# الباب الأول

## نشأة وتطور ميكانيكا الكم
## *Evolution of Quantum Mechanics*

### ميكانيكا الكم القديمة
### Old Quantum Mechanics

# نشأة وتطور ميكانيكا الكم
# Evolution of Quantum Mechanics

**مقدمة :**

يشكل موضوع ميكانيكا الكم واحد من أهم الخطوات في تطور الأبحاث الخاصة ببناء المادة . وقد اقتصرت أبحاث العلماء لفترة طويلة على دراسة ديناميكا (حركة) الأجسام المنظورة (الماكروسكوبية) ، واعتبر علم الميكانيكا بهذا المفهوم أحد الفروع الرئيسية لعلم الفيزياء .

ومع ظهور النظرية الذرية الحديثة وتطورها في بدايات القرن العشرين الميلادي أصبح من اللازم تصحيح القوانين الكلاسيكية (القديمة) في علم الميكانيكا وتطويرها بحيث يمكن تطبيقها على الذرات ومحتوياتها من نواة وجسيمات بل وعلى الجزئيات المكونة من تلك الذرات أيضا وهو ما يعرف بالأجسام الميكروسكوبية (المجهرية) .

وتختص ميكانيكا الكم بدراسة الظواهر الميكروسكوبية وتعرف لذلك بأنها ميكانيكا الأنظمة الميكروسكوبية (أو الذرية) ، والتي بواسطتها يمكن تفسير الظواهر الذرية المختلفة .

وفي هذا الباب سوف نتحدث باختصار عن نشأة وتطور ميكانيكا الكم والأسس التي بنى عليها هذا العلم ، وهو ما يطلق عليه البعض أسم :
ميكانيكا الكم القديمة (Old Quantum Mechanics) .

## (1) أشعاع الجسم الأسود (Black body radiation) :

يعرف الجسم الأسود بأنه الجسم الذي يمتص كلية الإشعاع الساقط عليه والذي يتميز بأن له مختلف الأطوال الموجية .

إذا سخن هذا الجسم إلى درجة حرارة معينة فأنه يبعث إشعاعا له مختلف الأطوال الموجية ، يسمى بإشعاع الجسم الأسود .

في سنة ١٩٠٠م اقترح ماكس بلانك أن الجسم الأسود يشتمل على عدد كبير جدا من المتذبذبات التوافقية البسيطة (simple harmonic oscillator) التي تتذبذب بمختلف الترددات الممكنة .

**قانون رالي-جينز Raliegh-Jeans law :**

تعرف الطاقة المنبعثة لوحدة الحجوم من جسم أسود في الثانية الواحدة وفي مدى تردد يقع بين w , w+dw بالعلاقة :

$$u_w = D_w \bar{\varepsilon} \quad , \quad D_w = \frac{w^2}{\pi^2 c^3}$$

c هو سرعة الضوء في الفراغ ، $w = 2\pi \nu$

$\bar{\varepsilon}$ هي الطاقة المتوسطة (أو القيمة المتوسطة للطاقة) المنبعثة من متذبذب توافقي . وطبقاً لرأي العالمين رالي وجينز فإن هذه الطاقة تنبعث في صورة متصلة (continuous) ، وبناء على ذلك فيمكن إثبات أن : $\bar{\varepsilon} = KT$

حيث k ثابت بولتزمان (Boltzmann const.) ، T درجة الحرارة المطلقة .

**أمثلة محلوله :**

**مثال(١):** إذا كانت القيمة المتوسطة للطاقة في الميكانيكا الإحصائية الكلاسيكية في حالة التوزيع المتصل (continuous distribution) تعطى بالعلاقة :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty P(\varepsilon) d\varepsilon}$$

حيث $P(\varepsilon) = \alpha e^{-\alpha\varepsilon}$ هي احتمال وجود عدد من الجسيمات ، كل طاقة $\varepsilon$ ، في منطقة معينة ، $\alpha = \frac{1}{KT}$

أثبت أن القيمة المتوسطة للطاقة طبقا لرالي- جينز تعطى بالعلاقة $\bar{\varepsilon} =$

الحـــل:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty P(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon}$$

ولكن

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha\varepsilon}\right]_0^\infty = -\frac{1}{\alpha}[0-1] = \frac{1}{\alpha}$$

$$\int_0^\infty \varepsilon\, e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^\infty \left[-\frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\alpha\varepsilon}\right] d\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha^2}$$

بالتعويض في (1) :

$$\therefore \bar{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} = KT$$

وهو المطلوب .

**مثال(٢):** أوجد القدرة الانبعاثية (Emissive power) للإشعاع أي الطاقة الكلية للإشعاع لوحدة الحجوم من مختلف الترددات ، باستخدام قانون رالى-جينز ، حيث : $u_w = D_w \bar{\varepsilon}$ .

$\bar{\varepsilon} = KT$ ، $D_w = \dfrac{w^2}{\pi^2 c^3}$ ، ناقش النتيجة .

الحـــل: من التعريف فإن القدرة الانبعاثية تعطى من :

$$u = \int_0^\infty u_w dw = \int_0^\infty \frac{w^2}{\pi^2 c^3} KT\, dw = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty w^2 dw = \infty$$

وهذه النتيجة تناقض النتائج المعملية ، التي أوضحت أن الطاقة الكلية (أو القدرة الانبعاثيه) تتناسب مع درجة الحرارة المطلقة مرفوعة للقوة الرابعة أي أن $u \propto T^4$ (ويعرف ذلك بقانون ستيفان) .

**(٢) افتراضية بلانك الكمية (Planck's Quantum Hypothesis) :**

افترض بلانك سنة 1900م أن ذرات الجسم الأسود تسلك سلوك متذبذبات توافقية بسيطة ، وكل متذبذب يبعث أو يمتص الطاقة ليس بصورة متصلة (كما في نظرية رالى–جينز) ولكل بصورة نبضات منفصلة أو قيم منفصلة من الطاقة ، قيمة كل منها يمثل بالكمية $h\nu$ حيث h هو ثابت يسمى ثابت بلانك (Planck's const.) ، $\nu$ تردد الإشعاع .

ويطلق على هذه الكمية ، التي تمثل وحدة أساسية للطاقة ، أسم الكم Quantum وجمعها كمات (Quanta) .

وإذا كان لدينا عدد n من المذبذبات ، فإن الطاقة الكلية للإشعاع تكون $\varepsilon = nh\nu$ ، حيث أن كل متذبذب له الطاقة hν .

العدد n يسمى بالعدد الكمي Quantum number ، حيث n=0,1,2 ... .

