الباب الثاني

مقدمة في الجبر المجرد

٢ .١ مقدمة في المجموعات والدوال:

٢.١.١ العلاقات والرواسم (الدوال):

الضرب الكارتيزي لمجموعتين: The cartesian product of two sets

تعريف: الثنائي المرتب (the ordered pairs) (a, b) يتكون من عنصرين a, b مرتبين يظهر a كمركب أولي، b كمركبه ثانية ـــ وقد يسمى a **بالإحداثي الأول**، b **بالإحداثي الثاني** للثنائي المرتب (المركبة الأولى والمركبة الثانية على الترتيب).

تعريف: لأي مجموعتين A, B المجموعة المتكونة من جميع الثنائيات (a, b) حيث $b \in B, a \in A$ تسمى مجموعة الضرب **الكارتيزي للمجموعتين** A, B ويرمز لها بالرمز $A \times B$ (لهذا الترتيب). أي أن $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

تعريف: العنصرين $(a, b) , (c, d) \in A \times B$ يقال أنهما متساويين إذا وإذا فقط كان $a = c$، $b = d$ أي أن $a = c, b = d$ $\Leftrightarrow$ $(a, b) = (c, d)$

ملاحظات:

(i) إذا كانت A أو B مجموعة خالية فإن $A \times B = \phi = B \times A$

(ii) إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الحقيقية ـــ فإن مجموعة الضرب $R \times R$ (غالباً تكتب R^2) تسمى المستوى الإقليدي.

(iii) العدد الرئيسي n لحاصل الضرب الكارتيزي $A \times B$ يساوي حاصل ضرب العدد الرئيسي للمجموعة A في العدد الرئيسي للمجموعة B (بشرط أن A, B فئات محدودة)

$$n (A \times B) = n(A) \times n (B)$$

مثال (١): إذا كان $(2 - u, 3 + v) = (2v + 1, 2 - 2u)$ فإن

$$2 - u = 2v + 1;\ \ 3 + v = 2 - 2u$$

أي أن
$$u + 2v = 1;\ 2u + v = -1$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $u = -1, v = 1$

مثال (٢): نفرض أن $A = \{a, b, c\}$، $B = \{x, y\}$

$$\therefore\ A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\},$$
$$B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$
$$B^2 = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\} = B \times B$$

العلاقات الثنائية : Binary relation

تعريف: نقول أن R علاقة ثنائية بين المجموعتين A, B إذا كانت $R \subset A \times B$ ونقول أن المجموعة A معرف عليها علاقة ثنائية R إذا كانت $R \subset A \times A$ ويمكن كتابة $(a, b) \in R$ بالصورة $a\,R\,b$

مثال (٣): واضح أن R المعرفة كما يلي $R = \{(1, b), (2, b), (2, c)\}$ هي علاقة ثنائية بين المجموعتين $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$.

مثال (٤): إذا كانت $A = \{a, b, c\}$ فإن R المعرفة كما يلي

$$R = \{ (a, a), (a, c), (b, c), (c, a)\}$$

هي علاقة ثنائية على A^2 أو $R \subset A \times A = A^2$.

مثال (٥): إذا كانت N هي مجموعة الأعداد الطبيعية فإن $N \times N$ هي كل الأزواج التي على الصورة (n, m) حيث $n, m \in N$. المجموعة الجزئية منها والمعرفة

كما يلي :

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), \dots\}$$

هي علاقة ثنائية على N ويلاحظ أن المركبة الأولى تكون أصغر من المركبة الثانيـــة أي أن $n < m$ $\quad (n, m) \in R$ والعلاقة R في هذه الحالة تسمى علاقة أصغر من.

تعريفات:

نفرض R علاقة ثنائية على المجموعة A

(i) العلاقة R تسمى علاقة **عاكسة** Reflexive إذا كانت $(a, a) \in R, \ \forall a \in A$

(ii) العلاقة R تسمى **متماثلة** Symmetric إذا كانت $(a, b) \in R$ فإن:

$$(a, b) \in R \quad (b, a) \in R, \ \forall a, b \in A$$

(iii) العلاقة R تسمى **ناقلـــة** Transitive إذا كـــانت $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ تستلزم أن يكون $(a, c) \in R$ أي أن $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

إذا كانت R عاكسة ومتماثلة وناقلة فإن R **تســـمى علاقـــة تكـــافؤ** Equivalence relation.

مثال (٦): إذا كانت A هي مجموعة كل المستقيمات الواقعة في مستوى فإن العلاقة الثنائية $R = \{(a, b) : a, b \in A, a \uparrow\uparrow b\}$ علاقة عاكسة لأن الخط المستقيم يـوازي نفسه وهي متماثلة لأنه إذا كان المستقيم a يوازي المستقيم b فـــإن المســـتقيم b يوازي المستقيـــم a أيضـــاً. كذلك فـــإن R ناقلة لأنه إذا كان $a \uparrow\uparrow b, b \uparrow\uparrow c$ واضـــح أن $a \uparrow\uparrow c$ ومن ثم R علاقة تكافؤ.

مثال (٧): العلاقة الثنائية $R = \{(a, b) : a, b \in A, a \perp b\}$ حيث A هي المجموعة المعرفة في المثال السابق والعلاقة $\perp$ عمودي على العلاقة ليست عاكسة ـــ لكنـــها متماثلة وغير ناقلة (تحقق من ذلك).

مثال (٨): R علاقة قابلية القسمة في المجموعة N_+ هي علاقة غير متماثلة لأنـــه إذا كـــان $(a, b) \in R$ فـــإن هـــذا يعني أن a تقبل القسمة على b بدون باق وتكتب $(b \mid a)$ وهـــذا لا يعني أن $(a \mid b)$ أي $(b, a) \in R$ فمثـــلاً $(10, 2) \in R$ بينمـــا $(2, 10) \notin R$

تعريف: نطاق ومدى العلاقة : Domain and Range

لتكن R هي علاقة ثنائية بين المجموعتين A, B فإننـــا نعـــرف نطـــاق R (Dom R) ومدى R (Range R) كما يلي :

نطاق R $\quad \text{Dom } R = \{a : a \in A, (a, b) \in R, b \in B\} =$

مدى R $\quad \text{Range } R = \{b : b \in B, a \in A\} =$

يلاحظ أن $\text{Dom } R \subset A, \text{Range } R \subset B$

الرواسم (الدوال) The Mappings (functions)

تعريف: أي علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجموعة A بعنصر واحـــد مـــن عناصر المجموعة B تسمى راسماً (دالة) من A إلى B.

