الباب السادس
القيم الذاتية
Eigenvalues

عندما يكون لدينا مصفوفة مربعة A من الحجم n، وضربناها في متجه x من $\mathbb{C}^n$ لتكوين حاصل ضرب مصفوفة في متجه، الناتج يكون متجه آخر في $\mathbb{C}^n$. لذلك يمكننا تبني وجهة نظر دالية لهذا الحساب – تأثير ضرب مصفوفة مربعة يكون مثل دالة تحول متجه (x) إلى متجه آخر(Ax) من نفس الحجم. لبعض المتجهات، قد يبدوا هذا معقدا وهو في الحقيقة ليس أكثر تعقيدا من الضرب القياسي. المتجهات تختلف وفقا لاختيار المصفوفة A، لذلك يكون السؤال هو تحديد، للاختيارات المنفصلة لـ A، ما إذا كان يوجد مثل هذه المتجهات، وإذا كان فأيها يكون. لقد حدث في كثير من الاختيارات أن هذه المتجهات كان لها اهتمام خاص.

سوف نحل معادلات كثيرات حدود في هذا الباب، مما يشير إلى ظهور أعداد مركبة كجذور. هذا هو السبب الواضح لتعاملنا مع الأعداد المركبة خلال هذا المقرر.

٦-١ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

Eigenvalues and Eigenvectors

في هذا الفصل سوف نعرف القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ونتعلم كيفية حسابهما. الدراسة الأكثر نظرية تكون في الفصل التالي.

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة

تعريف ٦-١-١. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n و $x \neq 0$ متجه في $\mathbb{C}^n$ و λ قياسي في $\mathbb{C}$. نقول أن x **متجه ذاتي** eigenvector لـ A **بالقيمة الذاتية** eigenvalue λ إذا كان

$$Ax = \lambda x$$

قبل أن نمضي أكثر من ذلك، ربما يكون من المناسب أن نقتنع بأن ذلك يحدث على الإطلاق. نفهم المثال التالي ولكن لا نشغل أنفسنا به. سوف نحصل على طرق كافية تمكننا من اكتشاف المتجهات الذاتية نفسها.

مثال ٦-١-٢. نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix}$$

والمتجهات

$$x=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad y=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix} \quad z=\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \quad w=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$Ax=\begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}=4x$$

لذلك x يكون متجه ذاتي لـ A بالقيمة الذاتية $\lambda=4$.
أيضا

$$Ay=\begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=0\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}=0y$$

لذلك y يكون متجه ذاتي لـ A بالقيمة الذاتية $\lambda=0$.
أيضا

$$Az=\begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ 14 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}=2z$$

لذلك z يكون متجه ذاتي لـ A بالقيمة الذاتية $\lambda=2$.
أيضا

$$Aw=\begin{bmatrix}204 & 98 & -26 & -10\\ -280 & -134 & 36 & 14\\ 716 & 348 & -90 & -36\\ -472 & -232 & 60 & 28\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\8\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\-1\\4\\0\end{bmatrix}=2w$$

لذلك w يكون متجه ذاتي لـ A بالقيمة الذاتية $\lambda=2$.

إذن نحن أظهرنا أربعة متجهات ذاتية للمصفوفة A. هل يوجد أكثر؟ نعم أي مضاعف قياسي غير صفري لمتجه ذاتي يكون أيضا متجه ذاتي. في هذا المثال نضع $u=30x$، إذن

$$\begin{aligned}Au &= A(30x)=30Ax=30(4x)\\ &=4(30x)=4u\end{aligned}$$

ومن ثم u تكون أيضا متجه ذاتي لـ A.

المتجهين z و w كلاهما متجه ذاتي لـ A لنفس القيمة الذاتية $\lambda=2$، رغم أن أيهما ليس مضاعفا قياسيا للآخر. ننظر ماذا يحدث إذا جمعنا المتجهين على الصورة $v=z+w$ وضربنا الناتج في A

$$\begin{aligned}Av &= A(z+w)=Az+Aw\\ &=2z+2w=2(z+w)=2v\end{aligned}$$

لذلك v يكون أيضا متجه ذاتي لـ A للقيمة الذاتية $\lambda=2$. من ذلك يتضح أن مجموعة المتجهات الذاتية المصاحبة لقيمة ذاتية محددة تكون مغلقة بالنسبة لعمليات الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^n$.

المتجه y يكون متجه ذاتي للقيمة الذاتية $\lambda=0$، ومن ثم يمكننا استخدام نظرية ٤-١-١١ لكتابة $Ay=0y=0$. ولكن هذا يعني أن $y\in N(A)$.

مثال ٦-١-٢ يشير إلى بعض الخصائص، ويوجد الكثير منها. سوف نستكشف خواص القيم الذاتية والمتجهات الذاتية في الفصل ٦-٢، ولكن هنا سوف نركز على كيفية حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية. أولا نحتاج إلى بعض الخلفيات عن كثيرات الحدود والمصفوفات.

كثيرات الحدود والمصفوفات

كثيرة الحدود هي تراكيب من قوي مضروبة في معاملات قياسية، ومجموع بعضها على بعض. لن نحتاج القسمة عند حساب قيمة كثيرة حدود. ومن ثم يكون مع المصفوفات. لذلك يمكننا جمع وطرح

المصفوفات، ويمكننا ضرب مصفوفة في قياسي، كما يمكننا تكوين قوى مصفوفة مربعة وذلك بتكرار ضرب المصفوفة. عادة لانقسم مصفوفة على مصفوفة ،وإن كنا يمكن أن نضرب مصفوفة في معكوسها. إذا كانت المصفوفة مربعة فإن كل العمليات التي تشكل كثيرة الحدود سوف تحافظ على حجم المصفوفة. لذلك يكون من الطبيعي تكوين كثيرة حدود لمصفوفات، باستبدال المتغير في كثيرة الحدود بمصفوفة. سوف نوضح ذلك بمثال.

مثال ٦-١-٣. نفرض

$$D=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad p(x)=14+19x-3x^2-7x^3+x^4$$

سوف نحسب $p(D)$.

أولا القوى الضرورية لـ D. لاحظ أن D^0 تعرف على أنها محايد الضرب I_3، وهذه تكون على وجه العموم

$$D^0=I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D^1=D=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$D^2=DD^1=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -6\\ 5 & 1 & 0\\ 1 & -8 & -7\end{bmatrix}$$

$$D^3=DD^2=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1 & -6\\ 5 & 1 & 0\\ 1 & -8 & -7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 19 & -12 & -8 \\ -4 & 15 & 8 \\ 12 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$D^4 = DD^3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & -12 & -8 \\ -4 & 15 & 8 \\ 12 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -7 & 49 & 54 \\ -5 & -4 & -30 \\ -49 & 47 & 43 \end{bmatrix}$$

إذن

$$p(D) = 14 + 19D - 3D^2 - 7D^3 + D^4$$

$$= 14\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 19\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$-7\begin{bmatrix} 19 & -12 & -8 \\ -4 & 15 & 8 \\ 12 & -4 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 49 & 54 \\ -5 & -4 & -30 \\ -49 & 47 & 43 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -139 & 193 & 166 \\ 27 & -98 & -124 \\ -193 & 118 & 20 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه يمكن تحليل $p(x)$ كما يلي

$$p(x) = 14 + 19x - 3x^2 - 7x^3 + x^4$$
$$= (x-2)(x-7)(x+1)^2$$

حيث أن D تتبادل مع نفسها، $DD = DD$ ، يمكننا استخدام توزيع ضرب المصفوفات على جمع المصفوفات دون أي حذر من ضرب أي مصفوفتين ويمكن حساب $p(D)$ باستخدام التحليل من $p(x)$

$$p(D) = 14 + 19D - 3D^2 - 7D^3 + D^4$$
$$= (D - 2I_3)(D - 7I_3)(D + I_3)^2$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8 & 3 & 2\\ 1 & -7 & -2\\ -3 & 1 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix}-139 & 193 & 166\\ 27 & -98 & -124\\ -193 & 118 & 20\end{bmatrix}$$

ليس المقصود من هذا المثال التعمق. ولكن المثال يوضح لنا أنه من الطبيعي إيجاد كثيرة حدود في مصفوفة والتحليل من كثيرة الحدود يكون طريقة جيدة وربما أفضل كمفكوك. لا ننسى الثابت في كثيرة الحدود حيث يضرب في مصفوفة الوحدة عند حساب كثيرة حدود في مصفوفة.

وجود القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

قبل أن نشرع في حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، سوف نبرهن أن كل مصفوفة يكون لها على الأقل قيمة ذاتية (ومتجه ذاتي يناظرها). متأخرا، في نظرية ٦-٢-١٤، سوف نحدد الحد الأعلى لعدد القيم الذاتية لمصفوفة.

نظرية ٦-١-٤. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذن A يكون لها على الأقل قيمة ذاتية واحدة.

البرهان: نفرض أن A من الحجم n، نختار x أي متجه غير صفري من $\mathbb{C}^n$. نعتبر المجموعة

$$S=\{x, Ax,\ A^2x,\ A^3x,\dots,A^nx\}$$

هذه مجموعة من $n+1$ من المتجهات من $\mathbb{C}^n$، لذلك من نظرية ٢-٤-١١، S تكون مرتبطة خطيا. نفرض $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ تجمع من $n+1$ من الكميات القياسية من $\mathbb{C}$، ليست جميعها أصفار، تكون علاقة ارتباط خطي على S. بتعبير آخر

$$a_0x+a_1Ax+a_2A^2x+a_3A^3x+\dots+a_nA^nx=0$$

بعض a_i لا تساوي الصفر. نفرض أن $a_0\neq 0$، ونفرض $a_1=a_2=\dots=a_n=0$. إذن $a_0x=0$ ومن نظرية ٤-١-١٤، إما $a_0=0$ أو $x=0$، وكلاهما تناقض. لذلك $a_i\neq 0$ لبعض $i\geq 1$.

نفرض m هي اكبر عدد صحيح بحيث $a_m \neq 0$. أيضا يمكننا أن نفترض أن $a_m = 1$، حيث إذا لم يكن كذلك، نستبدل كل a_i بـ a_i/a_m للحصول على كميات قياسية التي تخدم التساوي صحيحا في علاقة الترابط الخطي على S.

نعرف كثيرة الحدود

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_m x^m$$

حيث أننا نستخدم المجموعة $\mathbb{C}$ للكميات القياسية (بدلا عن $\mathbb{R}$)، نعلم أنه يمكننا تحليل $p(x)$ إلى عوامل على الصورة $(x - b_i)$، حيث $b_i \in \mathbb{C}$. لذلك توجد كميات قياسية $b_1, b_2, \ldots, b_m$ من $\mathbb{C}$ بحيث،

$$p(x) = (x - b_m)(x - b_{m-1}) \ldots (x - b_3)(x - b_2)(x - b_1)$$

بوضع هذا جميعا مع

$$\begin{aligned}
0 &= a_0 x + a_1 Ax + a_2 A^2 x + a_3 A^3 x + \ldots + a_n A^n x \\
&= a_0 x + a_1 Ax + a_2 A^2 x + a_3 A^3 x + \ldots + a_m A^m x \\
&= (a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + \ldots + a_m A^m) x \\
&= p(A) x \\
&= (A - b_m I_n)(A - b_{m-1} I_n) \ldots (A - b_2 I_n)(A - b_1 I_n) x
\end{aligned}$$

نفرض أن k هي أصغر عدد صحيح بحيث

$$(A - b_k I_n)(A - b_{k-1} I_n) \ldots (A - b_2 I_n)(A - b_1 I_n) x = 0$$

من المعادلة السابقة نعلم أن $k \leq m$. نعرف المتجه z

$$z = (A - b_{k-1} I_n) \ldots (A - b_2 I_n)(A - b_1 I_n) x$$

لاحظ أنه من تعريف k، المتجه z يجب أن يكون غير صفري. في الحالة عندما $k = 1$، نجد أن z يعرف بالصورة $z = x$، و z تظل غير صفري. الآن

$$\begin{aligned}
&(A - b_k I_n) z \\
&\quad = (A - b_k I_n)(A - b_{k-1} I_n) \ldots (A - b_2 I_n)(A - b_1 I_n) x = 0
\end{aligned}$$

والذي يسمح لنا بكتابة

$$Az = (A + O) z$$

$$\begin{aligned}&= (A - b_k I_n + b_k I_n)z \\ &= (A - b_k I_n)z + b_k I_n z \\ &= 0 + b_k I_n z \\ &= b_k I_n z = b_k z\end{aligned}$$

حيث أن $z \neq 0$ ، هذه المعادلة تقول أن z يكون متجه ذاتي للمصفوفة A مناظر للقيمة الذاتية $\lambda = b_k$، ومن ثم نكون بينا أن أي مصفوفة مربعة A يكون لها على الأقل قيمة ذاتية واحدة.

المثال التالي هو توضيح للنظرية السابقة.

مثال ٦-١-٥. هذا المثال يوضح برهان نظرية ٦-١-٤، ومن ثم سوف نستخدم نفس الرموز المستخدمة في البرهان. ليس المقصود أن يكون مثال لحسابات معقولة لإيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، ولكن فقط هو مجرد توضيح للنظرية. نعتبر المصفوفة A ونختار المتجه x

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 11 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -10 & -1 & 14 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -15 & -1 & 5 \\ -10 & -1 & 16 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

من المهم ملاحظة أن اختيار x يمكن أن يكون أي شيء، طالما أنه ليس المتجه الصفري. ليس اختيارنا لـ x كان عشوائيا بصورة كاملة، ولكن بطريقة يمكن بها توضيح النظرية بصورة عامة قدر الإمكان.