**أمثلة محلوله :**

**مثال(١):**– باستخدام توزيع بولتزمان للطاقة : $P(\varepsilon) = \alpha e^{-\alpha\varepsilon}$ حيث $\alpha = \frac{1}{KT}$ ، وباستخدام فرض بلانك الكمي حيث $\varepsilon = nh\nu$ أثبت أن الطاقة المتوسطة المنبعثة من المتذبذب تعطى بالعلاقة :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}$$

**الحـل:**

**طبقا لبلانك :** فإن الطاقة تنبعث على هيئة كمات منفصلة أي قيم غير متصلة من الطاقة ، ولهذا السبب فإننا سوف نستبدل التكامل في تعريف $\bar{\varepsilon}$ بعلاقة المجموع كالتالي :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum \varepsilon P(\varepsilon)}{\sum P(\varepsilon)}$$

حيث $\varepsilon = nh\nu$ ، $P(\varepsilon)=\alpha e^{-\alpha\varepsilon}$ ، $\alpha = \dfrac{1}{KT}$

$$\therefore \bar{\varepsilon} = \frac{\alpha\sum nh\nu e^{-\alpha nh\nu}}{\alpha\sum e^{-\alpha nh\nu}} = h\nu\frac{\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\beta}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta}} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

حيث : $\beta = \alpha h\nu = \dfrac{h\nu}{KT}$

والآن :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} = 1 + e^{-\beta} + e^{-2\beta} + e^{-3\beta} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 \ldots\ldots\ldots \quad , \qquad x = e^{-\beta}$$

وحيث أن :

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} = (1-e^{-\beta})^{-1} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

أيضا بتفاضل طرفي (2) بالنسبة إلى $\beta$ :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta}(-n) = (-1)(1-e^{-\beta})^{-2}(e^{-\beta})$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\beta} = e^{-\beta}(1-e^{-\beta})^{-2} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (3)}$$

بالتعويض في (1) ، نحصل على :

$$\bar{\varepsilon} = h\nu\frac{e^{-\beta}(1-e^{-\beta})^{-2}}{(1-e^{-\beta})^{-1}} = h\nu\left[\frac{e^{-\beta}}{(1-e^{-\beta})}\right] = h\nu\frac{1}{e^{\beta}-1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1} \qquad \text{\_\_ (4)}$$

وهو المطلوب .

__ملاحظة__ : بدلالة $w = 2\pi\nu$ فيمكننا كتابة :

$$h\nu = \frac{h}{2\pi}\cdot 2\pi\nu = \hbar w \quad , \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

القانون (4) يعرف بقانون بلانك للإشعاع (Planck's radiation law) .

<u>**مثال(٢):**</u> باستخدام قانون الإشعاع لبلانك $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}$ استنتج الطاقة الكلية للإشعاع بالصورة $u=\sigma T^4$

حيث $\sigma$ ثابت ، ويعرف هذا بقانون ستيفان (Stefan's law)

[استخدم نتيجة التكامل : $\int_0^\infty \dfrac{x^3dx}{e^x-1}=\dfrac{\pi^4}{15}$]

<u>**الحـــل:**</u>

حيث أن

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}$$

فإن الطاقة الكلية لوحدة الحجوم في مدى التردد بين $\omega,\omega+d\omega$ يعطى من :

$$u_\omega=D_\omega\bar{\varepsilon}=\frac{\omega^2}{\pi^2C^3}\left[\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}\right]=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2C^3(e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1)}$$

الطاقة الكلية :

$$u=\int_0^\infty u_\omega d\omega=\frac{\hbar}{\pi^2C^3}\int_0^\infty\frac{\omega^3d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}$$

ولإيجاد هذا التكامل نستخدم النتيجة المعطاة :

$$\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}=\frac{\pi^4}{15}$$

كالتالي :

$$u=\frac{\hbar}{\pi^2C^3}\left[\left(\frac{K^4T^4}{\hbar^4}\right)\int_0^\infty\frac{(\frac{\hbar^3\omega^3}{K^3T^3})}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}d\left(\frac{\hbar\omega}{KT}\right)\right]$$

$$=\frac{\hbar}{\pi^2C^3}\left[\left(\frac{K^4T^4}{\hbar^4}\right)\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}\right]$$

$$x=\frac{\hbar\omega}{KT} \quad =\frac{\hbar}{\pi^2C^3}\left[\left(\frac{K^4T^4}{\hbar^4}\right)\left(\frac{\pi^4}{15}\right)\right]=\frac{\pi^2K^4}{15C^3\hbar^3}T^4=\sigma T^4 \quad \_\_\_\_ (I)$$

$$\sigma=\frac{\pi^2K^4}{15c^3\hbar^3}$$

العلاقة (I) هي قانون ستيفان ، وهي نتيجة تتفق تماما مع النتائج المعملية . وهو نجاح كبير في صف افتراضية بلانك الكمية ، الثابت $\sigma$ يسمى ثابت ستيفان .

**مثال(٣):** أثبت أنه في حالة الترددات المنخفضة ، فإن علاقة بلانك للطاقة المتوسطة $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1}$ تؤول إلى العلاقة : $\bar{\varepsilon}=KT$

وأن قانون بلانك الإشعاعي :

$$u_\omega=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2C^3(e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}-1)}$$

يؤول إلى قانون رالي-جينز :

$$u_\omega=\frac{\omega^2}{\pi^2C^3}KT$$

**الحـــل:**

للترددات المنخفضة : $\nu<<1 \leftarrow \omega<<1$ أي أن

$$\left(\frac{\hbar\omega}{KT}\right)^n\to 0 \leftarrow \frac{\hbar\omega}{KT}<<1$$
$$(n\geq 2)$$

أي أنه يمكننا إهمال المربعات والقوى الأعلى للكمية $\left(\dfrac{\hbar\omega}{KT}\right)$

$$\therefore e^{\frac{\hbar\omega}{KT}}=1+\frac{\hbar\omega}{KT}+\frac{1}{2}(\frac{\hbar\omega}{KT})^2+.........\simeq 1+\frac{\hbar\omega}{KT}$$

وبالتعويض في علاقة بلانك للطاقة المتوسطة $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1} = \frac{\hbar\omega}{(1 + \frac{\hbar\omega}{KT}) - 1} = \frac{\hbar\omega}{\frac{\hbar\omega}{KT}} = KT$$

أي أن علاقة بلانك تؤول إلى $\bar{\varepsilon} = KT$ في حالة الترددات المنخفضة .

أيضاً : من علاقة بلانك الإشعاعية :

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 C^3 (e^{\frac{\hbar\omega}{KT}} - 1)} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 C^3 (1 + \frac{\hbar\omega}{KT} - 1)} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 C^3 (\frac{\hbar\omega}{KT})} = \frac{\omega^2}{\pi^2 C^3} KT$$

وهو قانون رالي-جينز.

## (٣) النظرية الكمية لبوهر (1913) : Bohr Quantum Theory

تعتمد هذه النظرية على النموذج الكوكبي للذرة والذي ينص على أن : الذرة تتكون من نواة تحيط بها الكترونات تسبح في مدارات دائرية (رذرفورد-١٩١١) .