فإذا كان f راسماً من A إلى B فإننا نكتب

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{or} \quad A \xrightarrow{f} B$$

إذا كانت $a \in A$ فإن العنصر b في B المرتبط بالعنصر a يسمى صورة a بالنسبة للراسم f ويعبر عنه بالصورة $f(a)$. العنصر a يسمى المتغير المستقل والعنصر b يسمى المتغير التابع. نفرض أن $f : A \longrightarrow B$، المجموعة A تسمى **نطاق** (domain) الراسم f، المجموعة B تسمى **النطاق المصاحب** (codomain) للراسم f. والمجموعة $f(A) = \{b \in B : \exists\, a \in A \;\&\; f(a) = b\}$ تسمى مدى (range) الراسم (الدالة).

مثال (١): نفرض أن $A = R\,,\, B = \{-1, 1\}$ ونفرض أن $f : R \longrightarrow B$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x \text{ عدد قياسي} \\ -1 & \text{إذا كانت } x \text{ عدد غير قياسي} \end{cases}$$

. واضح أن f راسماً من R إلى B

تعريف: إذا كانت $f : A \longrightarrow B\,,\, g : X \longrightarrow Y$ فإن الراسمين g, f يقال أنهما متساويين (وتكتب $f = g$) إذا تحققت الشروط الآتية

(i) نطاق f = نطاق g ـــ أي $A = X$

(ii) النطاق المصاحب للراسم f = النطاق المصاحب للراسم g ـــ أي $B = Y$

(iii) $f(a) = g(a)$ لكل عنصر a في النطاق.

ملاحظات:

طبقاً لتعريف تساوي راسمين ـــ لا يمكن أن يتساوى راسمين إلا إذا كان لهما نفس النطاق ونفس النطاق المصاحب ـــ فمثلاً نعتبر الراسمين ؟ (A مجموعة الأعداد الحقيقية) $f : A \longrightarrow A$ ومعرف كما يأتي : $f(a) = a^2\,,\, \forall\, a \in A$

(A^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة) $g: A \longrightarrow A^+$

ومعرف $g(a) = a^2, \forall a \in A$

واضح أن g, f لهما نفس النطاق وأن صورة كل عنصر تحت تأثير f يساوي صورة نفس العنصر تحت تأثير g. ولكن النطاق المصاحب للراسم f ≠ النطاق المصاحب للراسم g. إذن لا يمكن أن نقول أن f تساوي g.

١ ـ تعريف : الراسم $f: A \longrightarrow B$ يقال أنه راسماً أحادياً (1-1 mapping or injective) إذا كان لأي عنصرين $a_1, a_2 \in A$ ، $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

أي أن f تكون أحادية إذا كان كل عنصرين مختلفين في النطاق لهما صورتين مختلفتين في النطاق المصاحب.

٢ ـ تعريف : نفرض الراسم $f: A \longrightarrow B$ يقال أن f راسماً من A فوق B إذا كان مدى f يساوي النطاق المصاحب. أي أن f تكون فوقية surjective إذا كان لكل عنصر $b \in B$ يوجد (على الأقل) عنصراً واحداً $a \in A$ بحيث يكون $b = f(a)$.

٣ ـ تعريف: الراسم $f: A \longrightarrow B$ يقال أنه تناظر أحادي (1-1 correspondence or bijective) إذا كان أحادياً وفوقياً. أي أن bijection = surjection + injection تناظر أحادي = فوقي + أحادي.

مثال (١): نفرض الراسم $f: Z \longrightarrow Z$ معرفاً بما يأتي $f(x) = -x, \forall x \in Z$ عين نوع هذا الراسم.

الحل: (i) هذا الراسم أحادي لأنه لأي عنصرين (النطاق) $x, y \in Z$ نفرض

$f(x) = f(y) \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$

(ii) الراسم فوقي لأن: لأي عنصر (النطاق المصاحب) $-x \in Z$، يوجد العنصر (النطاق) $x \in Z$ بحيث $f(-x) = -(-x) = x$ أي أن $f(x) = Z$

(iii) حيث أن f أحاد وفوقي، إذن f تناظر أحادي.

مثال (٢): نفرض الراسم $g : Z \longrightarrow Z$ ومعرف $g(x) = 2x, \forall x \in Z$ عين نوع هذا الراسم.

الحل: (i) g راسم أحادي لأن: لأي عنصرين (النطاق =) $x, y \in Z$ نفرض

$$g(x) = g(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

(ii) g ليست راسماً فوقياً لأن: نأخذ (النطاق المصاحب =) $3 \in Z$، لا يوجد عدد صحيح ضعفه يساوي 3 أي لا يوجد (النطاق =) $x \in Z$ بحيث يكون

$$g(x) = 2x = 3$$

(iii) بما أن g ليست راسماً فوقياً، إذن g ليست تناظراً أحادياً.

مثال (٣): نفرض الراسم $h : Z \longrightarrow Z$ بحيث $h(x) = x^2, \forall x \in Z$ عين نوع الراسم.

الحل: (i) هذا الراسم ليس أحادياً لأن $x, y \in Z$ بحيث

$$h(x) = h(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

$\therefore$ ليست بالضروري أن تكون x تساوي y.

(ii) الراسم h ليس فوقياً لأن: نأخذ (النطاق المصاحب) $2 \in Z$ إذن لا يوجد عدد صحيح مربعه يساوي 2 أي لا يوجد (النطاق =) $x \in Z$ بحيث يكون

$$h(x) = x^2 = 2$$

(iii) بما أن الراسم ليس أحادياً وليس فوقياً، إذن h ليس تناظراً أحادياً.

مثال (٤): نفرض أن $A=\{a, b, c, d\}$، $B=\{x, y\}$ ونفرض أن

$R=\{(a, x), (b, y), (c, y), (d, x)\}$ هل R راسماً؟ إذا كان كذلك عين نوع الراسم.

الحل: (i) واضح أن R راسماً (لماذا؟). (ii) الراسم ليس أحادياً (لماذا؟).

(iii) الراسم فوقي (لماذا؟). (v) إذن ليس تناظراً أحادياً.

٤ــ تعريف: إذا كانت $B \longrightarrow f: A, A_1 \subset A$ فإنه يمكن تكوين راسماً جديداً $B \longrightarrow f/A_1 : A_1$ بحيث $(f/A_1)(a)=f(a), \forall a \in A_1$، هذا الراسم f/A_1 يسمى **تقييد** f (restriction f) على A_1.

