_tu_t\\&=(\alpha_1+\beta_1)u_1+(\alpha_2+\beta_2)u_2+(\alpha_3+\beta_3)u_3+\ldots+(\alpha_t+\beta_t)u_t\end{aligned}$$
وحيث أن $\alpha_i+\beta_i$ هي أيضا كمية قياسية في $\mathbb{C}$، أمكننا التعبير عن $x+y$ كتركيبة خطية من متجهات S ومن ثم $x+y\in\langle S\rangle$.

ثالثا، نفرض $\alpha\in\mathbb{C}$ و $x\in\langle S\rangle$. إذن يوجد كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_t$ في $\mathbb{C}$ بحيث
$$x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t$$
إذن
$$\begin{aligned}\alpha x&=\alpha(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t)\\&=\alpha(\alpha_1u_1)+\alpha(\alpha_2u_2)+\alpha(\alpha_3u_3)+\ldots+\alpha(\alpha_tu_t)\\&=(\alpha\alpha_1)u_1+(\alpha\alpha_2)u_2+(\alpha\alpha_3)u_3+\ldots+(\alpha\alpha_t)u_t\end{aligned}$$
حيث أن $\alpha\alpha_i$ أيضا يكون قياسي في $\mathbb{C}$، نكون قد عبرنا عن αx كتركيبة خطية من متجهات S وبالتالي $\alpha x\in\langle S\rangle$.

حيث أن $\langle S \rangle$ تحقق الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣، فإن $\langle S \rangle$ تكون فضاءا جزئيا.

مثال ٤-٢-١٣. في مثال ٤-٢-٤ أثبتنا أن المجموعة

$$W = \{p(x) : p \in P_4, p(2) = 0\}$$

تكون فضاءا جزئيا من P_4، فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 4. حيث أن W نفسها فضاء اتجاهي، نفرض أن

$$S = \{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x - 2, 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 4\}$$

واضح أن $S \subseteq W$ حيث أن $x = 2$ جذر لكلا كثيرتي الحدود (تحقق من ذلك). الآن نعرف $U = \langle S \rangle$، من نظرية ٤-٢-١٢ نعلم أن U يكون فضاء جزئي من W.

واضح أن أي تركيبة خطية من متجهات S تكون عنصر في U. الآن السؤال عن العكس. إذا اعتبرنا متجه من W كيف يمكن التعرف عما إذا كان هذا المتجه ينتمي U. نفرض $y = 3x^4 - 7x^3 - x^2 + 7x - 2$ هل $y \in U$ ؟ نفرض أننا كونا y كتركيبة خطية من متجهات S

$$\begin{aligned} y &= 3x^4 - 7x^3 - x^2 + 7x - 2 \\ &= \alpha_1(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x - 2) \\ &\qquad + \alpha_2(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 4) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2)x^4 + (-4\alpha_1 - 3\alpha_2)x^3 + (5\alpha_1 - 6\alpha_2)x^2 \\ &\qquad + (-\alpha_1 + 6\alpha_2)x + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2) \end{aligned}$$

لاحظ أن العمليات أعلى أجريت طبقا لتعريف الفضاء الاتجاهي لكثيرات الحدود. الآن، إذا ساوينا المعاملات، حسب تعريف تساوي كثيرات الحدود، فإننا نحصل على نظام المعادلات الخطية في متغيرين

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 3 \\ -4\alpha_1 - 3\alpha_2 &= -7 \\ 5\alpha_1 - 6\alpha_2 &= -1 \\ -\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 7 \end{aligned}$$

$$-2\alpha_1 + 4\alpha_2 = -2$$

بتكوين المصفوفة الموسعة لهذا النظام واختزالها صفيا نحصل على

$$\left[\begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -7 \\ 5 & -6 & -1 \\ -1 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

حيث أن العمود الأخير في المصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل هو عمود محوري فإن النظام يكون غير متوافق. لذلك لا توجد كميات قياسية α_1 و α_2 بحيث يمكن تكوين y كتركيبة خطية من متجهات S. لذلك $y \notin U$.

مثال ٤-٢-١٤ . مجموعة كل المصفوفات من الحجم 3×2 تكون فضاءا اتجاهيا مع عمليتي جمع المصفوفات وضرب مصفوفة في قياسي. نعتبر المجموعة الجزئية

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ -19 & -11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \\ -17 & 7 \end{bmatrix} \right\}$$

ونعرف مجموعة جزئية جديدة W من M_{32} باستخدام الامتداد $W = \langle S \rangle$. من نظرية ٤-٢-١٢ نعلم أن W تكون فضاءا جزئيا من M_{32}. بينما W تكون مجموعة لانهائية، وهذا هو الوصف الدقيق لها، فإنه لا يزال من المفيد التحقق من أن W تحتوي عناصر معينة.

أولا، هل

$$y = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 3 \\ 10 & -11 \end{bmatrix}$$

يكون في W ؟ للإجابة عن هذا السؤال نريد تحديد هل y يمكن كتابتها كتركيبة خطية من المصفوفات الخمس في S. هل يمكننا إيجاد خمس كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ بحيث

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 3 \\ 10 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 14 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ -19 & -11 \end{bmatrix} +$$

$$\alpha_4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \\ -17 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - 4\alpha_5 & 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 \\ 5\alpha_1 + 14\alpha_2 - 19\alpha_3 + 14\alpha_4 - 17\alpha_5 & -5\alpha_1 - \alpha_2 - 11\alpha_3 - 2\alpha_4 + 7\alpha_5 \end{bmatrix}$$

باستخدام تعريف تساوي المصفوفات يمكننا تحويل هذه إلى ست معادلات خطية في خمسة متغيرات

$$3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 = 9$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = 3$$
$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - 4\alpha_5 = 7$$
$$2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 = 3$$
$$5\alpha_1 + 14\alpha_2 - 19\alpha_3 + 14\alpha_4 - 17\alpha_5 = 10$$
$$-5\alpha_1 - \alpha_2 - 11\alpha_3 - 2\alpha_4 + 7\alpha_5 = -11$$

هذا نظام خطي من المعادلات يمكن تمثيله بمصفوفة موسعة واختزالها صفيا. الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة يكون

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-19}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك نستنتج أن النظام متوافق حيث أن العمود الأخير في المصفوفة المختزلة ليس عمودا محوريا وبالحساب يوجد $n - r = 5 - 4 = 1$

متغير حر. بينما يوجد عدد لانهائي من الحلول نحن نسعى لحل واحد، لذلك نفرض أننا اخترنا المتغير الحر $\alpha_5 = 0$. لذلك يمكننا بسهولة بيان أن $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = 0$. لذلك للكميات القياسية $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = 0$ سوف نكون تركيبة خطية من عناصر S تساوي y. يمكن التحقق من ذلك

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 3 \\ 10 & -11 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 14 & -1 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$$

ومن ثم مع هذه التركيبة الخطية يكون $y \in W = \langle S \rangle$.

ثانيا، هل

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

يكون في W ؟ للإجابة عن هذا السؤال نريد تحديد هل x يمكن كتابتها كتركيبة خطية من المصفوفات الخمس في S. هل يمكننا إيجاد خمس كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ بحيث

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 14 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ -19 & -11 \end{bmatrix} +$$

$$\alpha_4\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \\ -17 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - 4\alpha_5 & 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 \\ 5\alpha_1 + 14\alpha_2 - 19\alpha_3 + 14\alpha_4 - 17\alpha_5 & -5\alpha_1 - \alpha_2 - 11\alpha_3 - 2\alpha_4 + 7\alpha_5 \end{bmatrix}$$

باستخدام تعريف تساوي المصفوفات يمكننا تحويل هذه إلى ست معادلات خطية في خمسة متغيرات

$$
\begin{aligned}
3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 &= 2 \\
\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 &= 1 \\
4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - 4\alpha_5 &= 3 \\
2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 &= 1 \\
5\alpha_1 + 14\alpha_2 - 19\alpha_3 + 14\alpha_4 - 17\alpha_5 &= 4 \\
-5\alpha_1 - \alpha_2 - 11\alpha_3 - 2\alpha_4 + 7\alpha_5 &= -2
\end{aligned}
$$

هذا نظام خطي من المعادلات يمكن تمثيله بمصفوفة موسعة واختزالها صفيا. الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة يكون

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-38}{8} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-17}{8} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

حيث أن العمود الأخير عمود محوري فإن النظام يكون غير متوافق ومن ثم لا توجد كميات قياسية تجعل x ينتمي إلى W، لذلك $x \notin W$.

لاحظ كيف أن مثالي ٤-٢-١٣ و٤-٢-١٤ احتوت أسئلة عن الانتماء في امتداد ، ولكن سرعان ما تحولت إلى أسئلة حول حلول نظام من المعادلات الخطية. سوف يكون هذا موضوع مشترك فيما يلي.

العديد من المجموعات الجزئية من الفضاءات الاتجاهية التي تعاملنا معها في الباب الثالث تكون أيضا فضاءات جزئية، هي مغلقة بالنسبة لجمع المتجهات وضرب متجه في قياسي في $\mathbb{C}^m$.

نظرية ٤-٢-١٥. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. إذن $C(A)$ يكون فضاءا جزئيا من $\mathbb{C}^m$.

البرهان: تعريف ٣-٥-١ يبين أن $C(A)$ تكون مجموعة جزئية من $\mathbb{C}^m$، وهي معرفة كامتداد لمجموعة متجهات من $\mathbb{C}^m$ (أعمدة المصفوفة). حيث أن $C(A)$ امتداد، نظرية ٤-٥-٢ تقول أنها فضاء جزئي.

واضح أن البرهان كان بسيطا. يمكننا استخدام نفس الاسلوب لإثبات أن فضاء الصفرية يكون فضاءا جزئيا.

في الحديث عن السهولة، هنا أيضا نظرية سهلة في إطار تكوين فضاءات جزئية.

نظرية ٤-٢-١٦. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. إذن $R(A)$ يكون فضاء جزئي من $\mathbb{C}^n$.

البرهان: تعريف ٣-٥-١٢ يقول أن $R(A)=C(A^t)$ ، ومن ثم فإن فضاء الصفوف يكون فضاء أعمدة وكل فضاء أعمدة يكون فضاءا جزئيا، وهذا يكفي.

نظرية ٤-٢-١٧. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. إذن $L(A)$ يكون فضاءا جزئيا من $\mathbb{C}^n$.

البرهان: تعريف ٣-٦-١ يقول أن $L(A)=N(A^t)$ ،لذلك فضاء الصفرية الأيسر يكون فضاء صفرية، وكل فضاء صفرية يكون فضاء جزئي منم نظرية ٤-٢-٨. وهذا يكمل البرهان.

مما سبق نجد أن امتداد مجموعة من المتجهات و فضاء الصفرية، فضاء الأعمدة ، فضاء الصفوف وفضاء الصفرية الأيسر لمصفوفة جميعها تكون فضاءات جزئية وبالتالي فضاءات اتجاهية، بمعنى أنها تحقق كل الخواص العشر الواردة في تعريف ٤-١-١ وفي النظريات الأساسية في فصل ٣-٤ . تعاملنا مع هذه الكائنات باعتبارها مجرد مجموعات في الباب الثاني والباب الثالث، ولكن الآن فهمنا أنها مركب أكبر من ذلك. على وجه الخصوص هي مغلقة بالنسبة لجمع المتجهات وضرب متجه في قياسي وأيضا مغلقة بالنسبة للتراكيب الخطية.

تمارين ٤-٢

١- بالعمل من خلال المتجهات في $\mathbb{C}^3$ ، حدد هل $b=\begin{bmatrix}4\\3\\1\end{bmatrix}$ تكون في الفضاء الجزئي W

$$W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\right\}\right\rangle.$$

٢- بالعمل من خلال المتجهات في $\mathbb{C}^4$ ، حدد هل $b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ تكون في

الفضاء الجزئي W $$.W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

٣- بالعمل من خلال المتجهات في $\mathbb{C}^4$ ، حدد هل $b=\begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\end{bmatrix}$ تكون في

الفضاء الجزئي W $$.W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

٤- بالعمل من خلال المتجهات في P_3 الفضاء الاتجاهي لكثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 3 ، حدد هل $p(x)=x^3+6x+4$ تكون في الفضاء الجزئي W حيث
$$.W=\left\langle\left\{x^3+x^2+x,\ x^3+2x-6,\ x^2-5\right\}\right\rangle$$

٥- نعتبر الفضاء الجزئي
$$W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}2&1\\3&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&0\\2&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3&1\\2&1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$
من الفضاء الاتجاهي للمصفوفات من الحجم 2×2 ، M_{22} . هل $C=\begin{bmatrix}-3&3\\6&-4\end{bmatrix}$ يكون عنصر في W.

٦- المصفوفة المربعة A من الحجم n تسمى مثلثية عليا إذا كان $[A]_{ij}=0$ كلما كان $i>j$. نفرض UT_n هي مجموعة كل

المصفوفات المثلثية العليا من الحجم n. برهن أن UT_n يكون فضاءا جزئيا من الفضاء الاتجاهي M_{nn} للمصفوفات المربعة من الحجم n.

٧- نفرض P مجموعة كل كثيرات الحدود من أي درجة. P تكون فضاءا اتجاهيا. نفرض E المجموعة الجزئية من P التي تتكون من كثيرات الحدود التي تتكون فقط من حدود ذات درجات زوجية. هل E تكون فضاءا جزئيا من P وضح لماذا.