**فرضا بوهر:**

(١) توجد الذرة في عدد من الحالات الطاقوية (Energy states) كل حالة منها تتميز بكمية معينة من الطاقة ... $\varepsilon_1, \varepsilon_2,$

وتتحدد هذه الحالات بمتغير يعرف بتكامل الفعل Action Integral صورته : $I_i = \oint p_i dq_i = nh$

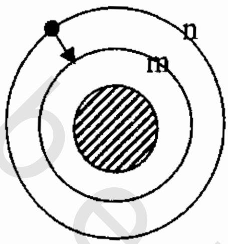
حيث $p_i, q_i$ هي كمية الحركة والإحداثيات المعممة .

العدد n يسمى العدد الكمي (Quantum number)

$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots$

في الحالة العادية يكون الإلكترون في الذرة مستقراً في مداره أي لا يبعث أي نوع من الإشعاع .

(٢) في الحالة غير المستقرة : ينتقل الإلكترون من مداره ذو الطاقة $\varepsilon_n$ إلى مدار أقل منه في الطاقة $\varepsilon_m$ $(\varepsilon_n > \varepsilon_m)$ ويبعث إشعاع عبارة عن كم من الطاقة قيمته hv حيث $\nu$ تردد الإشعاع ، h ثابت بلانك




$$\therefore \varepsilon_n - \varepsilon_m = h\nu$$

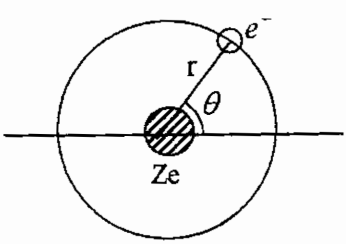
$$\therefore \nu = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{h} = \frac{\Delta\varepsilon}{h}$$

**<u>مثال: ذرة الهيدروجين باستخدام نظرية بوهر:</u>**

باستخدام النظرية الكمية لبوهر أدرس ذرة الهيدروجين وأوجد نصف قطر المدار المسموح به للإلكترون في حركته حول النواة ، وكذلك الطاقة الكلية للذرة .

**<u>الحـــل:</u>**

تتكون ذرة الهيدروجين (أبسط الذرات الموجودة في الطبيعة) من إلكترون شحنته e يدور حول نواة شحنتها Ze في مدار دائري نصف قطره r
سوف نستخدم في حل المسألة الإحداثيات القطبية $(r,\theta)$ .




القوة بين الإلكترون والنواة تخضع لقانون كولوم :

$$F = \frac{(Ze)(-e)}{r^2} = \frac{-Ze^2}{r^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_} (1)$$

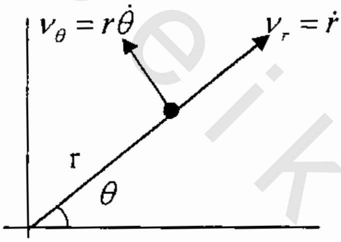
**<u>طاقة الجهد للإلكترون عند نقطة :</u>** هي الشغل المبذول ضد قوة المجال F لنقل الإلكترون من المالا نهاية إلى النقطة .

$$u=-\int_{\infty}^{r}F\,dr=-\int_{\infty}^{r}\frac{-Ze^2}{r^2}dr=Ze^2\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2}$$

$$=Ze^2\left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{r}=Ze^2\left[\frac{-1}{r}+\frac{1}{\infty}\right]=-\frac{Ze^2}{r} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

**طاقة الحركة للإلكترون :**

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_r^2+v_\theta^2)=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \qquad \text{\_\_\_\_\_ (3)}$$




حيث $\frac{v}{r}=\omega=\dot{\theta}$ السرعة الزاوية

**كمية الحركة للإلكترون :** من علم الميكانيكا :

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (4)}$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (5)}$$

**تكامل الفعل :**

$$I_i=\int p_i\,dq_i=nh$$

(الفرض الأول لبوهر)

$$I_r=\int p_r\,dr \qquad I_\theta=\int p_\theta\,d\theta$$

**للمدار الدائري (طبقا لنظرية بوهر):**

$r=const.$

$\therefore \dot{r}=0$

$p_r=m\dot{r}=0$

$p_\theta=mr^2\dot{\theta}=const.=\alpha$

**<u>طاقة الحركة</u> :** من (3)

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\therefore I_r = \int p_r dr = 0$$

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \alpha \, d\theta = \alpha(2\pi)$$

$$\therefore \alpha = p_\theta = \frac{I_\theta}{2\pi}$$

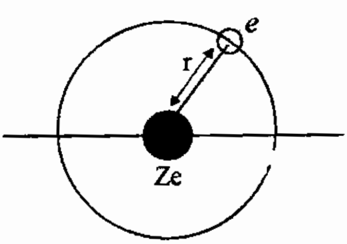
أيضاً :

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \frac{\alpha}{mr^2} = \frac{I_\theta}{2\pi mr^2}$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{I_\theta^2}{4\pi^2 m^2 r^4} \qquad \text{(6)}$$

في الحالة العادية يكون الإلكترون في حركته حول النواة مستقرا وشرط ذلك أن تكون :

القوة الطاردة المركزية الناتجة عن الحركة الدائرية = قوة التجاذب بين الإلكترون والنواة




$$-\frac{Ze^2}{r^2} = -\frac{mv^2}{r}$$

$$\therefore \frac{Ze^2}{r^2} = m\dot{\theta}^2 r$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r}$$

$$v = r\dot{\theta}$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{Ze^2}{mr^3} \qquad \text{(7)}$$

بمساواة (7) ، (6) :

$$\frac{Ze^2}{mr^3} = \frac{I_\theta^2}{4\pi^2 m^2 r^4}$$

$$\therefore \quad r = \frac{I_\theta^2}{4\pi^2 m Ze^2}$$

وهو نصف القطر المسموح به لمدار الإلكترون (بعد تطبيق نظرية بوهر) .

**الطاقة الكلية للذرة :**

$$\varepsilon = T + u = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{Ze^2}{r}$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{Ze^2}{mr^3}\right) - \frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{r}$$

وبالتعويض عن قيمة r :

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}Ze^2\left(\frac{4\pi^2 mZe^2}{I^2}\right) = -\frac{2\pi^2 mZ^2e^4}{I_\theta^2} \qquad \text{——— (8)}$$

وبالتعويض عن القيمة الكمية لتكامل الفعل $I_\theta$ حيث

$$I_\theta = nh = 2\pi n\hbar \qquad \Big| \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

تصبح معادلتي $r, \varepsilon$ بالصورة :

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{mZe^2} = \frac{n^2 a_0}{Z} \quad , \quad \varepsilon = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{Z^2e^2}{2n^2 a_0}$$

حيث : $\frac{\hbar^2}{me^2} = a_0$ تسمى نصف قطر بوهر (Bohr Radius) .

**(٤) النظرية الكمية لويلسون- سومر فيلد (١٩١٥) :**

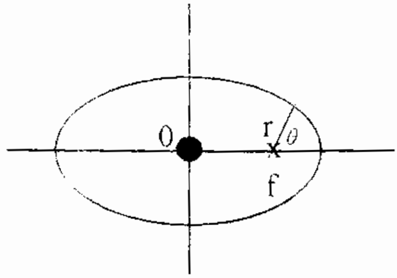
قام ويلسون وسومر فيلد بتعميم نظرية بوهر الكمية التي تنص على أن : الالكترونات تتحرك حول الذرة في مدارات دائرية وذلك بأن افترضا أن تلك الالكترونات تتحرك في مدارات بيضاوية (قطع ناقصيه) وبعض المدارات يكون على شكل دائرة باعتبار الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص .

وفي تلك الحالة فإن $r \neq const.$

ويكون لدينا تكاملين للفعل :

$$I_r = \int p_r dr = n_r h$$

$$I_\theta = \int p_\theta d\theta = n_\theta h$$



يسمى العدد $n_r$ بالعدد الكمي المداري (Orbital q.n.) ويرمز له $\ell$
ويسمى العدد $n_\theta$ بالعدد الكمي الزاوي (azimuthal q.n.) ويرمز له K
ومجموع العددين $\ell, K$ يعرف بالعدد الكمي الرئيسي (n)

$$\therefore n = \ell + K$$

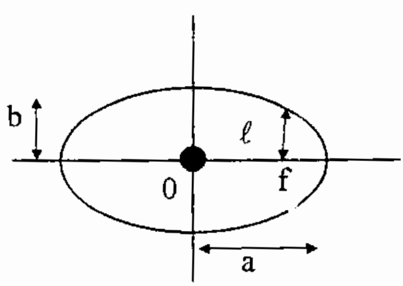
القيم المسموح بها للأعداد الكمية :

$$n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$
$$\ell = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots$$
$$K = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

**مثال : ذرة الهيدروجين باستخدام نظرية ويلسون – سومر فيلد :**

باستخدام النظرية الكمية لويلسون – سومر فيلد أوجد الطاقة الكلية لذرة الهيدروجين ، وأثبت أن معادلة المسار للإلكترون حول النواة هي معادلة قطع ناقص وأوجد خواص هذا القطع (اختلافه المركزي $e$ ونصف الوتر البؤري العمودي له $\ell$ ونصف محوره الأكبر a ونصف محوره الأصغر b)

**الحــل :**

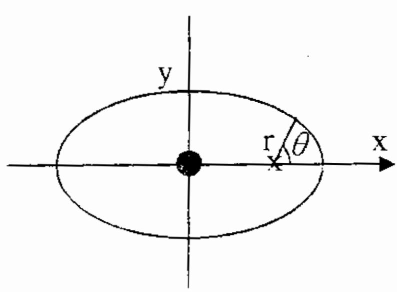



**مقدمة** : عن القطع الناقص :

a نصف المحور الأكبر
b نصف المحور الأصغر
$\ell$ نصف الوتر البؤري العمودي
$e < 1$ تمسى الاختلاف المركزي للقطع .

**معادلة القطع :**

المعادلة الكرتيزيه :




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القطبية :

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta}$$

علاقات هندسية هامة :

$$\ell = \frac{b^2}{a} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$e = \sqrt{1 - b^2/a^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

حـل المسألة: باستخدام الإحداثيات القطبية $(r, \theta)$

الطاقة الكلية : $\varepsilon = T + u$

طاقة الحركة : $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

طاقة الجهد : $u = -\frac{Ze^2}{r}$

كمية الحركة : $p_r = m\dot{r} \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \alpha \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2)$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2) - \frac{Ze^2}{r}$$

من هذه العلاقة :

$$p_r^2 = 2m\varepsilon + \frac{2mZe^2}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}$$

$$\therefore p_r = \sqrt{2m\varepsilon + \frac{2mZe^2}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}} \qquad \Big| \, p_\theta = \alpha$$

ويكون تكاملي الفعل (طبقا لويلسون – سومر فيلد) :

$$\text{(i)} \quad I_\theta = \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \alpha \, d\theta = 2\pi\alpha = n_\theta h$$

بالقسمة على $2\pi$ :

$$\therefore n_\theta \hbar = \alpha = p_\theta \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$\text{(ii)} \quad I_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2m\varepsilon + \frac{2mZe^2}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}}dr \qquad \_\_\_\_(2)$$

**ولإيجاد قيمة هذا التكامل :** نستخدم العلاقة الآتية (من جداول التكاملات)

$$\oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}dr = 2\pi i\left[\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}\right]$$

وفي (2) :

$$A = 2m\varepsilon \, , B = mZe^2 \quad , C = -\alpha^2$$

بالضرب في i بسطا ومقاما في الحد الأول ( بعد التعويض )

$$\therefore I_r = 2\pi i\left[\frac{mZe^2}{\sqrt{2m\varepsilon}} - \sqrt{-\alpha^2}\right] = 2\pi\left[\frac{-mZe^2}{\sqrt{-2m\varepsilon}} - \alpha\right] = n_r h$$

بالقسمة على $2\pi$ :

$$n_r\hbar = \frac{-mZe^2}{\sqrt{-2m\varepsilon}} - \alpha \qquad \_\_\_\_(3)$$

بجمع (3) ، (1) :

$$(n_r + n_\theta)\hbar = \frac{-mZe^2}{\sqrt{-2m\varepsilon}} = n\hbar$$

حيث : $n_r + n_\theta = n$

وبالتربيع :

$$n^2\hbar^2 = \frac{m^2Z^2e^4}{-2m\varepsilon}$$

$$\therefore \varepsilon = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}$$

وهي الطاقة الكلية لذرة الهيدروجين .

وهي نفس القيمة التي سبق إيجادها باستخدام قاعدة بوهر في حالة المسارات الدائرية .

<u>لإيجاد معادلة المسار:</u>

حيث أن :

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \leftarrow \qquad p_r = m\dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \frac{\alpha}{mr^2} \qquad \leftarrow \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

أيضاً فإن :

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m} + \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{\alpha^2}{m^2 r^2}}$$

(باستخدام علاقة $p_r$)

بقسمة معادلة $\dot{r}$ على معادلة $\dot{\theta}$ نحصل على :

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m} + \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{\alpha^2}{m^2 r^2}}}{\alpha/mr^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\varepsilon\, mr^4}{\alpha^2} + \frac{2Zme^2 r^3}{\alpha^2} - r^2}$$

$$\therefore d\theta = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\varepsilon\, mr^4}{\alpha^2} + \frac{2Zme^2 r^3}{\alpha^2} - r^2}}$$

بوضع $u = \frac{1}{r}$ أو $r = \frac{1}{u} \quad \leftarrow \quad dr = \frac{-1}{u^2}du$

$$\therefore d\theta = \frac{-dr}{\sqrt{\frac{2\varepsilon\, m}{\alpha^2} + \frac{2Zme^2 u}{\alpha^2} - u^2}}$$

بإكمال المربع لما تحت الجذر بإضافة وطرح $\frac{1}{2}$ مربع معامل u

$$d\theta = \frac{-dr}{\sqrt{\frac{2\varepsilon\, m}{\alpha^2} + \frac{Z^2 m^2 e^4}{\alpha^4} - (u - \frac{Zme^2}{\alpha^2})^2}}$$