المجموعة

$$S = \{x, Ax, A^2x, A^3x, A^4x, A^5x\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ -10 \\ -2 \\ -18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ -30 \\ 18 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -34 \\ 62 \\ -34 \\ -26 \\ -66 \end{bmatrix} \right\}$$

تكون بالتأكيد مرتبطة خطيا، لأنها مكونة من ستة متجهات من $\mathbb{C}^5$.

سوف نبحث عن علاقة ارتباط خطي غير تافهة وذلك بحل نظام المعادلات المتجانسة الذي مصفوفة معاملاته لها الأعمدة هي متجهات S باستخدام عمليات الصف،

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 & -10 & 18 & -34 \\ 0 & 2 & -6 & 14 & -30 & 62 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 18 & -34 \\ -5 & 4 & -2 & -2 & 10 & -26 \\ 4 & -6 & 10 & -18 & 34 & -66 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 & -14 & 30 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & -15 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

توجد أربعة متغيرات حرة لوصف حلول هذا النظام المتجانس، لذلك يكون لدينا اختيار من الحلول. الاختيار الأنسب سوف يكون بأن نضع $x_3 = 1$ و $x_4 = x_5 = x_6 = 0$. ومع ذلك سوف نعتبر اختيار آخر لتعظيم التعميم لتوضيحنا للنظرية ونختار $x_3 = -8$، $x_4 = -3$، $x_5 = 1$ ، $x_6 = 0$. هذا يؤدي إلى حل مع $x_1 = 16$ و $x_2 = 12$.

إذن هذه العلاقة للارتباط الخطي تكون

$$0 = 16x + 12Ax - 8A^2x - 3A^3x + A^4x + 0A^5x$$

$$0 = (16 + 12A - 8A^2 - 3A^3 + A^4)x$$

لذلك نعرف $p(x) = 16 + 12x - 8x^2 - 3x^3 + x^4$ ، وكما أعلن في برهان نظرية ٦-١-٤، لدينا كثيرة حدود من درجة $m = 4 > 1$ بحيث $p(A)x = 0$. الآن نحتاج إلى تحليل $p(x)$ على $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} p(x) &= 16 + 12x - 8x^2 - 3x^3 + x^4 \\ &= (x-4)(x+2)(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

ومن ثم يكون

$$0 = p(A)x = (A - 4I_5)(A + 2I_5)(A - 2I_5)(A + 1I_5)x$$

نطبق عامل في كل مرة، حتى نحصل على متجه صفري، وذلك لتحديد قيمة k كما هو موصوف في برهان نظرية ٦-١-٤.

$$(A+1I_5)x=\begin{bmatrix}-6&-1&11&0&-4\\4&2&0&2&0\\-10&-1&15&0&-4\\8&2&-15&0&5\\-10&-1&16&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\3\\-5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

$$(A-2I_5)(A+1I_5)x$$
$$=\begin{bmatrix}-9&-1&11&0&-4\\4&-1&0&2&0\\-10&-1&12&0&-4\\8&2&-15&-3&5\\-10&-1&16&0&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-8\\4\\4\\8\end{bmatrix}$$

$$(A+2I_5)(A-2I_5)(A+1I_5)x$$
$$=\begin{bmatrix}-5&-1&11&0&-4\\4&3&0&2&0\\-10&-1&16&0&-4\\8&2&-15&1&5\\-10&-1&16&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-8\\4\\4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ومن ثم $k=3$ و

$$z=(A-2I_5)(A+1I_5)x=\begin{bmatrix}4\\-8\\4\\4\\8\end{bmatrix}$$

يكون متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية $\lambda=-2$ ، كما يمكن التحقق بإجراء الحسابات Az . إذا كملنا خلال هذا المثال باختيار آخر للمتجه x فإن القيمة الذاتية قد تتغير، ولكن سوف تكون من المجموعة $\{3,0,1,-1,-2\}$.

حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

لحسن الحظ أننا لسنا بحاجة إلى إجراء نفس الخطوات في نظرية ٦-١-٤ في كل مرة لإيجاد قيمة ذاتية. إنها المحددات وبصفة خاصة نظرية ٥-٢-١٠ التي توفر لنا الأداة الرئيسية لحساب القيم الذاتية. هنا متتابعة من التكافؤات التي تكون المفتاح لتحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda I_n x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = 0$$

لذلك، لكل قيمة ذاتية λ ومتجه ذاتي مناظر $x \neq 0$، المتجه x سوف يكون عنصر غير صفري في فضاء الصفرية للمصفوفة $A - \lambda I_n$، بينما $A - \lambda I_n$ تكون مصفوفة شاذة ومن ثم محددها يساوي الصفر. هذه الأفكار تصاغ بدقة في نظرية ٦-١-٨ ونظرية ٦-١-١٢، ولكن الآن هذه المناقشة المختصرة سوف تكون كافية لنعطي التعريف والمثال التاليين.

تعريف ٦-١-٦. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن **كثيرة الحدود المميزة** characteristic polynomial $p_A(x)$ للمصفوفة A تعرف كما يلي

$$p_A(x) = \det(A - xI_n)$$

مثال ٦-١-٧. كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة F من الحجم 3

$$F = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

تكون

$$\begin{aligned} p_F(x) &= \det(F - xI_3) \\ &= \begin{vmatrix} -13-x & -8 & -4 \\ 12 & 7-x & 4 \\ 24 & 16 & 7-x \end{vmatrix} \\ &= (-13-x)\begin{vmatrix} 7-x & 4 \\ 16 & 7-x \end{vmatrix} + (-8)(-1)\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 24 & 7-x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$+(-4)\begin{vmatrix} 12 & 7-x \\ 24 & 16 \end{vmatrix}$$
$$\begin{aligned} &= (-13-x)((7-x)(7-x)-4(16)) \\ &\quad +(-8)(-1)(12(7-x)-4(24)) \\ &\quad +(-4)(12(16)-(7-x)(24)) \\ &= 3+5x+x^2-x^3 \\ &= -(x-3)(x+1)^2 \end{aligned}$$

كثيرة الحدود المميزة هي أداة الحساب الرئيسية لإيجاد القيم الذاتية، وسوف تستخدم أحيانا في المساعدة لتحديد خواص القيم الذاتية.

نظرية ٦-١-٨. نفرض A مصفوفة مربعة. إذن λ تكون قيمة ذاتية لـ A إذا وفقط إذا كان $p_A(\lambda)=0$.

البرهان: نفرض أن A من الحجم n.

λ تكون قيمة ذاتية لـ A

$\Leftrightarrow$ يوجد $x \neq 0$ بحيث $Ax=\lambda x$

$\Leftrightarrow$ يوجد $x \neq 0$ بحيث $Ax-\lambda x=0$

$\Leftrightarrow$ يوجد $x \neq 0$ بحيث $Ax-\lambda I_n x=0$

$\Leftrightarrow$ يوجد $x \neq 0$ بحيث $(A-\lambda I_n)x=0$

$\Leftrightarrow$ $A-\lambda I_n$ تكون شاذة

$\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I_n)=0$

$\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda)=0$.

مثال ٦-١-٩. في مثال ٦-١-٧ وجدنا أن كثير الحدود المميزة للمصفوفة

$$F=\begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

هي $p_F(x)=-(x-3)(x+1)^2$. حيث أنها في صورة حاصل ضرب أقواس، يمكننا إيجاد كل الجذور بسهولة، هي $x=3$ و $x=-1$. من نظرية ٦-١-٨ ، $\lambda=3$ و $\lambda=-1$ كلاهما تكون قيمة ذاتية لـ F، وهذه فقط هي القيم الذاتية لـ F.

تعريف ٦-١-١٠. نفرض أن A مصفوفة مربعة و λ قيمة ذاتية لـ A. **الفضاء الذاتي** eigenspace لـ A المناظر للقيمة λ، يرمز له بالرمز $\varepsilon_A(\lambda)$، هو مجموعة كل المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة λ مع المتجه الصفري.

مثال ٦-١-٢ يشير إلى أن مجموعة المتجهات الذاتية لقيمة ذاتية واحدة تحقق بعض خواص الإغلاق، وبإضافة المتجه الصفري، وهو ليس متجه ذاتي، نحصل على فضاء جزئي.

نظرية ٦-١-١١. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n و λ قيمة ذاتية لـ A. إذن الفضاء الذاتي $\varepsilon_A(\lambda)$ لـ A يكون فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^n$.

البرهان: سوف نختبر الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣. أولا، من التعريف المتجه الصفري يكون موجود صراحة في $\varepsilon_A(\lambda)$، ومن ثم $\varepsilon_A(\lambda)$ تكون مجموعة غير خالية.

نفرض أن $x, y \in \varepsilon_A(\lambda)$ ، أي أن x و y متجهان ذاتيان لـ A مناظران للقيمة λ. إذن

$$\begin{aligned} A(x+y) &= Ax + Ay \\ &= \lambda x + \lambda y \\ &= \lambda(x+y) \end{aligned}$$

لذلك إما $x+y=0$ أو أن $x+y$ يكون متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة λ ، وفي كلا الحالتين $x+y \in \varepsilon_A(\lambda)$، وهذا يعطينا الإغلاق بالنسبة للجمع.

نفرض أن $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in \varepsilon_A(\lambda)$، إذن

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \alpha(Ax) \\ &= \alpha\lambda x \\ &= \lambda(\alpha x) \end{aligned}$$

لذلك إما $\alpha x = 0$ أو αx يكون متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة λ. في كلا الحالتين $\alpha x \in \varepsilon_A(\lambda)$، وهذا يعطي الإغلاق بالنسبة للضرب في قياسي.

مع هذه الشروط الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣، $\varepsilon_A(\lambda)$ تكون فضاء جزئي.

نظرية ٦-١-١١ تخبرنا بأن الفضاء الذاتي يكون فضاء جزئي ومن ثم هو فضاء اتجاهي بنفسه. النظرية التالية توضح لنا كيفية هذا الفضاء الجزئي بصورة سريعة.

نظرية ٦-١-١٢. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n و λ قيمة ذاتية لـ A. إذن $\varepsilon_A(\lambda) = N(A-\lambda I_n)$.

البرهان: خلاصة هذه النظرية هو تساوي مجموعتين. لاحظ أن $0 \in \varepsilon_A(\lambda)$ من تعريف ٦-١-١٠ و $0 \in N(A-\lambda I_n)$ من نظرية ١-٤-٣. الآن لأي متجه غير صفري $x \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} x \in \varepsilon_A(\lambda) &\Leftrightarrow Ax = \lambda x \\ &\Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax - \lambda I_n x = 0 \\ &\Leftrightarrow (A-\lambda I_n)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in N(A-\lambda I_n) \end{aligned}$$

مثال ٦-١-١٣. مثال ٦-١-٧ ومثال ٦-١-٩ يصفان كثيرة الحدود المميزة والقيم الذاتية للمصفوفة

$$F = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

الآن نأخذ كل قيمة ذاتية ونحسب الفضاء الذاتي المناظر لها. لعمل ذلك نختزل المصفوفة $F-\lambda I_3$ لتحديد حلول النظام المتجانس $LS(F-\lambda I_3, 0)$ ومن ثم نعبر عن الفضاء الذاتي بفضاء الصفرية لـ $F-\lambda I_3$. نظرية ٦-١-١٢ تخبرنا عن كيفية كتابة فضاء الصفرية كفضاء مولد بأساس.

$$\lambda = 3 \qquad F - 3I_3 = \begin{bmatrix} -16 & -8 & -4 \\ 12 & 4 & 4 \\ 24 & 16 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_F(3) = N(F - 3I_3) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$F + 1I_3 = \begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 4 \\ 24 & 16 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = -1$$

$$\varepsilon_F(-1) = N(F + 1I_3) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

أمثلة لحساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

في هذا القسم لا توجد نظريات، هي فقط مجموعة مختارة من الأمثلة لتوضيح المقصود من مجموعة الاحتمالات الممكنة للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمصفوفة.

تعريف ٦-١-١٤. نفرض أن A مصفوفة مربعة وأن λ قيمة ذاتية لـ A. **التعدد الجبري** algebraic multiplicity لـ λ، يرمز له بالرمز $\alpha_A(\lambda)$، هو أكبر قوة لـ $(x-\lambda)$ التي تقسم كثيرة الحدود المميزة، $p_A(x)$.

حيث أن قيمة ذاتية λ تكون جذر لكثيرة الحدود المميزة، دائما يوجد عامل $(x-\lambda)$، والتعدد الجبري تكون هي مجرد قوة هذا العامل في تحليل $p_A(x)$. لذلك على وجه الخصوص $\alpha_A(\lambda) \geq 1$. قارن تعريف التعدد الجبري مع التعريف التالي.

تعريف ٦-١-١٥. نفرض أن A مصفوفة مربعة وأن λ قيمة ذاتية لـ A. **التعدد الهندسي** geometric multiplicity لـ λ، يرمز له بالرمز $\gamma_A(\lambda)$، هو بعد الفضاء الذاتي $\varepsilon_A(\lambda)$.

القيمة الذاتية يجب أن يكون لها على الأقل متجه ذاتي واحد، ومن ثم الفضاء الذاتي المناظر لا يمكن أن تافه، لذلك $\gamma_A(\lambda) \geq 1$.

مثال ٦-١-١٦. نعتبر المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & -4 \\ 12 & 1 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

إذن

$$p_B(x) = 8 - 20x + 18x^2 - 7x^3 + x^4 = (x-1)(x-2)^3$$

لذلك القيم الذاتية تكون $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ بتعدد جبري $\alpha_B(1) = 1$ و $\alpha_B(2) = 3$.

