

## الباب التاسع

### حلول المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

(١.٩) مرتبة المصفوفة والعمليات الأولية على صفوف المصفوفة

Rank of Matrix and the elementary operation on its row

في هذا الفصل سوف نعطي مفهوم مرتبة المصفوفة والذي يلعب دوراً هاماً

في كثير من الموضوعات وخصوصاً في حل نظام المعادلات الخطية.

**تعريف (١):** يقال للمصفوفة A أنها ذات مرتبة r إذا كان لها على الأقل محيداً

minor واحداً من رتبة r ≠ 0 وكانت جميع محيداتها التي من رتبة r + 1 كل منها

مساوياً للصفر، وسوف نرسم لمرتبة المصفوفة A بالرمز rank(A).

**مثال (١):** أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(iii) C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \therefore$$

**الحل:** (i) نلاحظ أن: rank(A) = 3, |A| = 2 ≠ 0

(ii) نلاحظ أن: |B| = 0 ولكن  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$  وهو محيد للمصفوفة B من الرتبة 2،

إذن rank(B) = 2

(iii) نلاحظ أن:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ , أي أن محيد المصفوفة C

مساوياً للصفر وجميع محدداتها من الرتبة الثانية مساوية للصفر، إذن

$$\text{rank}(C)=1$$

$$\text{مثال (٢): أوجد رتبة المصفوفة } A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل: واضح أنه لا يمكن أن نكون من المصفوفة محددات أعلى من الرتبة الثالثة لأن

المصفوفة من الرتبة  $3 \times 4$  ونلاحظ أن المصفوفة تحتوي على أربع محددات من الرتبة الثالثة وهي:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \\ 8 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

واضح أن المحددة الثالثة والرابعة في كل منهما يساوي صفراً لتشابه عمودين في كل منهما أما المحددة الأولى فهي:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ومن ذلك نجد أن جميع محددات الرتبة الثالثة قيمتها أصفاراً. ولذلك نبحت عن

$$\text{محددات الرتبة الثانية فمثلاً } \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ وبالتالي فإن } \text{rank}(A) = 2.$$

من الأمثلة السابقة وجدنا أن مرتبة المصفوفة تتعين تماماً من البحث في قيمة محدداتها ولكن من معلوماتنا في المحددات أنه لإيجاد قيمة محدد ما يمكن تبسيطه وذلك بإجراء بعض التحويلات البسيطة كإضافة صف إلى صف أو عمود إلى عمود أو ضرب صف أو عمود في عدد  $k$  مصلاً لا يساوي الصفر ومن ذلك

نرى أن هذه التحويلات البسيطة في محدد المصفوفة ستكون طريقة فعالة وسريعة للوصول إلى مرتبة المصفوفة المعطاة.

وسوف نذكر الآن بعض التحويلات البسيطة Elementary operation التي يمكن إجراؤها على المصفوفة، هذه التحويلات تصلح أيضاً إذا ما أُجريت على الأعمدة بدلاً من الصفوف.

وستثبت أن التحويلات البسيطة الآتية في مصفوفة ما لا تغير من مرتبتها:—  
١— إبدال صفين (عمودين) في المصفوفة.

٢— ضرب عناصر أي صف (عمود) في عدد ما  $k \neq 0$ .

٣— إضافة صف (عمود) أو مضاعفاته إلى أي صف (عمود) آخر من صفوف (أعمدة) المصفوفة وللسهولة سوف نرمز لهذه التحويلات بالرموز الآتية:—

(i) الرمز  $R_{ij}$  يعني إبدال الصف الذي ترتيبه  $i$  بالصف الذي ترتيبه  $j$ .

(ii)  $R_i(k)$  يعني ضرب الصف الذي ترتيبه  $i$  في عدد  $k \neq 0$ .

(iii)  $R_{ij}(k)$  يعني إضافة الصف الذي ترتيبه  $j$  مضروباً بعنصره في العدد  $k$  إلى

الصف الذي ترتيبه  $i$  وبالمثل يمكن استعمال الرموز:  $C_{ij}(k), C_i(k), C_{ij}(k)$

بالنسبة للأعمدة.