وبإجراء التكامل للطرفين :

$$\theta+\varepsilon=\int\frac{-du}{\sqrt{\left(\frac{2\varepsilon m}{\alpha^2}+\frac{Z^2m^2e^4}{\alpha^4}\right)-\left(u-\frac{Zme^2}{\alpha^2}\right)^2}}$$

$$=\cos^{-1}\frac{\left(u-\frac{Zme^2}{\alpha^2}\right)}{\sqrt{\frac{2\varepsilon m}{\alpha^2}+\frac{Z^2m^2e^4}{\alpha^4}}}$$

$$\left[\int\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\cos^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$\therefore \cos(\theta+\varepsilon)=\frac{u-\frac{Zme^2}{\alpha^2}}{\sqrt{\frac{2\varepsilon m}{\alpha^2}+\frac{Z^2m^2e^4}{\alpha^4}}}$$

$$\therefore u=\frac{Zme^2}{\alpha^2}+\sqrt{\frac{2\varepsilon m}{\alpha^2}+\frac{Z^2m^2e^4}{\alpha^4}}\cos(\theta+\varepsilon)$$

وتصبح معادلة المسار :

$$r=\frac{1}{u}=\frac{1}{\frac{Zme^2}{\alpha^2}+\sqrt{\frac{2\varepsilon m}{\alpha^2}+\frac{Z^2m^2e^4}{\alpha^4}}\cos(\theta+\varepsilon)}$$

بضرب البسط والمقام في $\frac{\alpha^2}{Zme^2}$ نحصل على :

$$r=\frac{\frac{\alpha^2}{Zme^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2\alpha^2}{Z^2me^4}\varepsilon}\cos(\theta+\varepsilon)}=\frac{\ell}{1+e\cos(\theta+\varepsilon)} \qquad (5)$$

حيث :

$$\ell=\frac{\alpha^2}{Zme^2}\quad,\quad e=\sqrt{1+\frac{2\alpha^2}{Z^2me^4}\varepsilon}$$

المعادلة (5) هي معادلة المسار ، وواضح أنها معادلة قطع ناقص نصف طول وتره البؤري العمودي هو $\ell$ واختلافه المركزي هو e .

**<u>ولإيجاد نصف طولي المحورين الأكبر (a) والأصغر (b) للقطع :</u>**

نستخدم العلاقات الهندسية :

$$\ell = \frac{b^2}{a} = \frac{\alpha^2}{Zme^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_(6)}$$

$$e = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha^2}{Z^2me^4}\varepsilon} \qquad \text{\_\_\_\_\_(7)}$$

من (7) :

$$\frac{b^2}{a^2} = -\frac{2\alpha^2}{Z^2me^4}\varepsilon \qquad \text{\_\_\_\_\_(8)}$$

من (8) ، (6) بالقسمة :

$$\frac{b^2/a}{b^2/a^2} = \frac{\alpha^2/Zme^2}{(-2\alpha^2/Z^2me^4)\ \varepsilon}$$

$$\therefore a = -\frac{Ze^2}{2\varepsilon} \qquad \text{\_\_\_\_\_(9)}$$

ومن (6) بالتعويض عن قيمة a :

$$b^2 = a\frac{\alpha^2}{mZe^2} = \frac{-Ze^2}{2\varepsilon}\cdot\frac{\alpha^2}{mZe^2} = \frac{-\alpha^2}{2m\varepsilon}$$

$$\therefore\ b = \frac{\alpha}{\sqrt{-2m\varepsilon}} \qquad \text{\_\_\_\_\_(10)}$$

وبالتعويض عن $\varepsilon$ من (4) في (10) و (9) :

$$a = \frac{-Ze^2}{2}\left(\frac{-2n^2\hbar^2}{mZ^2e^4}\right) = \frac{2n^2\hbar^2}{mZe^2} = \frac{n^2}{Z}a_0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(11)}$$

نصف قطر بوهر

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{m^2 Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2}}} = \frac{\alpha}{\frac{mZe^2}{n\hbar}} = \frac{\alpha n\hbar}{mZe^2} \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

ولكن : $\alpha = p_\theta = n_\theta \hbar = K\hbar$

$$\therefore b = \frac{Kn\hbar^2}{mZe^2} = \frac{Kn}{Z} a_0 \qquad \text{(12)}$$

في حالة Z=1 : $b = Kna_0$ , $a = n^2 a_0$ [ حالة ذرة الهيدروجين ] .

## (٥) الطبيعة الموجيه للمادة (افتراضية دى برولى)

## Wave nature of Matter (De Brglie hypothesis)

في عام ١٩٢٤م اقترح لويس دى برولى أن المادة لها خصائص موجية تحت شروط خاصة . وقد تم إثبات هذا الاقتراح عمليا سنة ١٩٢٧م بواسطة العالمين دافيسون وجيرمر.

اقترح دى برولى أن كل الجسيمات المكونة للمادة (مثل الالكترونات) في حالة الحركة يكون لها خواص موجية ، ويكون الطول الموجي للموجه المصاحبة للجسيم المتحرك مرتبطا بكمية حركة هذا الجسيم بالعلاقة : $\lambda = \frac{h}{p}$

حيث h هو ثابت بلانك .

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة دى برولى (De Broglie relation)

أيضا فإن :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar K$$

حيث $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ هو العدد الموجي للموجه المصاحبة للجسيم ذو كمية الحركة p و $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\therefore p = \frac{h}{\lambda} = \hbar K$$

أيضاً فإن دي برولى طبق علاقة بلانك $(\varepsilon = h\nu)$ كعلاقة بين طاقة الجسيم المتحرك $(\varepsilon)$ وتردد الموجة المصاحبة له أثناء حركته $(\nu)$ وذلك بالصورة :

$$\varepsilon = h\nu = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu = \hbar\omega$$

حيث

$$\omega = 2\pi\nu \qquad ، \qquad \therefore \varepsilon = h\nu = \hbar\omega$$

**<u>الحزمة الموجية – سرعة المجموعة وسرعة الطور</u>**

**<u>Wave packets – group velocity and phase velocity</u>**

إذا تحركت مجموعة من الموجات ذات الأطوال الموجية والترددات المختلفة في اتجاه معين ، فإن محصلة هذه المجموعة من الموجات تعرف بالحزمة الموجية (Wave packet) وتسمى سرعة هذه الحزمة (كمحصلة مجموعة من الموجات) بسرعة المجموعة $v_g$ (group velocity) .