لحساب المتجهات الذاتية

$\lambda = 1$

$$B - 1I_4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_B(1) = N(B - 1I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$\lambda = 2$

$$B - 2I_4 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 & -4 \\ 12 & -1 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & -4 & -4 \\ 3 & -4 & 5 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_B(2) = N(B - 2I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

لذلك كل فضاء ذاتي له البعد 1 و من ثم $\gamma_B(1) = 1$ و $\gamma_B(2) = 1$. هذا المثال له أهمية بسبب التباين بين التعددين لـ $\lambda = 2$. في عديد من أمثلتنا التعددات الجبرية والهندسية سوف تكون متساوية لكل القيم الذاتية (كما كانت لـ $\lambda = 1$ في هذا المثال)، لذلك نحتفظ في الذاكرة بهذا المثال. سوف يكون لدينا بعض التفسيرات لهذه الظاهرة فيما بعد.

مثال ٦-١-١٧. نعتبر المصفوفة

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن

$$p_C(x) = -3 + 4x + 2x^2 - 4x^3 + x^4 = (x-3)(x-1)^2(x+1)$$

لذلك القيم الذاتية تكون $\lambda = 3, 1, -1$ بتعددات جبرية $\alpha_C(3) = 1$ ، $\alpha_C(1) = 2$ و $\alpha_C(-1) = 1$.

لحساب المتجهات الذاتية

$\lambda = 3$

$$C - 3I_4 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_C(3) = N(C - 3I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$C-1I_4=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \lambda=1$$

$$\varepsilon_C(1)=N(C-1I_4)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$C+1I_4=\begin{bmatrix}2&0&1&1\\0&2&1&1\\1&1&2&0\\1&1&0&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \lambda=-1$$

$$\varepsilon_C(-1)=N(C+1I_4)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

لذلك أبعاد الفضاءات الذاتية تعطي تعددات هندسية $\gamma_C(3)=1$ ، $\gamma_C(1)=2$ و $\gamma_C(-1)=1$ ، نفس الشيء مثل التعددات الجبرية. هذا المثال له أهمية لأن A مصفوفة متماثلة، وسوف تكون موضوع نظرية ٦-٢-١٥.

مثال ٦-١-١٨. نعتبر المصفوفة

$$E=\begin{bmatrix}29&14&2&6&-9\\-47&-22&-1&-11&13\\19&10&5&4&-8\\-19&-10&-3&-2&8\\7&4&3&1&-3\end{bmatrix}$$

إذن

$$p_E(x)=-16+16x+8x^2-16x^3+7x^4-x^5$$

$$=-(x-2)^4(x+1)$$

لذلك القيم الذاتية تكون $\lambda=2,-1$ بتعددات جبرية $\alpha_E(2)=4$ و $\alpha_E(-1)=1$.

لحساب المتجهات الذاتية

$\lambda=2$

$$E-2I_5=\begin{bmatrix}27 & 14 & 2 & 6 & -9\\ -47 & -24 & -1 & -11 & 13\\ 19 & 10 & 3 & 4 & -8\\ -19 & -10 & -3 & -4 & 8\\ 7 & 4 & 3 & 1 & -5\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_E(2)=N(E-2I_5)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ 0\\ 2\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 0\\ 2\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$\lambda=-1$

$$E+1I_5=\begin{bmatrix} 30 & 14 & 2 & 6 & -9 \\ -47 & -21 & -1 & -11 & 13 \\ 19 & 10 & 6 & 4 & -8 \\ -19 & -10 & -3 & -1 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_E(-1)=N(E+1I_5)=\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

لـذلك أبعـاد الفـضاءات الذاتيـة تعطـي تعـددات هندسـية $\gamma_2(2)=2$ و $\gamma_2(-1)=1$. هـذا المثـال لـه أهميـة لأن $\lambda=2$ لهـا تعـدد جبـري كبيـر والذي لا يساوي التعدد الهندسي.

مثال ٦-١-١٩. نعتبر المصفوفة

$$F=\begin{bmatrix} -59 & -34 & 41 & 12 & 25 & 30 \\ 1 & 7 & -46 & -36 & -11 & -29 \\ -233 & -119 & 58 & -35 & 75 & 54 \\ 157 & 81 & -43 & 21 & -51 & -39 \\ -91 & -48 & 32 & -5 & 32 & 26 \\ 209 & 107 & -55 & 28 & -69 & -50 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\begin{aligned} p_F(x) &= -50+55x+13x^2-50x^3+32x^4-9x^5+x^6 \\ &= (x-2)(x+1)(x^2-4x+5)^2 \\ &= (x-2)(x+1)((x-(2+i))(x-(2-i)))^2 \\ &= (x-2)(x+1)(x-(2+i))^2(x-(2-i))^2 \end{aligned}$$

لذلك القيم الذاتية تكون $\lambda = 2, -1, 2+i, 2-i$ بتعددات جبرية $\alpha_F(2)=1$ ، $\alpha_F(-1)=1$ ، $\alpha_F(2+i)=2$ ؛ $\alpha_F(2-i)=2$.

نحسب المتجهات الذاتية.

$\lambda = 2$

$$F-2I_6 =$$

$$\begin{bmatrix} -61 & -34 & 41 & 12 & 25 & 30 \\ 1 & 5 & -46 & -36 & -11 & -29 \\ -233 & -119 & 56 & -35 & 75 & 54 \\ 157 & 81 & -43 & 19 & -51 & -39 \\ -91 & -48 & 32 & -5 & 30 & 26 \\ 209 & 107 & -55 & 28 & -69 & -52 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_F(2) = N(F-2I_6) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$\lambda = -1$

$$F+1I_6 =$$

$$\begin{bmatrix} -58 & -34 & 41 & 12 & 25 & 30 \\ 1 & 8 & -46 & -36 & -11 & -29 \\ -233 & -119 & 59 & -35 & 75 & 54 \\ 157 & 81 & -43 & 22 & -51 & -39 \\ -91 & -48 & 32 & -5 & 33 & 26 \\ 209 & 107 & -55 & 28 & -69 & -49 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_F(-1) = N(F + 1I_6) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\lambda = 2 + i$$

$$F - (2+i)I_6$$

$$= \begin{bmatrix} -61-i & -34 & 41 & 12 & 25 & 30 \\ 1 & 5-i & -46 & -36 & -11 & -29 \\ -233 & -119 & 56-i & -35 & 75 & 54 \\ 157 & 81 & -43 & 19-i & -51 & -39 \\ -91 & -48 & 32 & -5 & 30-i & 26 \\ 209 & 107 & -55 & 28 & -69 & -52-i \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\frac{1}{5}(7+i)\\0&1&0&0&0&\frac{1}{5}(-9-2i)\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_F(2+\mathrm{i})=N(F-(2+i)I_6)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-7-i\\9+2i\\-5\\5\\-5\\5\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\lambda=2-i$$

$$F-(2-i)I_6$$

$$=\begin{bmatrix}-61+i&-34&41&12&25&30\\1&5+i&-46&-36&-11&-29\\-233&-119&56+i&-35&75&54\\157&81&-43&19+i&-51&-39\\-91&-48&32&-5&30+i&26\\209&107&-55&28&-69&-52+i\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\frac{1}{5}(7-i)\\0&1&0&0&0&\frac{1}{5}(-9+2i)\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_F(2-\mathrm{i}) = N(F-(2-i)I_6) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -7+i \\ 9-2i \\ -5 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

أبعاد الفضاءات الذاتية تعطي تعددات هندسية $\gamma_F(2)=1$ ، $\gamma_F(-1)=1$ ، $\gamma_F(2+i)=1$ و $\gamma_F(2-i)=1$. هذا المثال يظهر بوضوح أنه من الممكن ظهور قيم ذاتية مركبة، حتى وإن كانت جميع عناصر المصفوفة أعداد حقيقية. لاحظ أن الأعداد في تحليل $\lambda = 2+i$ تكون مرافقة للأعداد المناظرة في تحليل $\lambda = 2-i$. هذا هو مضمون نظرية ٦-٢-١٠ التي سوف تأتي فيما بعد.

مثال ٦-١-٢٠. نعتبر المصفوفة

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -14 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\begin{aligned} p_H(x) &= -6x + x^2 + 7x^3 - x^4 - x^5 \\ &= x(x-2)(x-1)(x+1)(x+3) \end{aligned}$$

لذلك القيم الذاتية تكون $\lambda = 2, 1, 0, -1, -3$ بتعددات جبرية $\alpha_H(2)=1$ ، $\alpha_H(1)=1$ ، $\alpha_H(0)=1$ ، $\alpha_H(-1)=1$ ، $\alpha_H(-3)=1$.

لحساب المتجهات الذاتية،

$\lambda = 2$

$$H-2I_5=\begin{bmatrix} 13 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -16 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_H(2)=N(H-2I_5)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\lambda=1$$

$$H-1I_5=\begin{bmatrix} 14 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -15 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_H(1)=N(H-1I_5)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\lambda = 0$$

$$H - 0I_5 = \begin{bmatrix} 15 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -14 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_H(0) = N(H - 0I_5) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\lambda = -1$$

$$H + 1I_5 = \begin{bmatrix} 16 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -13 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_H(-1) = N(H + 1I_5) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$\lambda = -3$

$$H + 3I_5 = \begin{bmatrix} 18 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 6 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -11 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_H(-3) = N(H + 3I_5) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

لـذلك أبعـاد الفـضاءات الذاتيـة تعطـي تعـددات هندسـية $\gamma_H(2) = 1$، $\gamma_H(1) = 1$، $\gamma_H(0) = 1$، $\gamma_H(-1) = 1$ و$\gamma_H(-3) = 1$ وهـي متطابقـة مـع التعـددات الجبريـة. هـذا المثـال لـه أهميـة لـسببين. الأول $\lambda = 0$ قيمـة ذاتيـة، وهو مـا يوضـح نظريـة ٦-٢-٢، التـي سوف تـأتي بعـد. الثـاني، كـل القـيم الذاتيـة مختلفـة، وهـو مـا ينـتج تعـددات جبريـة وهندسية 1 لكل قيمـة ذاتيـة، وهو مـا يوضـح نظريـة ٦-٣-١٤ ، التـي سوف تأتي بعد.

تمارين ٦-١

١- نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 4 & a\end{bmatrix}$$

(أ) أوجد القيم الذاتية لـ A.

(ب) لكل قيمة ذاتية أوجد الفضاء الذاتي المناظر.

(ج) أحسب $p(A)$ ، حيث $p(x)=3x^2-x+2$.

٢- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

٣- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

٤- أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

٥- أوجد القيم الذاتية، الفضاءات الذاتية، التعددات الجبرية والتعددات الهندسية للمصفوفة

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -6 & 6\end{bmatrix}$$

٦- أوجد القيم الذاتية، الفضاءات الذاتية، التعددات الجبرية والتعددات الهندسية للمصفوفة

$$B=\begin{bmatrix}-12 & 30\\ -5 & 13\end{bmatrix}$$

٧- إذا علم أن $\lambda=2$ قيمة ذاتية للمصفوفة A التالية، أوجد التعدد الهندسي لـ $\lambda=2$ ، حيث

$$A=\begin{bmatrix} 18 & -15 & 33 & -15 \\ -4 & 8 & -6 & 6 \\ -9 & 9 & -16 & 9 \\ 5 & -6 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

٨- أوجد القيم الذاتية، الفضاءات الذاتية، التعددات الجبرية والتعددات الهندسية للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٩- أوجد القيم الذاتية، الفضاءات الذاتية، التعددات الجبرية والتعددات الهندسية للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

١٠- أوجد القيم الذاتية، الفضاءات الذاتية، التعددات الجبرية والتعددات الهندسية لمصفوفة الوحدة من الحجم 3.

١١- أوجد القيم الذاتية والفضاءات الذاتية المناظرة للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

١٢- للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & 8 & -1 & -1 \\ -2 & 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ كثيرة الحدود المميزة هي $p_A(x)=(x+2)(x-2)^2(x-4)$. أوجد القيم الذاتية والفضاءات الذاتية المناظرة للمصفوفة A.

١٣- المصفوفة A تسمى **متساوية القوى** idempotent ، إذا كان $A^2=A$. بين أن القيم الذاتية الممكنة للمصفوفة متساوية القوى تكون $\lambda=0$ و $\lambda=1$. ومن ثم أوجد مثال لمصفوفة متساوية القوى لها كلا العددين كقيمة ذاتية.

١٤- نفرض أن λ و ρ قيمتين ذاتيتين مختلفتين للمصفوفة المربعة A. برهن على أن تقاطع الفضاءين الذاتيين المناظرين لهاتين القيمتين يكون تافه. أي أن $\varepsilon_A(\lambda) \cap \varepsilon_A(\rho) = \{0\}$.

٦-٢ خواص القيم والمتجهات الذاتية

Properties of Eigenvalues and Eigenvectors

في الفصل السابق تم تقديم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية وكان التركيز على وجودها وتحديدها. في هذا الفصل يكون التركيز على النظريات والخواص المختلفة للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية.

الخواص الأساسية للقيم الذاتية

نظرية ٦-٢-١. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n وأن $S=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_p\}$ هي مجموعة المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_p$ بحيث أن $\lambda_i \neq \lambda_j$ كلما كان $i \neq j$. إذن S تكون مجموعة مستقلة خطيا.

البرهان: إذا كان $p=1$ فإن المجموعة $S=\{x_1\}$ تكون مستقلة خطيا حيث أن المتجه الذاتي يكون غير صفري. لذلك سوف نفترض أن $p \geq 2$.