٨- نفرض P مجموعة كل كثيرات الحدود من أي درجة، P تكون فضاءا اتجاهيا. نفرض F المجموعة الجزئية من P التي تتكون من كثيرات الحدود التي تتكون فقط من حدود ذات درجات فردية. هل F تكون فضاءا جزئيا من P وضح لماذا.

٤-٣ الاستقلال الخطي و المجموعات المولدة
Linear Independence and Spanning Sets

الفضاء الاتجاهي يعرف على أنه مجموعة مع عمليتان بحيث تحقق عشر خواص (تعريف ٤-١-١). كما أن تعريف امتداد مجموعة من المتجهات يتطلب فقط معرفة كيف نجمع متجهين وكيف نضرب متجه في قياسي، كذلك يكون الحال مع الاستقلال الخطي. تعريف الاستقلال الخطي لمجموعة من المتجهات في فضاء اتجاهي اختياري يتطلب فقط معرفة كيفية تكوين تراكيب خطية ومساواتها بالمتجه الصفري. حيث أن كل فضاء اتجاهي يجب أن يحتوي المتجه الصفري، دائما يكون معنا متجه صفري.أيضا، في هذا الفصل سوف نعطي تطويرا لمفهوم امتداد مجموعة من المتجهات. بدلا من أن نبدأ بمجموعة من المتجهات ونكون منها فضاء جزئي مولد بها، سوف نبدأ بفضاء جزئي ثم نبحث عن مجموعة من المتجهات التي تولد هذا الفضاء الجزئي. تراكيب الاستقلال الخطي والتوليد سوف تكون هامة جدا في ما يلي.

الاستقلال الخطي

تعريفنا السابق للاستقلال الخطي (تعريف ٢-٤-١) يوظف علاقة ارتباط خطي والتي تكون تركيبة خطية في أحد الطرفين والمتجه الصفري في الطرف الآخر. كما أن التركيبة الخطية في فضاء اتجاهي تعتمد فقط على جمع المتجهات وضرب المتجه في قياسي، وكل فضاء اتجاهي يحتوي متجه صفري، يمكننا مد تعريف الاستقلال الخطي من الوضع $\mathbb{C}^m$ إلى الوضع أي فضاء اتجاهي عام V، دون أي تغيير تقريبا.

تعريف ٤-٣-١. نفرض V فضاء اتجاهي، و $S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ مجموعة من متجهات V. المعادلة على الصورة

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots.+\alpha_nu_n=0$$

تسمى **علاقة ارتباط خطي** relation of linear dependence على S. إذا كانت هذه العلاقة تتحقق فقط عندما يكون $\alpha_i=0$ لكل

$1 \le i \le n$، فإننا نقول أن هذه **علاقة ارتباط خطي تافهة** trivial relation of linear dependence.

تعريف ٤-٣-٢. نفرض V فضاء اتجاهي. مجموعة المتجهات $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ من V تكون **مرتبطة خطيا** linearly dependent إذا وجدت علاقة ارتباط خطي غير تافهة على S. في حالة وجود فقط علاقة الارتباط الخطي التافهة على S فإن S تسمى **مستقلة خطيا** linearly independent.

مثال ٤-٣-٣. في الفضاء الاتجاهي لكثيرات الحدود من درجة أقل من أو يساوي 4 ، P_4 ، نعتبر المجموعة

$$\{2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 10, -x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 8, \\ 2x^4 + x^3 + 10x^2 + 17x - 2\}$$

هل هذه المجموعة مرتبطة خطيا أم مستقلة خطيا ؟

نعتبر العلاقة

$$3(2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 10) + 4(-x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 8) \\ +(2x^4 + x^3 + 10x^2 + 17x - 2)$$

$$= 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

هذه العلاقة غير التافهة للارتباط الخطي على S تبين أن S تكون مرتبطة خطيا.

مثال ٤-٣-٤. في الفضاء الاتجاهي لكثيرات الحدود من درجة أقل من أو يساوي 4 ، P_4 نعتبر المجموعة

$$T = \{3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 1, -3x^4 + 1x^3 + 0x^2 + 4x + 2, \\ 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1, \; 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 2x + 1\}$$

نفرض أنه لدينا علاقة ارتباط خطي على المجموعة T

$$0 = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\ = \alpha_1(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 1) + \alpha_2(-3x^4 + 1x^3 + 0x^2 + 4x + 2) \\ + \alpha_3(4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1) + \alpha_4(2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 2x + 1)$$

باستخدام تعريف جمع متجهين وضرب متجه في قياسي في P_4 نصل إلى

$$0 = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 =$$

$$(3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4)x^4 + (-2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 - 7\alpha_4)x^3 +$$
$$(4\alpha_1 - 2\alpha_3 + 4\alpha_4)x^2 + (6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4)x +$$
$$(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$$

بمساواة المعاملات في الطرفين نصل إلى نظام المعادلات المتجانس

$$3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$$
$$-2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 - 7\alpha_4 = 0$$
$$4\alpha_1 - 2\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$$
$$6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$$
$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

نكون مصفوفة المعاملات لهذا النظام المتجانس ونختزلها صفيا لنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

كما هو متوقع النظام متوافق، وبالحساب $n - r = 4 - 4 = 0$ ومن ثم يكون الحل وحيد. وحيث أن هذا النظام متجانس فإن الحل الوحيد يكون هو الحل التافه $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$. لذلك المجموعة T تكون مستقلة خطي.

هنا بعض الملاحظات. إذا اكتشفنا عدد لانهائي من الحلول، فإنه يمكننا استخدام حل غير تافه لتكوين التركيبة الخطية بنفس السلوك الذي استخدم لبيان أن S كانت مرتبطة خطيا. من المهم أن ندرك أنه ليس اهتمامنا بمقدرتنا على تكوين علاقة ارتباط خطي بكميات قياسية أصفار، دائما يمكننا عمل ذلك، ولكن بالنسبة إلى T، هذه هي الطريقة الوحيدة لتكوين علاقة ارتباط خطي. ليست مصادفة أن نصل إلى نظام متجانس من المعادلات في هذا المثال، هذا مرتبط باستخدامنا للمتجه الصفري لتعريف علاقة ارتباط خطي. من السهل أن نقدم بيانا مقنعا بأن مجموعة مرتبطة خطيا، وذلك بإيجاد علاقة ارتباط خطي ليست تافهة،

ولكن إيجاد بيانا مقنعا بالاستقلال الخطي يتطلب إثبات أنه لاتوجد علاقة ارتباط خطي غير العلاقة التافهة.

مثال ٤-٣-٥. نعتبر مجموعتين من المتجهات R و T من الفضاء الاتجاهي M_{32} للمصفوفات من الحجم 3×2

$$R=\left\{\begin{bmatrix}3&-1\\1&4\\6&-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2&3\\1&-3\\-2&-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6&-6\\-1&0\\7&-9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7&9\\-4&-5\\2&5\end{bmatrix}\right\}$$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4&0\\-2&2\\-2&-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\\2&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5&3\\-10&7\\2&0\end{bmatrix}\right\}$$

مجموعة مستقلة خطيا والأخرى ليست كذلك. أيهما مستقلة وأيهما غير ذلك؟ الآن نختبر R أولا. نكون علاقة ارتباط خطي

$$\alpha_1\begin{bmatrix}3&-1\\1&4\\6&-6\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-2&3\\1&-3\\-2&-6\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}6&-6\\-1&0\\7&-9\end{bmatrix}$$
$$+\alpha_4\begin{bmatrix}7&9\\-4&-5\\2&5\end{bmatrix}=0$$

بتجميع الطرف الأيسر حسب تعريف مجموع المصفوفات والضرب في قياسي في M_{32} نحصل

$$\begin{bmatrix}3\alpha_1-2\alpha_2+6\alpha_3+7\alpha_4 & -\alpha_1+3\alpha_2-6\alpha_3+9\alpha_4\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-4\alpha_4 & 4\alpha_1-3\alpha_2+-5\alpha_4\\ 6\alpha_1-2\alpha_2+7\alpha_3+2\alpha_4 & -6\alpha_1-6\alpha_2-9\alpha_3+5\alpha_4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

باستخدام تعريف تساوي مصفوفتين نحصل على ست معادلات متجانسة في أربعة متغيرات

$$3\alpha_1-2\alpha_2+6\alpha_3+7\alpha_4=0$$
$$-\alpha_1+3\alpha_2-6\alpha_3+9\alpha_4=0$$

$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-4\alpha_4=0$$
$$4\alpha_1-3\alpha_2+-5\alpha_4=0$$
$$6\alpha_1-2\alpha_2+7\alpha_3+2\alpha_4=0$$
$$-6\alpha_1-6\alpha_2-9\alpha_3+5\alpha_4=0$$

نكون مصفوفة المعاملات لهذا النظام المتجانس ونختزلها صفيا لنحصل على

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بتحليل هذه المصفوفة نستنتج أن $\alpha_1=0$، $\alpha_2=0$، $\alpha_3=0$ ، $\alpha_4=0$. هذا يعني أنه لا توجد سوى علاقة الارتباط الخطي التافهة على متجهات R ومن ثم R تكون مستقلة خطيا.

لذلك يجب أن تكون S مرتبطة خطيا. لإثبات ذلك نبدأ كما بدأنا

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\1&3\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-4&0\\-2&2\\-2&-6\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\\2&4\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}-5&3\\-10&7\\2&0\end{bmatrix}=0$$

بتجميع الطرف الأيسر حسب تعريف مجموع المصفوفات والضرب في قياسي في M_{32} نحصل

$$\begin{bmatrix}2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_3-5\alpha_4 & \alpha_3+3\alpha_4\\ \alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3-10\alpha_4 & -\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+7\alpha_4\\ \alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4 & 3\alpha_1-6\alpha_2+4\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

باستخدام تعريف تساوي مصفوفتين نحصل على ست معادلات متجانسة في أربعة متغيرات

$$2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_3-5\alpha_4=0$$
$$\alpha_3+3\alpha_4=0$$
$$\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3-10\alpha_4=0$$
$$-\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+7\alpha_4=0$$
$$\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4=0$$
$$3\alpha_1-6\alpha_2+4\alpha_3=0$$

نكون مصفوفة المعاملات لهذا النظام المتجانس ونختزلها صفيا لنحصل على

$$\begin{bmatrix}1&-2&0&-4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بتحليل هذه المصفوفة نجد أن النظام يكون متوافق و يوجد $n-r=4-2=2$ متغير حر، وهي α_2 و α_4. هذا يعني أنه يوجد عدد لانهائي من الحلول، وعلى وجه الخصوص يمكن إيجاد حل غير تافه.

باختيار $\alpha_2=1$ و $\alpha_4=-1$ نجد أن $\alpha_1=-2$ و $\alpha_3=3$. لذلك علاقة الارتباط الخطي

$$(-2)\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\1&3\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}-4&0\\-2&2\\-2&-6\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\\2&4\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}-5&3\\-10&7\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

المجموعات المولدة

في الفضاء الاتجاهي V، نفرض أننا اعطينا مجموعة متجهات $S \subseteq V$. إذن يمكننا فورا بناء فضاء جزئي، $\langle S \rangle$ ومن ثم يتأكد من نظرية ٤-٢-١٣ أن هذا يكون فضاء جزئي. الآن نقلب الأمور رأسا على عقب. نفرض أننا أعطينا أولا فضاء جزئي $W \subseteq V$. هل يمكننا إيجاد مجموعة S بحيث $W = \langle S \rangle$؟ عادة W تكون لانهائية ونبحث عن مجموعة منتهية S والتي يمكن تكوين تراكيب خطية منها لبناء W.

تعريف ٤-٣-٦. نفرض V فضاء اتجاهي. المجموعة الجزئية S من V تكون **مجموعة مولدة لـ** V spanning set of إذا كان $\langle S \rangle = V$. في هذه الحالة نقول أيضا S **تولد** V span.

تعريف المجموعة المولدة يتطلب تساوي مجموعتين (فعليا فضاءين جزئيين). إذا كانت S مجموعة جزئية من V، فإنه دائما يكون $\langle S \rangle \subseteq V$. لذلك عادة يكون الضروري إثبات أن $V \subseteq \langle S \rangle$.

مثال ٤-٣-٧. في مثال ٤-٢-٤ بينا أن

$$W = \{p(x) : p \in P_4, p(2) = 0\}$$

تكون فضاء جزئي من P_4. في هذا المثال سوف نوضح أن

$$S = \{x-2, x^2-4x+4, x^3-6x^2+12x-8, \\ x^4-8x^3+24x^2-32x+16\}$$

تكون مجموعة مولدة لـ W. لبيان ذلك نتطلب أن $W = \langle S \rangle$. يمكن التحقق أن كل كثيرة حدود في S لها جذر $x = 2$ ومن ثم تكون $S \subseteq W$. وحيث أن W مغلقة بالنسبة للجمع والضرب في قياسي فإن $\langle S \rangle \subseteq W$.

إذن يتبقى إثبات أن $W \subseteq \langle S \rangle$. نختار كثيرة حدود اختيارية في W، ولتكن $r(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in W$. كثيرة الحدود هذه ليست اختيارية على الاطلاق، بل يجب أن يكون $x = 2$ جذر لها. وهذا يعني أن

$$\begin{aligned} 0 &= a(2)^4 + b(2)^3 + c(2)^2 + d(2) + e \\ &= 16a + 8b + 4c + 2d + e \end{aligned}$$

كشرط على r.