أما سرعة انتشار كل موجه على حده فتسمى سرعة الموجة أو سرعة الطور u (phase velocity) ، وترتبط بالتردد $(\nu)$ والطول الموجي $(\lambda)$ بالعلاقة :

$$u = \lambda\nu \quad \rightarrow \quad u = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot 2\pi\nu = \left(\frac{1}{k}\right)(\omega) = \frac{\omega}{k}$$

وتعرف سرعة المجموعة بالعلاقة الرياضية الآتية :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

وباستخدام علاقتي دي برولى :

$$\varepsilon = \hbar\omega \quad , \quad p = \hbar k$$

يمكن كتابة صورة أخرى لسرعة المجموعة $v_g$ كالآتي :

$$\because \varepsilon = \hbar\omega \qquad \therefore \omega = \frac{\varepsilon}{\hbar} \qquad \therefore d\omega = \frac{d\varepsilon}{\hbar}$$

$$\because p = \hbar k \qquad \therefore k = \frac{p}{\hbar} \qquad \therefore dk = \frac{dp}{\hbar}$$

$$\therefore v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\frac{d\varepsilon}{\hbar}}{\frac{dp}{\hbar}} = \frac{d\varepsilon}{dp} \qquad \therefore v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\varepsilon}{dp}$$

ونلاحظ أن :

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\varepsilon}{\hbar}}{\frac{p}{\hbar}} = \frac{\varepsilon}{p}$$

**<u>العلاقة بين</u> $u, v_g$ :**

من التجارب المعملية ، وجد العلماء ما يلي :

(١) إذا كانت كل الموجات المكونة للحزمة الموجية تتحرك بنفس سرعة الطور u ، فإن سرعة المجموعة للحزمة تكون : $v_g = u$

(٢) إذا كانت سرعة الطور u للموجات المكونة للحزمة تعتمد على أطوالها الموجية أي إذا كانت $u = u(\lambda)$ ، فإن سرعة المجموعة للحزمة تكون : $v_g \neq u$

ويمكن إثبات أنه في تلك الحالة تكون العلاقة بين $v_g, u$ هي :

$$\boxed{v_g = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}}$$

<u>الإثبات</u> :

$$\because k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \therefore \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \qquad \text{———} (1)$$

$$\because \omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{u}{\lambda}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{d\lambda} = 2\pi\left[\frac{-u}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{du}{d\lambda}\right] = \frac{-2\pi}{\lambda^2}\left[u - \lambda\frac{du}{d\lambda}\right] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

بقسمة (2) على (1) :

$$\therefore \frac{d\omega}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dk} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

$$\therefore \nu_g = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

وهو المطلوب .

**حالة خاصة :**

إذا كانت سرعة الطور لا تعتمد على الطول الموجي ، أي إذا كانت كل الموجات في الحزمة تتحرك بنفس السرعة ، فإن العلاقة السابقة تؤول إلى $\nu_g = u$ ، وهي الحالة الأولى .

**خصائص موجات دى برولى :**

**مثال (١)** : سرعة المجموعة لموجات دى برولى

أثبت أن سرعة المجموعة $\nu_g$ لموجات دى برولى تساوي سرعة الجسيم ، وذلك :

(١) باستخدام قوانين الميكانيكا الكلاسيكية .

(٢) باستخدام قوانين الميكانيكا النسبية .

**الحـل :**

من تعريف سرعة المجموعة :

$$\nu_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\varepsilon}{dp}$$

(١) <u>من الميكانيكا الكلاسيكية</u> :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m v^2 = p^2 / 2m$$

بالتفاضل بالنسبة إلى p :

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{1}{2m}(2p) = p/m = \frac{mv}{m} = v$$

$$\therefore \ v_g = v$$

أي أن سرعة المجموعة لموجات دى برولى تساوي سرعة الجسيم المتحرك .

(٢) <u>من الميكانيكا النسبية</u> :

من العلاقة النسبية بين الطاقة و كمية الحركة :

$$\varepsilon^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

بتفاضل الطرفين :

$$2\varepsilon d\varepsilon = c^2 (2pdp) + 0$$

$$\therefore \varepsilon d\varepsilon = (pdp) c^2$$

$$\therefore \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{c^2 p}{\varepsilon} = \frac{c^2 m v}{mc^2} = v$$

حيث : $\varepsilon = mc^2 \ , \ p = mv$

$$\therefore v_g = \frac{d\varepsilon}{dp} = v$$

وهي نفس النتيجة .

<u>مثال(٢)</u> : <u>سرعة الطور لموجات دى برولي</u>

أوجد العلاقة بين سرعة الطور u لموجات دى برولى وسرعة الجسيم $v$ وذلك باستخدام :

(١) الميكانيكا الكلاسيكية (٢) الميكانيكا النسبية

ناقش النتيجة التي حصلت عليها ، ثم أثبت أن العلاقة بين سرعة الطور u والطول الموجي $\lambda$ هي :

$$u = c\sqrt{1+\lambda^2\left(\frac{m_0^2c^2}{h^2}\right)}$$

ماذا تعني هذه العلاقة .

<u>الحــل:</u> الجزء الأول :

سرعة الطور : $u = \dfrac{\omega}{k}$

وحيث أن :

$$p = \hbar k \qquad \therefore k = \frac{p}{\hbar}$$

$$\varepsilon = \hbar\omega \qquad \therefore \omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}$$

$$\therefore u = \frac{\varepsilon/\hbar}{p/\hbar} = \frac{\varepsilon}{p} \qquad \text{———— (1)}$$

١- <u>باستخدام الميكانيكا الكلاسيكية :</u>

$$\varepsilon = p^2/2m$$

$$\therefore u = \frac{\varepsilon}{p} = p^2/2m \cdot \frac{1}{p} = p/2m = \frac{mv}{2m} = v/2$$

أي أن سرعة الطور تساوي نصف سرعة الجسيم .

٢- <u>باستخدام الميكانيكا النسبية :</u>

$$\varepsilon = mc^2 \qquad \therefore u = \frac{\varepsilon}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

وحيث أن $v < c \quad \leftarrow \quad u > c$

وهذا يعني أن سرعة الطور أكبر من سرعة الضوء ، وهذا يتعارض مع الحقائق التجريبية التي تقول بأنه لا توجد سرعة أكبر من سرعة الضوء .

**النتيجة :**

وجدنا من المثالين رقم (1) ، (2) أن استخدام مجموعة من الموجات (حزمة موجيه) تصاحب الجسيم يعطينا النتيجة المعقولة [سرعة الجسيم تساوي سرعة الحزمة الموجية] بينما استخدام موجة واحدة تصاحب الجسيم تعطينا نتائج غير معقولة

**كلاسيكيا** : سرعة الجسيم ضعف سرعة الموجة

**نسبيا** : سرعة الموجة أكبر من سرعة الضوء

ولذلك نعتبر أن موجات دى برولى هي من نوع : الحزم الموجيه

**الجزء الثاني:** العلاقة بين $u, \lambda$ :

باستخدام القانون :

$$\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = pc\sqrt{1+\frac{m_0^2c^2}{p^2}}$$

وبالتعويض عن : $p = \hbar k$ , $\varepsilon = \hbar\omega$

$$\therefore \hbar\omega = \hbar kc\sqrt{1+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2k^2}}$$

$$\therefore \frac{\omega}{k} = u = c\sqrt{1+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2k^2}}$$

ولكن : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\hbar k = \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\therefore u = c\sqrt{1+\frac{m_0^2c^2}{h^2}\lambda^2}$$

وهو المطلوب .