سوف نبرهن النتيجة باستخدام التناقض. نفرض على العكس أن S مجموعة مرتبطة خطيا. نعرف $S_i=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_i\}$ ونفرض أن k هو العدد الصحيح بحيث أن $S_{k-1}=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{k-1}\}$ تكون مستقلة خطيا و $S_k=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k\}$ تكون مرتبطة خطيا. والسؤال الآن هل توجد مثل k هذه؟ أولا، حيث أن المتجهات الذاتية تكون غير صفرية، المجموعة $\{x_1\}$ تكون مستقلة خطيا. حيث أننا فرضنا أن $S=S_p$ مرتبطة خطيا، يجب أن يوجد k، $2 \leq k \leq p$، حيث المجموعات S_k تتحول من مستقلة خطيا إلى مرتبطة خطيا (والبقاء على هذا النحو). بتعبير آخر، x_k هو المتجه بأصغر دليل الذي يكون تركيبة خطية من المتجهات التي لها أدلة أصغر.

حيث أن $\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k\}$ مجموعة مرتبطة خطيا، يجب أن توجد كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k$، ليست جميعها أصفار بحيث

$$0=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\ldots+\alpha_kx_k$$

إذن

$$\begin{aligned}
0 &= (A-\lambda_k I_n)0 \\
&= (A-\lambda_k I_n)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_k x_k) \\
&= (A-\lambda_k I_n)\alpha_1 x_1 + \ldots + (A-\lambda_k I_n)\alpha_k x_k \\
&= \alpha_1 (A-\lambda_k I_n) x_1 + \ldots + \alpha_k (A-\lambda_k I_n) x_k \\
&= \alpha_1 (A x_1 - \lambda_k I_n x_1) + \ldots + \alpha_k (A x_k - \lambda_k I_n x_k) \\
&= \alpha_1 (A x_1 - \lambda_k x_1) + \ldots + \alpha_k (A x_k - \lambda_k x_k) \\
&= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} + \alpha_k (0) x_k \\
&= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} + 0 \\
&= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1}
\end{aligned}$$

هذه المعادلة هي علاقة ارتباط خطي على مجموعة مستقلة خطيا $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}\}$، ومن ثم كل الكميات القياسية يجب أن تكون أصفار. أي أن $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ لكل $1 \le i \le k-1$. ولكن من الفرض، القيم الذاتية مختلفة، $\lambda_i \ne \lambda_k$ لكل $1 \le i \le k-1$. ومن ثم $\alpha_i = 0$ لكل $1 \le i \le k-1$.

هذا يختزل علاقة الارتباط الخطي الأصلية على $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ إلى المعادلة البسيطة $\alpha_k x_k = 0$. من نظرية ٤-١-١٤ نستنتج أن $\alpha_k = 0$ أو $x_k = 0$. المتجهات الذاتية لا تكون أبدا المتجه الصفري، لذلك $\alpha_k = 0$. إذن كل الكميات القياسية α_i، $1 \le i \le k$ تكون أصفار، وهذا يناقض تعريف هذه الكميات القياسية كمعاملات في علاقة ارتباط خطي غير تافهة على المجموعة $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$. إذن S يجب أن تكون مستقلة خطيا.

هناك ربط بسيط بين القيم الذاتية لمصفوفة وكون المصفوفة شاذة أو غير شاذة.

نظرية ٦-٢-٢. نفرض A مصفوفة مربعة. إذن A تكون شاذة إذا وفقط إذا كان $\lambda = 0$ قيمة ذاتية للمصفوفة A.

البرهان: لدينا التكافؤات التالية

A مصفوفة شاذة $\Leftrightarrow$ يوجد $x \ne 0$ و $Ax = 0$

$$\Leftrightarrow \text{ يوجد } x \neq 0 \text{ و } Ax = 0x$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ قيمة ذاتية لـ } A$$

مع التكافؤ للمصفوفات الشاذة يمكننا تحديث قائمة التكافؤات للمصفوفات غير الشاذة.

نظرية ٦-٢-٣. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. العبارات التالية تكون متكافئة

١- A مصفوفة غير شاذة.

٢- الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A هو مصفوفة الوحدة.

٣- الفضاء الصفري للمصفوفة A يحتوي فقط المتجه الصفري، أي أن $N(A) = \{0\}$.

٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار ممكن للمتجه b.

٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.

٦- A تكون منعكسة.

٧- فضاء الأعمدة لـ A يكون $\mathbb{C}^n$، $C(A) = \mathbb{C}^n$.

٨- أعمدة A تكون أساس لـ $\mathbb{C}^n$.

٩- رتبة A تساوي n، $r(A) = n$.

١٠- صفرية A تساوي صفر، $n(A) = 0$.

١١- محدد A لا يساوي الصفر، $\det(A) \neq 0$.

١٢- $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية لـ A.

البرهان: التكافؤ في نظرية ٦-٢-٢ يمكن إعادة صياغته بنفي كلا طرفي التكافؤ. ومن ثم يمكن تحديث نظرية ٥-٢-١١ بإضافة هذا التكافؤ.

نظرية ٦-٢-٤. نفرض أن A مصفوفة مربعة وأن λ قيمة ذاتية لها. إذن $\alpha\lambda$ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة αA.

البرهان: نفرض أن $x \neq 0$ متجه ذاتي للمصفوفة A مناظر للقيمة λ. إذن

$$(\alpha A)x = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x$$

ومن ثم $x \neq 0$ يكون متجه ذاتي للمصفوفة αA مناظر للقيمة الذاتية $\alpha\lambda$.

على الرغم من أنه لا توجد نظريات موازية بالنسبة لجمع أو ضرب عدد اختياري من المصفوفات، ولكن يمكننا إثبات نظرية مماثلة بالنسبة لقوى المصفوفة.

نظرية ٦-٢-٥. نفرض أن A مصفوفة مربعة و λ قيمة ذاتية لها وأن $s \geq 0$ عدد صحيح. إذن λ^s تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^s.

البرهان: نفرض أن $x \neq 0$ متجه ذاتي للمصفوفة A مناظر للقيمة λ. نفرض أن A من الحجم n. بالاستنتاج على s، عندما $s = 0$

$$A^s x = A^0 x = I_n x = x = 1x = \lambda^0 x = \lambda^s x$$

من ذلك نجد أن λ^s تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^s.

بفرض صحة النظرية عند s، إذن

$$\begin{aligned} A^{s+1}x &= A^s A x = A^s(\lambda x) = \lambda(A^s x) \\ &= \lambda(\lambda^s x) = (\lambda\lambda^s)x = \lambda^{s+1}x \end{aligned}$$

ومن ثم $x \neq 0$ يكون متجه ذاتي للمصفوفة A^{s+1} مناظر للقيمة الذاتية λ^{s+1}، والاستنتاج يخبرنا أن النظرية تكون صحيحة لكل عدد صحيح $s \geq 0$.

بينما لا نستطيع إثبات أن مجموع مصفوفتين اختياريتين يسلك بأي طريقة منطقية مع ملاحظة القيم الذاتية، يمكننا العمل مع مجموع القوى غير المتماثلة لنفس المصفوفة. رأينا بالفعل الربط بين القيم الذاتية وكثيرات الحدود، في برهان نظرية ٦-١-٤، وكثيرة الحدود المميزة. النظرية التالية تقوي هذا الربط.

نظرية ٦-٢-٦. نفرض أن A مصفوفة مربعة و λ قيمة ذاتية لها. نفرض $q(x)$ كثيرة حدود في المتغير x. إذن $q(\lambda)$ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة $q(A)$.

البرهان: نفرض $x \neq 0$ متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة λ، نكتب $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$. إذن

$$q(A)x = (a_0 A^0 + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \ldots + a_m A^m)x$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_0A^0)x + (a_1A^1)x + (a_2A^2)x + \ldots + (a_mA^m)x \\
&= a_0(A^0x) + a_1(A^1x) + a_2(A^2x) + \ldots + a_m(A^mx) \\
&= a_0(\lambda^0x) + a_1(\lambda^1x) + a_2(\lambda^2x) + \ldots + a_m(\lambda^mx) \\
&= (a_0\lambda^0)x + (a_1\lambda^1)x + (a_2\lambda^2)x + \ldots + (a_m\lambda^m)x \\
&= (a_0\lambda^0 + a_1\lambda^1 + a_2\lambda^2 + \ldots + a_m\lambda^m)x \\
&= q(\lambda)x
\end{aligned}
$$

ومن ثم $x \neq 0$ يكون متجه ذاتي لـ $q(A)$ مناظر للقيمة الذاتية $q(\lambda)$.

مثال ٦-٢-٧. في مثال ٦-١-١٧ بينا أن المصفوفة المربعة المتماثلة من الحجم 4

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لها ثلاث قيم ذاتية $\lambda = 3, 1, -1$. نفرض أننا نريد مصفوفة مربعة من الحجم 4 يكون لها القيم الذاتية الثلاث $\lambda = 4, 0, -2$. يمكننا توظيف نظرية ٦-٢-٦ لإيجاد كثيرة الحدود التي تحول 3 إلى 4 و 1 إلى 0 و -1 إلى -2 . مثل كثيرة الحدود هذه تسمى **كثيرة حدود الاستكمال** interpolating polynomial، وفي هذا المثال يمكن استخدام

$$r(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{5}{4}$$

لن نناقش كيف حصلنا على كثيرة الحدود هذه، ولكن يمكن أن نجدها في مقررات التحليل العددي. الآن، ببساطة $r(3) = 4$، $r(1) = 0$ و $r(-1) = -2$.

الآن نحسب

$$r(C) = \frac{1}{4}C^2 + C - \frac{5}{4}I_4$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}-\frac{5}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&3&3\\1&1&3&3\\3&3&1&1\\3&3&1&1\end{bmatrix}$$

نظرية ٦-٢-٦ تخبرنا أنه إذا كانت $r(x)$ تحول القيم الذاتية بالسلوك المطلوب، فإن $r(C)$ سوف يكون لها القيم الذاتية المطلوبة. يمكن التحقق من ذلك بحساب القيم الذاتية لـ $r(C)$ مباشرة. علاوة على ذلك، لاحظ أن التعددات تكون كما هي والفضاءات الذاتية لـ C و $r(C)$ تكون متطابقة.

نظرية ٦-٢-٨. نفرض أن A مصفوفة مربعة غير شاذة و λ قيمة ذاتية لها. إذن λ^{-1} تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} .

البرهان: لاحظ حيث أن A مفترض أنها غير شاذة، A^{-1} تكون موجودة، وأكثر أهمية، $\lambda^{-1}=\frac{1}{\lambda}$ لا تشتمل على القسمة على صفر، حيث نظرية ٦-٢-٢ تستبعد هذا الاحتمال.

نفرض أن $x \neq 0$ متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية λ. نفرض أن A من الحجم n. إذن

$$\begin{aligned}A^{-1}x &= A^{-1}(1x)\\ &= A^{-1}(\frac{1}{\lambda}\lambda x)=\frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda x)\\ &=\frac{1}{\lambda}A^{-1}(Ax)=\frac{1}{\lambda}(A^{-1}A)x\\ &=\frac{1}{\lambda}I_n x=\frac{1}{\lambda}x\end{aligned}$$

ومن ثم $x \neq 0$ يكون متجه ذاتي لـ A^{-1} مناظر للقيمة الذاتية λ^{-1}.

برهان النظريات أعلى لها نمط متشابه. جميعها تبدأ باختيار قيمة ذاتية ومتجه ذاتي وتكييفها بطريقة ما للوصول إلى النتيجة المطلوبة. يمكنك إضافة هذا النمط إلى أدواتك كمنهج عام لبرهان النظريات حول القيم الذاتية.

حتى الآن استطعنا الحفاظ على كثيرة الحدود المميزة لأغراض الحسابات الدقيقة. ومع ذلك، أحيانا النظريات حول القيم الذاتية يمكن أن تبرهن بتوظيف كثيرة الحدود المميزة (بدلا من استخدام زوج من القيم والمتجهات الذاتية). النظرية التالية مثال لهذا.

نظرية ٦-٢-٩. نفرض أن A مصفوفة مربعة و λ قيمة ذاتية لها. إذن λ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^t .

البرهان: نفرض A من الحجم n. إذن

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI_n) \\ &= \det\left((A - xI_n)^t\right) \\ &= \det\left(A^t - (xI_n)^t\right) \\ &= \det\left(A^t - xI_n{}^t\right) \\ &= \det\left(A^t - xI_n\right) \\ &= p_{A^t}(x) \end{aligned}$$

لذلك A و A^t يكون لهما نفس كثيرة الحدود المميزة، ومن نظرية ٦-١-٨، قيمهما الذاتية تكون متطابقة ولهما تعددات جبرية متطابقة. لاحظ أن ما تم إثباته هنا أقوى قليلا من خلاصة النظرية.

إذا كانت المصفوفة لها قيم ذاتية حقيقية فقط، فإن حسابات كثيرة الحدود المميزة سوف تنتج كثيرة حدود بمعاملات أعداد حقيقية فقط. الأعداد المركبة قد تنتج كجذور لكثيرة الحدود هذه، وتكون في ثنائيات مترافقة. النظرية التالية تبرهن ذلك.

نظرية ٦-٢-١٠. نفرض A مصفوفة مربعة جميع عناصرها أعداد حقيقية و x متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية λ . إذن $\overline{x}$ يكون متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية $\overline{\lambda}$.

البرهان:

$$A\bar{x} = \overline{A}\bar{x} \quad = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

لذلك $\bar{x}$ يكون متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية $\bar{\lambda}$.