**تعريف (٢):** نقول أن المصفوفتين  $A, B$  متكافئتان equivalent وتكتب في

الصورة  $A \sim B$  إذا أمكن الحصول على أحدهما من الأخرى بإجراء تحويلات بسيطة.

**نظرية (١):** التحويلات البسيطة على مصفوفة لا تغير من مرتبتها.

البرهان: متروك للقارئ.

**نظرية (٢):** أي مصفوفة  $A$  غير صفرية رتبته  $r$  يمكن بواسطة تحويلات بسيطة

كتابتها على الصورة:  $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  حيث  $I_r$  هي مصفوفة وحدة من رتبة  $r$ ،  $0$  المصفوفة الصفرية.

الصورة السابقة تسمى بالصورة الطبيعية Canonical form أو القانونية التي يكون عليها أي مصفوفة غير صفرية.

**مثال (٣):** أوجد المصفوفة المكافئة للمصفوفة  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$  ثم أوجد مرتبتها.

**الحل:** بإجراء التحويلات البسيطة الآتية:  $R_{21}(-2), R_{31}(1), R_{32}(-1)$  على الصفوف نحصل على:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 12 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

وحيث أن جميع محددات  $B$  ذات الدرجة 3 تساوي صفراً بينما:  $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

أي أن  $\text{rank}(B) = 2$  ولذلك يكون  $\text{rank}(A) = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{مثال (٤): أوجد مرتبة المصفوفة}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{الحل: بضرب عناصر الصف الأول في } \frac{1}{3} \text{ نحصل على:}$$

بضرب العمود الأول في  $\frac{2}{3}$  ثم طرحه من العمود الثاني وبضرب العمود الأول في

$\frac{1}{3}$  وطرحه من العمود الثالث ثم ضرب العمود الأول في  $\frac{2}{3}$  وطرحه من العمود

الرابع نحصل على:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

وبضرب الصف الأول في 2 ثم طرحه من الصف الثالث نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

وبطرح العمود الثاني من العمود الثالث نحصل على:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

وبضرب الصف الثاني في  $\frac{4}{5}$  ثم جمعه على الصف الثالث نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

بضرب عناصر العمود الثالث في  $\frac{3}{2}$  نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

بضرب عناصر العمود الثالث في  $\frac{5}{3}$  وطرحه من العمود الرابع نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A)=3$$

مثال (٥): أوجد الصورة الطبيعية للمصفوفة  
ثم أوجد  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

مرتبتها.

الحل: بإجراء التحويل  $R_{12}$  نحصل على:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

ويأجراء التحويلات البسيطة  $C_{21}(1), C_{31}(2), C_{41}(4)$  على المصفوفة الأخيرة

نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

وبإجراء التحويلات  $R_{21}(-2), R_{31}(-3), R_{41}(-6)$  على المصفوفة الأخيرة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

إذا رمزنا للمصفوفة الأخيرة بأما  $B$  نجد أن محدد الرتبة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 33 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

أي أن مرتبة المصفوفة  $A$  هي الثالثة أي يكون:  $\text{rank}(A) = 3$

وبوضع المصفوفة  $A$  على الصورة الطبيعية نعتبر المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}, R_1\left(\frac{1}{5}\right)$$

وبإجراء التحويلات:  $C_{21}\left(-\frac{3}{5}\right), C_{31}\left(-\frac{7}{5}\right)$  على المصفوفة الأخيرة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \\ 9 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

وبإجراء التحويلات  $R_3(-9), R_{21}(-4)$  نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \\ 9 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

ويجاء التحويلات  $R_{32}\left(-\frac{5}{33}\right), R_2\left(\frac{5}{33}\right), C_{32}\left(-\frac{22}{33}\right)$  نحصل على:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة النهائية هي:

### (٢.٩) معكوس المصفوفة Inverse of a matrix

في هذا الفصل سوف ندرس طرقاً بسيطة لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة، معكوس المصفوفة المربعة  $A$  من الدرجة  $n \times n$  يكتب على الصورة  $A^{-1}$  ويكون أيضاً مصفوفة مربعة بحيث يكون:  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

وشرط وجود معكوس للمصفوفة  $A$  هو أن تكون هذه المصفوفة  $A$  غير مفردة

non-singular أي  $|A| \neq 0$ .