**مناقشة هذه العلاقة :**

$$\therefore\ u = c(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} = c\left[1+\frac{1}{2}\alpha+........\right] = c+\frac{1}{2}\alpha c+........$$

$$\therefore\ u > c$$

وهذا يعني أن سرعة الطور أكبر من c وهو ما يناقض الواقع العملي ، ويؤكد النتيجة التي توصلنا إليها أن موجات دى برولى يجب أن تكون على هيئة حزم موجية سرعتها هي سرعة المجموعة $v_g = v$ .

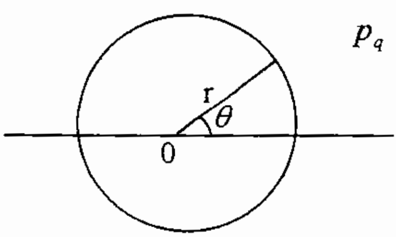
**مثال(٣):** باستخدام قاعدة ويلسون – سومر فيلد وعلاقة دى برولى ، أثبت أن المدارات المسموح بها هي تلك المدارات التي يكون محيطها مساويا لعدد صحيح من الأطوال الموجيه لدى برولى .

**الحـل:**

من قاعدة ويلسون – سومر فيلد $\int p_q dq = nh$

وفي حالة الحركة الدائرية فإن : كمية الحركة الزاوية تكون :

$$p_q = L = m v r = const.$$




والمسافة الزاوية تكون $dq = d\theta$

$$\therefore \int p_q dq = \int L d\theta = L\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi L = nh$$

$$\therefore L = n\frac{h}{2\pi}$$

$$\therefore m v r = pr = n\frac{h}{2\pi}$$

حيث p هي كمية الحركة الخطية .

$$\therefore p = n\frac{h}{2\pi r} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

ومن علاقة دى برولى :

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(2)}$$

من (2) و (1) :

$$\therefore \frac{h}{\lambda} = n\frac{h}{2\pi r}$$

حيث $\ell = 2\pi r$ ،

$$\therefore 2\pi r = n\lambda \qquad \therefore \ell = n\lambda$$

ومن هذا نرى أن محيط الدائرة التي يتحرك فيها الإلكترون يجب أن يكون مساويا لأعداد صحيحة قدرها n من الطول الموجي $\lambda$ (حيث n=1,2,3,...) وهو المطلوب .

## (٦) قاعدة الشك أو عدم التحديد لهيزنبرج : (Heisenberg Uncertainty principle)

تنص قاعدة الشك أو التحديد لهيزنبرج على الآتي :

**" لا يمكن بأي حال تحديد موضع وكمية حركة أي جسيم بدقة وفي نفس الوقت "**

رياضياً :- إذا كانت $\Delta x$ تمثل عدم التحديد أو الشك في تحديد الموضع (الخطأ في قياس الكمية x التي تحدد الموضع) وكانت $\Delta p$ تمثل الشك (uncertainty) في تحديد كمية الحركة (الخطأ في قياس الكمية p) ، فإن حاصل الضرب : $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ وهي الصيغة الرياضية لقاعدة هنزنبرج .

**حالة خاصة:**

عندما $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$ فإن تلك الحالة تسمى بالحالة الصفرية أو الأرضية للطاقة (Ground state) وهي الحالة التي تتميز بأقل قيمة ممكنة من الطاقة .

**علاقة هيزنبرج بين الطاقة والزمن :**

إذا كانت $\Delta E$ تمثل الشك في قياس طاقة الجسيم ، وكانت $\Delta t$ تمثل الشك في قياس الزمن الذي تقاس عنده الطاقة ، فيمكن القول بأن :

" **لا يمكن بأي حال من الأحوال تحديد الطاقة والزمن لأي جسيم بدقة وفي نفس الوقت** " .

رياضياً : $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$

مثال : كيف تستنتج العلاقة $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ وذلك باستخدام علاقة هيزنبرج الأولى $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

الحـل: العلاقة بين الطاقة وكمية الحركة (العلاقة النسبية) هي :

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

بأخذ التغير في الطرفين :

$$2E\Delta E = c^2(2p\Delta p) + 0$$

$$\therefore E\Delta E = c^2 p\Delta p \qquad (1)$$

ولكن : $p = mv$ , $E = mc^2$ ( في النظرية النسبية )

بالتعويض في (1) :

$$\therefore mc^2\Delta E = c^2(mv)\Delta p$$

$$\therefore \Delta E = v\Delta p \qquad (2)$$

وحيث أن التغير (أو الشك) أو الخطأ في قياس الزمن هو :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} \qquad (3)$$

بضرب (2) في (3) :

$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta x \cdot \Delta p \qquad (4)$$

ولكن : $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

$$\therefore \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

وهو المطلوب .

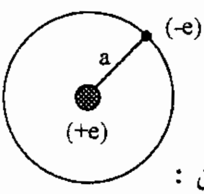
**ملحوظة:** يستخدم مبدأ هيزنبرج (قاعدة عدم التحديد) بنجاح في حساب الطاقة الصفرية (Ground state) للإنظمة الذرية كما سوف يتضح من الأمثلة الآتية .

## أمثلة محلوله

**مثال(١): الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين (Ground state of Hydrogen atom)**

استخدم مبدأ هيزنبرج لعدم التحديد في حساب طاقة الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين .

**الحل:** تعتبر ذرة الهيدروجين أبسط الذرات في الطبيعة وتتكون من : إلكترون شحنته (-e) يدور حول نواة شحنتها (+e)




نفرض أن $\Delta x, \Delta p$ هما الشك أو عدم التحديد في موضع وكمية حركة الإلكترون في الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين :

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \qquad \therefore \Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

نكتب $\Delta x \simeq x = a$ حيث $a$ هو نصف قطر مدار ذرة الهيدروجين

ونعتبر أن $\Delta p \simeq p$

$$\therefore p = \frac{\hbar}{a} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

طاقة الحركة للإلكترون :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = p^2 \big/ 2m$$

وبالتعويض من (2) في تلك العلاقة

$$\therefore T \simeq \frac{\hbar^2}{2ma^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (3)}$$

أيضاً :

طاقة الجهد للإلكترون :

$$V=\frac{(-e)(+e)}{a}=\frac{-e^2}{a}$$

.: الطاقة الكلية :

$$E=T+V=\frac{\hbar^2}{2ma^2}-\frac{e^2}{a} \qquad \text{(4)}$$

ولإيجاد الطاقة الأرضية أي أقل قيمة ممكنة للطاقة ، نفاضل علاقة الطاقة (العلاقة(4)) بالنسبة إلى البارامتر $a$ ونساوي هذا التفاضل بالصفر عند قيمة معينة لهذا البارامتر ولتكن : $a=a_0$

$$\therefore\left(\frac{dE}{da}\right)_{a=a_0}=0 \qquad \therefore\frac{-2\hbar^2}{2ma_0^3}+\frac{e^2}{a_0^2}=0$$

وهي أقل قيمة للبارامتر $\alpha$ ،

$$\therefore\frac{\hbar^2}{ma_0^3}=\frac{e^2}{a_0^2} \qquad \therefore a_0=\frac{\hbar^2}{me^2}$$

بالتعويض في (4) عن قيمة $a_0$ نحصل على أقل قيمة لـ E أي $E_0$ وهي الطاقة الأرضية لذرة الهيدروجين .

$$E_0=\frac{\hbar^2}{2m\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^2}-\frac{e^2}{\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)}=\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{m^2e^4}{\hbar^4}-e^2\cdot\frac{me^2}{\hbar^2}$$

$$=\frac{me^4}{2\hbar^2}-\frac{me^4}{\hbar^2}=-\frac{me^4}{2\hbar^2}$$

بوضع الكمية $R=\frac{me^4}{2\hbar^2}=13.6\ ev$

R يسمى ثابت ريدبرج .Rydberg const و ev ( الكترون فولت ) .

$$\therefore E_0=-R=-13.6\ ev.$$

وهي نفس القيمة التي حصل عليها العلماء تجريبيا لطاقة الحالة الصفرية لذرة الهيدروجين.