هذه الظاهرة تتضح بوضوح في مثال ٦-١-١٩ ، حيث القيم الذاتية الأربع المركبة جاءت في زوجين، ومتجهي الأساسات للفضاءات الذاتية تكون كل منهما مرافق مركب للآخر. نظرية ٦-٢-١٠ يمكن أن تكون حافظة للوقت لحساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات ذات العناصر الحقيقية التي لها قيم ذاتية مركبة، القيمة الذاتية المرافقة والفضاء الذاتي يمكن الاستدلال عنها من النظرية بدلا عن الحسابات.

التعددات للقيم الذاتية

كثيرة الحدود من درجة n سوف يكون لها تحديدا n جذر. من هذه الحقيقة حول معادلات كثيرات الحدود يمكننا أن نقول أكثر حول التعددات الجبرية للقيم الذاتية.

نظرية ٦-٢-١١. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن كثيرة الحدود المميزة لـ A، $p_A(x)$ ، تكون من درجة n.

البرهان: سوف نبرهن النظرية باستخدام الاستنتاج الرياضي. نصوغ هذه النتيجة بعناية كتقرير يعتمد على m، $m \geq 1$.

$P(m)$: نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times m$ جميع عناصرها أعداد مركبة أو كثيرات حدود خطية في المتغير x على الصورة $c - x$ حيث c عدد مركب. نفرض، علاوة على ذلك، أنه يوجد تحديدا k عنصر تحتوي x وأنه لا يوجد صف أو عمود يحتوي أكثر من عنصر من هذا النوع. إذن عندما $k = m$، $\det(A)$ يكون كثيرة حدود في x من درجة m، بمعامل قيادي ± 1 وعندما تكون $k < m$ ، $\det(A)$ يكون كثيرة حدود في x من درجة k أو أقل.

خطوة الأساس: نفرض أن A مصفوفة من الحجم 1×1. إذن محددها يساوي العنصر الوحيد في المصفوفة. عندما $k = m = 1$ ، العنصر الوحيد يكون على الصورة $c - x$، كثيرة حدود في x من درجة $m = 1$ بمعامل قيادي -1 . عندما $k < m$، إذن $k = 0$ والعنصر

يكون ببساطة عدد مركب، كثيرة حدود من درجة $0 \le k$. لذلك $P(1)$ تكون محققة.

خطوة الاستنتاج: نفرض أن $P(m)$ محققة، وأن A مصفوفة من الحجم $(m+1)\times(m+1)$ بها k عنصر على الصورة $c-x$. توجد حالتان يمكن اعتبارهما. نفرض أن $k=m+1$. إذن كل صف وكل عمود سوف يحتوي عنصر على الصورة $c-x$. نفرض أنه للصف الأول، هذا العنصر يكون في العمود t. نحسب محدد A بالفك بالنسبة لهذا الصف الأول. الحد المصاحب للعنصر رقم t من هذا الصف سوف يكون على الصورة

$$(c-x)(-1)^{1+t}\det(A(1\,|\,t))$$

المصفوفة الجزئية $A(1\,|\,t)$ تكون مصفوفة من الحجم $m\times m$ بها $k=m$ عنصر على الصورة $c-x$ لا يزيد عن واحد لكل صف أو عمود. من فرض الاستنتاج، $\det(A(1\,|\,t))$ سوف يكون كثيرة حدود في x من درجة m بمعاملات ± 1 . ومن ثم هذا الحد بأكمله يكون كثيرة حدود من درجة $m+1$ بمعامل قيادي ± 1.

الحدود الباقية (التي تشكل المجموع الذي يعطي محدد A) تكون حواصل ضرب أعداد مركبة من الصف الأول مع عوامل مرافقة تتكون من المصفوفات الجزئية التي تتكون بحذف الصف الأول وعمود من A، يختلف عن العمود t . هذه المصفوفات الجزئية تكون على نحو أنها من الحجم $m\times m$ وفي كل منها $k=m-1<m$ عنصر على الصورة $c-x$ لا يزيد عن واحد لكل صف أو عمود. بتطبيق فرض الاستنتاج، نجد أن هذه الحدود تكون كثيرات حدود في x من درجة $m-1$ أو أقل. بإضافة الحد الناتج من العنصر في العمود t إلى هذه الحدود الأخرى، نجد أن $\det(A)$ يكون كثيرة حدود من درجة $m+1$ بمعامل قيادي ± 1 .

الحالة الثانية تحدث عندما $k<m+1$. الآن يوجد صف في A لا يحتوي عنصر على الصورة $c-x$. نعتبر محدد A بالفك بدلالة هذا الصف، الذي جميع عناصره أعداد مركبة. العوامل المرافقة المستخدمة تكونت من المصفوفات الجزئية من الحجم $m\times m$ التي بها k أو

$k-1$ عنصر على الصورة $c-x$، لا يزيد عن واحد لكل صف أو عمود. في كلا الحالتين، $k \le m$ ، ويمكننا تطبيق فرض الاستنتاج لبيان أن المحددات المحسوبة للعوامل المرافقة جميعها تكون كثيرات حدود من درجة k أو أقل. جمع هذه المساهمات إلى محدد A تعطي كثيرة حدود في x من درجة k أو أقل، كما هو مطلوب.

تعريف ٦-١-٦ يخبرنا بأن كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة من الحجم $n \times n$ تكون محدد المصفوفة الذي لها تحديدا n عنصر على الصورة $c-x$ ، لا يزيد عن عنصر واحد لكل صف أو عمود. على هذا النحو يمكننا تطبيق $P(n)$ لنرى أن كثيرة الحدود المميزة تكون من درجة n.

نظرية ٦-٢-١٢. نفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ هي القيم الذاتية المختلفة للمصفوفة المربعة A من الحجم n. إذن

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) = n$$

البرهان: من تعريف التعدد الجبري يمكننا تحليل كثيرة الحدود المميزة كما يلي

$$p_A(x) = c(x-\lambda_1)^{\alpha_A(\lambda_1)}(x-\lambda_2)^{\alpha_A(\lambda_2)}(x-\lambda_3)^{\alpha_A(\lambda_3)}\ldots(x-\lambda_k)^{\alpha_A(\lambda_k)}$$

حيث c ثابت غير صفري. الطرف الأيسر كثيرة حدود من درجة n، من نظرية ٦-٢-١١، والطرف الأيمن كثيرة حدود من درجة $\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i)$. لذلك تساوي درجتي كثيرتي الحدود يعطي $\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) = n$.

نظرية ٦-٢-١٣. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n وأن λ قيمة ذاتية لها. إذن

$$1 \le \gamma_A(\lambda) \le \alpha_A(\lambda) \le n$$

البرهان: حيث أن λ قيمة ذاتية لـ A، يوجد متجه ذاتي x لـ A يناظر λ إذن $x \in \varepsilon_A(\lambda)$، لذلك $\gamma_A(\lambda) \ge 1$ ، حيث يمكننا توسيع $\{x\}$ إلى أساس لـ $\varepsilon_A(\lambda)$، نظرية ٤-٥-١٨ .

لبيان أن $\gamma_A(\lambda) \le \alpha_A(\lambda)$ هو الجزء الأكبر في هذا البرهان. من أجل ذلك نفرض أن $g = \gamma_A(\lambda)$ ونفرض أن $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_g$ أساس للفضاء الذاتي لـ λ ، $\varepsilon_A(\lambda)$. نكون $n-g$ متجه أخرى $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-g}$ بحيث أن

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_g, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-g}\}$$

يكون أساس لـ $\mathbb{C}^n$. هذا يمكن عمله بتكرار تطبيق نظرية ٤-٥-١٨.

أخيرا نعرف مصفوفة S كما يلي

$$\begin{aligned} S &= [x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \ldots \mid x_g \mid y_1 \mid y_2 \mid y_3 \mid \ldots \mid y_{n-g}] \\ &= [x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \ldots \mid x_g \mid R] \end{aligned}$$

حيث R مصفوفة من الحجم $n \times (n-g)$ أعمدتها هي $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-g}$. أعمدة S مستقلة خطيا من تصميمها، لذلك S تكون غير شاذة ومن ثم تكون منعكسة. إذن

$$\begin{aligned} [e_1 \mid e_2 \mid e_3 \mid \ldots \mid e_n] &= I_n \\ &= S^{-1}S \\ &= S^{-1}[x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \ldots \mid x_g \mid R] \\ &= [S^{-1}x_1 \mid S^{-1}x_2 \mid S^{-1}x_3 \mid \ldots \mid S^{-1}x_g \mid S^{-1}R] \end{aligned}$$

لذلك

$$S^{-1}x_i = e_i \text{ ، } 1 \le i \le g \qquad (*)$$

نحسب كثيرة الحدود المميزة لـ A.

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI_n) \\ &= 1\det(A - xI_n) \\ &= \det(I_n)\det(A - xI_n) \\ &= \det(S^{-1}S)\det(A - xI_n) \\ &= \det(S^{-1})\det(S)\det(A - xI_n) \\ &= \det(S^{-1})\det(A - xI_n)\det(S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(S^{-1}(A - xI_n)S) \\
&= \det(S^{-1}AS - S^{-1}xI_nS) \\
&= \det(S^{-1}AS - xS^{-1}I_nS) \\
&= \det(S^{-1}AS - xS^{-1}S) \\
&= \det(S^{-1}AS - xI_n) \\
&= p_{S^{-1}AS}(x)
\end{aligned}$$

ما الذي يمكن أن نعلمه عن $S^{-1}AS$ ؟

$$\begin{aligned}
S^{-1}AS &= S^{-1}A[x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \ldots \mid x_g \mid R] \\
&= S^{-1}[Ax_1 \mid Ax_2 \mid Ax_3 \mid \ldots \mid Ax_g \mid AR] \\
&= S^{-1}[\lambda x_1 \mid \lambda x_2 \mid \lambda x_3 \mid \ldots \mid \lambda x_g \mid AR] \\
&= [\lambda S^{-1}x_1 \mid \lambda S^{-1}x_2 \mid \lambda S^{-1}x_3 \mid \ldots \mid \lambda S^{-1}x_g \mid S^{-1}AR] \\
&= [\lambda e_1 \mid \lambda e_2 \mid \lambda e_3 \mid \ldots \mid \lambda e_g \mid S^{-1}AR]
\end{aligned}$$

الآن نتخيل حساب كثيرة الحدود المميزة لـ A بحساب كثيرة الحدود المميزة لـ $S^{-1}AS$ باستخدام الصيغة التي بالفعل حصلنا عليها الأعمدة g الأولى من $S^{-1}AS$ كلها أصفار، نحتفظ بـ λ في القطر. لذلك إذا حسبنا المحدد بالفك بدلالة العمود الأول، بالتتابع، سوف نحصل على عوامل متتابعة من $(\lambda - x)$. أكثر دقة، نفرض T مصفوفة مربعة من الحجم $n-g$ مكونة من $n-g$ صف الأخيرة و $n-g$ العمود الأخيرة من $S^{-1}AS$. إذن

$$p_A(x) = p_{S^{-1}AS}(x) = (\lambda - x)^g \, p_T(x)$$

هذه تقول أن $(x-\lambda)$ تكون عامل لكثيرة الحدود المميزة على الأقل g مرة، لذلك التعدد الجبري لـ λ كقيمة ذاتية لـ A يكون أكبر من أو يساوي g . بتعبير آخر،

$$\gamma_A(\lambda) = g \le \alpha_A(\lambda)$$

كما هو مطلوب.

نظرية ٦-٢-١٢ تقول أن مجموع التعددات الجبرية للقيم الذاتية لـ A يساوي n. حيث أن التعدد الجبري كمية موجبة، لا يمكن لأحد التعددات الجبرية منفردا أن يزيد عن n بدون أن يفعل ذلك مجموع كل التعددات الجبرية.

نظرية ٦-٢-١٤. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن A لا يمكن أن يكون لها أكثر من n قيمة ذاتية مختلفة.

البرهان: نفرض أن A لها k قيمة ذاتية مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. إذن

$$k = \sum_{i=1}^{k} 1 \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) = n$$

القيم الذاتية للمصفوفات الهيرميتية

نتذكر أن المصفوفة الهيرميتية (المرافقة لنفسها) إذا كان $A = A^*$. في حالة المصفوفة التي جميع عناصرها أعداد حقيقية، كون المصفوفة هيرميتية يتطابق مع كونها متماثلة. أحتفظ بهذا في ذاكرتك أثناء قراءة النظريتين التاليتين. الفروض في النظريتين يمكن أن تتغير إلى "نفرض أن A مصفوفة حقيقية متماثلة".

نظرية ٦-٢-١٥. نفرض A مصفوفة هيرميتية و λ قيمة ذاتية لـ A. إذن $\lambda \in \mathbb{R}$.

البرهان: نفرض $x \neq 0$ متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية λ. إذن من نظرية ٢-٦-١٣ نعلم أن $\langle x, x \rangle \neq 0$. لذلك

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \lambda \langle x, x \rangle \\
&= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \langle x, \lambda x \rangle \\
&= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \langle x, Ax \rangle \\
&= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \langle Ax, x \rangle
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\langle x,x\rangle}\langle \lambda x,x\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle x,x\rangle}\bar{\lambda}\langle x,x\rangle \quad = \bar{\lambda}$$

إذا كان العدد المركب يساوي مرافقه فإن الجزء التخيلي له يساوي صفر ومن ثم يكون عدد حقيقي.

نظرية ٦-٢-١٦. نفرض أن A مصفوفة هيرميتية و x و y متجهان ذاتيان لـ A مناظرين لقيمتين ذاتيتين مختلفتين. إذن x و y يكونا متجهان متعامدان.