نرغب في بيان أن r تكون كثيرة حدود في $\langle S\rangle$، بمعنى أن نكتب r كتركيبة خطية من متجهات (كثيرات حدود) S. نفرض أن

$$\begin{aligned}
r(x) &= ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\\
&=\alpha_1(x-2)+\alpha_2(x^2-4x+4)+\alpha_3(x^3-6x^2+12x-8)\\
&\qquad+\alpha_4(x^4-8x^3+24x^2-32x+16)\\
&=\alpha_4x^4+(\alpha_3-8\alpha_4)x^3+(\alpha_2-6\alpha_3+24\alpha_4)x^2\\
&\qquad+(\alpha_1-4\alpha_2+12\alpha_3-32\alpha_4)x\\
&\qquad+(-2\alpha_1+4\alpha_2-8\alpha_3+16\alpha_4)
\end{aligned}$$

بمساواة المعاملات (تساوي متجهين في P_4) نحصل على

$$\begin{aligned}
\alpha_4&=a\\
\alpha_3-8\alpha_4&=b\\
\alpha_2-6\alpha_3+24\alpha_4&=c\\
\alpha_1-4\alpha_2+12\alpha_3-32\alpha_4&=d\\
-2\alpha_1+4\alpha_2-8\alpha_3+16\alpha_4&=e
\end{aligned}$$

وهذا نظام معادلات من خمس معادلات خطية في أربعة متغيرات. أي حل لهذا النظام سوف يعطي تركيبة خطية اللازمة لكي يكون $r\in\langle S\rangle$.

لبيان هل هذا النظام متوافق نكون المصفوفة الموسعة ونختزلها صفيا لنحصل على

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 32a+12b+4c+d\\
0 & 1 & 0 & 0 & 24a+6b+c\\
0 & 0 & 1 & 0 & 8a+b\\
0 & 0 & 0 & 1 & a\\
0 & 0 & 0 & 0 & 16a+8b+4c+2d+e
\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 32a+12b+4c+d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 24a+6b+c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8a+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن العمود الأخير ليس عمودا محوريا، فإن النظام يكون متوافق. لذلك أي كثيرة حدود في W يمكن أن تكتب كتركيبة خطية من كثيرات الحدود في S وبالتالي $W \subseteq \langle S \rangle$. لذلك $W = \langle S \rangle$ و S تولد W.

إذا كان لدينا فضاء جزئي ومجموعة من المتجهات فإنه، كما في مثال ٤-٣-٧، قد نستغرق بعض العمل لتحديد هل المجموعة هي مجموعة مولدة. مسألة أكثر صعوبة نتصدى لها وهي نبدأ بفضاء جزئي ونحتاج إلى بناء مجموعة مولدة بدون إرشاد. الآن سوف نعمل مثال بهذا المذاق.

مثال ٤-٣-٨. في M_{22} ، الفضاء الاتجاهي للمصفوفات من الحجم 2×2 ، نعتبر الفضاء الجزئي

$$Z=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+3b-c-5d=0,\ -2a-6b+3c+14d=0\right\}$$

سوف نوجد مجموعة امتداد لـ Z.

نحتاج لإيجاد عدد محدود من المصفوفات من Z بحيث أي مصفوفة في Z يمكن أن تكتب كتركيبة خطية من هذا العدد المحدود من المصفوفات.

نفرض $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مصفوفة في Z. يمكننا تكوين متجه عمود من عناصر B ونكتب

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in N\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -2 & -6 & 3 & 14 \end{bmatrix}\right)$$

باختزال هذه المصفوفة صفيا وتطبيق نظرية ١-٢-١١ نحصل على التعبير المكافئ

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in N\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

يمكننا التعبير عن الفضاء الجزئي Z بالصور المتكافئة التالية

$$\begin{aligned} Z &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+3b-c-5d=0,\ -2a-6b+3c+14d=0\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+3b-d=0,\ c+4d=0\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a=-3b+d,\ c=-4d\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} -3b+d & b \\ -4d & d \end{bmatrix} : b,d \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \left\{b\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} : b,d \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \left\langle\left\{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle \end{aligned}$$

لذلك المجموعة $Q = \left\langle\left\{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$ تمد Z.

تمثيل المتجهات

في الباب الثامن سوف نتناول موضوع التمثيل بشكل وافي. الآن نتحفز لبرهان النظرية الحرجة التي تخبرنا كيف نمثل متجه. هذه النظرية يمكن أن تنتظر ولكن التعامل معها الآن سوف يزودنا ببصيرة إضافية حول طبيعة مجموعات المولدة المستقلة خطيا. أولا نعتبر مثال ثم النظرية.

مثال ٤-٣-٩. نعتبر المجموعة

$$S = \left\{\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$$

من الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^3$. نفرض أن A هي المصفوفة التي أعمدتها متجهات S ونتحقق أن A غير شاذة. من نظرية ٢-٤-١٤ عناصر S تكون مجموعة مستقلة خطيا. نفرض أن $b \in \mathbb{C}^3$. إذن $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد (نظرية ١-٥-١٣) ومن ثم النظام يكون متوافق. من نظرية ٢-٢-٥، $b \in \langle S \rangle$. حيث أن b اختيارية، هذا يكفي لبيان أن $\langle S \rangle = \mathbb{C}^3$ ، ومن ثم S تكون مجموعة مولدة لـ $\mathbb{C}^3$. هذه المجموعة أتت من أعمدة مصفوفة المعاملات للنظام الذي تمت دراسته في مثال ٢-٢-٣.

الآن نختبر وضع اختيار معين للمتجه b ، ليكن $b = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$. حيث أن S مجموعة مولدة لـ $\mathbb{C}^3$، يمكننا كتابة b كتركيبة خطية من متجهات S ،

$$\begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

عدم الشذوذ للمصفوفة A يخبرنا أن الكميات القياسية في هذه التركيبة الخطية تكون وحيدة. بتعبير أدق، الاستقلال الخطي لـ S هو الذي تسبب في الوحدانية. سوف نشير إلى الكميات القياسية $\alpha_1 = -3$ ، $\alpha_2 = 5$ و $\alpha_3 = 2$ عل أنها **تمثيل** representation of b بالنسبة إلى S. بتعبير آخر، ما أن نستقر على S أنها مجموعة مستقلة خطيا تولد $\mathbb{C}^3$ ، المتجه b يمكن تغطيته بمعرفة الكميات القياسية $\alpha_1 = -3$ ، $\alpha_2 = 5$ و $\alpha_3 = 2$. هذا كله توضيح للنظرية الهامة التالية، التي تبرهن في حالة الفضاء الاتجاهي العام.

نظرية ٤-٣-١٠. نفرض أن V فضاء اتجاهي و $B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ مجموعة متجهات مستقلة خطيا تمد V. نفرض w أي متجه في V. إذن توجد كميات قياسية وحيدة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ بحيث يكون

$$w=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\ldots+\alpha_m v_m$$

البرهان: كون أن w تكتب كتركيبة خطية من متجهات B ينتج من خاصية الامتداد للمجموعة. هذا جيد ولكن ليس هذا هو مضمون النظرية. نحن نعلم أن أي اختيار للمتجه w يوجد كميات قياسية تحول w إلى تركيبة خطية من متجهات الأساس. السؤال الآن هل توجد أكثر من طريقة لكتابة w كتركيبة خطية من $\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_m\}$؟ هل الكميات القياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$ تكون وحيدة.

نفرض أنه يوجد تركيبتين خطيتين مختلفتين من $\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_m\}$ كلاهما تساوي المتجه w. أي نفرض أنه توجد مجموعتين من الكميات القياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m$ و $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_m$ بحيث

$$w=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\ldots+\alpha_m v_m$$
$$w=\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 v_3+\ldots+\beta_m v_m$$

إذن

$$\begin{aligned}
0&=w+(-w)\\
&=w+(-1)w\\
&=(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\ldots+\alpha_m v_m)\\
&\quad+(-1)(\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 v_3+\ldots+\beta_m v_m)\\
&=(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\ldots+\alpha_m v_m)\\
&\quad+(-\beta_1 v_1-\beta_2 v_2-\beta_3 v_3-\ldots-\beta_m v_m)\\
&=(\alpha_1-\beta_1)v_1+(\alpha_2-\beta_2)v_2+(\alpha_3-\beta_3)v_3+\ldots\\
&\quad+(\alpha_m-\beta_m)v_m
\end{aligned}$$

ولكن هذه علاقة ارتباط خطي على مجموعة متجهات مستقلة خطيا. لذلك من تعريف الاستقلال الخطي، الكميات القياسية لابد أن تكون جميعها أصفار، أي أن

$(\alpha_1-\beta_1)=0$ ، $(\alpha_2-\beta_2)=0$ ، $(\alpha_3-\beta_3)=0$، ...، $(\alpha_m-\beta_m)=0$.

وهذا يعني أن $\alpha_1=\beta_1$ ، $\alpha_2=\beta_2$ ، $\alpha_3=\beta_3$ ، ... ، $\alpha_m=\beta_m$.

ومن ثم تكون الكميات القياسية وحيدة.

هذه طريقة نموذجية لاستخدام الفرض أن مجموعة مستقلة خطيا — نحصل على علاقة ارتباط خطي ثم نستنتج أن كل الكميات القياسية يجب أن تساوي الصفر. نتيجة هذه النظرية تخبرنا أنه يمكننا كتابة أي متجه في فضاء اتجاهي كتركيبة خطية من متجهات في مجموعة امتداد مستقلة خطيا، ولكن بصورة وحيدة. توجد المواد الخام للمجموعة المولدة التي تلزم لكتابة كل متجه بطريقة وحيدة كتركيبة خطية. لذلك بهذا المعنى يمكننا أن نسمي المجموعة المولدة المستقلة خطيا " أصغر مجموعة مولدة". هذه المجموعات تكون مهمة ومن ثم سوف نعطيها إسما بسيطا (أساس) ونستكشف خواصها في الفصل التالي.

تمارين ٤-٣

١- في الفضاء الاتجاهي M_{22} للمصفوفات من الحجم 2×2، حدد هل المجموعة S التالية مستقلة خطيا

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&4\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix}\right\}.$$

٢- في الفضاء الاتجاهي P_3 لكل كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 3، حدد هل المجموعة التالي مستقلة خطيا

$$S=\{2-x-3x^2-8x^3,1+x+x^2+5x^3,3-4x^2-7x^3\}.$$

٣- في الفضاء الاتجاهي للدوال ذات القيم الحقيقية $F=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$، حدد ما إذا كانت المجموعة S مستقلة خطيا

$$S=\{\sin^2 x,\cos^2 x,2\}.$$

٤- نفرض

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\right\}$$

(أ) هل S تولد M_{22} ؟ (ب) هل S مستقلة خطيا؟

٥- نفرض

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4\\0&3\end{bmatrix}\right\}$$

(أ) هل S تولد M_{22} ؟ (ب) هل S مستقلة خطيا؟

٦- حدد هل المجموعة $S=\{5-x+x^2, 5x-x^2+4x^3, 3x+2\}$ تولد P_4 ؟

٧- المجموعة W هي فضاء جزئي من M_{22}. برهن أن S تكون مجموعة مولدة لـ W، حيث

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2a-3b+4c-d=0\right\}$$

$$S=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right\}.$$

٨- نفرض S مجموعة منتهية مستقلة خطيا من متجهات في الفضاء الاتجاهي V. نفرض T أي مجموعة جزئية من S. برهن أن T تكون مستقلة خطيا.

٩- نفرض أن V فضاء اتجاهي و $u,v\in V$ متجهان في V. استخدم تعريف الاستقلال الخطي لإثبات أن $S=\{u,v\}$ تكون مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد المتجهين مضاعف قياسي للمتجه الآخر. برهن هذا مباشرة في أي فضاء اتجاهي عام.

٤-٤ الأساسات Bases

الأساس للفضاء الاتجاهي هو من أكثر المفاهيم فائدة في الجبر الخطي. هو في الغالب يزودنا بوصف مختصر لفضاء اتجاهي لانهائي.

تعريف ٤-٤-١. نفرض أن V فضاء اتجاهي. المجموعة $S \subseteq V$ تسمى **أساس** basis لـ V إذا كانت S مستقلة خطيا وتولد V.

لذلك، الأساس هو مجموعة مستقلة خطيا تولد الفضاء الاتجاهي. متطلب أن المجموعة تولد V يؤكد أن S تحتوي من الخامات مايلزم لبناء V ، بينما متطلب الاستقلال الخطي يؤكد أنه لاتوجد خامات أكثر مما نحتاج. كما سوف نرى قريبا، الأساس هو أصغر مجموعة مولدة. يمكنك ملاحظة أننا استخدمنا مفهوم الأساس في بعض النظريات السابقة (نظرية ٢-٤-١٧ ، نظرية ٣-٥-٦ و نظرية ٣-٥-١٦) وإذا رجعت إلى هذه النظريات سوف ترى أن الخلاصات تزودنا بمجموعات مستقلة خطيا تولد مجموعات والتي هي فضاءات جزئية من $\mathbb{C}^m$. كما سوف نرى، هذه النظريات الثلاث سوف تستمر ادوات مفيدة حتى في وضع الفضاء الاتجاهي العام.