٥ــ تعريف: إذا كان $A_1 \subset A$، فإن الراسم $f: A_1 \longrightarrow A$ المعرف بالقاعدة $f(a)=a, \forall a \in A_1$ يسمى راسماً **احتوائياً** (inclusion mapping) وقد نستخدم الرمز : $i: A_1 = A$ فإن الراسم الاحتوائي $i: A \longrightarrow A$ يسمى راسم **تطابق** (identity) للمجموعة.

معكوس راسم Inverse map: نفرض $f: A \longrightarrow B$ الصورة العكسية للعنصر $b \in B$ سنكتب $f^{-1}(b)$ تحتوي عناصر في A تكون b صورة كل منهم.

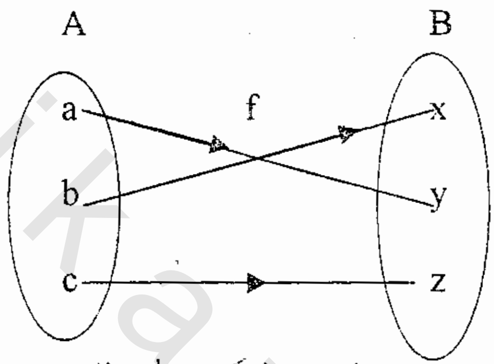
أي أن $f^{-1}(b)=\{a \in A : f(a)=b\}$

وعلى وجه العموم $f^{-1}(b)$ قد تتكون من أكثر من عنصر وقد تكون ϕ.

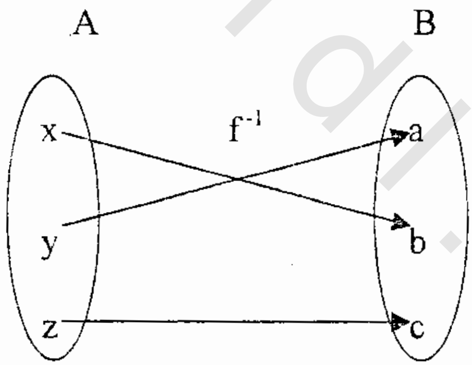
إذا كان $f: A \longrightarrow B$ راسماً أحادياً وفوقياً. فإن لكل $f^{-1}(b): b \in B$ تتكون من عنصر واحداً فقط في A.

إذن f^{-1} تكون راسماً من B إلى A ونكتب $f^{-1}: B \longrightarrow A$ ويسمى هذا الراسم المعكوس للراسم f.

<u>مثال (١):</u> نفرض الراسم الموضح بالشكل التالي :

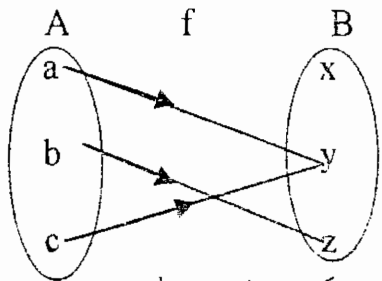


∵ الراسم f تناظر أحادي. إذن الراسم المعكوس f^{-1} للراسم f موجود وهو كما موضح بالشكل.



<u>مثال (٢):</u> نفرض الراسم $f: A \longrightarrow B$ الموضح بالشكل

∵ $f(c) = y,\ f(a) = y$



∴ f ليس راسماً أحادياً وبذلك لا يمكن تكوين الراسم f^{-1}.

٢.١.٢ العمليات الثنائية Binary Operators

تعريف : أي راسم $\tau : X\times X \longrightarrow X$ معرف كما يلي :

$$(x,y) \longrightarrow x\,\tau\,y, \forall (x,y)\in X\times X$$

يسمى **عملية ثنائية على المجموعة** X، أي أن العملية الثنائية على X هي راسم من مجموعة حاصل الضرب الكارتيزي $X\times X$ إلى المجموعة نفسها.

مثال (١): الراسم $+ : Z\times Z \longrightarrow Z, (x,y) \longrightarrow x+y$ عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z (أي أن عملية الجمع هي عملية ثنائية على المجموعة Z).

مثال (٢): الراسم $. : Z\times Z \longrightarrow Z; (x,y) \longrightarrow x\,y$ عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z (أي أن عملية الضرب هي عملية ثنائية على Z).

مثال (٣): الراسمان

$$\text{(i)}\quad \bigcap : P(X)\times P(X) \longrightarrow P(X), (A,B) \longrightarrow A\bigcap B, \forall A,B\in P(X)$$

$$\text{(ii)}\quad \bigcup : P(X)\times P(X) \longrightarrow P(X), (A,B) \longrightarrow A\bigcup B, \forall A,B\in P(X)$$

يمثلان عمليتين على المجموعة P(X) (مجموعة كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة X).

مثال (٤): واضح أن "عملية القسمة" ليست عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة.

تعريف: نفرض عملية ثنائية $\tau : X\times X \longrightarrow X$.

(i) العملية τ يقال أنها عملية إبدالية (Commutative) إذا تحقق

$x\,\tau\,y = y\,\tau\,x, \forall\, x, y \in X$

(ii) العملية τ يقال أنها عملية **دامجة** (associative) إذا تحقق

$x\,\tau\,(y\,\tau\,z) = (x\,\tau\,y)\,\tau\,z, \forall\, x, y, z \in X$

مثال (١):

(١) عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الصحيحة هما عمليتين دامجتين وإبداليتين.

(٢) العمليتين $\cup, \cap$ على $P(X)$ هما عمليتين دامجتين وإبداليتين.

(٣) العملية الثنائية $\tau : R \times R \longrightarrow R, (x, y) \longrightarrow x + 2y, \forall\, x, y \in R$

ليست إبدالية وليست دامجة (لماذا؟).

العناصر المحايدة: (The unit elements)

تعريف: نفرض $e \in X$، العنصر e يسمى عنصراً محايداً للعملية الثنائية $\tau : X \times X \longrightarrow X$ إذا تحقق $x\,\tau\,e = e\,\tau\,x = x, \forall\, x \in X$ أما إذا كان العنصر e يحقق فقط $e\,\tau\,x = x, \forall\, x \in X$ فإنه يسمى عنصراً محايداً يساري (left unit) للعملية τ ويسمى عنصراً محايداً يمينياً (right unit) للعملية τ إذا تحقق

$x\,\tau\,e = x, \forall\, x \in X$

أمثلة:

(١) نفرض Q هي مجموعة الأعداد القياسية ــ العنصر $0 \in Q$ هو عنصراً محايداً بالنسبة لعملية الجمع، $1 \in Q$ عنصراً محايداً بالنسبة لعملية الضرب.

(٢) مجموعة الأعداد الطبيعية N ليس لها عنصر محايد لعملية الجمع، $1 \in N$ هو عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب.