البرهان: نفرض أن x متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية λ وأن y متجه ذاتي لـ A مناظر لقيمة ذاتية مختلفة ρ . لذلك يكون $\lambda - \rho \neq 0$. إذن

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{\lambda-\rho}(\lambda-\rho)\langle x,y\rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda-\rho}(\lambda\langle x,y\rangle - \rho\langle x,y\rangle)$$

$$= \frac{1}{\lambda-\rho}(\langle \bar{\lambda}x,y\rangle - \langle x,\rho y\rangle)$$

$$= \frac{1}{\lambda-\rho}(\langle \lambda x,y\rangle - \langle x,\rho y\rangle)$$

$$= \frac{1}{\lambda-\rho}(\langle Ax,y\rangle - \langle x,Ay\rangle)$$

$$= \frac{1}{\lambda-\rho}(\langle Ax,y\rangle - \langle Ax,y\rangle)$$

$$= \frac{1}{\lambda-\rho}(0) = 0$$

من ذلك نستنتج أن x و y يكونا متجهان متعامدان.

لاحظ كيف أن المفتاح في برهان هذه النظرية هو الخاصية الأساسية للمصفوفة الهيرميتية (نظرية ٣-٢-٢١) وهي إمكانية تبديل A بين طرفي الضرب الداخلي. سوف نبني على هذه النتائج ونستمر في دراسة بعض النتائج الهامة في الفصل التالي.

تمارين ٦-٢

١- كيف يمكن تحديد المصفوفة غير الشاذة بمجرد النظر إلى قيمها الذاتية؟

٢- كم قيمة ذاتية مختلفة يمكن أن تكون لمصفوفة مربعة من الحجم n؟

٣- ما هو المدهش في القيم الذاتية للمصفوفات الهيرميتية ولماذا هو مدهش؟

٤- نفرض A مصفوفة مربعة. برهن أن الحد الثابت في كثيرة الحدود المميزة لـ A يساوي محدد A.

٥- نفرض A مصفوفة مربعة. برهن أن متجه واحد قد لا يكون متجه ذاتي لـ A مناظر لقيمتين ذاتيتين مختلفتين.

٦- نفرض أن U مصفوفة واحدية لها قيمة ذاتية λ. برهن أن $|\lambda|=1$. هذا يعني أن القيم الذاتية للمصفوفات الواحدية تقع جميعها في دائرة الوحدة في المستوى المركب.

٧- نظرية ٦-٢-١١ تخبرنا بأن كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة مربعة من الحجم n تكون من درجة n. بتعديل مناسب في برهان نظرية ٦-٢-١١، برهن أن معامل x^n في كثيرة الحدود المميزة يكون $(-1)^n$.

٨- نظرية ٦-٢-٨ تقول أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة غير الشاذة A، فإن $\frac{1}{\lambda}$ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^{-1} . أكتب برهان بديل لهذه النظرية باستخدام كثيرة الحدود المميزة دون الإشارة إلى متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة λ.

٦-٣ التشابه والتقطير Similarity and Diagonalization

قد يبدو للوهلة الأولى أن موضوع هذا الفصل خارج السياق، ولكن قريبا سوف نربطه بالقيم الذاتية والمتجهات الذاتية. هذا أيضا هو نظرتنا الأولى حول الفكرة الأساسية للباب الثامن.

المصفوفات المتشابهة

مفهوم أن مصفوفتان تكونا متشابهتان يشبه كثيرا قولنا بأن المصفوفتان متكافئتان صفيا. المصفوفات المتشابهة ليست متساوية، ولكن تشتركان في العديد من الخواص الهامة. هذا الفصل، والفصل ٨-٤ سوف يخصصان لاكتشاف ما هي هذه الخواص. أولا نقدم التعريف الأساس في هذا الفصل.

تعريف ٦-٣-١. نفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الحجم n. إذن A و B تكونا **متشابهتان** similar إذا وجدت مصفوفة غير شاذة S من الحجم n بحيث $A=S^{-1}BS$.

سوف نقول "**A تشابه B بالنسبة إلى S**" عندما نريد التأكيد على دور S في العلاقة بين A و B. أيضا ليس من المهم أن نقول A تشابه B أو B تشابه A. إذا كانت إحدى العبارتين صحيحة فإن الأخرى تكون كذلك، كما يمكن أن نرى ذلك باستخدام S^{-1} بدلا عن S. أخيرا، سوف نشير إلى $S^{-1}BS$ **تحويل التشابه** a similarity transformation عندما نريد أن نؤكد على الطريقة التي تستخدم فيها S لتحويل B.

مثال ٦-٣-٢. نعرف المصفوفتين

$$B=\begin{bmatrix}-4&1&-3&-2&2\\1&2&-1&3&-2\\-4&1&3&2&2\\-3&4&-2&-1&-3\\3&1&-1&1&-4\end{bmatrix}\qquad S=\begin{bmatrix}1&2&-1&1&1\\0&1&-1&-2&-1\\1&3&-1&1&1\\-2&-3&3&1&-2\\1&3&-1&2&1\end{bmatrix}$$

نختبر S كمصفوفة غير شاذة ومن ثم نحسب

$$A=S^{-1}BS$$

$$=\begin{bmatrix}10&1&0&2&-5\\-1&0&1&0&0\\3&0&2&1&-3\\0&0&-1&0&1\\-4&-1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&1&-3&-2&2\\1&2&-1&3&-2\\-4&1&3&2&2\\-3&4&-2&-1&-3\\3&1&-1&1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1&1&1\\0&1&-1&-2&-1\\1&3&-1&1&1\\-2&-3&3&1&-2\\1&3&-1&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-10&-27&-29&-80&-25\\-2&6&6&10&-2\\-3&11&-9&-14&-9\\-1&-13&0&-10&-1\\11&35&6&49&19\end{bmatrix}$$

لذلك A و B تكونا متشابهتان.

مثال ٦-٣-٣. نعرف

$$B=\begin{bmatrix}-13&-8&-4\\12&7&4\\24&16&7\end{bmatrix}\qquad\qquad S=\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&-1&-3\\1&-2&0\end{bmatrix}$$

نختبر أن S مصفوفة غير شاذة ونحسب

$$A=S^{-1}BS$$

$$=\begin{bmatrix}-6&-4&-1\\-3&-2&-1\\5&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-13&-8&-4\\12&7&4\\24&16&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&-1&-3\\1&-2&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

ومن ثم تكون A و B متشابهتان. ولكن قبل أن نتحرك، انظر إلى شكل A. لم تخلص بشيء؟ إذن نعتبر الحسابات العديدة المتعلقة بـ A والتي تكون على وجه الخصوص بسيطة. فمثلا، بالنظر إلى مثال...، $\det(A)=(-1)(3)(-1)=3$. بالمثل، كثيرة الحدود المميزة تحسب مباشرة $p_A(x)=(-1-x)(3-x)(-1-x)=-(x-3)(x+1)^2$، وحيث أنها في صورة محللة فإن القيم الذاتية تكون ببساطة هي $\lambda=3,-1$. أخيرا المتجهات الذاتية لـ A هي مجرد متجهات الوحدة القياسية.

خواص المصفوفات المتشابهة

المصفوفات المتشابهة تشترك في العديد من الخواص وهذه هي النظريات التي تبرر اختيار كلمة "تشابه". أولا سوف نبين أن التشابه يكون علاقة تكافؤ. علاقة التكافؤ مهمة في دراسة كل فروع الجبر ويمكن دائما اعتبار أنها نوع ضعيف من التساوي. نوع من التماثل ولكن ليس التساوي التام. مفهوم التكافؤ الصفي لمصفوفتين هو مثال لعلاقة تكافؤ، والتي بالفعل تعاملنا معها منذ بداية هذا المقرر. المصفوفات المتكافئة صفيا ليست متساوية، ولكنها متماثلة كثيرا، على سبيل المثال لها نفس الرتبة. بصورة نظامية، علاقة التكافؤ تتطلب ثلاثة شروط: الانعكاس، التماثل و التعدي. سوف نوضح هذه الشروط الثلاثة عند إثبات أن التشابه يكون علاقة تكافؤ.

نظرية ٦-٣-٤. نفرض أن A، B و C ثلاث مصفوفات مربعة من الحجم n. إذن

١- A تشابه A (الانعكاس).

٢- إذا كانت A تشابه B فإن B تشابه A (التماثل).

٣- إذا كانت A تشابه B و B تشابه C فإن A تشابه C (التعدي).

البرهان: لبيان أن A تشابه A ، نحتاج فقط إلى وصف مصفوفة غير شاذة تؤثر كتحويل تشابه لـ A إلى A. I_n مصفوفة غير شاذة و

$$I_n^{-1}AI_n = I_nAI_n = A$$

إذا كانت A تشابه B فإنه توجد مصفوفة غير شاذة S بحيث $A = S^{-1}BS$ ، وذلك من التعريف. إذن من نظرية ٣-٣-١١، S^{-1} تكون منعكسة، ومن نظرية ٣-٤-٣ تكون غير شاذة. إذن

$$\begin{aligned}(S^{-1})^{-1}A(S^{-1}) &= SAS^{-1}\\ &= SS^{-1}BSS^{-1}\\ &= (SS^{-1})B(SS^{-1})\\ &= I_nBI_n\\ &= B\end{aligned}$$

ومن ثم تكون B تشابه A .

نفرض أن A تشابه B و B تشابه C . إذن توجد مصفوفتان غير شاذتان S و R ، بحيث $A = S^{-1}BS$ و $B = R^{-1}CR$. حيث أن S و R منعكستان فكذلك RS تكون منعكسة ومن ثم تكون غير شاذة. الآن

$$\begin{aligned}(RS)^{-1}C(RS) &= S^{-1}R^{-1}CRS \\ &= S^{-1}(R^{-1}CR)S \\ &= S^{-1}BS \\ &= A\end{aligned}$$

ومن ثم A تشابه C بالنسبة للمصفوفة غير الشاذة RS.

نظرية ٦-٣-٥. نفرض أن A و B مصفوفتان متشابهتان. إذن كثيرتي الحدود المميزتين للمصفوفتين A و B تكونا متساويتان. أي أن $p_A(x) = p_B(x)$.

البرهان: نفرض أن n ترمز إلى حجم المصفوفتين A و B . حيث أن A و B متشابهتان، توجد مصفوفة غير شاذة S بحيث $A = S^{-1}BS$. إذن

$$\begin{aligned}p_A(x) &= \det(A - xI_n) \\ &= \det(S^{-1}BS - xI_n) \\ &= \det(S^{-1}BS - xS^{-1}I_nS) \\ &= \det(S^{-1}BS - S^{-1}xI_nS) \\ &= \det(S^{-1}(B - xI_n)S) \\ &= \det(S^{-1})\det(B - xI_n)\det(S) \\ &= \det(S^{-1})\det(S)\det(B - xI_n) \\ &= \det(S^{-1}S)\det(B - xI_n) \\ &= \det(I_n)\det(B - xI_n) \\ &= 1\det(B - xI_n) \\ &= p_B(x)\end{aligned}$$

ومن ثم فإن المصفوفات المتشابهة ليس فقط لها نفس مجموعة القيم الذاتية، ولكن أيضا التعددات الجبرية لهذه القيم تكون هي نفس الشيء. ومع ذلك كن على حذر مع هذه النظرية. من المغري التفكير في أن العكس يكون صحيحا ونظن أنه إذا كان مصفوفتان لهما نفس القيم الذاتية فإنهما تكونا متشابهتان. الأمر ليس كذلك، كما يتضح من المثال التالي.

مثال ٦-٣-٦. نفرض أن

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

نتأكد من أن

$$p_A(x)=p_B(x)=1-2x+x^2=(x-1)^2$$

ومن ثم A و B لهما نفس كثيرة الحدود المميزة. إذا كان عكس نظرية ٦-٣-٥ صحيح فإن A و B يجب أن تكونا متشابهتان. نفرض أنه كذلك، ومن ثم إذن توجد مصفوفة غير شاذة S بحيث أن $A=S^{-1}BS$. إذن

$$A=S^{-1}BS=S^{-1}I_2S=S^{-1}S=I_2$$

ومن الواضح أن $A\neq I_2$. هذا التناقض يبين أن عكس نظرية ٦-٣-٥ ليس صحيحا.

التقطير

أشياء جيدة تحدث عندما تكون مصفوفة مشابهة لمصفوفة قطرية. على سبيل المثال، القيم الذاتية للمصفوفة تكون هي نفس عناصر القطر للمصفوفة القطرية. ويمكن أن يكون أبسط حساب القوى العليا للمصفوفة. إمكانية تقطير المصفوفة أيضا تكون لها أهمية في الأوضاع الأكثر تجريدا. هنا نعطي تعريفات ذات صلة ثم النظرية الرئيسية في هذا الفصل.

تعريف ٦-٣-٧. نفرض A مصفوفة مربعة. إذن A تكون **مصفوفة قطرية** diagonal matrix إذا كان $[A]_{ij}=0$ كلما كان $i\neq j$.

تعريف ٦-٣-٨. نفرض A مصفوفة مربعة. إذن A تكون **قابلة للتقطير** diagonalizable إذا كانت A متشابهة مع مصفوفة قطرية.

مثال ٦-٣-٩. المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix}-7 & -6 & -12\\ 5 & 5 & 7\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

تكون متشابهة مع مصفوفة قطرية، يمكن بيان ذلك بإجراء الحسابات مع المصفوفة غير الشاذة S

$$S^{-1}BS=\begin{bmatrix}-5 & -3 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-7 & -6 & -12\\ 5 & 5 & 7\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & -3 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & -6 & -12\\ 5 & 5 & 7\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & -3 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

السؤال الآن كيف يمكننا إيجاد المصفوفة السحرية B التي يمكن أن تستخدم في تحويل التشابه لإنتاج مصفوفة قطرية. قبل قراءة منطوق النظرية التالية ادرس القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة في المثال السابق.