لاحظ أن تعريف ٤-٤-١ لا ينفي أن الفضاء الاتجاهي يكون له أساسات متعددة، وهذه هي الحالة. على وجه العموم، يمكننا انتزاع أي أساس للفضاء الاتجاهي، بضرب متجهات أساس في كمية قياسية غير صفرية ونكون مجموعة مختلفة والتي تظل أساس. للفضاءات الاتجاهية الهامة سوف يكون من المناسب أن يكون لها تجمع من الأساسات اللطيفة. عندما يكون للفضاء الاتجاهي أساس واحد لطيف فإنه أحيانا يسمى **أساسا قياسيا** standard basis. هنا بعض الأساسات اللطيفة لفضاءات اتجاهية هامة.

نظرية ٤-٤-٢. مجموعة متجهات الوحدة القياسية في $\mathbb{C}^m$ (تعريف٢-٦-١٧) $B=\{e_i : 1 \le i \le m\}$ تكون أساس للفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^m$.

البرهان: يجب أن نبين أن المجموعة B تكون مستقلة خطيا وتولد $\mathbb{C}^m$. أولا، المتجهات في B هي، من تعريف ٢-٦-١٧، أعمدة مصفوفة الوحدة والتي نعلم من نظرية ١-٥-٧ أنها غير شاذة. ومن نظرية ٢-٤-١٤ أعمدة المصفوفة غير الشاذة تكون مستقلة خطيا.

نفرض أننا اقتنصنا متجه اختياري من $\mathbb{C}^m$، ليكن

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

هل يمكننا كتابة v كتركيبة خطية من المتجهات في B؟ نعم، ببساطة نفرض

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = v_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + v_m\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 + \ldots + v_me_m$$

هذا يبين أن $\mathbb{C}^m \subseteq \langle B \rangle$ ، وهذا يكفي لبيان أن B تولد $\mathbb{C}^m$.

مثال ٤-٤-٣. الفضاء الاتجاهي P_n لكثيرات الحدود من درجة لاتزيد عن n، يكون له الأساس $B=\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$.

أساس لطيف آخر لـ P_n يكون

$$C=\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, \ldots, \\ 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n\}$$

باختبار كل من B و C نجد أنها مستقلة خطيا وتولد P_n (تمرين).

مثال ٤-٤-٤. في الفضاء الاتجاهي M_{mn} للمصفوفات من الحجم $m\times n$، نعرف المصفوفات B_{kl}، $1\le k\le m$، $1\le l\le n$ كما يلي

$$[B_{kl}]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } k=i,\ l=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

لذلك هذه المصفوفات لها عناصر كلها أصفار ماعدا عنصر واحد يساوي 1. المجموعة المكونة من عدد mn من هذه المصفوفات.

$$B=\{B_{kl} : 1\le k\le m,\ 1\le l\le n\}$$

تكون أساس لـ M_{mn}.

الأساسات الموصوفة أعلى غالبا تكون مريحة في التعامل معها. ومع ذلك هناك أساسات تبدو وكأنها ليست أساس.

مثال ٤-٤-٥. في مثال ٤-٣-٧ بينا أن

$$S = \{x-2, x^2-4x+4, x^3-6x^2+12x-8, \\ x^4-8x^3+24x^2-32x+16\}$$

مجموعة مولدة لـ $W = \{p(x) : p \in P_4,\ p(2)=0\}$. الآن سوف نبين أن S أيضا تكون مستقلة خطيا في W. نبدأ بتكوين علاقة ارتباط خطي

$$\begin{aligned}
0+0x+0x^2+0x^3+0x^4 \\
&= \alpha_1(x-2)+\alpha_2(x^2-4x+4)+\alpha_3(x^3-6x^2+12x-8) \\
&\quad +\alpha_4(x^4-8x^3+24x^2-32x+16) \\
&= \alpha_4x^4+(\alpha_3-8\alpha_4)x^3+(\alpha_2-6\alpha_3+24\alpha_4)x^2 \\
&\quad +(\alpha_1-4\alpha_2+12\alpha_3-32\alpha_4)x+ \\
&\quad (-2\alpha_1+4\alpha_2-8\alpha_3+16\alpha_4)
\end{aligned}$$

بمساواة المعاملات (مساواة المتجهات في P_4) نحصل عل نظام المعادلات المتجانس

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= 0 \\
\alpha_3-8\alpha_4 &= 0 \\
\alpha_2-6\alpha_3+24\alpha_4 &= 0 \\
\alpha_1-4\alpha_2+12\alpha_3-32\alpha_4 &= 0 \\
-2\alpha_1+4\alpha_2-8\alpha_3+16\alpha_4 &= 0
\end{aligned}$$

نكون المصفوفة الموسعة لهذا النظام ونختزلها صفيا لنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مع الحل التافه فقط لهذا النظام المتجانس، نستنتج أن الكميات القياسي الذي يكون علاقة ارتباط خطي هي التافهة ومن ثم المجموعة S تكون مستقلة خطيا. أخيرا، S اكتسبت الحق في أن يقال عنها أساس لـ W.

مثال ٤-٤-٦. في مثال ٤-٣-٨ اكتشفنا أن

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

تكون مجموعة مولدة للفضاء الجزئي

$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + 3b - c - 5d = 0, \; -2a - 6b + 3c + 14d = 0 \right\}$$

من الفضاء الاتجاهي لكل المصفوفات من الحجم 2×2، M_{22}. أيضا يمكننا أن نبين أنها مستقلة خطيا في Z (أو M_{22})، ومن ثم تكون أساس لـ Z. نبدأ بعلاقة ارتباط خطي

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -3\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 \\ -4\alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

باستخدام تعريف تساوي المصفوفات نحصل على نظام المعادلات المتجانس

$$-3\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 = 0$$
$$-4\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$

يمكننا اختزال مصفوفة المعاملات لهذا النظام المتجانس، ولكن هذا غير ضروري. المعادلتان الثانية والرابعة تخبرنا أن $\alpha_1 = 0$ و $\alpha_2 = 0$ هو الحل الوحيد لهذا النظام المتجانس. هذا يؤهل المجموعة Q لتكون مستقلة خطيا، حيث أن علاقة الارتباط الخطي الوحيدة هي العلاقة التافهة. لذلك Q تكون أساس لـ Z.

رأينا أن العديد من المجموعات المصاحبة لمصفوفة تكون فضاءات جزئية من الفضاء الاتجاهي لمتجهات الأعمدة. على وجه التحديد هذه هي فضاء الصفرية (نظرية ٤-٢-٨) ، فضاء الأعمدة (نظرية ٤-٢-١٥) ، فضاء الصفوف (نظرية ٤-٢-١٦) وفضاء الصفرية الأيسر (نظرية ٤-٢-١٧). كفضاءات جزئية هي فضاءات اتجاهية ومن الطبيعي أن نسأل عن أساسات لهذه الفضاءات. نظريات ٢-٤-١٧، ٣-٥-٦، ٣-٥-١٦ كل منها خلاصتها تزودنا بمجموعات مستقلة خطيا تولد فضاء الصفرية، فضاء الأعمدة وفضاء الصفوف، على الترتيب.

لإيجاد أساس لفضاء الصفرية الأيسر، يمكننا استخدام تعريف هذا الفضاء الجزئي (تعريف ٣-٦-١) وتطبيق نظرية ٢-٤-١٧. أو نظرية ٣-٦-٧ تخبرنا أن فضاء الصفرية الأيسر يمكن التعبير عنه كفضاء صفوف ونستخدم نظرية ٣-٥-١٦.

أساسات الفضاءات الجزئية المولدة بمتجهات الأعمدة

فيما سبق رأينا العديد من الأساسات في فضاءات اتجاهية مختلفة. في هذا القسم والقسم التالي، سوف نعتبر عملية بناء اساسات لـ $\mathbb{C}^m$ وفضاءاته الجزئية.

نفرض أنه لدينا فضاء جزئي من $\mathbb{C}^m$ تم تكوينه كمولد من مجموعة متجهات، S، و S ليست بالضرورة تكون مستقلة خطيا. نظرية ٣-٥-١٤ تخبرنا بأن المصفوفات المتكافئة صفيا لها فضاءات صفوف متطابقة، بينما نظرية ٣-٥-١٦ تخبرنا بأن الصفوف غير الصفرية للمصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل تكون أساس لفضاء الصفوف. هذه النظريات تزودنا بأداة لسرعة الحسابات في إيجاد أساس للفضاء الجزئي المعبر عنه بداية كمجموعة مولدة.

مثال ٤-٤-٧. عندما عرفنا المجموعة المولدة بمتجهات الأعمدة لأول مرة في مثال ٢-٣-٨ نظرنا إلى المجموعة

$$W = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

وأعيننا تجاه تحقيق أن W مولدة بمجموعة أصغر. ببناء علاقات ارتباط خطي رأينا أنه يمكننا حذف متجهين ونكتب W كمجموعة مولدة بالمتجهين الآخرين. هذا المتجهان المتبقيان يكونان مجموعة مستقلة خطيا، على الرغم من أننا لم نكن نعرف ذلك في وقتها.

الآن نعلم أن W فضاء جزئي ويجب أن يكون له أساس. نعتبر المصفوفة C التي صفوفها هي المتجهات في مجموعة توليد W،

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \\ -7 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

إذن، من تعريف ٣-٥-١٢، فضاء صفوف C سوف يكون W، $R(C) = W$. نظرية ٣-٥-١٦ تخبرنا بأنه إذا اختزلنا C صفيا، فإن الصفوف غير الصفرية في الشكل الصفي المدرج المختزل سوف تكون أساس لـ $R(C)$، ومن ثم أساس لـ W. الآن نفعل ذلك، C تختزل إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا حولنا الصفوف غير الصفرية إلى متجهات أعمدة نحصل على الأساس

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{11} \end{bmatrix} \right\}$$

و

$$W = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{11} \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

لأسباب جمالية، نرغب في ضرب كل متجه من B في 11، والذي لن يغير من خواص الأستقلال الخطي أو التوليد لـ B. لذلك يمكننا أيضا كتابة

$$W = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

مثال ٤-٤-٨. في مثال ٢-٥-٢ بدأنا بمجموعة من $n = 4$ متجهات من $\mathbb{C}^5$

$$R = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 6 \\ -11 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

وعرفنا $V = \langle R \rangle$. هدفنا من هذه المسألة كان إيجاد علاقة ارتباط خطي على متجهات R، حل المعادلة الناتجة في واحد من المتجهات وأعد التعبير عن V كمجموعة مولدة بمجموعة من ثلاثة متجهات.

هنا طريقة أخرى لتحقيق شيئا من هذا القبيل. فضاء الصفوف للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & -11 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

يساوي $\langle R \rangle$. من نظرية ٣-٥-١٦ يمكننا اختزال المصفوفة صفيا، نهمل أي صف صفري، ونستخدم الصفوف غير الصفرية كمتجهات أعمدة تكون أساس لفضاء صفوف A. اختزال A صفيا يعطينا المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{30}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{17} & -\frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{17} & -\frac{8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{17} \\ \frac{30}{17} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{25}{17} \\ -\frac{2}{17} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{17} \\ -\frac{8}{17} \end{bmatrix} \right\}$$

يكون أساس لـ V. نظريتنا تخبرنا أن هذا أساس، لسنا في حاجة للتحقق من أن الفضاء الجزئي المولد بثلاث متجهات (بدلا عن أربعة) هو نفس الفضاء الجزئي، ولسنا في حاجة للتحقق من أننا وصلنا إلى النهاية في المجموعة المختزلة، حيث أن المجموعة من ثلاث متجهات مضمون أنها مستقلة خطيا.

الأساسات والمصفوفات غير الشاذة

المصدر السريع لاكتشاف أساس لـ $\mathbb{C}^m$ هو مجموعة أعمدة مصفوفة غير شاذة.

نظرية ٤-٤-٩. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم m. أعمدة A تكون أساس لـ $\mathbb{C}^m$ إذا وفقط إذا كان A مصفوفة غير شاذة.

البرهان: نفرض أن أعمدة A تكون أساس لـ $\mathbb{C}^m$. إذن تعريف الأساس يخبرنا أن مجموعة أعمدة A تكون مستقلة خطيا. ومن ثم نظرية ٢-٤-١٤ تخبرنا أن A تكون غير شاذة.

من جهة أخرى، نفرض أن A تكون غير شاذة. إذن من نظرية ٢-٤-١٤ هذه مجموعة من الأعمدة المستقلة خطيا. نظرية ٣-٥-١٠ تقول أنه لمصفوفة غير شاذة، $C(A) = \mathbb{C}^m$. هذا يكافئ قولنا أن أعمدة A تكون مجموعة مولدة للفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^m$. كمجموعة مستقلة خطيا مولدة، أعمدة A تتأهل كأساس لـ $\mathbb{C}^m$.

مع هذا التكافؤ الجديد للمصفوفة غير الشاذة، يمكننا تحديث قائمة التكافؤات.

نظرية ٤-٤-١٠. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. العبارات التالية تكون متكافئة

١- A مصفوفة غير شاذة.
٢- الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A هو مصفوفة الوحدة.
٣- الفضاء الصفري للمصفوفة A يحتوي فقط المتجه الصفري، أي أن $N(A)=\{0\}$.
٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار ممكن للمتجه b.
٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.
٦- A تكون منعكسة.
٧- فضاء الأعمدة لـ A يكون $\mathbb{C}^n$ ، $C(A)=\mathbb{C}^n$.
٨- أعمدة A تكون أساس لـ $\mathbb{C}^n$.