(٣) نفرض U مجموعة شاملة. نعلم أن

$$A \cup \phi = \phi \cup A = A\,,\ \forall\, A \in P(U)\ \&\ A \cap U = U \cap A,\ \forall\, A \in P(U)$$

إذن ϕ عنصر محايد للعملية $\cup$ & U عنصر محايد للعملية $\cap$

نظرية (١): إذا كانت τ عملية ثنائية على مجموعة X فإن X تحتوي على عنصر محايد واحد على الأكثر.

البرهان: نفرض أن $e, e' \in X$ هما عنصرين محايدين للعملية τ

$\therefore e = e\,\tau\, e' = e'\,\tau\, e$ (لأن e' عنصر محايد)؛

$= e'$ (لأن e عنصر محايد).

المعكوسات : Inverse elements

تعريف: إذا احتوت المجموعة X على عنصر محايد e بالنسبة للعملية الثنائية $\tau : X \times X \longrightarrow X$ فإن العنصر $x' \in X$ يسمى معكوس العنصر $x \in X$ إذا تحقق

$$x\,\tau\, x' = x'\,\tau\, x = e$$

مثال : معكوس العنصر $x \in Z$ هو $-x \in Z$ بالنسبة لعملية الجمع وذلك لأن $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ولكن ليس كل عنصر $x \in Z$ له معكوس بالنسبة لعملية الضرب.

نظرية (٢): نفرض τ عملية ثنائية دامجة على المجموعة X فإن لكل عنصر في X له على الأكثر معكوس واحد.

البرهان: نفرض $x, x'' \in X$ هما معكوسين للعنصر $x \in X$ بالنسبة للعملية τ

$\therefore x'' = x''\,\tau\, e = x''\,\tau\,(x\,\tau\, x') = (x''\,\tau\, x)\,\tau\, x'$ (لأن τ دامجة)

$x'' = e\,\tau\, x' = x'$

تعريف: نفرض X معرف عليها عمليتين ثنائيتين $\tau , \circ$ يقال أن

(١) τ عملية **توزيع يساري** (left distribution) بالنسبة للعملية $\circ$ إذا تحقق
$$x\,\tau\,(y \circ z) = (x\,\tau\,y) \circ (x\,\tau\,z)\ \forall\, x, y, z \in X$$

(٢) τ عملية **توزيع يميني** (right distribution) بالنسبة للعملية $\circ$ إذا تحقق
$$(y \circ z)\,\tau\,x = (y\,\tau\,x) \circ (z\,\tau\,x)\ \forall\, x, y, z \in X$$

(٣) τ عملية توزيع بالنسبة للعملية $\circ$ إذا كانت τ عملية توزيع يساري ويميني بالنسبة للعملية $\circ$.

مثال (١): نفرض $P(x)$ مع العمليتين $\cap, \cup$ نعلم أن $\cap$ عملية توزيع بالنسبة للعملية $\cup$ والعكس أيضاً صحيح.

مثال (٢): نفرض Z مع العمليتين $\tau ; \circ$ المعرفتين كما يلي :

τ عملية الجمع، $x \circ y = x^2\, y,\ x, y \in Z$

$$\therefore\ x \circ (y + z) = x^2\,(y + z) = x^2\,y + x^2\,z$$
$$= (x \circ y) + (x \circ z),\ \forall\, x, y, z \in Z$$

أي أن $\circ$ عملية توزيع يساري بالنسبة للعملية +.

ولكن: $(y + z) \circ x = (y + z)^2\,x \neq \left(y^2 + z^2\right)x = y^2\,x + z^2\,x$
$$\therefore (y + z) \circ x \neq (y \circ x) + (z \circ x)$$

إذن $\circ$ ليست عملية توزيع يميني بالنسبة للعملية +.

مثال (٣): نفرض أن $e \in A$ عنصر محايد يساري للعملية $e\ \ e : A \times A \longrightarrow A$ برهن أن العناصر المحايدة اليسارية ليست بالضرورة وحيدة، ومن ثم فقد لا تكون عناصر محايدة.

الحل: نفرض $A=\{a,b\}$ ونعرف العملية الثنائية $\tau: A\times A \longrightarrow A$ كما يلي:

$$a\,\tau\, a = b\,\tau\, a = a,\quad a\,\tau\, b = b\,\tau\, b = b$$

واضح أن $b\in A$ عنصر محايد يساري وأن $a\in A$ عنصر محايد يساري وأن أي منهما ليس عنصراً محايداً.

تمارين (١.٣)

(١) هل $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(٢) هل $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(٣) هل على وجه العموم $c^{(A\times B)}=c^{A}\times c^{B}$ حيث c^{A} مجموعة كل الرواسم من A إلى c.

(٤) برهن أن $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(A\cap B)$

هل تظل العلاقات صحيحة إذا وضعنا $\cup$ بدلاً من $\cap$.

(٥) للمجموعات والعلاقات التالية حدد نوع العلاقة من حيث كونها عاكسة ــ متماثلة ــ ناقلة

(i) $A=\text{integers},\ a\,R\,b \Leftrightarrow 3\setminus(a-b)$

(ii) $A=\text{integers},\ a\,R\,b \Leftrightarrow a\le b$

(iii) A مجموعة المثلثات في المستوى $a\,R\,b \Leftrightarrow$ المثلث a يشابه المثلث b

(٦) إذا كانت M هي مجموعة جمع فقط مستوى ما وكانت R_1, R_2 معرفتان على M كما يلي R_1 هي العلاقة التي تعني بأنه إذا كانت $A\,R_1\,B$ فإن النقطة B والنقطة لهما نفس الإحداثي السيني. R_2 هي العلاقة التي تعني أنه

إذا كانت $A\,R_2\,B$ فإن مجموع إحداثيات النقطة B والنقطة A يساوي مجموع إحداثيات. وضح إذا كانت R_1, R_2 علاقات التكافؤ.

(٧) أعط مثال :

(i) لراسم $f: X \longrightarrow Y$ بحيث يحقق لمجموعتين جزئيتين.

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) : A, B \subset X$$

(ii) لراسم $f: X \longrightarrow Y$ بحيث يحقق لمجموعة جزئية.

$$f(X - A) \neq f(X) - f(A) = A \subset X$$

(٨) إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{a, b\}$ اكتب جميع عناصر A^B، كم عنصراً في A^B يكون راسماً أحادياً.

(٩) أي من الرواسم $\theta: Z \longrightarrow Z$ تكون أحادية وأيها تكون فوقية ـ حيث $\theta(x)$ معرفة لكل $x \in Z$ تعرف كما يأتي :

(i) $\theta(x) = \frac{1}{2}x$ إذا كانت زوجية، $\theta(x) = x$ إذا كانت x فردية.