نظرية ٦-٣-١٠. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن A تكون قابلة للتقطير إذا وفقط إذا كان يوجد مجموعة S مستقلة خطيا تحتوي n متجه ذاتي لـ A.

البرهان: الاتجاه الأول، نفرض أن $S=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات الذاتية لـ A المناظرة للقيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$. نتذكر تعريف متجهات الوحدة القياسية (تعريف ٢-٦-١٧) ونعرف

$$R=[x_1\,|\,x_2\,|\,x_3\,|\ldots|\,x_n]$$

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}=[\lambda_1 e_1 \mid \lambda_2 e_2 \mid \lambda_3 e_3 \mid \ldots \mid \lambda_n e_n]$$

أعمدة R هي متجهات المجموعة المستقلة خطيا S ومن ثم R تكون غير شاذة. من نظرية ٢-٤-١٤، R^{-1} تكون موجودة.

$$\begin{aligned}
R^{-1}AR &= R^{-1}A[x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \ldots \mid x_n]\\
&= R^{-1}[Ax_1 \mid Ax_2 \mid Ax_3 \mid \ldots \mid Ax_n]\\
&= R^{-1}[\lambda_1 x_1 \mid \lambda_2 x_2 \mid \lambda_3 x_3 \mid \ldots \mid \lambda_n x_n]\\
&= R^{-1}[\lambda_1 R\mathrm{e}_1 \mid \lambda_2 R\mathrm{e}_2 \mid \lambda_3 R\mathrm{e}_3 \mid \ldots \mid \lambda_n R\mathrm{e}_n]\\
&= R^{-1}[R(\lambda_1\mathrm{e}_1) \mid R(\lambda_2\mathrm{e}_2) \mid R(\lambda_3\mathrm{e}_3) \mid \ldots \mid R(\lambda_n\mathrm{e}_n)]\\
&= R^{-1}R[\lambda_1\mathrm{e}_1 \mid \lambda_2\mathrm{e}_2 \mid \lambda_3\mathrm{e}_3 \mid \ldots \mid \lambda_n\mathrm{e}_n]\\
&= I_n D\\
&= D
\end{aligned}$$

هذا يعني أن A تشابه المصفوفة القطرية D بالنسبة إلى المصفوفة R. لذلك A تكون قابلة للتقطير.

الاتجاه العكسي، نفرض أن A قابلة للتقطير. إذن توجد مصفوفة غير شاذة من الحجم n، $T=[y_1 \mid y_2 \mid y_3 \mid \ldots \mid y_n]$ ومصفوفة قطرية

$$E=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}=[d_1 e_1 \mid d_2 e_2 \mid d_3 e_3 \mid \ldots \mid d_n e_n]$$

بحيث $T^{-1}AT=E$.

إذن، نعتبر

$$[Ay_1 \mid Ay_2 \mid Ay_3 \mid \ldots \mid Ay_n]$$

$$\begin{aligned}
&= A[y_1 \mid y_2 \mid y_3 \mid \dots \mid y_n] \\
&= AT \\
&= I_n AT \\
&= TT^{-1}AT \\
&= TE \\
&= T[d_1e_1 \mid d_2e_2 \mid d_3e_3 \mid \dots \mid d_ne_n] \\
&= [T(d_1e_1) \mid T(d_2e_2) \mid T(d_3e_3) \mid \dots \mid T(d_ne_n)] \\
&= [d_1Te_1 \mid d_2Te_2 \mid d_3Te_3 \mid \dots \mid d_nTe_n] \\
&= [d_1y_1 \mid d_2y_2 \mid d_3y_3 \mid \dots \mid d_ny_n]
\end{aligned}$$

هذا التساوي للمصفوفات يسمح لنا باستنتاج أن الأعمدة المنفصلة تكون متجهات متساوية. أي أن $Ay_i = d_iy_i$ لكل $1 \le i \le n$. بتعبير آخر، y_i تكون متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة d_i لكل $1 \le i \le n$. (لماذا لا يمكن أن يكون $y_i = 0$ ؟) لأن T غير شاذة، مجموعة أعمدة T ، $S = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$، تكون مجموعة مستقلة خطيا. لذلك المجموعة S تحقق كل المطلوب.

لاحظ أن برهان نظرية ٦-٣-١٠ هو إنشائي. لتقطير مصفوفة نحتاج إلى تحديد موقع n متجهات ذاتية مستقلة خطيا. ثم نكون مصفوفة غير شاذة (R) باستخدام المتجهات الذاتية كأعمدة بحيث $R^{-1}AR$ تكون مصفوفة قطرية D. عناصر القطر في المصفوفة القطرية D سوف تكون هي القيم الذاتية المناظرة للمتجهات الذاتية المستخدمة في تكوين R، بنفس الترتيب الذي تظهر فيه المتجهات الذاتية في R. سوف نوضح ذلك بتقطير بعض المصفوفات.

مثال ٦-٣-١١. نعتبر المصفوفة

$$F = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

في مثال ٦-١-٧ ومثال ٦-١-٩ ومثال ٦-١-١٣ أوجدنا القيم الذاتية والفضاءات الذاتية للمصفوفة F.

$$\lambda = 3 \qquad \varepsilon_F(3) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\lambda = -1 \qquad \varepsilon_F(-1) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

نعرف المصفوفة S من الحجم 3×3 التي أعمدتها هي متجهات الأساس الثلاث للفضاءات الذاتية لـ F.

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نتأكد من أن S غير شاذة (تختزل صفيا إلى مصفوفة الوحدة أو يكون لها محدد غير صفري). إذن أعمدة S الثلاثة تكون مجموعة مستقلة خطيا. من نظرية ٦-٣-١٠ نعلم أن F قابلة للتقطير. علاوة على ذلك، التركيبة في برهان نظرية ٦-٣-١٠ تخبرنا أنه إذا طبقنا S إلى F كتحويل متشابه، النتيجة سوف تكون مصفوفة قطرية عناصر القطر فيها هي القيم الذاتية لـ F. القيم الذاتية تظهر على قطر المصفوفة بنفس الترتيب الذي تظهر به المتجهات الذاتية في S. لذلك

$$\begin{aligned}
S^{-1}FS
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

بعد الفضاء الذاتي لا يمكن أن يكون أكبر من التعدد الجبري للقيمة الذاتية وذلك من نظرية ٦-٢-١٣ عندما يكون كل فضاء ذاتي لقيمة ذاتية بهذا الكبر، فإنه يمكننا تقطير المصفوفة، وفقط عند ذلك. ثلاثة أمثلة تم عرضها في هذا الفصل، مثال ٦-٣-٢، مثال ٦-٣-٩ و مثال ٦-٣-١١ توضح تقطير مصفوفة، مع تباين في درجة تفاصيل كيفية الحصول على التقطير. ومع ذلك، في كل حالة، يمكنك التحقق من أن التعدد الجبري والتعدد الهندسي تكون متساوية لكل قيمة ذاتية. هذا هو جوهر النظرية التالية.

نظرية ٦-٣-١٢ . نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذن A تكون قابلة للتقطير إذا وفقط إذا كان $\gamma_A(\lambda)=\alpha_A(\lambda)$ لكل قيمة ذاتية λ لـ A.

البرهان: نفرض أن A من الحجم n ولها k قيمة ذاتية مختلفة $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$. نفرض أن $S_i=\{x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{i\gamma_A(\lambda_i)}\}$ ترمز إلى أساس الفضاء الذاتي $\varepsilon_A(\lambda_i)$ للقيمة الذاتية λ_i لكل $1\le i\le k$. إذن

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup\ldots\cup S_k$$

تكون هي مجموعة متجهات ذاتية لـ A. المتجه لا يمكن أن يكون متجه ذاتي مناظر لأكثر من قيمة ذاتية واحدة (أنظر تمرين ٦-١-١٤)، لذلك $S_i\cap S_j=\phi$ كلما كان $i\neq j$. بتعبير آخر، S تكون اتحاد مجموعات منفصلة S_i ، $1\le i\le k$.

الاتجاه الأول، حجم S يكون

$$
\begin{aligned}
|S| &= \sum_{i=1}^{k}\gamma_A(\lambda_i) && (\text{اتحاد مجموعات منفصلة } S_i \text{ } S) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha_A(\lambda_i) && (\text{من الفرض}) \\
&= n && (\text{نظرية ٦-٢-١٢})
\end{aligned}
$$

الآن نبين أن S مجموعة مستقلة خطيا. نبدأ بعلاقة ارتباط خطي على S

$$
\begin{aligned}
0=&\left(a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\ldots+a_{1\gamma_A(\lambda_1)}x_{1\gamma_A(\lambda_1)}\right)+\\
&\left(a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+\ldots+a_{2\gamma_A(\lambda_2)}x_{2\gamma_A(\lambda_2)}\right)+
\end{aligned}
$$

$$(a_{31}x_{31} + a_{32}x_{32} + \ldots + a_{3\gamma_A(\lambda_3)}x_{3\gamma_A(\lambda_3)}) +$$
$$\vdots$$
$$(a_{k1}x_{k1} + a_{k2}x_{k2} + \ldots + a_{k\gamma_A(\lambda_k)}x_{k\gamma_A(\lambda_k)})$$

نعرف المتجهات y_i ، $1 \le i \le k$ ، كما يلي

$$y_1 = (a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \ldots + a_{1\gamma_A(\lambda_1)}x_{1\gamma_A(\lambda_1)})$$
$$y_2 = (a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} + \ldots + a_{2\gamma_A(\lambda_2)}x_{2\gamma_A(\lambda_2)})$$
$$y_3 = (a_{31}x_{31} + a_{32}x_{32} + a_{33}x_{33} + \ldots + a_{3\gamma_A(\lambda_3)}x_{3\gamma_A(\lambda_3)})$$
$$\vdots$$
$$y_k = (a_{k1}x_{k1} + a_{k2}x_{k2} + a_{k3}x_{k3} + \ldots + a_{k\gamma_A(\lambda_k)}x_{k\gamma_A(\lambda_k)})$$

إذن علاقة الارتباط الخطي تصبح

$$0 = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_k$$

حيث أن الفضاء الذاتي $\varepsilon_A(\lambda_i)$ مغلق بالنسبة لجمع المتجهات وضرب متجه في قياسي، $y_i \in \varepsilon_A(\lambda_i)$ ، $1 \le i \le k$. لذلك لكل i، المتجه y_i يكون متجه ذاتي لـ A مناظر للقيمة الذاتية λ_i أو يكون المتجه الصفري. نذكر أن مجموعة المتجهات الذاتية التي قيمها الذاتية مختلفة تكون مجموعة مستقلة خطيا من نظرية ٦-٢-١. بعض y_i سوف يكون غير صفري، المعادلة السابقة سوف تعطي علاقة ارتباط خطي غير تافهة على مجموعة متجهات ذاتية مناظرة لقيم ذاتية مختلفة، وهذا يناقض نظرية ٦-٢-١ لذلك $y_i = 0$ ، $1 \le i \le k$.

كل من المعادلات $y_i = 0$ ، $1 \le i \le k$، تكون علاقة ارتباط خطي على المجموعة المناظرة S_i، مجموعة متجهات أساس الفضاء الذاتي $\varepsilon_A(\lambda_i)$، والتي من ثم تكون مستقلة خطيا. من علاقات الارتباط الخطي هذه على مجموعات مستقلة خطيا نستنتج أن المعاملات القياسية كلها تكون أصفار، أي أن $a_{ij} = 0$ ، $1 \le j \le \gamma_A(\lambda_i)$ لكل $1 \le i \le k$. هذا يوضح أن علاقتنا الأصلية للارتباط الخطي على S تكون فقط العلاقة التافهة ومن ثم S تكون مستقلة خطيا.

الآن بينا أن S مجموعة من n متجه ذاتي لـ A مستقلة خطيا ومن ثم، من نظرية ٦-٣-١٠، A تكون قابلة للتقطير.

الآن نبرهن الاتجاه العكسي. نفرض أن A قابلة للتقطير. نفرض أنه توجد على الأقل قيمة ذاتية واحدة λ_t، بحيث $\gamma_A(\lambda_t) \neq \alpha_A(\lambda_t)$.

من نظرية ٦-٢-١٣ يجب أن يكون

$\gamma_A(\lambda_t) < \alpha_A(\lambda_t)$ و $\gamma_A(\lambda_i) \leq \alpha_A(\lambda_i)$ لكل $1 \leq i \leq k$، $i \neq t$.

حيث أن A قابلة للتقطير، نظرية ٦-٣-١٠ تضمن وجود مجموعة من n متجه مستقلة خطيا، كل منها يكون متجه ذاتي لـ A. نفرض أن n_i ترمز إلى عدد المتجهات الذاتية في S التي تناظر القيمة الذاتية λ_i، تذكر أن المتجه لا يمكن أن يكون متجه ذاتي لقيمتين ذاتيتين مختلفتين. S مجموعة مستقلة خطيا، ومن ثم المجموعة الجزئية S_i التي تحتوي n_i متجه ذاتي للقيمة الذاتية λ_i يجب أن تكون مستقلة خطيا. لأن الفضاء الذاتي $\varepsilon_A(\lambda_i)$ له البعد $\gamma_A(\lambda_i)$ و S_i مجموعة جزئية مستقلة خطيا في $\varepsilon_A(\lambda_i)$، نظرية ٤-٥-١٩ تخبرنا أن $n_i \leq \gamma_A(\lambda_i)$ لكل $1 \leq i \leq k$.

