

## الجاب الخامس

### المتسلسلات SERIES

#### (١.٥) المتسلسلات المنتهية : Sum of Finite Series

قبل البدء في كتابة إيجاد مجموع بعض المتسلسلات المنتهية نقدم تعريف وخواص ما يسمى بالمتابعة (Sequence).

**تعريف (١):** المتابعة العددية هي تجمع من الأعداد معرفة فيه موقع كل عدد داخل في تكون المتابعة بالنسبة للأعداد الأخرى المكونة للمتابعة وكل قيمة تدخل في تكوين المتابعة تعرف بحد المتابعة.

والحد العام في المتابعة يعرف بالحد النوني ويرمز له بالرمز  $a_n$  وعادة تكتب المتابعة على الصيغة :  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

وإذا كانت  $m < n$  فإن الحد  $a_m$  يقع قبل الحد  $a_n$  وإذا اعتبرنا المتابعة

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$$

$$\text{فإن : } a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \dots, a_n = \frac{1}{n}$$

فمثلاً الحد العام في المتابعة  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$  هو  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

ويقال أن المتابعة منتهية إذا كانت تحتوي على عدد محدود من الحدود أما إذا كان عدد الحدود لانهائياً قيل أن المتابعة لانهائية (Infinite).

**تعريف (٢):** يقال أن المتابعة التي حدها النوني  $a_n$  تزايدية (Increasing) أو تناقصية (Decreasing) إذا كان وكان فقط

$$a_n \leq a_{n+1}, (a_n \geq a_{n+1}), n = 1, 2, \dots$$

**تعريف (٣):** يقال أن المتابعة  $(a_n)$  مضطردة (monotonic) إذا كان و كان فقط تزايدية أو تناقصية.

**تعريف (٤):** أي متسلسلة هي مجموع حدود متتابعة فمثلاً إذا كانت

$a_1, a_2, \dots, a_n$  هي متتابعة محدودة فإن المجموع

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

أما إذا كان لدينا المتابعة اللانهائية  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  والتي حدها النوني  $a_n$  فإن

$$\text{المجموع} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

لهذه المتتابعة.

وسندرس الآن طرق جمع بعض المتسلسلات المحدودة.

(١) **المتسلسلة العددية** : المتسلسلة العددية هي على الصورة :

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + a + (n-1)d$$

حيث  $a$  هو الحد الأول،  $d$  أساس المتسلسلة. ونعلم من الدراسة في المرحلة الثانوية

$$\text{أن المجموع يعطى من العلاقة : } S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

(٢) **المتسلسلة الهندسية** : المتسلسلة الهندسية هي على الصورة :

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

وبوجه عام ليس من السهل إيجاد مجموع أية متسلسلة محدودة ولكن قد يمكن ذلك

في بعض الحالات الخاصة التي سنذكرها فيما يلي :

### أولاً : طريقة الفروق :

نظرية : في المتسلسلة  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + \dots$  إذا أمكن كتابة الحد العام على الصورة :

$$a_r = \phi(r+1) - \phi(r) \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \phi(n+1) - \phi(1) \quad \text{فإن}$$

البرهان: بوضع  $r=1$  في العلاقة (1) نجد أن :  $a_1 = \phi(2) - \phi(1)$

وبوضع  $r=2$  في العلاقة (1) نجد أن :  $a_2 = \phi(3) - \phi(2)$

وهكذا ...

وبوضع  $r=n$  يكون :  $a_n = \phi(n+1) - \phi(n)$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \phi(n+1) - \phi(1) \quad \text{وبالجمع ينتج أن :}$$

مثال (١) : أوجد مجموع المتسلسلة :

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

الحل: الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو  $a_r = r(r+1)$  وندرس الفرق

$$r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1) = 3r(r+1) = 3a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{3} [r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1)]$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \frac{1}{3} [n(n+1)(n+2) - 0]$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

مثال (٢): أوجد مجموع المتسلسلة :

إلى الحد النوني ... ..  $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots$

الحل: الحد العام هو  $a_r = r(r+1)(r+2)$  ندرس الفرق

$$\begin{aligned} r(r+1)(r+2)(r+3) - (r-1)(r)(r+1)(r+2) \\ = r(r+1)(r+2)[r+3-r+1] = 4r(r+1)(r+2) = 4a_r \end{aligned}$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{4} [r(r+1)(r+2)(r+3) - (r-1)(r)(r+2)]$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \frac{1}{4} [n(n+1)(n+2)(n+3)]$$

مثال (٣): أوجد مجموع المتسلسلة : إلى حداً  $n$   $1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots$

الحل: الحد العام  $a_r = r r!$  ، ندرس الفرق

$$\begin{aligned} (r+1)! - r! &= [(r+1)+1] - r! \\ &= r!(r+1-1) = r r! \end{aligned}$$

$$(r+1)! - r! = a_r$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = (n+1)! - 1!$$

مثال (٤): أوجد مجموع المتسلسلة :

إلى حداً  $n$   $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$

الحل: الحد العام  $a_r = \cos r x$  ، ندرس الفرق

$$\sin \frac{2r+1}{2} x - \sin \frac{2r-1}{2} x = 2 \cos r x \sin \frac{x}{2} = 2 a_r \sin \frac{x}{2}$$

$$a_r = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \frac{2r+1}{2} x - \sin \frac{2r-1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right]$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[ \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{x}{2} \right] = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[ 2 \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \right]$$
$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left( \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \right)$$

مثال (٥): أوجد مجموع المتسلسلة : إلى  $n$  حداً  $\frac{1.2}{3!} + \frac{2.2^2}{4!} + \frac{3.2^3}{5!} + \frac{4.2^4}{6!} + \dots$

الحل: الحد العام هو  $a_r = \frac{r 2^r}{(r+2)!}$ ، ندرس الفروق :

$$\frac{2^r}{(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{2^r (r+2)}{(r+2)(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)(r+1)!}$$

$$= \frac{2^r}{(r+2)!} (r+2-2) = \frac{r 2^r}{(r+2)!} = a_r$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