أما إذا كانت المصفوفة مفردة singular أي يكون  $|A| = 0$ ، لا يكون للمصفوفة معكوس. وعموماً إذا وجد للمصفوفة معكوس فإن هذا المعكوس يكون وحيداً ونوضح ذلك من النظرية الآتية:

نظرية (٣): معكوس المصفوفة وحيد.

البرهان: نفرض أن  $A, B, C$  مصفوفات مربعة تحقق  $CA = I, AB = I$  فإنه ينتج

من العلاقة  $(C A) B = C (A B)$  أن  $B = C$  وعلى ذلك  $B = C = A^{-1}$  هي المعكوس الوحيد للمصفوفة  $A$ .

**نظرية (٤):** نفرض أن  $A, B$  مصفوفتان غير مفردتان فإن الخواص التالي تكون محققة:

$$(i) \quad (A^{-1})^{-1} = A \qquad (ii) \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
$$(iii) \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \qquad (v) \quad \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(A^{-1}) = 1$$

البرهان: (iii)  $\because A A^{-1} = I \Rightarrow (A A^{-1})^T = I^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I$

وبضرب الطرفين في  $(A^T)^{-1}$  نحصل على:

$$(A^{-1})^T = A^T (A^T)^{-1} = I (A^T)^{-1}$$

$$\therefore (A^{-1})^T I = I (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

(١.٢.٩) معكوس المصفوفة عن طريق المصفوفة المترافقة (المصاحبة أو المرتبطة):

**نظرية (٥):** إذا كانت المصفوفة المربعة  $A$  غير شاذة أي يكون  $|A| \neq 0$  فإن

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \quad \text{معكوس المصفوفة } A^{-1} \text{ يعطى من:}$$

$$A A^{-1} = \frac{A \cdot \text{adj}(A)}{|A|} = \frac{|A| I}{|A|} = I \quad \text{البرهان: تحقق من أن}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{مثال (٦): أوجد معكوس المصفوفة:}$$

$$\text{الحل: من مثال (٨) في الباب السابق أثبتنا أن } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ وأن}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مثال (٧): أوجد معكوس المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

الحل:

$$|A| = 5, \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

مثال (٨): أوجد معكوس المصفوفة:  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}, |A| = -2, A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(٢.٢.٩): معكوس المصفوفة باستخدام العمليات الأولية:

في هذه الطريقة نمد المصفوفة A بمصفوفة I على الصورة [A : I] ثم نحاول الحصول على المصفوفة المكافئة للمصفوفة [A : I] على الصورة [I : B] فتكون B هي

معكوس المصفوفة A أي يكون:  $[I : A^{-1}]$  على صفوف المصفوفة الأولية  $[A : I]$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثال (٩): أوجد معكوس المصفوفة:}$$

$$[A: I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{الحل: نعتبر}$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{بضرب الصف الأول في } \frac{1}{5} \text{ نحصل على:}$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{بضرب الصف الثاني في } \frac{1}{3}$$

ويأجراء التحويلات  $R_{32}(-1), R_{21}\left(-\frac{4}{5}\right)$  نجد أن:

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{8}{15} & \frac{1}{3} & \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right]$$

ويأجراء التحويلات  $R_{31}\left(\frac{8}{15}\right), R_{23}\left(-\frac{2}{3}\right)$  نحصل على:

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right] = [I: A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{وبذلك يكون:}$$

(٣.٢.٩) معكوس بعض المصفوفات الخاصة:

باستخدام ما سبق عرضه في (١, ٢, ٩)، (٢.٢.٩) يكون لدينا الآتي:

١- إذا كانت A مصفوفة 2 × 2 غير مفردة على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

مثال (١٠): أوجد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

٢- إذا كانت المصفوفة A قطرية أي تكون

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

فمثلاً إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

٣- إذا كانت A مصفوفة مثلثية عليا (أو سفلى) فإن  $A^{-1}$  تكون أيضاً مثلثية عليا (أو سفلى).

٤- إذا كانت  $A$  مصفوفة ممتاثلة فإن  $A^{-1}$  تكون ممتاثلة أيضاً.