بتجميع كل هذه الحقائق معا نحصل على

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_t + \ldots + n_k \\ &\leq \gamma_A(\lambda_1) + \gamma_A(\lambda_2) + \gamma_A(\lambda_3) + \ldots + \gamma_A(\lambda_t) + \ldots + \gamma_A(\lambda_k) \\ &< \alpha_A(\lambda_1) + \alpha_A(\lambda_2) + \alpha_A(\lambda_3) + \ldots + \alpha_A(\lambda_t) + \ldots + \alpha_A(\lambda_k) \\ &= n \end{aligned}$$

وهذا تناقض حيث لا يمكن أن يكون $n < n$. ومن ثم يكون الفرض بأنه يمكن أن يوجد فضاء ذاتي ليس له البعد كامل يكون فرض خاطئ.

فيما سبق ذكرنا أمثلة لمصفوفات قابلة للتقطير. الآن نعطي مثال لمصفوفة غير قابلة للتقطير.

مثال ٦-٣-١٣. في مثال ٦-١-١٦ رأينا أن المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -2 & -4\\ 12 & 1 & 4 & 9\\ 6 & 5 & -2 & -4\\ 3 & -4 & 5 & 10\end{bmatrix}$$

لها كثيرة الحدود المميزة

$$p_B(x)=(x-1)(x-2)^3$$

وفضاء ذاتي مناظر للقيمة $\lambda=2$

$$\varepsilon_B(2)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

ومن ثم التعدد الهندسي لـ $\lambda=2$ هو $\gamma_B(2)=1$ ، بينما التعدد الجبري $\alpha_B(2)=3$.

نظرية ٦-٣-١٤. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n لها n قيمة ذاتية مختلفة. إذن A تكون قابلة للتقطير.

البرهان: نفرض أن $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ ترمز إلى n قيمة ذاتية مختلفة لـ A. إذن من نظرية ٦-٢-١٢ يكون $n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_A(\lambda_i)$ ، وهو ما يؤدي إلى $\alpha_A(\lambda_i)=1$ لكل $1\le i\le n$. من نظرية ٦-٢-١٣ ينتج أن $\gamma_A(\lambda_i)=1$ لكل $1\le i\le n$. ومن ثم $\gamma_A(\lambda_i)=\alpha_A(\lambda_i)$ لكل $1\le i\le n$. من نظرية ٦-٣-١٢، A تكون قابلة للتقطير.

مثال ٦-٣-١٥. في مثال ٦-١-٢٠ وضحنا أن المصفوفة

$$H=\begin{bmatrix}15 & 18 & -8 & 6 & -5\\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3\\ 0 & -4 & 5 & -4 & -2\\ -43 & -46 & 17 & -14 & 15\\ 26 & 30 & -12 & 8 & -10\end{bmatrix}$$

لها كثيرة الحدود المميزة

$$p_H(x)=x(x-2)(x-1)(x+1)(x+3)$$

ومن ثم المصفوفة من الحجم 5×5 لها خمس قيم ذاتية مختلفة. من نظرية ٦-٣-١٤، H تكون قابلة للتقطير. المصفوفة S التي تتكون من متجهات ذاتية كأعمدة، متجه واحد من كل فضاء ذاتي، تكون أعمدتها مستقلة خطيا ومن ثم المصفوفة S تكون غير شاذة. لاحظ أننا نستخدم صيغة المتجهات الذاتية ذات عناصر أعداد صحيحة. المصفوفة القطرية التي لها القيم الذاتية لـ H في نفس ترتيب ظهور المتجهات الذاتية المناظرة كأعمدة لـ S. مع هذه المصفوفات نتحقق بالحسابات من

$$S^{-1}HS = D$$

$$S=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه توجد عدة طرق مختلفة لتقطير H . يمكننا استبدال المتجهات الذاتية بمضاعفات قياسية، أو يمكن إعادة ترتيب المتجهات الذاتية كأعمدة في S (والتي تؤدي إلى إعادة ترتيب القيم الذاتية في قطر D) .

يمكن بسهولة حساب قوى المصفوفة القطرية ، وعندما تكون المصفوفة قابلة للتقطير فإنه يكون أيضا من السهل حساب القوى لها. يمكننا صياغة نظرية لتوضيح ذلك، ولكن بدلا من ذلك سوف نعطي مثال.

مثال ٦-٣-١٦. نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 19 & 0 & 6 & 13 \\ -33 & -1 & -9 & -21 \\ 21 & -4 & 12 & 21 \\ -36 & 2 & -14 & -28 \end{bmatrix}$$

نرغب في حساب A^{20} . من الطبيعي، هذا يحتاج إلى 19 عملية ضرب مصفوفات، ولكن حيث أن A قابلة للتقطير، يمكننا تبسيط الحسابات.

أولا نقطر A باستخدام

$$S=\begin{bmatrix}1&-1&2&-1\\-2&3&-3&3\\1&1&3&3\\-2&1&-4&0\end{bmatrix}$$

نجد أن

$$D=S^{-1}AS$$
$$=\begin{bmatrix}-6&1&-3&-6\\0&2&-2&-3\\3&0&1&2\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}19&0&6&13\\-33&-1&-9&-21\\21&-4&12&21\\-36&2&-14&-28\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2&-1\\-2&3&-3&3\\1&1&3&3\\-2&1&-4&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

الآن نوجد تعبير بديل لـ A^{20}

$$\begin{aligned}A^{20}&=AAA...A\\&=I_nAI_nAI_nAI_n...I_nAI_n\\&=(SS^{-1})A(SS^{-1})A(SS^{-1})A(SS^{-1})...(SS^{-1})A(SS^{-1})\\&=S(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)...(S^{-1}AS)S^{-1}\\&=SDDD...DS^{-1}\\&=SD^{20}S^{-1}\end{aligned}$$

حيث أن D مصفوفة قطرية فإن حساب القوى يكون أيسر كثيرا

$$=S\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{20}S^{-1}$$

$$=S\begin{bmatrix}(-1)^{20}&0&0&0\\0&(0)^{20}&0&0\\0&0&(2)^{20}&0\\0&0&0&(1)^{20}\end{bmatrix}S^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & -3 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 3\\ -2 & 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1048576 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 2 & -2 & -3\\ 3 & 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6291451 & 2 & 2097148 & 4194297\\ -9437175 & -5 & -3145719 & -6291441\\ 9437175 & -2 & 3145728 & 6291453\\ -12582900 & -2 & -4194298 & -8388596\end{bmatrix}$$

لاحظ كيف استبدلنا القوة العشرون لـ A بالقوة العشرون لـ D ، وكيف أن القوى العليا لمصفوفة قطرية هو مجرد قوى الكميات القياسية في القطر. الثمن الذي دفع لهذا التبسيط هو الذي نحتاجه لتقطير مصفوفة وهو حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية وإيجاد معكوس مصفوفة المتجهات الذاتية. أيضا نحتاج إلى عمليتي ضرب مصفوفات.

متتابعات فيبوناشي

مثال ٦-٣-١٧. متتابعة فيبوناشي Fibonacci sequence هي متتابعة من الأعداد الصحيحة تعرف ارتداديا كما يلي

$$a_0 = 0 \quad ، a_1 = 1 \quad ، a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad ، n \geq 1$$

إذن الجزء الأول من المتتابعة يكون $0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$. فيما يلي سوف نوضح تطبيق للقيم الذاتية والتقطير خلال تحديد صيغة مغلقة لتعبير حد اختياري من هذه المتتابعة.

لكي نبدأ نتحقق من أنه لأي $n \geq 1$ العلاقة الارتدادية السابقة تؤدي إلى صحة المقترح

$$\begin{bmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\ a_n\end{bmatrix}$$

نفرض A ترمز إلى هذه المصفوفة من الحجم 2×2. خلال تكرار تطبيق العلاقة السابقة نحصل على

$$\begin{bmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_{n-1}\\ a_n\end{bmatrix}=A^2\begin{bmatrix}a_{n-2}\\ a_{n-1}\end{bmatrix}=A^3\begin{bmatrix}a_{n-3}\\ a_{n-2}\end{bmatrix}=\ldots=A^n\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}$$

سوف نقطر A. كثيرة الحدود المميزة لـ A تكون $p_A(x) = x^2 - x - 1$ ، بقيم ذاتية

$$\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \delta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

أي أن A لها قيمتين ذاتيتين مختلفتين. من نظرية ٦-٣-١٤، A قابلة للتقطير. يمكن بسهولة بيان أن القيم الذاتية لـ A تحقق ما يلي

$$\rho+\delta=1 \quad \rho\delta=-1 \quad 1+\rho=\rho^2 \quad 1+\delta=\delta^2 \quad \rho-\delta=\sqrt{5}$$

المتجهات الذاتية لـ A (المناظرة لـ δ و ρ) على الترتيب هي

$$\begin{bmatrix}1\\ \rho\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\ \delta\end{bmatrix}$$

والتي يمكن التأكد منها بسهولة، كما نوضح للمتجه الذاتي لـ ρ

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\ 1+\rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho^2\end{bmatrix}=\rho\begin{bmatrix}1\\ \rho\end{bmatrix}$$

من برهان نظرية ٦-٣-١٠، نعلم أن A تكون قابلة للتقطير بالمصفوفة S التي أعمدتها هي المتجهات الذاتية، لتعطي $D=S^{-1}AS$. هنا نعطي S، S^{-1} و D.

$$S=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \rho & \delta\end{bmatrix} \quad S^{-1}=\frac{1}{\rho-\delta}\begin{bmatrix}-\delta & 1\\ \rho & -1\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}\rho & 0\\ 0 & \delta\end{bmatrix}$$

حسنا، الآن كل شيء في مكانه. الخطوة الرئيسية فيما يلي أن نضع SDS^{-1} بدلا عن A:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a_n\\ a_{n+1}\end{bmatrix} &= A^n\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}\\ &=(SDS^{-1})^n\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}\\ &=SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1}\ldots SDS^{-1}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}\\ &=SDDD\ldots DS^{-1}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= SD^nS^{-1}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \rho & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}^n \frac{1}{\rho-\delta}\begin{bmatrix} -\delta & 1 \\ \rho & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho-\delta}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \rho & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho^n & 0 \\ 0 & \delta^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\delta & 1 \\ \rho & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho-\delta}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \rho & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho^n & 0 \\ 0 & \delta^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho-\delta}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \rho & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho^n \\ -\delta^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho-\delta}\begin{bmatrix} \rho^n - \delta^n \\ \rho^{n+1} - \delta^{n+1} \end{bmatrix}$$

بإجراء الضرب في قياسي ومساواة العنصر الأول في المتجهين نحصل على تعبير الصورة المغلقة

$$a_n = \frac{1}{\rho-\delta}(\rho^n - \delta^n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

لاحظ أنه لا يهم إن كنا استخدمنا التساوي للعنصر الأول أو العنصر الثاني في المتجهين، سوف نصل إذا نفس الصيغة مرة بدلالة n ومرة بدلالة $n+1$. أيضا تعريفنا يصف متتابعة تحتوي فقط أعداد صحيحة رغم وجود العدد غير الكسري $\sqrt{5}$.

متتابعة فيبوناشي وتعميماتها درست على نطاق واسع. توجد عدة طرق لاشتقاق تعبير الصيغة المغلقة الذي حصلنا عليه، وطريقتنا قد لا

تكون الأفضل. ولكن من اللطيف أن نرى كيف أن التقطير يمكن أن يستخدم في حل مسألة خارج نطاق الجبر الخطي.

تمارين ٦-٣

١- نعتبر المصفوفة A التالية. بين أنها قابلة للتقطير أولا بحساب التعددات الهندسية للقيم الذاتية واستنادا إلى النظريات ذات الصلة، ثانيا بإيجاد مصفوفة قطرية D ومصفوفة غير شاذة S بحيث $S^{-1}AS = D$.

$$A=\begin{bmatrix} 18 & -15 & 33 & -15 \\ -4 & 8 & -6 & 6 \\ -9 & 9 & -16 & 9 \\ 5 & -6 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

٢- حدد ما إذا كانت المصفوفة التالية قابلة للتقطير. إذا كانت كذلك، أوجد مصفوفة قطرية D التي تشابه A، وأوجد المصفوفة المنعكسة S التي تنفذ التحويل المتشابه.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 & 24 \\ -3 & -27 & -29 & -68 \\ 1 & 11 & 13 & 26 \\ 1 & 7 & 7 & 18 \end{bmatrix}$$

٣- نعتبر المصفوفة A التالية. أوجد القيم الذاتية ثم استخدمها في تكوين كثيرة الحدود المميزة $p_A(x)$. أكتب التعدد الجبري لكل قيمة ذاتية. أوجد الفضاءات الذاتية لـ A بحساب تعبيرات لفضاءات الصفرية. أكتب التعدد الهندسي لكل قيمة ذاتية. هل A قابلة للتقطير؟ إذا كانت الإجابة لا وضح لماذا؟ وإذا كانت نعم أوجد مصفوفة قطرية D تشابه A.

$$A=\begin{bmatrix} 19 & 25 & 30 & 5 \\ -23 & -30 & -35 & -5 \\ 7 & 9 & 10 & 1 \\ -3 & -4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

٤- نفرض أن A و B مصفوفتان متشابهتان. برهن أن A^3 و B^3 تكونا متشابهتان. عمم النتيجة.

٥- نفرض أن A و B مصفوفتان متشابهتان و A مصفوفة غير شاذة. برهن أن B تكون غير شاذة وأن A^{-1} و B^{-1} تكونا متشابهتان.

٦- نفرض أن B مصفوفة غير شاذة. برهن أن BA تشابه AB .