### ثانياً: باستخدام بعض القوانين المعروفة :

باستخدام طريقة الفروق يمكن إيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد

الطبيعية وكذلك مجموع الأعداد الطبيعية وبذلك يكون لدينا القوانين الآتية :

$$(i) \quad \sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2} \dots \dots \dots (1)$$

$$(ii) \quad \sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \dots \dots \dots (2)$$

$$(iii) \quad \sum_{r=1}^n r^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \dots \dots \dots (3)$$

باستخدام القوانين (1)، (2)، (3) يمكن إيجاد مجموع بعض المتسلسلات كما يتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

مثال (٦): أوجد مجموع المتسلسلة الآتية :

إلى  $n$  حداً  $1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots$

الحل: الحد العام هو  $a_r = r(r+2) = r^2 + 2r$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^n r^2 + 2 \sum_{r=1}^n r$$

وباستخدام (1)، (2) نجد أن :

$$\sum_{r=1}^n a_r = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n(n+1)}{6} [2n+1-6]$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = \frac{1}{6} n(n+1)(2n-5)$$

مثال (٧): أوجد مجموع المتسلسلة

إلى  $n$  حداً  $3.1^2 + 4.2^2 + 5.3^2 + \dots$

الحل: الحد العام هو  $a_r = (r+2)r^2 = r^3 + 2r^2$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^n r^3 + 2 \sum_{r=1}^n r^2 \quad \text{وباستخدام (2)، (3) نحصل على}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n a_r &= \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{12} n(n+1) [3n^2 + 11n + 4] \end{aligned}$$

مثال (٨): أوجد مجموع المتسلسلة

إلى  $n$  حداً  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots$

الحل: الحد العام هو  $a_r = (2r-1)^2$

$$a_r = 4r^2 - 4r + 1$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = 4 \sum_{r=1}^n r^2 - 4 \sum_{r=1}^n r + \sum_{r=1}^n 1$$

وبالاستعانة بالقوانين السابقة نجد أن :

$$\sum_{r=1}^n a_r = 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = \frac{n}{3} (4n^2 - 1)$$

ثالثاً : جمع متسلسلات في قوى  $x$  على الصورة :

$$a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \dots + [a+(n-1)d]x^{n-1}$$

هذه المتسلسلة تسمى بالمتسلسلة العددية الهندسية لأن حداها العام يتكون من

حاصل ضرب الحد العام لمتسلسلة عددية والحد العام لمتسلسلة هندسية.

ولإيجاد مجموع هذه المتسلسلة نفرض أن :

$$S_n = a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \dots + [a+(n-1)d]x^{n-1} \quad (1)$$

$$\therefore x S_n = a x + (a+d)x^2 + (a+2d)x^3 \dots$$

$$+ [a+(n-2)d]x^{n-1} + [a+(n-1)d]x^n \dots \quad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على

$$\begin{aligned} S_n - x S_n &= a + d x + d x^2 + \dots + d x^{n-1} - [a+(n-1)d]x^n \\ &= a + \frac{d x (x^{n-1} - 1)}{x - 1} - [a+(n-1)d]x^n \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{[a + (n-1)d]x^n - a}{x-1} - \frac{dx(x^{n-1}-1)}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

مثال (٩): أوجد مجموع المتسلسلة : إلى الحد النوني .....  $1+11x+21x^2+\dots$

الحل: الحد العام هو  $a_r = [1+10(r-1)]x^{r-1}$ ، ونفرض أن :

$$S_n = 1+11x+21x^2+\dots+(10n-9)x^{n-1}$$

$$xS_n = x+11x^2+21x^3+\dots+(10n-19)x^{n-1}+(10n-9)x^n$$

بالطرح نحصل على :

$$(1-x)S_n = 1+10x+10x^2+10x^3+\dots+10x^{n-1}-(10n-9)x^n$$

$$= 1+10x \frac{(x^{n-1}-1)}{x-1} - (10n-9)x^n$$

$$\therefore S_n = \frac{(10n-9)x^n - 1}{x-1} - \frac{10x(x^{n-1}-1)}{(x-1)^2}$$

### رابعاً : جمع المتسلسلة اللانهائية:

نوجد أولاً مجموع  $n$  من الحدود وليكن  $S_n$  ويسمى المجموع الجزئي

ويكون مجموع عدد لانهائي من حدود المتسلسلة هو  $S$  ونحصل عليه من  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

فإذا كانت النهاية كمية محدودة يقال أن المتسلسلة تقاربية ومجموعها هو  $S$  أما إذا

كانت  $S$  لانهائية أو غير موجودة فإن المتسلسلة تسمى متسلسلة تباعدية وهذا ما

سوف نقوم بدراسته في الباب القادم.

### تمارين (1.5)

(١) اجمع المتسلسلات الآتية إلى حد  $n$ .

- (1)  $1.5 + 3.7 + 5.9 + \dots$
- (2)  $1.2.4 + 2.3.5 + 3.4.6 + \dots$
- (3)  $\log 2 + 2 \log \frac{3}{2} + 3 \log \frac{4}{3} + 4 \log \frac{5}{4} + \dots$
- (4)  $1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots$

(٢) أوجد مجموع  $n$  من حدود المتسلسلات الآتية ومن ثم أوجد مجموعها اللاهوائي (مجموع متسلسلة لانهائية)

- (1)  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \dots$
- (2)  $\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots$
- (3)  $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \dots$
- (4)  $\frac{1 \times 2}{3!} + \frac{2 \cdot 2^2}{4!} + \frac{3 \cdot 2^2}{5!} + \frac{4 \cdot 2^2}{6!} + \frac{5 \cdot 2^2}{7!} + \dots$
- (5)  $\frac{1}{2.5.8} + \frac{1}{5.8.11} + \frac{1}{8.11.14} + \dots$
- (6)  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$

(٣) اجمع المتسلسلات المنتهية الآتية:

- (1)  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (4n)^0$
- (2)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2$
- (3)  $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (2n+1)^3$

(٤) اجمع كلاً من المتسلسلات الآتية إلى حد  $n$ .