البرهان: بإضافة التكافؤ الجديد للمصفوفة غير الشاذة في نظرية ٤-٤-٩ إلى نظرية ٣-٥-١١ نحصل على النظرية.

الأساسات المتعامدة والاحداثيات

في فصل ٢-٦، تعرفنا على المجموعات المتعامدة من المتجهات في $\mathbb{C}^m$، وعلمنا أن المجموعات المتعامدة تكون تلقائيا مستقلة خطيا (نظرية ٢-٦-١٩). عندما تكون مجموعة متعامدة أيضا مولدة لفضاء جزئي من $\mathbb{C}^m$، فإن المجموعة تكون أساس. وعندما تكون مجموعة عيارية متعامدة، فإن المجموعة تكون أساس لطيف لايصدق. سوف نسجل هذا التوضيح في نظرية، ولكن أولا نعتبر كيفية تصنيع مثل هذه المجموعة.

نفرض أن W فضاء جزئي من $\mathbb{C}^m$ له أساس B. إذن B تولد W وتكون مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات غير الصفرية. يمكننا تطبيق عملية جرام- شميدت والحصول على مجموعة مستقلة خطيا T بحيث $\langle T\rangle=\langle B\rangle=W$ و T تكون متعامدة. بتعبير آخر، T تكون أساس لـ W و مجموعة متعامدة. بجعل معيار كل متجه في T يساوي

1، يمكننا تحويل T إلى مجموعة عيارية متعامدة بدون تدمير الخواص التي تجعلها أساس لـ W. باختصار، يمكننا تحويل أي أساس إلى أساس عياري متعامد.

المصفوفات الواحدية تكون مصدر آخر جيد للأساسات العيارية المتعامدة. نفرض أن Q مصفوفة واحدية من الحجم n. إذن أعمدة المصفوفة، وعددها n ، تكون مجموعة عيارية متعامدة (نظرية ٣-٤-١٠) والتي من ثم تكون مستقلة خطيا (نظرية ٢-٦-١٩). حيث أن Q منعكسة (نظرية ٣-٤-٦) فإنها تكون غير شاذة ومن ثم أعمدة Q تولد $\mathbb{C}^n$ (نظرية ٣-٥-١٠). لذلك أعمدة المصفوفة الواحدية من الحجم n تكون أساس عياري متعامد لـ $\mathbb{C}^n$.

لماذا كل هذه الضجة حول الأساسات العيارية المتعامدة؟ نظرية ٤-٣-١٠ تخبرنا بأن أي متجه في فضاء اتجاهي يمكن أن يكتب بصورة وحيدة كتركيبة خطية من متجهات الأساس. بالنسبة لأساس عياري متعامد، إيجاد الكميات القياسية لهذه التركيبة الخطية يكون سهل للغاية، وهذا هو محتوى النظرية التالية. علاوة على ذلك، مع المتجهات مكتوبة بهذه الطريقة الحسابات والتحليل تصبح أكثر سهولة.

نظرية ٤-٤-١١. نفرض أن $B=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_p\}$ أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي W من $\mathbb{C}^m$. لأي $w\in W$ يكون

$$w=\langle v_1,w\rangle v_1+\langle v_2,w\rangle v_2+\langle v_3,w\rangle v_3+\ldots.+\langle v_p,w\rangle v_p$$

البرهان: لأن B أساس لـ W ، يمكننا كتابة w بصورة وحيدة كتركيبة خطية من متجهات B. ليس هذا الذي يجعل هذه النظرية مثيرة للاهتمام. المثير للاهتمام هو أن الكميات القياسية المعينة تكون أيسر في الحساب. لسنا في حاجة إلى حل نظام كبير من المعادلات. مجرد القيام بعمل الضرب الداخلي لـ w مع v_i لنصل إلى معامل v_i في التركيبة الخطية.

لذلك نبدأ البرهان بكتابة w كتركيبة خطية من متجهات B، باستخدام كميات قياسية غير معلومة،

$$w=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\ldots.+\alpha_pv_p$$

ونحسب

$$\begin{aligned}\langle v_i, w\rangle &= \left\langle v_i, \sum_{k=1}^{p}\alpha_k v_k\right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{p}\langle v_i, \alpha_k v_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\langle v_i, v_k\rangle \\ &= \alpha_i\langle v_i, v_i\rangle + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\alpha_k\langle v_i, v_k\rangle \\ &= \alpha_i(1) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\alpha_k(0) \\ &= \alpha_i\end{aligned}$$

وهذا يكمل البرهان.

مثال ٤-٤-١٢. المجموعة

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \left\{\begin{bmatrix}1+i\\1\\1-i\\i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1+5i\\6+5i\\-7-i\\1-6i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7+34i\\-8-23i\\-10+22i\\30+13i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2-4i\\6+i\\4+3i\\6-i\end{bmatrix}\right\}$$

قد اقترح، وبالفعل تأكدنا، أنها مجموعة متعامدة وذلك في مثال... الآن دعنا نجعل كل متجه معياره الوحدة، ومن ثم نكون مجموعة عيارية متعامدة في $\mathbb{C}^4$. إذن من نظرية ٢-٦-١٩ هذه المجموعة تكون مستقلة خطيا وبالتالي تكون أساس لـ $\mathbb{C}^4$. أولا نعين معيار كل متجه، نجد أن

$$\|x_1\| = \sqrt{6}, \quad \|x_2\| = \sqrt{174}, \quad \|x_3\| = \sqrt{3451}, \quad \|x_4\| = \sqrt{119}$$

لذلك الأساسي العياري المتعامد يكون

$$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1+i\\1\\1-i\\i\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{174}}\begin{bmatrix}1+5i\\6+5i\\-7-i\\1-6i\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{3451}}\begin{bmatrix}-7+34i\\-8-23i\\-10+22i\\30+13i\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{119}}\begin{bmatrix}-2-4i\\6+i\\4+3i\\6-i\end{bmatrix}\right\}$$

الآن لتوضيح نظرية ٤-٤-١١ نختار أي متجه في $\mathbb{C}^4$، ليكن

$$w=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\4\end{bmatrix}$$

ونحسب

$$\langle w,v_2\rangle=\frac{-19+30i}{\sqrt{174}} \quad ، \quad \langle w,v_1\rangle=\frac{-5i}{\sqrt{6}}$$

$$\langle w,v_4\rangle=\frac{6+12i}{\sqrt{119}} \quad ، \quad \langle w,v_3\rangle=\frac{120-211i}{\sqrt{3451}}$$

إذن نظرية ٤-٤-١١ تضمن أن

$$\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\4\end{bmatrix}=\frac{-5i}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1+i\\1\\1-i\\i\end{bmatrix}\right)+\frac{-19+30i}{\sqrt{174}}\left(\frac{1}{\sqrt{174}}\begin{bmatrix}1+5i\\6+5i\\-7-i\\1-6i\end{bmatrix}\right)$$

$$+\frac{120-211i}{\sqrt{3451}}\left(\frac{1}{\sqrt{3451}}\begin{bmatrix}-7+34i\\-8-23i\\-10+22i\\30+13i\end{bmatrix}\right)+\frac{6+12i}{\sqrt{119}}\left(\frac{1}{\sqrt{119}}\begin{bmatrix}-2-4i\\6+i\\4+3i\\6-i\end{bmatrix}\right)$$

مثال ٤-٤-١٣. المجموعة

$$\{x_1,x_2,x_3\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

مستقلة خطياً، باستخدام عملية جرام- شميدت يمكن تحويلها إلى مجموعة متعامدة ومن ثم نحولها إلى مجموعة عيارية متعامدة

$$B=\{v_1,v_2,v_3\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

والتي من ثم تكون أساس عياري متعامد لـ $\mathbb{C}^3$. مع هذه المتجهات الثلاثة في $\mathbb{C}^3$، كلها بعناصر حقيقية، الضرب الداخلي يتحول إلى الضرب العادي (الضرب القياسي) والثنائيات المتعامدة من المتجهات يمكن أن تمثل كأزواج متعامدة من الاتجاهات. لذلك المتجهات في B تخدم كبدائل للمحاور في الفضاء الثلاثي، أو متجهات الوحدة العادية في الفضاء الثلاثي $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$. نود أن نجزئ المتجهات الاختيارية إلى مركبات في اتجاهات كل من متجهات الأساس. نظرية ٤-٤-١١ تخبرنا كيف نفعل ذلك.

نفرض أننا اخترنا المتجه $w=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$. نحسب .

$$\langle w,v_3\rangle=\frac{8}{\sqrt{3}} \quad ، \langle w,v_2\rangle=\frac{3}{\sqrt{2}} \quad ، \quad \langle w,v_1\rangle=\frac{5}{\sqrt{6}}$$

إذن نظرية ٤-٤-١١ تضمن أن

$$\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}=\frac{5}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)+\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

ليس فقط أعمدة المصفوفة الواحدية تكون أساس عياري متعامد، ولكن يوجد ترابط عميق بين الأساسات العيارية المتعامدة والمصفوفات الواحدية. بشكل غير رسمي، النظرية التالية تقول أنه إذا حولنا كل متجه في أساس عياري متعامد بضربه في مصفوفة واحدية، فإن المجموعة الناتجة سوف تكون أساس عياري متعامد آخر. وأكثر من ذلك بشكل ملحوظ، أي مصفوفة بهذه الخاصية يجب أن تكون واحدية.

نظرية ٤-٤-١٤. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n و $B=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ أساس عياري متعامد لـ $\mathbb{C}^n$. نعرف

$$C=\{Ax_1,Ax_2,Ax_3,\ldots,Ax_n\}$$

إذن A تكون مصفوفة واحدية إذا وفقط إذا كان C أساس عياري متعامد لـ $\mathbb{C}^n$.

البرهان: نفرض أن A مصفوفة واحدية ونبرهن عدة حقائق حول C. أولا نختبر أن C مجموعة عيارية متعامدة. من نظرية ٣-٤-١٢ لـ $i \neq j$

$$\langle Ax_i, Ax_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

أيضا من نظرية ٣-٤-١٢ لـ $1 \leq i \leq n$

$$\|Ax_i\| = \|x_i\| = 1$$

وبما أن C مجموعة عيارية متعامدة، نظرية ٢-٦-١٩ تؤكد الاستقلال الخطي لـ C. بإثبات أن أعمدة متجهات C تكون مجموعة مستقلة خطيا، المصفوفة التي أعمدتها متجهات C تكون غير شاذة (نظرية ٢-٤-١٤) ومن ثم هذه المتجهات تكون أساس لـ $\mathbb{C}^n$ من نظرية ٤-٤-٩.

الآن، نفرض أن C مجموعة عيارية متعامدة. نفرض y متجه اختياري من $\mathbb{C}^n$. حيث أن B تولد $\mathbb{C}^n$، توجد كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ بحيث

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n$$

الآن

$$A^* A y = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, A^* A y \rangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle x_i, A^* A \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\rangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} A^* A a_j x_j \right\rangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} a_j A^* A x_j \right\rangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x_i, a_j A^* A x_j\rangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \langle x_i, A^* A x_j\rangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \langle A x_i, A x_j\rangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_j \langle A x_i, A x_j\rangle x_i + \sum_{l=1}^{n} a_l \langle A x_l, A x_l\rangle x_l$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_j (0) x_i + \sum_{l=1}^{n} a_l (1) x_l$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} 0 + \sum_{l=1}^{n} a_l x_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_l x_l$$

$$= y$$

$$= I_n y$$

حيث أن اختيار y كان اختياري، نظرية ٣-٢-٥ تخبرنا أن $A^* A = I_n$ ومن ثم A تكون واحدية.

تمارين ٤-٤

١- أوجد أساس لـ $\langle S\rangle$، حيث

$$.S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\1\\3\end{bmatrix} \right\}$$

٢- أوجد أساس للفضاء الجزئي W من $\mathbb{C}^4$ ،

$$.W=\left\{\begin{bmatrix} a+b-2c \\ a+b-2c+d \\ -2a+2b+4c-d \\ b+d \end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{C}\right\}$$

٣- أوجد أساس للفضاء الاتجاهي T للمصفوفات المثلثة السفلى من الحجم 3 .

٤- أوجد أساس للفضاء الجزئي Q من P_2 ،

$$Q=\{p(x)=a+bx+cx^2 : p(0)=0\}$$

٥- أوجد أساس للفضاء الجزئي R من P_2 ،

$$R=\{p(x)=a+bx+cx^2 : p'(0)=0\}$$

حيث p' هو المشتقة التفاضلية الأولى لـ p.

٤-٥ البعد Dimension

معظم الفضاءات الاتجاهية التي تم احصاؤها لها حجم لانهائي. ولكن بعضها أكبر وأغنى من البعض الآخر. البعد، عندما يعرف بطريقة مناسبة، سوف يقيس حجم الفضاء الاتجاهي، ويعتبر أداة مفيدة لدراسة خواصه. ربما يكون لديك بعض المفاهيم المشوشة عن التعريف الرياضي، حاول نسيان هذا الانطباع وانظر إلى المفهوم الجديد المعطى هنا.