٥- معكوس المصفوفة المربعة  $A$  يكون موجوداً إذا كان  $\text{rank}(A)=n$  وكان فقط

وتكون المصفوفة غير مفردة إذا كان  $\text{rank}(A)=n$  وتكون مفردة إذا كان

$$\text{rank}(A) < n$$

### (٣.٩) المعادلات الخطية المتجانسة

Homogeneous linear equations

نعتبر  $m$  من المعادلات الخطية المتجانسة في  $n$  من المجاهيل  $x_1, x_2, \dots, x_n$  على

الصورة

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

حيث  $a_{ij}$  أعداداً قياسية.

وباستخدام لغة المصفوفات يمكن كتابة النظام المتجانس السابق على الصورة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو في الصورة المختصرة

$$A X = O \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

حيث  $A$  مصفوفة من الدرجة  $m \times n$ ،  $X$  مصفوفة من الدرجة  $n \times 1$ ،  $O$  هي مصفوفة صفرية من درجة  $m \times 1$ .

ولدراسة حل نظام المعادلات المتجانسة (2) ندرس الحالات الآتية:

**أولاً: عندما  $m = n$**

(١) إذا كانت  $A$  غير شاذة أي  $A^{-1}$  موجود أو بتعبير آخر  $|A| \neq 0$  أو  $\text{rank}(A) = n$  أي يكون مرتبة الصفوف  $A$  مساوي لعدد المجاهيل في هذه الحالة لا يوجد للمسألة حل إلا الحل الصفرى (الحل التافه, trivial solution, zero solution).

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

(٢) إذا كانت  $A$  شاذة (مفردة) أي تكون  $A^{-1}$  غير موجودة أو بتعبير آخر  $|A| = 0$  أو  $\text{rank}(A) = r < n$  في هذه الحالة يوجد للنظام (2) عدد لا نهائي من الحلول ويمكن الحصول عليه بفرض  $n-r$  من المجاهيل على أنها بارامترات (متغيرات مستقلة) ونعين الباقي بدلالتهم.

**ثانياً:  $m \neq n$**

(١) إذا كان  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A : O] = n$  فإن النظام (2) يكون متوافقاً consistent دائماً ويكون  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  هو دائماً حل لهذا النظام.

(٢)  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A : O] = r < n$ ، نقوم بفرض  $n-r$  من المجاهيل على أنها بارامترات ونعين الباقي من خلالهم.

$$x + 3y - 2z = 0$$

مثال (١): حل نظام المعادلات

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x - 11y + 14z = 0$$

الحل: هذا النظام يكافئ المعادلة المصفوفية:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة A:

$$R_{31}(-1), R_{21}(-2), R_{32}(-2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 3y - 2z = 0, -7y + 8z = 0$$

نحصل على:

$$\Rightarrow x = -\frac{10}{7}z, y = \frac{8}{7}z$$

وفي هذه الحالة نعتبر  $z$  كبارامتر أي  $z \in \mathbb{R}$ ، لكل قيمة من قيم  $z$  توجد قيمة للمتغيرات  $y, x$  وهذا يوضح معنى أن النظام له عدد لا نهائي من الحلول.

$$x + \frac{3}{2}x = 0, \frac{3}{4}z = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}z, y = -\frac{3}{4}z$$

حيث  $z$  بارامتر. أي بإعطاء  $z$  كل القيم الممكنة من الأعداد الحقيقية نحصل على  $x, y$  المناظرة وهذا يوضح معنى عدد لا نهائي من الحلول.

### (٤.٩) المعادلات الخطية غير المتجانسة:

non homogeneous linear equations

نعتبر  $m$  من المعادلات الغير متجانسة في  $n$  من المجاهيل  $x_1, x_2, \dots, x_n$  على

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

الصورة:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

يمكن كتابة النظام السابق على الصورة المصفوفية أو في الصورة المختصرة:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{حيث } i = 1, 2, \dots, m$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{حيث:}$$

حل النظام الغير متجانس:  $AX = b$  ندرس الحالات الآتية :

**الحالة الأولى:** إذا كان  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A | b]$  حيث  $[A | b]$  تسمى

المصفوفة الموسعة augmented matrix فإنه يقال أن النظام متوافق consistent وفي هذه الحالة تكون A غير شاذة أي يكون  $A^{-1}$  موجوداً ويمكن في هذه الحالة حل النظام بطريقة المعكوس أو بطريقة الحذف لجاوس، أو بأي طريقة أخرى.