- (i)  $1 + 2x + 3x^2 + \dots$
- (ii)  $1 + 3x + 5x^2 + \dots$

## (٢.٥) تقارب وتباعد المتسلسلات اللانهائية

### Convergence and divergence of infinite series

**تعريف (٢):** نفرض أن لدينا عدد لا نهائي من حدود متتابعة على الصورة

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

وبذلك يكون :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

والذي عادة يسمى المتسلسلة العددية اللانهائية أو ببساطة يسمى بالمتسلسلة.

ويسمى الحد  $a_k$  في (1) حد المتسلسلة. مجموع  $n$  من الحدود في المتسلسلة (1)

يسمى بالمجموع الجزئي (partial sum) ويرمز له عادة بالرمز  $S_n$

وبذلك يكون :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (2)$$

أي أن  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

إذا يكون لدينا المتتابعة :  $S_1, S_2, \dots, S_n$  من المجاميع الجزئية.

والآن ندرس الاحتمالات الأربعة الآتية :

(١) إذا كانت  $S_n$  تؤول إلى نهاية محدودة  $S$  عندما  $n \rightarrow \infty$  أي إذا كان

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  فإنه يقال أن المتسلسلة المعطاة تقاربية أو متقاربة

(Convergent) وأن مجموعها هو  $S$ . أي أن المتسلسلة تكون تقاربية إذا

كان مجموعها عدداً محدوداً.

(٢) إذا كانت  $S_n \rightarrow +\infty$  أو  $S_n \rightarrow -\infty$  حينما  $n \rightarrow \infty$  يقال أن المتسلسلة

المعطاة تباعدية أو متباعدة (Divergent).

(٣) إذا كانت  $S_n$  تتذبذب بين عددين محدودين عندما  $n \rightarrow \infty$ ، وفي هذه الحالة يقال أنها تتذبذب تذبذباً محدوداً ويقال أنها تباعدية.

(٤) إذا كانت  $S_n$  تتذبذب بين  $-\infty$ ،  $+\infty$  عندما  $n \rightarrow \infty$ ، في هذه الحالة يقال أن المتسلسلة تتذبذب تذبذباً غير محدود ويقال أنها تباعدية.

**ملحوظة:** المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  يقال أنها تباعدية إذا كانت  $S_n \rightarrow \infty$  أو  $S_n \rightarrow -\infty$  أو  $S_n$  تذبذبية.

مثال (١): المتسلسلة  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ ، متسلسلة تذبذبية لأن :

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ 1 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

أي أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  غير موجودة وبذلك تكون المتسلسلة تباعدية.

مثال (٢): نفرض أن لدينا المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}$$

ونفرض أن  $S_n$  هو المجموع الجزئي  $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$

$$\therefore S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}, a \neq 1$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^n}{1 - a} \quad (3)$$

وندرس الآن الحالات الآتية

(١) إذا كانت  $|a| < 1$  فإن  $a^n \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow \infty$ .

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - a}$$

∴ المتسلسلة الهندسية تكون تقاربية إذا كان  $|a| < 1$  ومجموعها هو  $\frac{1}{1-a}$

(٢) إذا كان  $|a| > 1$  فإن  $a^n \rightarrow \infty$  عندما  $n \rightarrow \infty$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

∴ المتسلسلة الهندسية تكون تباعدية عندما يكون  $|a| > 1$ .

مثال (٣): أدرس تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$

الحل: الحد العام هو  $a_r = \frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$

$$S_n = \sum_{r=1}^n a_r = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

∴ المتسلسلة تقاربية ومجموعها 1.

**تمرين:** أثبت أن المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5}$$

تقاربية وأن مجموعها يساوي  $\frac{1}{4}$ .

**الشرط الضروري والكافي لتقارب متسلسلة ما :**

من المعروف أن تقارب أي متسلسلة  $\sum a_n$  يعتمد على تقارب مجموعها الجزئي، أي أن نهاية المجموع الجزئي يكون موجود ويساوي عدداً محدوداً عندما  $n \rightarrow \infty$ .

والسؤال الآن ما هو الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتسلسلة تقاربية وللإجابة على هذا السؤال نقدم التعريف الآتي :

**تعريف:** الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتابعة  $(S_n)$  تقاربية هو أنه لأي عدد موجب  $\varepsilon > 0$  يوجد العدد  $N$  بحيث

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon, \forall n \geq N; p = 1, 2, 3, \dots$$

وبناء على التعريف السابق يمكن ذكر النظرية الأساسية (بدون برهان) والتي تعرف بنظرية كوشي (Cauchy)

### نظرية (٢):

الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  تقاربية هو أنه

لأي عدد موجب  $\varepsilon > 0$  لابد من وجود العدد  $N$  بحيث يكون لكل الأعداد

$$n \geq N, n \text{ وأي عدد طبيعي } P \text{ يكون : } \left| \sum_{k=n+1}^{n+P} a_k \right| < \varepsilon$$

### الشرط الضروري لتقارب متسلسلة ما :

قد يتساءل القارئ متى تكون المتسلسلة بالضرورة تقاربية وللإجابة عن هذا

السؤال سوف نناقش الشرط الضروري  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  لكي تكون أي متسلسلة تقاربية.

أي أن المتسلسلة تكون تقاربية إذا كان حدها العام يؤول إلى الصفر عندما  $n$  تؤول إلى  $\infty$ .

البرهان: نفرض المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  تقاربية أي أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (1)$$

حيث  $S_n$  هو مجموع المتسلسلة المحدودة.

وبالمثل يمكن القول أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \quad (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{وبوضع } S_n - S_{n-1} = a_n$$

وهذا يبرهن النظرية.

### نتيجة ٢ :

إذا كان الحد العام  $a_n$  في المتسلسلة  $\sum a_n$  لا يؤول إلى الصفر عندما  $n \rightarrow \infty$  تكون المتسلسلة تباعدية.