(ii) $\theta(x) = 2x + 1$ (iii) $\theta(x) = x^3$

(١٠) نفرض S مجموعة الأعداد الحقيقية $(x \geq 0)$ الراسم $\theta: S \longrightarrow S$

$$\theta(x) = x^2, \forall x \in S$$

برهن أن θ تناظر أحادي. أوجد θ^{-1}.

نعرف الآن : $\theta: A \longrightarrow A, \theta(x) = x^2, \forall x \in A$ حيث A مجموعة الأعداد الحقيقية. هل θ تناظر أحادي؟.

(١١) نفرض a, b عددين حقيقيين ثابتين، ونفرض $f: A \longrightarrow A$ معرفة $f(x) = ax + b, \forall x \in A$ حيث A مجموعة الأعداد الحقيقية.

برهن أن f تناظر أحادي إذا وإذا فقط كانت $a \neq 0$. أوجد f^{-1} في هذه الحالة.

(١٢) إذا كانت N هي مجموعة الأعداد الطبيعية. عين الحالات التي تكون فيها τ عملية ثنائية على N حيث τ معرفة كما يأتي

(i) $\tau:(x,y)\longrightarrow x+y$ (ii) $\tau:(x,y)\longrightarrow x-y$

(iii) $\tau:(x,y)\longrightarrow (x-y)^2$ (iv) $\tau:(x,y)\longrightarrow \sqrt{x+y}$

(v) $\tau:(x,y)\longrightarrow x^2+y^2$

(١٣) كم عملية ثنائية يمكن تعريفها على المجموعة $\{a\}$.

(١٤) كم عملية ثنائية يمكن تعريفها على المجموعة $\{a, b\}$.

(١٥) نفرض τ عملية ثنائية معرفة على المجموعة X ويوجد عنصر محايد للعملية τ ونفرض أن τ تحقق العلاقة: $x\,\tau\,(y\,\tau\,z)=(x\,\tau\,z)\,\tau\,y$ لكل $x, y, z\in X$.
برهن أن τ عملية دامجة وإبدالية.

(١٦) نعرف "الفرق المتماثل" $S\,\Delta\,T$ للمجموعتين الجزئيتين $S, T\subset U$ كما يأتي:
$S\,\Delta\,T=\left(S\cap c^T\right)\cup\left(c^S\cap T\right)$ حيث c المكمل.
برهن أن Δ عملية دامجة وإبدالية وأن $\cap$ عملية توزيع بالنسبة للعملية Δ.

(١٧) نفرض $\tau:R\times R\longrightarrow R$ بحيث $x\,\tau\,y=x\,y+1, \forall\, x, y\in R$ برهن أن τ عملية إبدالية وليست دامجة. هل يوجد عنصر محايد؟

(١٨) نعرف العملية الثنائية $\tau:R\times R\longrightarrow R$ كما يلي:
$x\,\tau\,y=x+y+x\,y\,,\forall\,(x,y)\in R\times R$ هل τ عملية دامجة؟.

(١٩) برهن أنه يمكن تعريف n^2 عملية ثنائية مختلفة على مجموعة A عدد عناصرها n.

٢.٢ مقدمة في الأنظمة الجبرية The Algebraic Systems

تعريف : النظام الجبري: هو مجموعة غير خالية معرف عليها عملية ثنائية أو أكثر ونقتصر في دراستنا هنا على إعطاء لمحات سريعة على الأنظمة الجبرية "الزمر ــ الحلقات ــ الحقول".

أنصاف الزمر وأشباه الزمر Semi-groups and manoids

تعريف: نصف زمرة: (S, τ) هو مجموعة S مع عملية ثنائية دامجة τ.

مثال (١): نفرض A أي مجموعة & $S = A^A$، $\tau : S \times S \longrightarrow S$ معرفة بالقاعدة

$(f, g) \longrightarrow f \circ g, \forall f, g \in S$ إذن (S, τ) نصف زمرة (لماذا؟).

مثال (٢): (Z, τ) حيث τ هي عملية الطرح ــ ليست نصف زمرة.

تعريف: شبه مجموعة : (S, τ) هي نصف زمرة مع عنصر محايد.

ويقال أن (S, τ) شبه زمرة إبدالية أو شبه زمرة ابيلية (abelian) إذا كانت τ عملية إبدالية commutative.

مثال (٣) : في مثال (١) (S, τ) شبه زمرة (راسم التطابق $P : A \longrightarrow A$ هو العنصر المحايد للعملية τ .

شبه زمرة باصطلاح الجمع: Additive manoid: إذا كانت العملية الثنائية بصورة + والعنصر المحايد ٥ فإننا نقول أنها شبه زمرة باصطلاح الجمع.

واضح أن $(R, +), (z, +)$ أشباه زمرات إبدالية باصطلاح الجمع.

<u>شبه زمرة باصطلاح الضرب Multiplicative manoids:</u> إذا كانت العملية الثنائية في صورة ضرب (.) والعنصر المحايد بصورة I فإننا نقول أنها شبه زمرة باصطلاح الضرب. واضح أن (. ,N), (. ,Z) أشباه زمرات إبدالية بالصطلاح الضرب.

نفرض R مجموعة الأعداد الحقيقية & $S = R$ ونفرض

$$f : R \longrightarrow R\,(X \longrightarrow X+1)\ \&\ g : R \longrightarrow R\left(x \longrightarrow x^2\right)$$

واضح أن: $f, g \in S$ شبه زمرة ليست إبدالية.

<u>العناصر المقابلة للتعاكس Invertible elements</u>

<u>تعريف:</u> نفرض $a \in S$ حيث (S, τ) شبه زمرة. يقال أن a قابل للتعاكس (أو له معكوس) إذا وجد العنصر $a' \in S$ بحيث $a\,\tau\,a' = a'\,\tau\,a = e$ (e هو العنصر المحايد). العنصر a' يسمى معكوس العنصر a بالنسبة للعملية τ.

<u>بعض الرموز:</u> إذا كانت $(S, +)$ شبه زمرة باصطلاح الجمع فإننا نرمز لمعكوس (إذا وجد) العنصر $a \in S$ بالرمز $-a$. وإذا كانت (. ,S) شبه زمرة باصطلاح الضرب فإن معكوس $a \in S$ يرمز له بالرمز a^{-1}.

<u>بعض الخواص:</u> (١) في أي شبه زمرة العنصر المحايد قابل للتعاكس.