تعريف ٤-٥-١. نفرض أن V فضاء اتجاهي و $\{v_1,v_2,v_3,...,v_t\}$ أساس لـ V. إذن **بُعد** V dimension يعرف بالصورة $\dim(V)=t$.
إذا كان V ليس له أساس، نقول أن V **لانهائي البعد**.

هذا أبسط تعريف. خذ أساس، أي أساس، عد عدد المتجهات التي يحتويها. هذا هو البعد. ومع ذلك هذه البساطة تسبب مشكلة. إذا اعطينا فضاء اتجاهي، كل منا يمكنه تكوين أساسات مختلفة، تذكر أن أي فضاء اتجاهي قد يكون له عديد من الأساسات. هل يمكن أن تختلف أعداد المتجهات في الأساسات المختلفة؟ حسب معلوماتنا الجارية عن الفضاءات الاتجاهية، يمكننا القول بأن البعد ليس معرف جيدا. لحسن الحظ، توجد نظرية تصحح هذه المشكلة.

في تطوير منطقي صارم، النظريتان التاليتان تتقدمان تعريف البعد. العديد من النظريات اللاحقة سوف تنسب إلى النتيجة الأساسية التالية.

نظرية ٤-٥-٢. نفرض $S=\{v_1,v_2,v_3,...,v_t\}$ مجموعة منتهية من المتجهات التي تولد الفضاء الاتجاهي V. إذن أي مجموعة مكونة من $t+1$ أو أكثر من متجهات V تكون مرتبطة خطيا.

البرهان: نود إثبات أن أي مجموعة من $t+1$ أو أكثر من متجهات V تكون مرتبطة خطيا. لذلك نبدأ بمجموعة اختيارية من متجهات V، $R=\{u_1,u_2,u_3,...,u_m\}$، حيث $m>t$. الآن نكون علاقة ارتباط خطي غير تافهة على R. كل متجه $u_1,u_2,u_3,...,u_m$ يمكن كتابته كتركيبة خطية من المتجهات $v_1,v_2,v_3,...,v_t$ لأن S تولد V. هذا يعني أنه توجد كميات قياسية a_{ij}، $1\le i\le t$، $1\le j\le m$، بحيث

$$u_1=a_{11}v_1+a_{21}v_2+a_{31}v_3+...+a_{t1}v_t$$

$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \ldots + a_{t2}v_t$$
$$u_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 + \ldots + a_{t3}v_t$$
$$\vdots$$
$$u_m = a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + a_{3m}v_3 + \ldots + a_{tm}v_t$$

الآن نكون النظام المتجانس من t معادلة في m متغير $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$، حيث المعاملات هي الكميات القياسية المكتشفة a_{ij}

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3m}x_m = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + a_{t3}x_3 + \ldots + a_{tm}x_m = 0$$

هذا النظام المتجانس عدد المتغيرات فيه أكبر من عدد المعادلات (حيث الفرض أن $m > t$)، لذلك من نظرية ١-٤-٨ يوجد عدد لانهائي من الحلول. نختار حل غير تافه ونرمز له بالرمز $x_1 = c_1$، $x_2 = c_2$، $x_3 = c_3$، ...، $x_m = c_m$. كحل للنظام المتجانس، إذن يكون

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + \ldots + a_{1m}c_m = 0$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 + \ldots + a_{2m}c_m = 0$$
$$a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 + \ldots + a_{3m}c_m = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{t1}c_1 + a_{t2}c_2 + a_{t3}c_3 + \ldots + a_{tm}c_m = 0$$

كتجمع غير تافه، الكميات القياسية $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ تزودنا بعلاقة ترابط غير تافهة، كما هو مطلوب

$$\begin{aligned}
&c_1u_1, c_2u_2, c_3u_3, \ldots, c_mu_m \\
&\quad = c_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \ldots + a_{t1}v_t) \\
&\qquad + c_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \ldots + a_{t2}v_t) \\
&\qquad + c_3(a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 + \ldots + a_{t3}v_t) \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+c_m(a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + a_{3m}v_3 + \dots + a_{tm}v_t) \\
&= c_1a_{11}v_1 + c_1a_{21}v_2 + c_1a_{31}v_3 + \dots + c_1a_{t1}v_t \\
&\quad +c_2a_{12}v_1 + c_2a_{22}v_2 + c_2a_{32}v_3 + \dots + c_2a_{t2}v_t \\
&\quad +c_3a_{13}v_1 + c_3a_{23}v_2 + c_3a_{33}v_3 + \dots + c_3a_{t3}v_t \\
&\qquad \vdots \\
&\quad +c_ma_{1m}v_1 + c_ma_{2m}v_2 + c_ma_{3m}v_3 + \dots + c_ma_{tm}v_t \\
&= (c_1a_{11} + c_2a_{12} + c_3a_{13} + \dots + c_ma_{1m})v_1 \\
&\quad +(c_1a_{21} + c_2a_{22} + c_3a_{23} + \dots + c_ma_{2m})v_2 \\
&\quad +(c_1a_{31} + c_2a_{32} + c_3a_{33} + \dots + c_ma_{3m})v_3 \\
&\qquad \vdots \\
&\quad +(c_1a_{t1} + c_2a_{t2} + c_3a_{t3} + \dots + c_ma_{tm})v_t \\
&= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + \dots + a_{1m}\mathrm{c}_m)v_1 \\
&\quad +(a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 + \dots + a_{2m}\mathrm{c}_m)v_2 \\
&\quad +(a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 + \dots + a_{3m}\mathrm{c}_m)v_3 \\
&\qquad \vdots \\
&\quad +(a_{t1}c_1 + a_{t2}c_2 + a_{t3}c_3 + \dots + a_{tm}\mathrm{c}_m)v_t \\
&= 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_t \\
&= 0 + 0 + 0 + \dots + 0
\end{aligned}
$$

وهكذا أثبتنا بما لا يدع مجالا للشك أن R مرتبطة خطيا.

البرهان الذي أعطي أعلى يحتوي تعبيرات معقدة وتحتوي غالبا على أدلة مزدوجة. يمكن كتابة البرهان بصورة أكثر إحكاما وذلك باستخدام رمز الجمع لنحصل على تعبيرات أكثر إحكاما.

برهان بديل: نود إثبات أن أي مجموعة من $t+1$ أو أكثر من متجهات V تكون مرتبطة خطيا. لذلك نبدأ بمجموعة اختيارية من متجهات V ، $R=\{u_j : 1 \le j \le m\}$ حيث $m > t$. الآن نكون علاقة ارتباط خطي غير تافهة على R. كل متجه u_j ، $1 \le j \le m$ يمكن كتابته

كتركيبة خطية من المتجهات v_i ، $1 \le i \le t$ لأن S تولد V. هذا يعني أنه توجد كميات قياسية a_{ij}، $1 \le i \le t$ ، $1 \le j \le m$، بحيث

$$u_j = \sum_{i=1}^{t} a_{ij} v_i \qquad 1 \le j \le m$$

الآن نكون النظام المتجانس من t معادلة في m متغير x_j، $1 \le j \le m$ ،حيث المعاملات هي الكميات القياسية المكتشفة a_{ij}

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0 \qquad 1 \le i \le t$$

هذا النظام المتجانس عدد المتغيرات فيه أكبر من عدد المعادلات (حيث الفرض أن $m > t$)، لذلك من نظرية ١-٤-٨ يوجد عدد لانهائي من الحلول. نختار حل غير تافه ونرمز له بالرمز $x_j = c_j$ ، $1 \le j \le m$.

كحل للنظام المتجانس، إذن يكون $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j$ ، حيث $1 \le i \le t$. كتجمع غير تافه، الكميات القياسية c_j ، $1 \le j \le m$، تزودنا بعلاقة ترابط غير تافهة، كما هو مطلوب

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} c_j u_j &= \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\sum_{i=1}^{t} a_{ij} v_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{t} c_j a_{ij} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} c_j a_{ij} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j v_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j \right) v_i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{t}(0)v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{t}0$$
$$= 0$$

وهكذا أثبتنا بما لا يدع مجالا للشك أن R مرتبطة خطيا.

نظرية ٤-٥-٢ يمكن النظر إليها كتعميم لنظرية ٢-٤-١١. نعلم أن $\mathbb{C}^m$ لها أساس من m متجه منه (نظرية ٤-٤-٢)، لذلك هي تكون مجموعة من m متجه تولد $\mathbb{C}^m$. من نظرية ٤-٥-٢، أي مجموعة بها أكثر من m متجه من $\mathbb{C}^m$ سوف تكون مرتبطة خطيا. ولكن هذه هي خلاصة نظرية ٢-٤-١١. جمال نظرية ٤-٥-٢ أنها تطبق في أي فضاء اتجاهي. نوضح عمومية هذه النظرية وقوتها بالمثال التالي.

مثال ٤-٥-٣. في مثال ٤-٥-٣ بينا أن

$$S = \{x-2, x^2-4x+4, x^3-6x^2+12x-8,$$
$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16$$

تكون مجموعة مولدة لـ $W = \{p(x) : p \in P_4, p(2) = 0\}$. لذلك يمكننا تطبيق نظرية ٤-٥-٢ على W مع $t = 4$. هنا مجموعة من خمسة متجهات من W،

$$T = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \subseteq W$$
$$p_1 = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 8$$
$$p_2 = -x^3 + 6x^2 - 5x - 6$$
$$p_3 = 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 7x + 2$$
$$p_4 = -x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 6x$$
$$p_5 = 4x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 5x - 6$$

من نظرية ٤-٥-٢ نستنتج أن T تكون مرتبطة خطيا دون أية حسابات إضافية.

نظرية ٤-٥-٢ هي في الواقع مفيدة، ولكن هدفنا الأساسي من إثباتها كان التأكد من أن تعريف الأساس معرف جيدا.

نظرية ٤-٥-٤. نفرض أن V فضاء اتجاهي بأساس منتهي B ونفرض أن C أساس آخر. إذن B و C يكون لهما نفس الحجم.

البرهان: نفرض أن C يحتوي متجهات أكثر من B. كأساس B تكون مجموعة توليد لـ V، لذلك نظرية ٤-٥-٢ تقول أن C مرتبطة خطيا. ومع ذلك، هذا يناقض حقيقة أن C كأساس مستقلة خطيا. لذلك C يجب أن يكون حجمها أقل من أو يساوي حجم B.

بنفس الأسلوب مع تبديل وضع B و C، نجد أن حجم B يكون أقل من أو يساوي حجم C.

من ذلك نستنتج أن عدد متجهات B يجب أن يساوي عدد متجهات C.

بعد الفضاءات الاتجاهية

الآن نجمع أبعاد بعض الفضاءات الاتجاهية.

نظرية ٤-٥-٥. بعد الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^m$ يساوي m.

البرهان: نظرية ٤-٤-٢ تعطي أساس عدد متجهاته m.

نظرية ٤-٥-٦. بعد الفضاء الاتجاهي P_n يساوي $n+1$.

البرهان: مثال ٤-٤-٣ يعطي أساس عدد متجهاته $n+1$.

نظرية ٤-٥-٧. بعد الفضاء الاتجاهي M_{mn} يساوي mn.

البرهان: مثال ٤-٤-٤ يعطي أساس عدد متجهاته mn.

مثال ٤-٥-٨. الآن من المعقول أن

$$Z=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2a+b+3c+4d=0,\ -a+3b-5c-2d=0\right\}$$

يكون فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي M_{22} (مثال ٤-٣-٨). لإيجاد بعد Z يجب أن نوجد أساس.

أولا نركز على الشروط التي تربط a، b، c و d. هذه تكون نظام متجانس من معادلتين في أربعة متغيرات بمصفوفة معاملات

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

يمكننا اختزالها صفيا لنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نعيد كتابة المعادلتان الممثلتان بالصفين في هذه المصفوفة، بالتعبير عن المتغيرين المستقلين (a و b) بدلالة المتغيرات الحرة (c و d)،

$$a=-2c-2d$$
$$b=c$$

يمكننا الآن كتابة عناصر Z كاملة بدلالة c و d ونجزئ النتيجة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2c-2d & c \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2c & c \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$
$$=c\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المعادلة تقول أن أي مصفوفة اختيارية في Z يمكن أن تكتب كتركيبة خطية من المتجهين

$$S=\left\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

لذلك

$$Z=\langle S\rangle=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

هل هاتان المصفوفتان (المتجهان) مستقلان؟ نبدأ بتكوين علاقة ارتباط خطي على S،

$$\alpha_1\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=O$$
$$\begin{bmatrix} -2\alpha_1-2\alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بمساواة العناصر في الصف الثاني نستنتج أن $\alpha_1=0$ و $\alpha_2=0$. لذلك علاقة الارتباط الخطي الوحيدة الممكنة هي العلاقة التافهة، ومن ثم S تكون مستقلة خطيا. إذن S تكون أساس للفضاء الاتجاهي V. أخيرا، يمكننا استخلاص أن $\dim(Z)=2$، حيث أن S بها عنصرين.

مثال ٤-٥-٩. في مثال ٤-٤-٥ بينا أن

$$S=\{x-2,x^2-4x+4,x^3-6x^2+12x-8,$$
$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16$$

يكون أساس للفضاء الجزئي $W = \{p(x) : p \in P_4, p(2) = 0\}$. لذلك $\dim(W) = 4$.