مثال (٤) : المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$  تباعدية لأن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

مثال (٥) : المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 400n}$  تباعدية لأن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2 + 400n} = \frac{1}{5} \neq 0$$

ملحوظة : نلاحظ أن الشرط الضروري لتقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  هو أن يكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ولكنه ليس شرطاً كافياً ويتضح ذلك من المثال الآتي :

مثال (٦) : في المتسلسلة التوافقية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ يكون}$$

في حين أن المتسلسلة (\*) تباعدية وإثبات ذلك نعتبر أن

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 8\left(\frac{1}{16}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty \end{aligned}$$

∴ المتسلسلة  $\sum \frac{1}{n}$  تباعدية.

### بعض خواص المتسلسلات التقاربية :

(١) نفرض أن المتسلسلتين التقاربتين  $\sum a_n$  ,  $\sum b_n$  وأن مجموعهما على الترتيب

R, H فإن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  تكون تقاربية وأن مجموعها هو R+H

كذلك المتسلسلة  $\sum (a_n - b_n)$  تكون تقاربية وأن مجموعها هو R-H. وإذا

كانت λ أي عدد ثابت فإن  $\sum \lambda a_n$  تكون تقاربية ومجموعها λ H.

البرهان: نفرض أن :  $R_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ,  $H_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

∴  $R_n + H_n$  هو المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة  $\sum (a_n + b_n)$ .

∴  $R_n \rightarrow R$  ,  $H_n \rightarrow H$  عندما  $n \rightarrow \infty$

∴  $R_n + H_n \rightarrow R + H$  عندما  $n \rightarrow \infty$

∴  $\sum a_n + b_n$  تقاربية ومجموعها هو R+H.

ويمكن برهنة الحالات الأخرى بنفس الطريقة.

(ب) إذا كانت  $\sum a_n, \sum b_n$  متسلسلتين تقاربتين ومجموعهما على الترتيب  $R, H$  ونفرض أن  $a_n \leq b_n$  لكل قيم  $n$  فإن  $R \leq H$ .

البرهان:

$$R_n = H_n \iff n a_n \leq b_n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n, \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H$$

(جـ) نفرض أن  $\sum a_n$  متسلسلة تقاربية وأن مجموعها  $R$ .

إذا حذفنا عدد محدود من حدود المتسلسلة فإن المتسلسلة الناتجة تقاربية ومجموعها هو  $R - P$  حيث  $P$  مجموع الحدود المحذوفة.

إذا أضفنا عدد محدود من الحدود إلى المتسلسلة فإن المتسلسلة الناتجة تظل تقاربية ومجموعها  $R + P$  حيث  $P$  مجموع الحدود الباقية التي أضيفت.

مثال (٧): المتسلسلة  $|x| < 1, x^2 + x^3 + x^4 + \dots$  يمكن إيجادها من المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

بحذف الحدين الأول والثاني، إذن مجموع المتسلسلة المعطاة هو

$$\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{x^2}{1-x}$$

(٣.٥) اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة:

هدفنا الآن أن نبحث عن اختبارات تقارب تمكنا من أن نقرر هل

المتسلسلة  $\sum a_n$  تقاربية أم لا؟ (ليس من الضروري أن نجد مجموعها) وقبل

دراسة اختبارات التقارب المختلفة نذكر النظرية الآتية :

نظرية (٣): الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تقاربية هو أن المجاميع الجزئية تكون محدودة.

البرهان: الشرط الضروري يتضح من الحقيقة التي تقول أن كل متتابعة تقاربية تكون محدودة، أثبت؟

الشرط الكافي : يتضح من الحقيقة التي تقول أن متتابعة المجاميع الجزئية تقاربية لابد وأن تكون محدودة.

الاختبار الأول : الصورة الأولى لاختبار المقارنة :

نفرض أن  $\sum a_n, \sum b_n$  متسلسلتين ذاتا حدود غير سالبة (أي أن  $a_n \geq 0, b_n \geq 0$  لكل قيم  $n$ )

(i) إذا كان  $a_n \leq b_n$  لكل قيم  $n$  وكانت  $\sum b_n$  تقاربية فإن  $\sum a_n$  تكون تقاربية.

(ii) إذا كانت  $a_n \geq b_n$  لكل قيم  $n$  وكانت  $\sum b_n$  تباعدية فإن  $\sum a_n$  تكون تباعدية.

البرهان: نفرض أن  $(t_n), (S_n)$  هما متابعيتي المجموعات الجزئية للمتسلسلتين

$\sum a_n, \sum b_n$  على الترتيب أي أن

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

ونلاحظ أن  $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots, t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \dots$

(i) إذا كانت  $\sum b_n$  تقاربية فإن  $n \rightarrow \infty$  عندما  $t_n \rightarrow T$  ونلاحظ أن  $t_n \leq T$

لكل قيم  $n$ . ربما أن  $a_n \leq b_n$  لكل قيم  $n$ : إذن  $S_n \leq t_n \leq T$  لكل قيم  $n$ .

ومن ذلك نستنتج أن  $S_n$  تؤول إلى نهاية محدودة عندما  $n \rightarrow \infty$ . إذن  $\sum a_n$  تقاربية.

(ii) إذا كانت  $\sum b_n$  تباعدية فإن  $t_n \rightarrow \infty$  عندما  $n \rightarrow \infty$ .

$\therefore S_n \geq t_n$  لكل قيم  $n$  فإن  $S_n \rightarrow \pm \infty$  عندما  $n \rightarrow \infty$ .  $\therefore \sum_r a_n$  تباعدية.

مثال (٨) : اختر تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  حيث  $k > 1$ .

الحل:

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} < \frac{4}{4^k} = \frac{1}{4^{k-1}} = \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2$$

$$\therefore \text{مجموع المتسلسلة أقل من } 1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3 + \dots$$

والمتسلسلة الأخيرة هندسية لانهاية أساسها أقل من الواحد الصحيح إذن فهي متقاربة وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تقاربية.

مثال (٩) : اختر تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  حيث  $k < 1$ .

الحل: إذا كانت  $k < 1$  فإن  $n^k \leq n$  لكل قيم  $n$ . إذن  $\frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{n}$  (لكل قيم  $n$ )

وبالتالي يكون  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  وحيث أن المتسلسلة  $\sum \frac{1}{n}$  تباعدية، إذن

المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  تباعدية.