(٢) في حالة شبه زمرة باصطلاح الضرب (. ,S) نجد أن $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

وفي حالة شبه زمرة باصطلاح الجمع $(S, +)$ نجد أن $-(-a) = a$

(٣) $(Z, +)$ شبه زمرة وكل عنصر $a \in Z$ قابل للتعاكس وفي شبه زمرة (. ,Z) لا يوجد سوى العنصرين 1 ,1- القابلين للتعاكس.

نظرية : إذا كان $a, b \in S$ عنصرين قابلين للتعاكس في شبه زمرة (S, τ) وكان a' هو معكوس a، b' معكوس b فإن $a \tau b \in S$ قابل للتعاكس وأن المعكوس هو $(a \tau b)' = b' \tau a'$.

البرهان: باستخدام قانون الدمج نستنتج أن :

$$(a \tau b) \tau (b' \tau a') = ((a \tau b) \tau b') \tau a' = (a \tau (b \tau b')) \tau a'$$
$$= (a \tau e) \tau a' = a \tau a' = e$$

وبالمثل:

$$(b' \tau a') \tau (a \tau b) = ((b' \tau (a') \tau a) \tau b = (b' \tau a) \tau b$$
$$= (b' \tau e) \tau b = b' \tau b = e$$

إذن $b' \tau a'$ هو معكوس العنصر $a \tau b$.

في حالة $(S, .)$ يكون $(a\, b)^{-1} = b^{-1}\, a^{-1}$،

وفي حالة $(S, +)$ يكون $-(a+b) = (-b) + (-a)$

نظرية: نفرض $a \in S$ قابل للتعاكس في شبه المجموعة (S, τ) وأن المعكوس هو a'. لأي عنصرين $b, c \in S$ يتحقق:

(1) المعادلة $x \tau a = b$ لها حل وحيد هو $x = b \tau a'$

(2) المعادلة $a \tau y = c$ لها حل وحيد هو $y = a' \tau c$

البرهان: $x = b \tau a'$ يكون حل المعادلة (1) إذا تحقق

$$(b \tau a') \tau a = b \tau (a' \tau a) = b \tau e = b$$

$\therefore$ $(b \tau a')$ حل المعادلة (1).

نفرض أن x عنصر بحيث $x \tau a = b$ إذن $x = x \tau e$

$$= x \tau (a \tau a') = (x \tau a) \tau a' = b \tau a'$$

$\therefore$ $b\,\tau\,a'$ هي الحل الوحيد للمعادلة (1).

وبالمثل يمكن برهنة الجزء الثاني من النظرية.

الزمر The groups

تعريف: يقال النظام (G,τ) أنه زمرة إذا كان هذا النظام شبه زمرة ويكون كل عنصر من عناصر G قابل للتعاكس (أي له معكوس، أي أن (G,τ) يكون زمرة إذا تحقق :ـــ

(i) τ عملية ثنائية على G. (ii) τ عملية دامجة.

(iii) يوجد العنصر المحايد $e \in G$ للعملية τ أي $x\,\tau\,e = e\,\tau\,x = x, \forall x \in G$

(iv) لكل عنصر $x \in G$ يوجد المعكوس $x' \in G$ أي $x\,\tau\,x' = x'\,\tau\,x = e$

مثال (١): نفرض $S = \{f \in A^A$: هو f تناظر أحادي$\}$، فإن $(S,\circ)$ زمرة.

مثال (٢): $(Z,+)$ زمرة ولكن $(Z,.)$ ليست زمرة.

مثال (٣): برهن أن مجموعة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تمثل زمرة تحت تأثير عملية الضرب.

الحل: ننشئ الجدول الآتي :

.	1	W_1	W_2
1	1	W_1	W_2
W_1	W_1	W_2	1
W_2	W_2	1	W_1

حيث $1, W_1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i, W_2 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ هي الجذور التكعيبيـــة للواحـــد الصحيح).

واضح من الجدول أن :

(i) 1 هو العنصر المحايد. (ii) معكوس W_1 هو W_2 ومعكوس W_2 هو W_1

(iii) ومن خواص الأعداد المركبة : عملية الضرب عملية دامجة.

∴ ينتج المطلوب.

<u>مثال (٤):</u> نفرض $A=\{a, b\}$ إذن $P(A)=\{A,\{a\},\{b\},\phi\}$ هل $(P(A),\cup)$ زمرة؟.

<u>الحل:</u> ننشئ الجدول الآتي :

$\cup$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	A
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	A	A
$\{b\}$	$\{b\}$	A	$\{b\}$	A
A	A	A	A	A

واضح من هذا الجدول أن:

(i) ϕ هو العنصر المحايد.

(ii) $\{a\}$ ليس لها أي معكوس أي لا يوجد عنصر x في $P(A)$ تحقق $\{a\}\cup x = x\cup\{a\}=\phi$ كذلك بالنسبة للعناصر $A, \{b\}$.

(iii) من الخواص الجبرية للمجموعات نعلم أن $\cup$ عملية دامجة. إذن النظام $(P(A),\cup)$ شبه زمرة وليس زمرة.

<u>مثال (٥):</u> مثال (١) يمثل زمرة ليست (لماذا؟) ـــ مثال (٢)، مثال (٣) يمثل زمرة إبدالية (لماذا؟).

بعض خواص الزمر:

أولاً: قانون الحذف (Cancellation law) : نفـــرض (G,τ) زمـــرة وأن

$$a,b,c\in G \qquad \therefore\ a\,\tau\, b = a\,\tau\, c \Rightarrow b=c$$

البرهان: نفرض $a'\in G$ هو معكوس العنصر a

$$\therefore a'\,\tau\,(a\,\tau\, b) = a'\,\tau\,(a\,\tau\, c)$$
$$\therefore (a'\,\tau\, a)\,\tau\, b = (a'\,\tau\, a)\,\tau\, c$$
$$\therefore e\,\tau\, b = e\,\tau\, c$$
$$b=c$$

ثانياً: لأي عنصرين $a,b\in G$ كل معادلة من المعادلتين :

$a\,\tau\, x = b\,,\ y\,\tau\, a = b$ لها حل وحيد.