وسوف ندرس طريقة المعكوس وطريقة الحذف لجاوس Gauss elimination.

**أ - طريقة المعكوس:** في هذه الطريقة نحسب معكوس المصفوفة  $A^{-1}$  بأي

طريقة من الطرق السابقة ثم نحصل على الحل في الصورة :

$$X = A^{-1} b \quad (\text{لاحظ أن } m=n)$$

**ب - طريقة كرامير:** وفيها تستخدم المحددات لحساب الجاهيل مباشرة.

**جـ - طريقة الحذف لجاوس:** في هذه الطريقة تمد مصفوفة المعاملات  $A$  بالمتجه  $b$  لتكون المصفوفة الموسعة  $[A | b]$  ثم نجري بعض العمليات البسيطة على الصفوف لنحصل على مصفوفة مكافئة يمكن من خلالها حل المعادلات بطريقة أسهل.

**الحالة الثانية:**  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A | b] = r < n$  في هذه الحالة يكون المعكوس  $A^{-1}$  غير موجود ومن ثم لا يوجد حل وحيد ويصبح هناك عدد لانتهائي من الحلول. نقوم بإعطاء  $n-r$  من المجاهيل قيم اختيارية والتي تقوم بتوليد العدد اللانهائي من الحلول. أما إذا كان  $\text{rank}(A) < n$ ,  $\text{rank}(A) \neq \text{rank}[A | b]$  في هذه الحالة تكون  $A$  مصفوفة شاذة وتكون المعادلات في هذه الحالة غير متوافقة non consistent وبالتالي لا يوجد حل في هذه الحالة.

**مثال (٢):** باستخدام المصفوفات أوجد حل لمجموعة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 11 \\ 2x + y - 4z &= -1 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

**الحل:** يمكن كتابة المعادلات على الصورة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AX=b \quad (1)$$

ونفرض أن:  $|A| \neq 0$ ,  $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$  وبضرب طرفي المعادلة (1) في  $A^{-1}$

$$\therefore |A| = 27 \neq 0$$

نحصل على  $x, y, z$ .

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 11 \\ 0 & -9 & 18 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 11 \\ 0 & -9 & 18 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} A \{X\} = A^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 11 \\ 0 & -9 & 18 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال (٣): بطريقة الحذف لجاوس أوجد حل نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= -9 \\ x - y + 3z &= 2 \\ 3x - 6y - z &= 25 \end{aligned}$$

الحل: يمكن كتابة المعادلات السابقة على الصورة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليات الأولية على صفوف مصفوفة المعاملات تتحول إلى مصفوفة مثلثية عليا ثم نستخدم التعويض الخلفي بمعنى المعادلة الثالثة في الوضع الجديد نحصل منها على  $z$  وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على  $y$  وهكذا.

مثال (٥): اثبت أن مجموعة المعادلات

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z + 2t &= 1 \\ x - 2y + 3z + t &= 2 \\ 3x - 14y - 11z + t &= 3 \end{aligned}$$

ليست متفقة (ليست لها حل).

الحل: مجموعة المعادلات المعطاة على الصورة المصفوفية:

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -14 & -11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X^t = [x \ y \ z \ t], A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -14 & -11 & 1 \end{bmatrix} \text{ حيث}$$

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -14 & -11 & 1 & 3 \end{array} \right] \text{ المصفوفة الموسعة هي:}$$

وبإجراء العمليات الأولية على الصفوف من السهل أن نتبين أن

$$\text{rank}(A) = 2, \text{rank} [A|B] = 3$$

$$\text{rank}(A) \neq \text{rank}[A|B]$$

أي أن المجموعة غير متفقة.