**ملحوظة:** من المثالين (٨)، (٩) نستنتج أن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  تكون تقاربية إذا

كان  $k > 1$  وتكون تباعدية إذا كان  $k \leq 1$ .

**مثال (١٠):** اختبر تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

**الحل:** من الواضح أن  $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$  إذن  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

ولكن المتسلسلة  $\sum \frac{1}{n}$  تباعدية،  $\therefore$  المتسلسلة الأصلية تباعدية.

**الاختبار الثاني: الصورة الثانية لاختبار المقارنة:**

نفرض أن  $\sum a_n, \sum b_n$  متسلسلتين ذوي حدود موجبة إذا كان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$$

حيث  $\ell$  عدد محدود فإما أن تكون المتسلسلتين تقاربيتين معاً أو تباعدتين معاً.

**مثال (١١):** اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلات

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n + 1}{n^5 + 1}$

**الحل:** (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

نقارن المتسلسلة السابقة بالمتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

وبذلك يكون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \neq 0$

∴ المتسلسلتين تقاربتين معاً أو تباعدتین معاً ولكن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  تقاربیه

∴ المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  تقاربیه.

مثال (١٢): نفرض أن  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n + 1}{n^5 + 1}$

نقارن المتسلسلة  $\sum a_n$  بالمتسلسلة  $\sum \frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + n^4 + n^3}{n^5 + 1} = 3 \neq 0$$

∴ المتسلسلتين تقاربتين معاً أو تباعدتین معاً ولكن المتسلسلة  $\sum b_n$  تقاربیه.

∴ المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  تقاربیه.

مثال (١٣): أختبر تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n^3+1}$ .

الحل: نفرض أن  $a_n = \frac{4-n}{n^3+1}$  وأن  $b_n = \frac{1}{n^2}$  ، إذن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -1 \neq 0$

∴ المتسلسلتين تقاربتين معاً أو تباعدتین معاً ولكن المتسلسلة  $\sum b_n$  تقاربیه.

∴ المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  تقاربیه.

الإختبار الثالث (إختبار دالمبرت): الصورة الأولى لإختبار النسبة:

نفرض أن  $\sum a_n$  متسلسلة ذات حدود موجبة ونفرض أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

فيكون لدينا الحالات الآتية:-

(i) إذا كان  $L < 1$  تكون المتسلسلة تقاربیه.

(ii) إذا كان  $L > 1$  تكون المتسلسلة تباعديه.

(iii) إذا كان  $L=1$  يفشل الاختبار.

مثال (١٤) : اختر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلات الآتية :

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n})^n}{n!}$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n}$

الحل: (i) نفرض أن  $a_n = \frac{3^n}{n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n} \right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 3 > 1$$

∴ المتسلسلة تباعدية.

(ii) نفرض أن  $a_n = \frac{(\sqrt{n})^n}{n!}$ ,  $a_{n+1} = \frac{(\sqrt{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\sqrt{n+1})^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(\sqrt{n})^n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}, \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \right)$$

$$= 0 \cdot \sqrt{e} = 0 < 1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(iii) نفرض أن  $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ,  $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{n!}{(n+1)!} x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(iv) يترك كتمرين للطالب.

**الاختبار الرابع : (اختبار كوشي).** هذا الاختبار للمتسلسلات ذات الحدود

الموجبة فقط. نفرض أنه لدينا متسلسلة ما  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  بحيث  $a_n > 0$  لكل قيم  $n$ .

ونفرض أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$  ونعتبر الحالات الآتية :-

(i) إذا كانت  $L < 1$  المتسلسلة تقاربية.

(ii) إذا كانت  $L > 1$  المتسلسلة تباعدية.

(iii) إذا كانت  $L = 1$  الاختبار يفشل.

مثال (١٥): اختر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلات الآتية :

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

الحل: نفرض أن  $a_n = \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$  ولأن  $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left( \frac{n}{2n+1} \right)^n} = \frac{n}{2n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(ii) نفرض أن  $a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$  إذن  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\log n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ إذن } a_n = \frac{n}{2^n}$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

**ملحوظة:** اختبار كوشي ودالميرت يعتبران غير عمليين في إيضاح تقارب بعض المتسلسلات ذات الحدود الموجبة وكمثال على ذلك إبحث تقارب المتسلسلة التوافقية التي على الصورة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

وكما أثبتنا أن المتسلسلة (1) تباعدية إذا كان  $k \leq 1$  والمشكلة تبقى غير محلولة عندما يراد بحث تقارب المتسلسلة (1) عندما  $k > 1$  ولذلك نقدم اختباراً والذي يعتبر أهم من اختبار كوشي ودالميرت وخاصة في بحث تقارب المتسلسلة (1) عندما  $k > 1$  والذي يسمى اختبار التكامل.

### الاختبار الخامس : اختبار التكامل (Integral Test)

**نظرية (1):** نفرض أن الدالة  $f(x)$  غير سالبة وغير تزايدية على الفترة

$\{x : x \geq m\}$  حيث  $m$  عدد ثابت. إذن المتسلسلة

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots \quad (2)$$

تكون تقاربية إذا كان وكان فقط نهاية المتابعة  $(a_n)$  عندما  $n \rightarrow \infty$  موجودة وتباعدية خلاف ذلك حيث

$$a_n = \int_m^n f(x) dx, \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (3)$$

البرهان: نفرض أن  $k$  أي عدد ويحقق الشرط  $k \geq m-1$  ونفرض أن  $x$  بحيث يكون  $k-1 \leq x \leq k$ . ولكن من الفرض أن الدالة  $f(x)$  غير تزايدية على الفترة المغلقة  $[k-1, k]$ .

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) \quad (4)$$

والمتبينة  
تكون محققة لكل  $x \in [k-1, k]$  وحيث أن الدالة محدودة ومضطردة.