البرهان: انظر ص (٥٠)

ثالثاً: لأي عنصر $a\in G$ ومعكوس المعكوس للعنصر a هو a. أي أن $(a')'=a$

في حالة $(G,.)$, $(a^{-1})^{-1}=a$ وفي حالة $(G,+)$, $-(-a)=a$

رابعاً: لأي عنصرين $a,b\in G$ نجد أن $(a\,\tau\, b)'=b'\,\tau\, a'$

في حالة الزمرة $(G,.)$, $(a\,b)^{-1}=(b)^{-1}\,(a)^{-1}$

وفي حالة الزمرة $(G;+)$, $-(a+b)=(-b)+(-a)$

خامساً: لأي عناصر $a,b,;;;,p,q\in G$ نجد أن :

$$(a\,\tau\, b\ldots\tau\, p\,\tau\, q)'=q'\,\tau\, p'\,\tau\ldots\tau\, b'\,\tau\, a'$$

في حالة $(G,.)$, $(a\,b\ldots p\,q)^{-1}=q^{-1}\,p^{-1}\,;;;\,b^{-1}$

وفي حالة $(G,+)$ $\quad -(a+b\ldots+p+q)=(-q)+(-p)+\ldots+(-a)$

سادساً: لأي عنصر $a\in G$ ولأي عدد صحيح موجب m نعرف

$a^m = a\,\tau\, a \ldots \tau\, a$ (m factor)

$a^0 = e$ (العنصر المحايد)

وأن $(a')^m = a'\,\tau\, a'\,\tau \ldots \tau\, a'$ (m factor)

في حالة (G, .) $a^{-m} = \left(a^{-1}\right)^m = a^{-1}\,\tau\, a^{-1}\,\tau \ldots \tau\, a^{-1}$ (m factor)

وفي حالة (G, +) $m\,a = a + a + \ldots + a$ (m factor)

$\&\ m\,(-a) = (-a) + (-a) + \ldots + (-a)$ (m factor)

يمكن إثبات أن $a^m\,\tau\, a^n = a^{m+n}$, $\left(a^m\right)^n = a^{m\,n}$ حيث n, m عددين صحيحين.

تعريف: إذا كانت (G, τ) زمرة محدودة (أي عدد عناصر G يكون محـــــدوداً) فإن عدد عناصر G يسمى رتبة G (the order of G).

تعريف: رتبة عنصر $a \in G$ هي أصغر عدد صحيح موجب n ـــ إذا وجــــد ـــ بحيث يكون $a^n = e$ (العنصر المحايد)

مثال (١): (أ) في الزمرة (Z, +)إذا كانت $a \neq 0$ فإن $n\,a \neq 0, \forall\, n \in N$

إذن العنصر a درجتة ما لانهاية.

(ب) في حالة مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح بالنسبة للضرب العنصــــر W_1 درجتة 3 لأن $W_1^3 = 1$.

تعريف: يقال للمجموعة A الغير خالية أنها تكون حلقة بالنسبة للعمليتــــين ,(.) (+) إذا تحققت الشروط التالية لجميع العناصر $a, b, c \in A$

(1) $a + b \in A$ (2) $a + b = b + a$

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (4) $\exists\, 0 \in A : 0 + a = a + 0, \forall\, a \in A$

(5) $\exists\, -a \in A : a + (-a) = (-a) + a = 0, \forall\, a \in A$

(6) $a, b \in A$ (7) $a\,.\,(b\,.\,c) = (a\,.\,b)\,.\,c$

(8) $a\,.\,(b + c) = a\,.\,b + a\,.\,c\,,\ (b + c)\,.\,a = b\,.\,a + c\,.\,a$

يلاحظ أن الشروط من (5) – (1) يعني أن (+ ,A) تكون زمرة إبدالية والشـــروط (7) ,(6) يعني أن (. ,A) تكون نصف زمرة. ويرمز عادة للحلقة بالرمز(. ,+ ,A).

<u>مثال (١)</u>: المجموعة $A = \{a, b\}$ مع عمليات الجمع والضرب والمعرفة بالجدولين

+	a	b
a	a	b
b	b	a

.	a	b
q	a	q
b	a	b

تكون حلقة.

<u>مثال (٢)</u>: النظام الجبري (. ,+ ,Z) تكون حلقـــة حيـــث Z مجموعـــة الأعـــداد الصحيحة.

<u>مثال (٣)</u>: النظام الجبري (. ,+ ,R) يكون حلقة.

<u>مثال (٤)</u>: النظام الجبري (. ,+ ,T) حيث $T = \{2x+1, x \in Z\}$ لا يكون حلقة.

<u>تعريف الحقل Field</u>: إذا كانت (. ,+ ,A) حلقة تحقق الخاصيـة (. ,{0}-A) ، فتسمى الحلقة في هذه الحالة بالحقل ويرمز لها عادة بالرمز F.

<u>مثال (٥)</u>: (. ,+ ,R) (. ,+ ,Z) تكون كل منها حقل.

<u>مثال (٦)</u>: إذا كانت $M = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in Q\}$ وكانت عمليتي الجمـــع والضرب معرفتين كما يلي:

$$(a, b, c, d) + (a, f, g, h) = (a+e, b+f, c+g, d+h)$$
$$(a, b, c, d) + (a, f, g, h) = (ae+bg, af+bh, ce+dg, cf+dh)$$

حيث $Q, e, f, g, h \in Q$ مجموعة الأعداد القياسية. فإن النظام الجبري $(M, +, .)$ لا يكون حقل ولكن يكون حلقة.

تمارين (٣.٣)

(١) نفرض R مجموعة الأعداد الحقيقية، نعرف العملية $\circ$ على R كما يلي:

$x \circ y = x + y + xy , \forall x, y \in R$ برهن أن $(R, \circ)$ نصف زمرة. هل $(R, \circ)$ شبه زمرة؟.

نفرض أن $R' = \{ x \in R : x \neq -1\}$ برهن أن $(R, \circ)$ زمرة.

(٢) أي من هذه المجموعات تكون زمرة تحت تأثير العملية المشار إليها:

(i) $S = \{x : x \in Z, x < o\}$ مع عملية الجمع +،

(ii) $S = \{x : x \in Z\}$ مع عملية الجمع +،

(iii) $S = \{x : x \in Z, x$ فردية$\}$ مع عملية الضرب.

(iv) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ مع عملية الضرب.

(v) $S = \{1, -1, i, -i\}, i = \sqrt{-1}$ مع عملية الضرب.

(vi) $S = \{z : z \in C, |z| = 1\}$ مع عملية الضرب.

(٣) برهن أن النظام $(P(x), \Delta)$ هو زمرة إبدالية، حيث العملية Δ معرفة كالآتي: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B), \forall A, B \in P(x)$.

(٤) إذا كان x, y عنصرين في زمرة وأن $x^2 = y^2 = (x y)^2 = e$ برهن أن x, y تتبادلان.

(٥) برهن أنه إذا كان $x^2 = e , \forall x \in G$ فإن G زمرة إبدالية.