مثال (٥): أوجد قيمة  $\lambda, \mu$  التي تجعل نظام المعادلات:

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

(i) ليس له حل (ii) له حل وحيد (iii) له عدد لا نهائي من الحلول.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ \mu \end{bmatrix} \text{ الحل: نكتب النظام على الصورة:}$$

نظام المعادلات يكون له حل وحيد إذا كان وكان فقط محدد مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda - 3 \neq 0 \text{ : مختلف عن الصفر أي أن:}$$

يكون للنظام حل وحيد عندما  $\lambda \neq 3, \mu$  تأخذ أي قيمة.

$$\text{نعتبر المصفوفتان } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & \mu \end{bmatrix} \text{ (في حالة } \lambda = 3 \text{)}$$

من السهل أن نتبين أنه ليس لهما نفس المرتبة (باستخدام العمليات الأولية على صفوفهما). وتكون مرتبة مصفوفة المعاملات هي 2 إذا كان وكان فقط  $\mu = 10$ . وإذا كان  $\lambda = 3, \mu \neq 10$  لا يكون للنظام عدد لانتهائي من الحلول.

### تمارين (٩)

(١) أوجد مرتبة المصفوفات التالية:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(٢) أوجد مرتبة المصفوفات الآتية:  $A, B, A+B, AB, BA$  حيث

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 13 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

(٣) أوجد الصورة الطبيعية للمصفوفات الآتية ومن ثم أوجد مرتبتها

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, (ii) B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(٤) أوجد الصورة الطبيعية للمصفوفات الآتية ومن ثم أوجد مرتبتها

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(f) A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(٥) إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  أثبت أن  $A^3 - 5A^2 - 4A + 30I = 0$  ثم

أوجد  $A^{-1}$ .

(٦) أوجد حل مجموعة المعادلات الآتية:

(i)  $x + y - z = 3$   
 $3x + y + 2z = 1$   
 $2x - 2y + 3z = 2$   
 $x - y + 1 = 0$

(ii)  $5x + 3y + 7z = 4$   
 $3x + 26y + 2z = 9$   
 $7x + 2y + 10z = 5$

(iii)  $4x - 5y - 2z = 0$   
 $5x - 4y + 2z = 2$   
 $2x + 2y + 8z = 1$

(iv)  $2x + 3y + z = -1$   
 $x + 2y + z = -1$   
 $2x + y - 6z = 4$

(v)  $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - x_5 = 1$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -3$   
 $2x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 2$

(٧) عين قيمة  $\lambda$  لكي يكون كلاً من أنظمة المعادلات الخطية الآتية متفقة أو غير

متفقة وفي حالة كونها متفقة أوجد قيمة  $\lambda$  التي تجعل للنظام حل وحيد في

الحالات الآتية:

(i)  $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$  (ii)  $\lambda x + y + z = 1$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 2$   $x + \lambda y + z = \lambda$   
 $x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 11x_4 = \lambda$   $x + y + \lambda z = \lambda^2$

(iii)  $\lambda x + y + z + t = 1$   
 $x + \lambda y + z + t = \lambda$   
 $x + y + \lambda z + t = \lambda^2$   
 $x + y + z + \lambda t = \lambda^2$

(٨) أوجد قيمة  $a, c$  في النظام:

$$\begin{aligned}2x + y - 2z + 5t &= 22 \\5x + 3y + 6z + 7t &= 40 \\3x + 2y - 4z + 2t &= c \\4x + 3y - 6z &= a\end{aligned}$$

(ii) له أكثر من حل.

التي تجعله (i) غير متفق

(٩) لأي قيمة  $\lambda$  يكون للمعادلات

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + 2y + 4z &= \lambda \\x + 4y + 10z &= \lambda^2\end{aligned}$$

حل وحيد؟ ثم أوجد الحل الكامل لهذا النظام.

(١٠) أوجد حل المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

(i) 
$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 0 \\x - y + 2z - 4t &= 0 \\3x + y + 3z + 3t &= 0 \\6x + 2y - 7t &= 0\end{aligned}$$

(ii) 
$$\begin{aligned}x - 2y + 3z + 4t + u &= 0 \\x - z + t + u &= 0 \\3x - y + z - u &= 0 \\-x + y + 2t + 9u &= 0 \\3x + y + 3t + 9u &= 0\end{aligned}$$

(iii) 
$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \\4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 0 \\6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 45x_5 &= 0 \\4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$