∴ الدالة  $f(x)$  تكاملية على الفترة المغلقة  $k-1 \leq x \leq k$ . ويتضح من المتباينة (4)

$$\int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx \quad \text{أن}$$

أو

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1) \quad (5)$$

والآن نبرهن المتباينة (5) لأي  $k \geq m+1$

نفرض أنه كتبنا المتباينات لأي  $k$  حيث  $k = m+1, m+2, \dots, n$

حيث  $n$  أي عدد ( $n > m$ )

$$f(m+1) \leq \int_m^{m+1} f(x) dx \leq f(m), \quad f(m+2) \leq \int_{m+1}^{m+2} f(x) dx \leq f(m+1)$$

.....

$$f(n) = \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1)$$

ويجمع المتباينات السابقة نحصل على :

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \quad (6)$$

وبوضع  $s_n = \sum_{k=m}^n f(k)$  وباستخدام العلاقة (3) يمكن كتابة المتباينات (6) على

الصورة

$$[S_n - f(m)] \leq a_n \leq S_{n-1} \quad (7)$$

وباستخدام العلاقة (5) يمكن بسهولة برهان  $a_n = \int_m^n f(x) dx$  موجودة.

مثال (١٦): أبحث تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad (8)$$

الحل:

∴ هذه المتسلسلة يمكن اعتبارها على الصورة (2) عندما يكون

$f(x) = \frac{1}{x^k}$ ,  $m=1$  والدالة  $f(x)$  دالة تناقصية وموجبة على المنطقة  $x > 1$ .

∴ الاهتمام يبحث تقارب المتسلسلة (8) يكافئ بحث تقارب المتتابعة  $\{a_n\}$

$$a_n = \int_1^n \frac{1}{x^k} dx = \begin{cases} \frac{x^{1-k}}{1-k} \Big|_{x=1}^n = \frac{n^{1-k} - 1}{1-k}, & k \neq 1 \\ \ln x \Big|_{x=1}^{x=n} = \ln n, & k = 1 \end{cases} \quad \text{حيث}$$

ومن ذلك يتضح أن المتتابعة  $\{a_n\}$  تباعدية عندما  $k \leq 1$  وتقاربية عندما يكون

$k > 1$  ويكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{k-1} \quad \text{موجوده}$$

مثال (١٧): أبحث تقارب المتسلسلة الآتية :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^B n} \quad B > 0 \quad (9)$$

الحل: المتسلسلة يمكن اعتبارها على صورة المتسلسلة (2) عندما  $m=2$  ،

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^B x}$$

وحيث أن الدالة  $f(x) \geq 0$  غير تزايدية على الفترة  $\{x \mid x \geq 2\}$

∴ تقارب المتسلسلة (9) يكافئ تقارب المتابعة  $(a_n)$  حيث

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln^B x} dx = \begin{cases} \frac{\ln^{1-B} x}{1-B} \Big|_{x=2}^{x=n} = \frac{\ln^{1-B} n - \ln^{1-B} 2}{1-B}, & B \neq 1 \\ \ln \ln n - \ln \ln 2, & B = 1 \end{cases}$$

ومن ذلك يتضح أن المتابعة  $(a_n)$  تقاربية عندما  $B > 1$  وتباعدية عندما  $B \leq 1$ .

∴ المتسلسلة تقاربية عندما  $B > 1$  وتباعدية عندما يكون  $B \leq 1$ .

ملحوظة: باستخدام اختبار دالميرت أو كوشي لبحث تقارب المتسلسلة في

مثال (١٦) نجد أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^k = 1 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^k = 1, \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \right)$$

نجد أن اختبار كوشي ودالميرت يفشلان في بحث تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  . ومن

ذلك يكون اختبار التكامل أقوى من اختبار دالميرت وكوشي.

### الاختبار السادس : (اختبار راب) (Raabe's test)

نفرض أنه لدينا المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \geq 0$ , ونفرض أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$  فإن

(i) إذا كان  $L > 1$ ، تكون تقاربية.

(ii) إذا كان  $L < 1$ ، تكون المتسلسلة تباعدية.

(iii) إذا كان  $L = 1$ ، يفشل الاختبار.

مثال (١٨): اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1})} \quad a > 0 \text{ عدد ثابت}$$

الحل: الحد العام هو

$$a_n = a^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1})}, \quad a_{n+1} = a^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})}$$

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{a^{-\frac{1}{n}} - 1}{\left(-\frac{1}{n}\right)} = \frac{a^{-m} - 1}{-m}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^{-m} - 1}{-m} = \ln a \quad (\text{باستخدام نظرية بيوتال في النهايات})$$

∴ المتسلسلة تباعدية إذا كان  $\ln a < 1 \Rightarrow a < e$  وتكون تقاربية إذا كان

$\ln a > 1$  أي عند  $a > e$  وإذا كان  $a = e$  فإن الاختبار يفشل.

### الاختبار السابع : (الصورة العامة لاختبار النسبة):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad \text{نفرض أن } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متسلسلة حدودها غير صفرية ونفرض أن}$$

ونعتبر الحالات الآتية: —

- (i) إذا كانت  $L < 1$ ، المتسلسلة تقاربية.  
(ii) إذا كانت  $L > 1$ ، المتسلسلة تباعدية.  
(iii) إذا كانت  $L = 1$ ، يفشل الاختبار.

مثال (١٩): اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلة :

$$1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots$$

الحل: حيث أن المتسلسلة ذات حدود سالبة وموجبة فلذا نستخدم الصورة العامة لاختبار النسبة:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}$$
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

#### (٤) المتسلسلات التذبذبية : (Alternating Series)

لقد تعاملنا حتى الآن مع المتسلسلات ذات الحدود الموجبة ونعلم أن المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تكون متتابعة المجموعات الجزئية لها متزايدة ولكسن إذا أخذنا متسلسلة مثل :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  والتي لها حدود موجبة وسالبة فإن المجموعات الجزئية لها  $(S_n)$  سوف لا تكون متزايدة.

تعريف: المتسلسلة التي تتعاقب فيها الحدود الموجبة والسالبة تسمى متسلسلة

تذبذبية.