لاحظ أن $\dim(P_4) = 5$، من نظرية ٤-٥-٦، لذلك W تكون فضاء جزئي بعده 4 من فضاء اتجاهي بعده 5.

من الممكن أن يكون الفضاء الاتجاهي ليس له أساسات منتهية، في هذه الحالة نقول أن الفضاء بعده لانهائي. العديد من هذه الأمثلة المفضلة هو الفضاء الاتجاهي للدوال، والذي يؤدي إلى تراكيب مثل فضاء هيلبرت. سوف نركز حصريا على الفضاءات الاتجاهية نهائية البعد. الآن نعطي مثالا واحدا للفضاءات لانهائية البعد.

مثال ٤-٥-١٠. فضاء كثيرات الحدود غير محددة الدرجة. نعرف المجموعة P،

$$P = \{p(x) : \text{ كثيرة حدود في } x \ P(x)\}$$

العمليات تكون هي نفس العمليات المعرفة على P_n (مثال ٤-١-٤).

بدون أية قيود على درجة كثيرات الحدود، أي مجموعة منتهية مرشحة لتوليد P سوف تكون قاصرة. سوف نعطي برهان بالتناقض. نفرض أن بعد P منتهي، ليكن $\dim(P) = n$.

المجموعة $T = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ تكون مستقلة خطيا (تحقق) تحتوي $n+1$ كثيرة حدود من P. ومع ذلك أساس P سوف يكون مجموعة مولدة تحتوي n متجه من P. هذا الوضع يناقض نظرية ٤-٥-٢ إذن الفرض بأن بعد P منتهي يكون فرض خاطئ ومن ثم $\dim(P) = \infty$.

رتبة وصفرية مصفوفة

لأي مصفوفة، رأينا أنه يمكن أن يصاحبها عدة فضاءات جزئية (فضاء الصفرية، فضاء الأعمدة و فضاء الصفوف). كفضاءات اتجاهية، كل من هذه يكون له بعد، وبالنسبة إلى فضاء الصفرية وفضاء الأعمدة تكون مهمة بما يكفي لتبرير الأسماء.

تعريف ٤-٥-١١. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. **صفرية** A nullity، يرمز لها بالرمز $n(A)$، هي بعد فضاء الصفرية لـ A، أي أن $n(A) = \dim(N(A))$.

تعريف ٤-٥-١٢. نفرض A مصفوفة من الحجم $m\times n$. رتبة A rank، يرمز لها بالرمز $r(A)$، هي بعد فضاء الأعمدة لـ A، أي أن $r(A)=\dim(C(A))$.

مثال ٤-٥-١٣. نحسب صفرية ورتبة المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 3 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & -5 & -4 & -8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 6 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

لعمل ذلك. نختزل هذه المصفوفة صفيا، حيث أن ذلك سوف يساعدنا في تحديد أساسات لفضاء الصفرية وفضاء الأعمدة.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

من هذه المصفوفة المكافئة صفيا في الشكل الصفي المدرج المختزل نجد أن $D=\{1,3,4,6\}$ و $F=\{2,5,7\}$.

لكل دليل في D نظرية ٣-٥-٦ تنشئ متجه أساس واحد. في المجموع الأساس سوف يحتوي أربعة متجهات، لذلك فضاء الأعمدة سوف يكون له البعد 4، ونكتب $r(A)=4$.

لكل دليل في F نظرية ٢-٤-١٧ تنشئ متجه أساس واحد. في المجموع الأساس سوف يحتوي ثلاثة متجهات، لذلك فضاء الصفرية سوف يكون له البعد 3، ونكتب $n(A)=3$.

ليست مصادفة في المثال السابق أنه مع الشكل الصفي المدرج المختزل لمصفوفة يكون حساب صفرية ورتبة المصفوفة أمر يسير.

نظرية ٤-٥-١٤. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$ و B مصفوفة مكافئة لها صفيا في الشكل الصفي المدرج المختزل. نفرض أن

r ترمز إلى عدد الأعمدة المحورية في B (أو عدد الصفوف غير الصفرية). إذن $r(A)=r$ و $n(A)=n-r$.

البرهان: نظرية ٣ـ٥ـ٦ تزودنا بأساس لفضاء الأعمدة باختيار أعمدة A التي لها نفس أدلة الأعمدة المحورية في B. في تحليل B، كل قيادي 1 يزودنا بصف غير صفري وعمود محوري. لذلك يوجد r عمود في أساس $C(A)$.

نظرية ٢ـ٤ـ١٧ تزودنا بأساس لفضاء الصفرية وذلك بتكوين متجهات أساس فضا الصفرية لـ A من عناصر B، متجه أساس لكل عمود غير محوري. ومن ثم يوجد $n-r$ متجه عمود في أساس $n(A)$.

نظرية ٤ـ٥ـ١٥. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$. إذن $r(A)+n(A)=n$.

البرهان: نفرض أن r هو عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المكافئة صفيا في الشكل الصفي المدرج المختزل. من نظرية ٤ـ٥ـ١٤ $r(A)+n(A)=r+(n-r)=n$.

عندما أدخلنا r أول مرة كرمز قياسي لعدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل، قد تتصور أن r ترمز إلى الصفوف، هذا غير صحيح، إنها ترمز للرتبة.

رتبة وصفرية مصفوفة غير الشاذة

دعنا نلقي نظرة على رتبة وصفرية المصفوفة المربعة

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & 9 & -3 & 9 & -1 & 9 \\ -3 & -4 & 9 & 4 & -1 & 6 & -2 \\ -3 & -4 & 6 & -2 & 5 & 9 & -4 \\ 9 & -3 & 8 & -2 & -4 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 2 & 9 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

هذه تكافئ صفيا الشكل الصفي المدرج المختزل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والتي تحتوي $n = 7$ أعمدة و $r = 7$ صفوف غير صفرية. لذلك من نظرية ٤-٥-١٤ رتبة E، $r(E) = 7$ وصفرية E، $n(E) = 7 - 7 = 0$.

قيمة أي من الرتبة أو الصفرية كافية لتمييز المصفوفة غير الشاذة.

نظرية ٤-٥-١٦. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n. العبارات التالية تكون متكافئة.

١- A مصفوفة غير شاذة.

٢- رتبة A تساوي n، $r(A) = n$.

٣- صفرية A تساوي صفر، $n(A) = 0$.

البرهان: (١) $\Leftarrow$ (٢): نظرية ٣-٥-١٠ تخبرنا أنه إذا كانت A غير شاذة فإن $C(A) = \mathbb{C}^n$، لذلك فضاء الأعمدة يكون له البعد n، من نظرية ٤-٥-٥ ومن ثم رتبة A تساوي n.

(٢) $\Leftarrow$ (٣): نفرض أن $r(A) = n$. إذن نظرية ٤-٥-١٥ تعطي $n(A) = n - r(A) = n - n = 0$.

(٣) $\Leftarrow$ (١): نفرض أن $n(A) = 0$، لذلك أساس فضاء الصفرية يكون هو المجموعة الخالية. هذا يؤدي إلى $N(A) = \{0\}$ ونظرية ١-٥-١٢ تخبر بأن A تكون غير شاذة.

مع التكافؤ الجديد للمصفوفة غير الشاذة يمكننا تحديث قائمة التكافؤات (نظرية ٤-٤-١٠) لنحصل على النظرية التالية.

نظرية ٤-٥-١٧. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. العبارات التالية تكون متكافئة

١- A مصفوفة غير شاذة.

٢- الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A هو مصفوفة الوحدة.

٣- الفضاء الصفري للمصفوفة A يحتوي فقط المتجه الصفري، أي أن $N(A)=\{0\}$.
٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار ممكن للمتجه b.
٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.
٦- A تكون منعكسة.
٧- فضاء الأعمدة لـ A يكون $\mathbb{C}^n$ ، $C(A)=\mathbb{C}^n$.
٨- أعمدة A تكون أساس لـ $\mathbb{C}^n$.
٩- رتبة A تساوي n، $r(A)=n$.
١٠- صفرية A تساوي صفر، $n(A)=0$.

خواص البعد

مجرد أن يعرف بعد الفضاء الاتجاهي، فإن مسألة تحديد ما إذا كانت مجموعة من المتجهات مستقلة خطيا أو مرتبطة خطيا ، أو هل تولد الفضاء الاتجاهي يمكن غالبا أن تكون أيسر. في هذا الفصل نصوغ النظرية التي تعتبر العمود الفقري ومن ثم نطبقها على فضاء الأعمدة وفضاء الصفوف لمصفوفة. هذه النظرية سوف تساعدنا في وصف الأساس الفوقي لـ $\mathbb{C}^m$.

نبدأ بنظرية سوف نحتاج إليها فيما بعد. هذه النظرية تقول أنه يمكن توسيع مجموعة مستقلة خطيا، متجه في كل مرة، بإضافة متجه من خارج المجموعة المولدة بهذه المجموعة المستقلة خطيا، بحيث أن الجميع يحافظ على الاستقلال الخطي للمجموعة.

نظرية ٤-٥-١٨. نفرض أن V فضاء اتجاهي و S مجموعة متجهات من V مستقلة خطيا. نفرض أن w متجه بحيث $w \notin \langle S\rangle$. إذن المجموعة $S'=S\cup\{w\}$ تكون مستقلة خطيا.

البرهان: نفرض أن $S=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_m\}$ ونبدأ بعلاقة ارتباط خطي على S'

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\ldots+\alpha_mv_m+\alpha_{m+1}w=0$$

هناك حالتان يمكن اعتبارهما. أولا نفرض أن $\alpha_{m+1} = 0$ ، لذلك علاقة الارتباط الخطي على S' تصبح

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$$

ومن الاستقلال الخطي لـ S ، نستنتج أن $\alpha_1 = 0$، $\alpha_2 = 0$، $\alpha_3 = 0$، ...، $\alpha_m = 0$. ومن ثم كل الكميات القياسية في علاقة الارتباط الخطي على S' تكون جميعها أصفار.

ثانيا، نفرض أن $\alpha_{m+1} \neq 0$. إذن علاقة الارتباط الخطي على S' تكون

$$\alpha_{m+1} w = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3 - \ldots - \alpha_m v_m$$

$$w = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_{m+1}} v_3 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} v_m$$

هذه المعادلة تعبر عن w كتركيبة خطية من متجهات S، على عكس الفرض بأن $w \notin \langle S \rangle$ ، هذا يؤدي إلى تناقض.

الحالة الأولى تعطينا علاقة ارتباط خطي فقط على S' والحالة الثانية تؤدي إلى تناقض. لذلك S' تكون مجموعة مستقلة خطيا.

نظرية ٤-٥-١٩. نفرض أن V فضاء اتجاهي بعده t. نفرض أن $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ مجموعة متجهات من V. إذن

١- إذا كانت $m > t$ فإن S تكون مرتبطة خطيا.

٢- إذا كانت $m < t$ فإن S لا تولد V.

٣- إذا كانت $m = t$ و S مستقلة خطيا فإن S تولد V.

٤- إذا كانت $m = t$ و S تولد V فإن S تكون مستقلة خطيا.

البرهان: نفرض B أساس لـ V. حيث أن $\dim(V) = t$. تعريف الأساس ونظرية ٤-٥-٥ تؤدي إلى أن B تكون مجموعة مستقلة خطيا من t متجه تولد V.

١- نفرض على العكس أن S تكون مستقلة خطيا. إذن B تكون مجموعة متجهات أقل تولد V. وهذا يناقض نظرية ٤-٥-٢.

٢- نفرض على العكس أن S تولد V. إذن B تكون مجموعة أكبر من المتجهات مستقلة خطيا. وهذا يناقض نظرية ٤-٥-٢.

٣- نفرض على العكس أن S لا تولد V. إذن يمكننا اختيار متجه w بحيث $w \in V$ و $w \notin \langle S \rangle$. من نظرية ٤-٥-٢، المجموعة $S' = S \cup \{w\}$ تكون أيضا مجموعة مستقلة خطيا. إذن S' تكون مجموعة من $m+1 = t+1$ متجهات مستقلة خطيا، بينما B مجموعة من t متجه مستقلة خطيا تولد V. وهذا يناقض نظرية ٤-٥-٢.

٤- نفرض على العكس أن S تكون مرتبطة خطيا. إذن من نظرية ٢-٥-١ (والتي يمكن تحديثها، بدون أي تغيير في البرهان، إلى وضع الفضاء الاتجاهي العام)، يوجد متجه في S، ليكن v_k يكون تركيبة خطية من باقي المتجهات الأخرى في S. نفرض $S' = S \setminus \{v_k\}$، مجموعة المتجهات الأخرى في S. إذن من السهل بيان أن $V = \langle S \rangle = \langle S' \rangle$. لذلك المجموعة S' التي تحتوي $m-1 = t-1$ متجه تولد V، بينما B تكون مجموعة مستقلة خطيا من متجهات V، وهذا يناقض نظرية ٤-٥-٢.

هناك توتر في عملية بناء الأساس. جعل مجموعة كبيرة جدا ينتهي بنا إلى علاقة ارتباط خطي بين المتجهات. جعل مجموعة صغيرة يجعلها لا تكفي لتوليد الفضاء الاتجاهي كاملا. جعل مجموعة حجمها صحيح (البعد) نحتاج إلى إما الاستقلال الخطي أو التوليد ومن ثم نحصل على الخاصية الثانية مجانا. هذه الأفكار وضعت بصورة دقيقة في نظرية ٤-٥-١٩.