(٦) إذا كانت $A = \{0, 1, 2, 3\}$ وكانت τ هي العملية الثنائية المعطاة بالجدول

τ	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ادرس النظام (A, τ).

٣.٢ قدرة المجموعات Potency of Sets

المجموعات متساوية القدرة Equipotent Sets

تعريف: لتكن A, B مجموعتين يقال أن A, B متقادرتان Equipotent إذا وفقط إذا وجد بينهما تناظر أحادي $f : A \longrightarrow B$ ونعبر عن ذلك بالرمز $A \sim B$. إذا كان لا يوجد أي تناظر أحادي بين المجموعتين A, B نكتب $A \nsim B$ وتقرأ A غير متقادرة مع B.

ملاحظة: العلاقة ~ بين المجموعات هي علاقة تكافؤ أي أن :ـ

(١) $A \sim A$ لأي مجموعة A.

(٢) $(A \sim B) \longrightarrow (B \sim A)$ لأي مجموعتين A, B.

(٣) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \longrightarrow (A \sim C)$ لأي ثلاث مجموعات A, B, C.

وعليه أي مجموعة من المجموعات (عائلة من الفئات) تنقسم إلى (تجزأ إلى) فصول تكافؤ.

ملاحظات:

(١) أننا عرفنا متى تكون مجموعتان متقادرتين ولكن لم نعرف ما نقصده بقدرة

المجموعة، أن قدرة المجموعة مفهوم مجرد وخاصة عند تكون المجموعة غير منتهية ويمكن أن نقول أن قدرة المجموعة ما هي إلا كمية العناصر التي تحتويها.

(٢) نستخدم التعبير "عدد أساسي cardinal number" لنشير إلى الخاصية التي تشترك بها المجموعات المتقادرة، حسب الملاحظة (١) تكون الأعداد الأساسية قياساً إلى عدد العناصر في المجموعات.

وبهذا نكون قد ربطنا مع أية مجموعة A شيئاً رياضياً جديداً، أسميناه العدد الأساسي للمجموعة A، وكما **قال كنتور** بأن العدد الأساسي لمجموعة هو ذلك المفهوم الذي يدرك بقوة التجريد ويرتبط مع المجموعة متجاهلين عناصرها وترتيبها.

إذا كانت A مجموعة فسوف نكتب A # لتدل على العدد الأساسي للمجموعة A، فالخاصية الأساسية للأعداد الأساسية هي: $(A \sim B) \longrightarrow \#(A) = \#(B)$

تعريف: نقول أن α عدد أساسي إذا وجدت مجموعة A بحيث $\alpha = \#(A)$.

لنتفق على أن $\#(\phi) = 0, \#(\{\phi\}) = 1, \#(\{\phi, \{\phi\}\}) = 2, \#(\{0, 1, ..., n-1\}) = n$

مثال (١): لتكن $R = \{1, 2, 5, 8\}, T = \{a, b, c, d\}$

نعرف الراسم (تطبيق) $f: R \longrightarrow T$ بحيث أن $f(1)=a, f(2)=b, f(5)=d$ واضح أن $f: R \longrightarrow T$ تناظر أحادي فإذن $R \sim T$ وعليه فإن $\#(R) = \#(T) = 4$

مثال (٢): لتكن $M=\{1, 2, 3\}, S=\{a, b\}$ من الواضح أنه لا يوجد تقابل (تناظر أحادي) بين M, S لذا فإن $M \nsim S$.

مثال (٣): لتكن $G=[0,1]\subset R, H=[2,5]\subset R$ وليكن $f:G\longrightarrow H$ راسم بحيث $f(x)=3x+2, x\in G$ واضح أن الراسم $f:G\longrightarrow H$ تناظر أحادي فإن $G\sim H$.

تعريف: يقال أن A مجموعة منتهية (finite) إذا وفقط إذا كانت A متساوية القدرة مع مجموعة من الأعداد الطبيعية ذات الصورة $\{0,1,2,...,n-1\}\subset N$ حيث n عدد طبيعية.

تعريف: إذا كانت A مجموعة متساوية القدرة مع $\{0, 1, ..., n-1\}$ فيقال أن العدد الأساسي للمجموعة A هو n.

ملاحظات:

(١) العدد الأساسي للمجموعات المنتهية هو عدد العناصر التي تحويها المجموعة.

(٢) تكون المجموعة A منتهية إذا كان لا يوجد أي مجموعة جزئية من A ومتساوية القدرة مع A سوى A نفسها فعليه يمكن أن نعرف المجموعة غير المنتهية كما يلي: تكون المجموعة A غير منتهية إذا وفقط إذا كانت A متساوية القدرة مع مجموعة جزئية فعلية منها.

(٣) يسمى العدد α عدداً منتهياً إذا كان هو العدد الأساسي لمجموعة منتهية، وما عدا ذلك فنسميه عدد أساسي غير منته. والعدد الأساسي المنتهي يسمى أيضاً عدداً طبيعياً Natural number ويسمى العدد الأساسي غير المنتهي عدد ما فوق المنتهي Transfinite number.

(٤) تكون المجموعة A منتهية إذا وفقط إذا كان $\#(A)\neq\#(A)+1$ وعليه إذا كانت $A, \alpha=\#(A)$ مجموعة منتهية فإن $\alpha\neq\alpha+1$

الترتيب على الأعداد الأساسية:

تعريف: ليكن α, β عدداً أساسياً، يقال أن $\alpha \le \beta$ إذا وفقط إذا وجدت مجموعتان A, B بحيث $\alpha = \#(A), \beta = \#(B)$ والمجموعة A متقادرة مع مجموعة جزئية من B وهذا يعني وجود راسم أحادي $f : A \longrightarrow B$.

مثال (٤): علاقة $\le$ على قدرة المجموعات (الأعداد الأساسية) علاقة ترتيب جزئي

لآن (i) العلاقة $\le$ تكون علاقة انعكاسية أي أن $\alpha \le \beta$ لكل α عدد أساسي.

(ii) العلاقة ناقلة (متعدية) أي أن $(\alpha \le \beta) \wedge (\beta \le \gamma) \rightarrow \alpha \le \gamma$ لأي ثلاث أعداد أساسية α, β, γ.

(iii) العلاقة $\le$ علاقة ضد متناظرة.

مثال (٥): $\beta \ge \alpha$ تعني $\alpha \le \beta$ لأي عددين أساسين α, β.

مثال (٦): إذا كان n عدداً أساسياً منتهياً فإن $n \le n_o$ حيث n_o يرمز للعدد الأساسي لمجموعة الأعداد الطبيعية.