الاختبار الثامن : (اختبار ليبنتز أو اختبار المتسلسلات التذبذبية):

المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  ,  $a_n > 0$  تكون تقاربية إذا تحققت الشروط الآتية :

(i) المتتابعة  $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

تنازلية (أي تناقص باستمرار). أي  $a_{n+1} < a_n$  لجميع قيم  $n$

(ii) نهاية الحد العام للمتتابعة (i) يقترب من الصفر  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

البرهان: حاصل جمع الحدود الأولى التي عددها  $2n$  هو

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

ومن (i) يكون كل قوس هذه الأقواس موجباً إذن  $S_{2n}$  مستمرة في الزيادة مع

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

ومن (i) أيضاً كل قوس من هذه الأقواس موجباً وهو أصغر من  $a$  لجميع قيم  $n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \quad S < a_1$$

ولكن  $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$$

∴ المتسلسلة تقاربية ومجموعها  $S$ .

مثال (٢٠): اختر من حيث التقارب والتباعد

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

الحل: (i) المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

واضح أن  $\dots, \frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \frac{1}{2} > 1$ ،  $\therefore$  حدود المتسلسلة تنازلية.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{وبما أن}$$

$\therefore$  من اختبار ليمتز المتسلسلة تقاربية.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{(ii) المتسلسلة}$$

واضح أن  $\dots, \frac{1}{3} > \frac{1}{5}, \frac{1}{3} > 1$ ،  $\therefore$  حدود المتسلسلة تناقصية.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \quad \text{وبما أن}$$

$\therefore$  من اختبار ليمتز تكون المتسلسلة تقاربية.

### (٥) التقارب المطلق والتقارب المشروط:

(Absolutely and Conditionally Convergent Series)

**تعريف (١):** المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  تكون مطلقة التقارب إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{تقاربية.}$$

**نظرية:** المتسلسلة مطلقة التقارب تكون تقاربية.

البرهان: نبرهن الآن أنه لأي عدد  $\varepsilon < 0$  يوجد العدد  $n$  بحيث يكون لكل الأعداد

$n (n \geq N)$  ولأي عدد طبيعي  $p$  يكون

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \quad (1)$$

وباستخدام نظرية (٢) يكون

$$\sum_{k=n+1}^{N+p} |a_k| < \varepsilon \quad (2)$$

$$\therefore \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \quad (3)$$

وباستخدام (٢)، (٣) نحصل على  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon$  وهذا يبرهن النظرية.

**تعريف (٢):** المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  تكون مشروطة التقارب إذا كانت المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  تباعدية.

**مثال (٢١):** اختر تقارب المتسلسلتين الآتيتين :

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x}{n^2}$$

الحل:

$$(i) \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ولكن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  تقاربية، إذن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$  مطلقة التقارب  $\leftarrow$  أنها تقاربية.

$$(ii) \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 2x}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ولكن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  تقاربية، إذن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$  مطلقة التقارب وباستخدام النظرية السابقة فهي تكون تقاربية.

مثال (٢٢): اختر تقارب كل من المتسلسلات الآتية :

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

الحل:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ولكن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  تباعدية، إذن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  مشروطة التقارب أو قصيرة التقارب.

(ii) يترك للطالب.

### الاختبار التاسع : (اختبار دريشلت – آبل) (Dirichlet – Abel's test)

قبل ذكر اختبار دريشلت – آبل لتقارب المتسلسلات والتي ليس من الضروري أن تكون ذات حدود موجبة بل غالباً تكون متسلسلة ذات حدود متعاقبة. نقدم ما يسمى بخاصية آبل والتي تتشابه مع التكامل بالتجزئ.

#### خاصية آبل (Abel's Identity):

نفرض أن  $u_1, u_2, u_3, \dots, v_1, v_2, \dots, v_n$  اعداد اختيارية ونفرض أن

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$p, n$  اعداد اختيارية أيضاً، إذا الخاصية الآتية صحيحة

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n \quad (*)$$

وتسمى الخاصية (\*) بخاصية آبل.

البرهان: نفرض أن

$$u_k = S_k - S_{k-1} \quad (**)$$

بالتعويض من (\*\*\*) في الطرف الأيسر من (\*) نحصل على

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k \\ &= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k \end{aligned}$$

وبإنقاص دليل المجموع الأخير بمقدار الوحدة نحصل على

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k - u_{k+1} \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k + S_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n-1} v_n \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n \end{aligned}$$

وهذا يبرهن خاصية آبل.

والآن نذكر اختبار دريشلت — آبل لتقارب المتسلسلات التي تتعاقب فيها الحدود الموجبة والسالبة.

### اختبار دريشلت — آبل :

نفرض أن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \quad (***)$$

تكون هذه المتسلسلة تقاربية إذا كانت المتتابعة  $(v_k)$  غير تزايدية وتنقص

باستمرار.

(ii) المتسلسلة  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  لها المجاميع الجزئية محدودة.

البرهان: نفرض أن  $S_n$  هو المجموع الجزئي للمتسلسلة  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  ولكن من الفرض

يوجد العدد  $M > 0$  بحيث يكون  $S_n \leq M$  for all  $n$

وباستخدام النظرية (٢) يكون من الكافي إثبات أنه لأي عدد  $\varepsilon > 0$  يوجد العدد

$n \in \mathbb{N}$ ,  $N$  ولأي عدد طبيعي  $p$  يكون

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon \quad (1)$$

∴ المتتابعة غير تزايدية ومتضاءله ∴ يوجد العدد  $N$ ، لكل عدد موجب

$\varepsilon/(2M)$  بحيث يكون:

$$0 \leq v_n \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad (\text{for } n \geq N) \quad (2)$$

وباستخدام خاصية آبل لحساب الكمية التي في الطرف الأيسر للعلاقة (1) نجد أن

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_k| (v_k - v_{k+1}) + |S_{n+p}| v_{n+p} + |S_{n-1}| v_n \quad (3)$$

$$|S_n| \leq M$$

∴ يمكن الحصول على

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \leq \left( \sum_{k=n}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) + v_{n+p} \right) + M v_n \quad (4)$$

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| \leq 2M v_n$$

من المتباينة (٢) نحصل على  $\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}$  وهذا يثبت المطلوب.