تصميم هذه النظرية والبرهان أيضا يستحق التعليق. الفروض تبدو حميدة. نفترض أننا نعلم بعد الفضاء الاتجاهي، ومن ثم نحن في الغالب نلقي نظرة على حجم المجموعة S. من ذلك نحصل على خلاصات كبيرة حول الاستقلال الخطي والتوليد. كل من البراهين الأربعة يعتمد في نهاية المطاف على التناقض مع نظرية ٤-٥-٢ ومن ثم بطريقة ما يمكن اعتبار النظرية كاملة كنتيجة لنظرية ٤-٥-٢ أجزاء البرهانين الثالث والرابع موازية لبعضها البعض، إدخال w باستخدام نظرية ٤-٥-١٩ أو إخراج v_k باستخدام نظرية ٢-٥-١ . ومن ثم نحصل على تناقض لنظرية ٤-٥-٢.

نظرية ٤-٥-١٩ مفيدة في تصميم الأمثلة وكأداة لبراهين أخرى. سوف نستخدمها غالبا لتجاوز التحقق من الاستقلال الخطي أو التوليد.

مثال ٤ـ٥ـ٢٠. في مثال ٤ـ٤ـ٣ وضحنا أن

$$B=\{1,x,x^2,x^3,\dots,x^n\}$$
$$C=\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,\dots,1+x+x^2+x^3+\dots+x^n\}$$

كلاهما يكون أساس لـ P_n. نفرض أننا أولا تحققنا أن B كانت أساس، ومن ثم سوف نعلم أن $\dim(P_n)=n+1$. حجم C يكون $n+1$، وهو الحجم الصحيح لتكون أساس. إذن نود التحقق من أن C مستقلة خطيا. لا يلزمنا إجراء أي مجهود لإثبات أن C تولد P_n، حيث نظرية ٤ـ٥ـ١٩ تسمح لنا باستنتاج هذه الخاصية لـ C مباشرة. لذلك يكون في استطاعتنا القول أن C أيضا تكون أساس لـ P_n.

مثال ٤ـ٥ـ٢١. في مثال ٤ـ٤ـ٤ بينا أن

$$B=\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

تكون أساس للفضاء الجزئي Z من M_{22}، حيث

$$Z=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}:2a+b+3c+4d=0,\ -a+3b-5c-d=0\right\}$$

هذه تخبرنا بأن $\dim(Z)=2$. هنا يمكننا إيجاد أساس آخر. يمكننا تصميم مصفوفتين جديدتين في Z بتكوين تراكيب خطية من مصفوفات B.

$$2\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$
$$3\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

المجموعة

$$C=\left\{\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-8 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

يكون لها الحجم الصحيح لأساس Z. دعنا ننظر في الاستقلال الخطي لهذه المجموعة. علاقة الارتباط الخطي

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-8 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}=O$$

$$\begin{bmatrix}2\alpha_1-8\alpha_2 & 2\alpha_1+3\alpha_2\\ 2\alpha_1+3\alpha_2 & -3\alpha_1+\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

تؤدي إلى نظام متجانس من المعادلات الخطية مصفوفة المعاملات له هي

$$\begin{bmatrix}2 & -8\\ 2 & 3\\ 2 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

تختزل صفيا إلى

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

لذلك، مع $\alpha_1=0$ و $\alpha_2=0$ كحل وحيد، المجموعة تكون مستقلة خطيا. الآن يمكننا تطبيق نظرية ٤-٥-١٩ لبيان أن C أيضا تولد Z ومن ثم تكون أساس آخر لـ Z.

مثال ٤-٥-٢٢. في مثال ٤-٤-٥ وضحنا أن

$$B=\{x-2,x^2-4x+4,x^3-6x^2+12x-8,\\ x^4-8x^3+24x^2-32x+16\}$$

تكون أساس لـ $W=\{p(x): p\in P_4,\ p(2)=0\}$. لذلك $\dim(W)=4$. المجموعة

$$\{3x^2-5x-2,\ 2x^2-7x+6,\ x^3-2x^2+x-2\}$$

تكون مجموعة جزئية من W (تحقق من ذلك)، وهي مستقلة خطيا (تحقق من ذلك). ومع ذلك، من نظرية ٤-٥-١٩ لا يمكن أن تولد W. المجموعة

$$\{3x^2-5x-2,\ 2x^2-7x+6,\ x^3-2x^2+x-2,\\ -x^4+2x^3+5x^2-10x,\ x^4-16\}$$

مجموعة جزئية أخرى من W ونظرية ٤-٥-١٩ تخبرنا أنه يجب أن تكون مرتبطة خطيا.
المجموعة
$$\{x-2,\, x^2-2x,\, x^3-2x^2,\, x^4-2x^3\}$$
مجموعة جزئية ثالثة من W ومستقلة خطيا. حيث أن لها الحجم الصحيح للأساس ومستقلة خطيا، فإنه من نظرية ٤-٥-١٩ تكون أيضا تولد W، ومن ثم تكون أساس لـ W.

كنتيجة بسيطة لنظرية ٤-٥-١٩ هي ملاحظة أن الفضاء الجزئي الفعلي يكون له بعد أصغر من بعد الفضاء الاتجاهي الأصلي.هذا قد يبدوا واضحا بصورة حدسية، ولكن يظل يحتاج إلى برهان، وسوف نورد هذه النتيجة في وقت لاحق.

نظرية ٤-٥-٢٣. نفرض أن U و V فضاءان جزئيان من الفضاء الاتجاهي W بحيث $U \underset{\neq}{\subset} V$. إذن $\dim(U) < \dim(V)$.

البرهان: نفرض أن $\dim(U)=m$ و $\dim(V)=t$. إذن U يكون لها أساس B من الحجم m. إذا كان $m>t$ ، فإنه من نظرية ٤-٥-١٩، B تكون مرتبطة خطيا، وهذا تناقض. إذا كانت $m=t$ ، من نظرية ٤-٥-١٩، B تولد V. إذن $U=\langle B\rangle=V$، وهذا أيضا تناقض. كل ما تبقى هو أن $m<t$ ، وهو النتيجة المطلوبة.

النظرية التالية تعتبر أداة قوية جدا لتحديد تساوي مجموعتين هما فضاءان جزئيان. لاحظ أن المعطيات تشتمل على تساوي عددين صحيحين (البعدين) بينما الخلاصة تشتمل على تساوي مجموعتين (فضاءان جزئيان).

نظرية ٤-٥-٢٤. نفرض أن U و V فضاءان جزئيان من الفضاء الاتجاهي W، بحيث $U\subseteq V$ و $\dim(U)=\dim(V)$. إذن $U=V$.

البرهان: سوف نستخدم البرهان بالتناقض. نفرض على العكس أن $U\neq V$، إذن يوجد متجه v بحيث $v\in V$ و $v\notin U$. نفرض $B=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_t\}$ أساس لـ U. من نظرية ٤-٥-١٨ تكون مجموعة $C=B\cup\{v\}=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_t,v\}$ مستقلة خطيا

من $t+1$ متجه في V. وحيث أن من الفرض، V لها نفس البعد مثل U (وهو t) فإنه من نظرية ٤-٥-١٩ C تكون أكبر في الحجم من أن تكون مستقلة خطيا. هذا التناقض يبين أن $U=V$.

الرتبة والمدور

الآن نبرهن واحدة من أكثر النظريات إثارة للدهشة حول المصفوفات. لاحظ قلة الفروض مع دقة الخلاصة.

نظرية ٤-٥-٢٥. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$. إذن $r(A)=r(A^t)$.

البرهان: نفرض أن أننا اختزلنا المصفوفة A لنحصل على المصفوفة B في الشكل الصفي المدرج المختزل، وأن B بها r صف غير صفري. الكمية r تشير إلى ثلاثة أشياء عن B: عدد العناصر 1s القيادية ، عدد الصفوف غير الصفرية وعدد الأعمدة المحورية.

نظرية ٣-٥-١٦ ونظرية ٣-٥-٦ كل منهما لها خلاصة تزودنا بأساس لفضاء الصفوف وفضاء الأعمدة، على الترتيب. في كل حالة هذا الأساس يحتوي r متجه. من هذه الملاحظات يكون

$$\begin{aligned}r(A) &= \dim(C(A))\\ &= r\\ &= \dim(R(A))\\ &= \dim(C(A^t))\\ &= r(A^t)\end{aligned}$$

هذه النظرية تقول أن فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة لمصفوفة يكون لهما نفس البعد، وهو شيء مدهش. هي لا تقول أن فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة متطابقان. في الواقع، إذا كانت المصفوفة غير مربعة، فإن حجم المتجهات (عدد عناصر المتجه) في كلا الفضاءين تكون مختلفة، ومن ثم المجموعات غير قابلة للمقارنة.

مثال ٤-٥-٢٦. نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 7 & -9\\ 2 & 8 & -1 & 3 & 9 & -13 & 7\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 & 12 & -8\\ -1 & -4 & 2 & 4 & 8 & -31 & 37\end{bmatrix}$$

الشكل الصفي المدرج المختزل لها هو

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك رتبة A تساوي 3. باختزال المدور صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{31}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهو ما يظهر أن رتبة المدور A^t أيضا تكون 3.

أن رتبة مصفوفة يساوي رتبة مدورها هذه تكون نتيجة أساسية ومدهشة. ومع ذلك بتطبيق نظرية ٣-٦-٧ يمكننا بسهولة تحديد بعد الفضاءات الجزئية المصاحبة لمصفوفة.

نظرية ٤-٥-٢٧. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B مصفوفة مكافئة لها صفيا في الشكل الصفي المدرج المختزل بها r صف غير صفري. إذن

١- $\dim(N(A)) = n - r$.

٢- $\dim(C(A)) = r$.

٣- $\dim(R(A)) = r$.

٤- $\dim(L(A)) = m - r$.

البرهان: إذا اختزلت A صفيا إلى مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل مع r صف غير صفري، فإن مصفوفة الشكل الصفي المختزل الموسع C (تعريف ٣-٦-٤) تكون من الحجم $r \times n$ وليس بها صفوف صفرية ولها r عمود محوري (نظرية ٣-٦-٦). بالمثل المصفوفة L من الشكل الصفي المختزل الموسع سوف تكون مصفوفة من الحجم $m - r \times m$ في الشكل الصفي المدرج المختزل وليس بها أصفار صفرية وبها $m - r$ عمود محوري (نظرية ٣-٦-٦).

$$\dim(N(A)) = \dim(N(C))$$ (نظرية ٣-٦-٧)
$$= n - r$$ (نظرية ٢-٤-١٧)
$$\dim(C(A)) = \dim(N(L))$$ (نظرية ٣-٦-٧)
$$= m - (m - r)$$ (نظرية ٢-٤-١٧)
$$= r$$
$$\dim(R(A)) = \dim(R(C))$$ (نظرية ٣-٦-٧)
$$= r$$ (نظرية ٣-٥-١٦)
$$\dim(L(A)) = \dim(R(L))$$ (نظرية ٣-٦-٧)
$$= m - r$$ (نظرية ٣-٥-١٦)

تمارين ٤-٥

١- أحسب صفرية ورتبة مصفوفة المعاملات لأنظمة المعادلات الخطية الواردة في تمارين ١-٢.

٢- أوجد بعد الفضاء الجزئي $W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ a+c \\ a+d \\ d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$ من $\mathbb{C}^4$.

٣- أوجد بعد الفضاء الجزئي

$$W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a+b+c+d = 0\}$$

من P_3.

٤- أوجد بعد الفضاء الجزئي

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+b=c, b+c=d, c+d=a \right\}$$

من M_{22}.

٥- أحسب بعد فضاء الصفرية $\dim(N(A))$ للمصفوفة A،

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-3&11&9\\1&2&1&-7&-3\\3&1&-3&6&8\\2&1&2&-5&-3\end{bmatrix}$$

٦- أوجد بعد الفضاء الجزئي W من $\mathbb{C}^4$ ، حيث

$$W=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}2\\-3\\4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-3\\2\\5\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

٧- أوجد رتبة وصفرية المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&2\\2&1&1\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}$.

٨- أوجد رتبة وصفرية المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&1&1&1\\1&3&2&0&4\\1&2&1&1&1\end{bmatrix}$.

٩- أوجد رتبة وصفرية المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3&2&1&1&1\\2&3&0&1&1\\-1&1&2&1&0\\1&1&0&1&1\\0&1&1&2&-1\end{bmatrix}$.

١٠- M_{22} هو الفضاء الاتجاهي للمصفوفات من الحجم 2×2. نفرض S_{22} ترمز إلى كل المصفوفات من الحجم 2×2 المتماثلة، أي أن $S_{22}=\{A\in M_{22} : A^t=A\}$.

(أ) بين أن S_{22} تكون فضاء جزئي من M_{22}.

(ب) أوجد أساس لـ S_{22} يحقق الشرط المطلوب.

(ج) ما هو بعد S_{22}؟

١١- المصفوفة B من الحجم 2×2 تكون مثلثة عليا، إذا كان $[B]_{21}=0$. نفرض أن UT_2 هي مجموعة كل المصفوفات من الحجم 2×2. إذن UT_2 يكون فضاء جزئي من M_{22}. حدد بعد UT_2.