ملاحظة: نلاحظ أن اختبار لينتزر يعتبر حالة خاصة من اختبار دريشلت آبل.

مثال (٢٣): اختبار تقارب المتسلسلة الآتية:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{3n} + \dots$$

الحل: يمكن ترتيب المتسلسلة السابقة لكي تكون على الصورة (\*\*\*)

$$u_k = \frac{1}{k}, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = 1, u_5 = 1, u_6 = -2$$

وبذلك يكون

$$(1) \text{ المتسلسلة } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ يكون لها مجاميع جزئية محدودة لأن:}$$

$$S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 0, S_4 = 1, S_5 = 2$$

(٢) المتسلسلة  $(v_k)$  غير تزايدية ومتضائلة.

∴ باستخدام اختبار دريشلت — آبل يكون المتسلسلة تقاربية.

$$\text{مثال (٢٤): ابحث تقارب المتسلسلة } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k x}{k}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{الحل: نضع } u_k = \cos k x, v_k = \frac{1}{k}$$

والآن نحاول حساب متتابعة المجاميع الجزئية  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \cos k x$  للمتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

∴ لأي عدد  $k$  يكون

$$\sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos k x$$

ويجمع العلاقة السابقة بالنسبة إلى  $k$  من 1 إلى  $n$  نحصل على

$$\begin{aligned} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{1}{2} x &= 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos k x \\ &= 2 S_n \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$|S_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad \text{فإن } x \notin \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$

∴ يمكننا حينئذ استخدام اختبار دريشلت آبل لنستنتج أن المتسلسلة

تتقارب لكل  $x \notin \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ، نلاحظ أن المتسلسلة تتباعد عند  $x = 2k$  لبعض قيم  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k x}{k}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{تقارب المتسلسلة} \quad \text{تمرين:}$$

مترك للطلاب والحل يماثل مثال ((٢٤)).

### (٦) متسلسلات القوى (Power Series):

المتسلسلة التي على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (1)$$

تسمى متسلسلة قوى في  $x$  والمتسلسلة تكون تقاربية لبعض قيم  $x$  (الموجبة

والسالبة) وقد تكون غير تقاربية لبعض القيم الأخرى وإذا كانت المتسلسلة

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots \quad (2)$$

تقاربية لبعض قيم  $x$  فإن المتسلسلة (١) تكون مطلقة التقارب وبالتالي تقاربية لهذه

القيم.

**تعريف:** إذا كانت المتسلسلة مطلقاً التقارب لقيم  $x$  والتي تحقق  $|x| < r$  وتباعدية إذا كانت  $|x| > r$  فإن العدد  $r$  يسمى نصف قطر تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  وفي هذه الحالة نعطي بعض الأمثلة لتسلسلات القوى :

مثال (٢٥): أوجد قيم  $x$  التي تجعل المتسلسلة الأسية  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$  تقاربية.

الحل: نفرض أن  $a_n = \frac{x^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

∴ باستخدام الصورة الثانية لاختبار النسبة نجد أن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

∴ المتسلسلة مطلقاً التقارب (تقاربية) لجميع قيم  $n$ .

مثال (٢٦): أوجد قيمة  $x$  التي تجعل المتسلسلة اللوغاريتمية

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

الحل: نفرض أن  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{n+1}$

باستخدام اختبار النسبة المطلق نجد أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x n}{n+1} \right| = |x|$$

وتكون المتسلسلة تقاربية إذا كان  $-1 < x < 1$  ويكون  $R = 1$  وتباعدية إذا كان

$$|x| > 1$$

مثال (٢٧): أوجد قيم  $x$  التي تجعل المتسلسلتان

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (i)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (ii)$$

تقاربتان.

الحل: باستخدام اختبار النسبة المطلقة يمكن أن نثبت أن (i), (ii) تقاربتان لجميع قيم  $x \in \mathbb{R}$  وبالتالي يكون نصف قطر التقارب لانهايي.

### تمارين (٣.٥)

أ) اختر من حيث التقارب والتباعد كلاً من المتسلسلات الآتية :

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$       (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n-3}$       (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
- (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n}$       (5)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+4n}{n^4-8}$       (6)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{(n^2+1)^2}$
- (7)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$       (8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+2}$       (9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$
- (10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$       (11)  $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 6} + \dots$
- (12)  $\frac{2}{1} + \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{2 \times 5 \times 8}{1 \times 5 \times 9} + \dots + \frac{2 \times 5 \times 8 \dots (2n-1)}{1 \times 5 \times 9 \dots (4n-3)}$
- (13)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-9}{n^4+2n^3+7n+11}$

$$(14) 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots$$

$$(15) \frac{6}{1 \times 3 \times 5} + \frac{8}{3 \times 5 \times 7} + \frac{10}{5 \times 7 \times 9} + \dots$$

$$(16) \frac{1+2}{2^3} + \frac{1+2+3}{3^3} + \frac{1+2+3+4}{4^3} + \dots$$

$$(17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n+1}$$

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{n(n+3)(n+5)}$$

$$(19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

$$(20) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/n}$$

$$(21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

$$(22) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$(23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$$

(ب) استخدم اختبار التكامل لاختبار تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

$$(5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^2}$$

(6) أثبت أن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^p}{n}$  تقاربية إذا كان  $p > 1$  وتباعدية عندما

يكون  $p \leq 1$ .

(7) هل يستخدم اختبار ليمتزر لبحث تقارب المتسلسلة؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

(ج) أي من المتسلسلات الآتية تتقارب تقارباً مطلقاً وأيها يتقارب تقارباً مشروطاً

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n 2^n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\log n}$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n!}$$

$$(8) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7}$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n^6 + 1)^2}$$

$$(10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$$

(د) أوجد قيم  $x$  التي تجعل المتسلسلة الآتية تقاربية (نصف قطر التقارب)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x n^2$$

$$(4) 1 + \frac{100x}{1.3} + \frac{1000x^2}{1.3.5} + \frac{1000000x^3}{1.3.5.7} + \dots$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{(n!)^2} x^n$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$