**مثال(٢): الطاقة الأرضية للمتذبذب التوافقي البسيط(Ground state of S.H.O.)**

استخدم مبدأ عدم التحديد لهيزنبرج لحساب طاقة الحالة الأرضية للمتذبذب التوافقي البسيط بالصورة الآتية : $E_0 = \hbar\omega$ حيث w هي التردد الزاوي للمتذبذب .

**الحل:** يعرف المتذبذب التوافقي البسيط بأنه جسيم كتلته m يتحرك حركة توافقيه بسيطة .

طاقة الحركة للمتذبذب :

$$T = {p^2}/{2m}$$

طاقة الجهد للمتذبذب :-

$$V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

**الإثبات :**

$$F = m\ddot{x} = -kx \qquad \therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x\ ,\ \omega^2 = \frac{k}{m} \ \rightarrow\ k = m\omega^2$$

$$\therefore V = -\int_0^x F dx = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

الطاقة الكلية :

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

نفرض أن $\Delta x, \Delta p$ هي الشك في قياس الموضع وكمية الحركة للمتذبذب ، ونكتب :

$$\Delta x \simeq x = a\ ,\ \Delta p \simeq p$$

$$\therefore E \simeq \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

وحيث أنه للحالة الأرضية : $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$

$$\therefore \Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} \simeq \frac{\hbar}{x} \simeq \frac{\hbar}{a}$$

[حيث أخذنا $\Delta x \simeq x = a$]

بالتعويض في (1) :

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

**ولإيجاد طاقة الحالة الصفرية:** نوجد $\left(\frac{dE}{da}\right)_{a=a_0} = 0$

فمن (2):

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{-2}{a_0^3}\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 (2a_0) = 0$$

$$\therefore \frac{\hbar^2}{ma_0^3} = m\omega^2 a_0 \qquad \therefore a_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \qquad \text{\_\_\_\_\_ (3)}$$

بالتعويض في (2) عن قيمة $a = a_0$ نحصل على $E = E_0$

$$\therefore E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 a_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m(\frac{\hbar}{m\omega})} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega$$

وهو المطلوب .

**ملحوظة(١)** حيث أن $\hbar\omega = h\nu$ فإن : $E_0 = h\nu$

وهذا يعني أن الطاقة الأرضية (أقل طاقة ممكنة) للمتذبذب التوافقي البسيط تساوي طاقة الكم $(h\nu)$ .

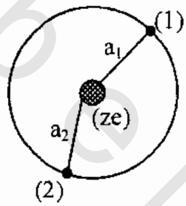
ولذلك فإن $(h\nu)$ تعتبر كوحدة للطاقة في ميكانيكا الكم .

**ملحوظة(٢):** لا يصلح مبدأ عدم التحديد لهيزنبرج في حساب طاقة الحالات المثارة (Exited states) التي لها : $\Delta x \cdot \Delta p \rangle \hbar$

**مثال(٣):- الحالة الأرضية لذرة الهليوم**

استخدم مبدأ عدم التحديد لحساب طاقة المستوى الأرضي لذرة ذات الكترونيين في غلافها الخارجي وذات شحنة نووية Ze .

طبق النتيجة التي تحصل عليها على الحالة الأرضية لذرة الهليوم




**الحل:** نفرض أن الالكترونيين موجودان في المنطقتين اللذان أبعادهما :

$$\Delta x_1 = a_1 \qquad , \qquad \Delta x_2 = a_2$$

فتكون كمية حركة الالكترونيين من مرتبة :

$$\Delta p_1 \simeq p_1 \simeq \frac{\hbar}{a_1} \ , \ \ \Delta p_2 \simeq p_2 \simeq \frac{\hbar}{a_2}$$

وعلى هذا فإن طاقة حركة النظام المكون من الالكترونيين تكون من رتبة :

$$T \simeq \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} \simeq \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

طاقة جهد تفاعل الإلكترون الأول مع النواة ذات الشحنة $Ze = -\dfrac{Ze^2}{a_1}$

طاقة جهد تفاعل الإلكترون الثاني مع النواة ذات الشحنة $Ze = -\dfrac{Ze^2}{a_2}$

:. مجموعة طاقتي الجهد :

$$V = -\frac{Ze^2}{a_1} - \frac{Ze^2}{a_2} = -Ze^2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

أيضا فإن : طاقة الجهد الناتجة عن التأثير المتبادل بين الالكترونيين هي:

$$V' = \frac{e^2}{a} \simeq \frac{e^2}{a_1 + a_2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

حيث المسافة بين الالكترونيين من رتبة $a \simeq a_1 + a_2$

وتصبح الطاقة الكلية للنظام :

$$E = T + V + V' = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right) - Ze^2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \frac{e^2}{a_1 + a_2} \quad \text{—} \ (4)$$

ولكي تكون الطاقة أقل ما يمكن (طاقة الحالة الأرضية) نطبق الشرطين :

$$\frac{dE}{da_1} = 0 \quad , \quad \frac{dE}{da_2} = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\therefore \frac{-\hbar^2}{ma_1^3} + \frac{Ze^2}{a_1^2} - \frac{e^2}{(a_1 + a_2)^2} = 0 \quad ; \quad \frac{-\hbar^2}{ma_2^3} + \frac{Ze^2}{a_2^2} - \frac{e^2}{(a_1 + a_2)^2} = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على :

$$a_1 = a_2 = \frac{\hbar^2}{me^2}\frac{1}{(Z - \frac{1}{4})}$$

وبتعويض هذه القيمة في المعادلة (4) نحصل على :

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2}{a_1^2}\right) - Ze^2\left(\frac{2}{a_1}\right) + \frac{e^2}{2a_1} = \frac{\hbar^2}{ma_1^2} - \frac{2Ze^2}{a_1} + \frac{e^2}{2a_1}$$

$$= \frac{me^4}{\hbar^2}\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{2Ze^4 m}{\hbar^2}\left(Z - \frac{1}{4}\right) + \frac{e^4 m}{2\hbar^2}\left(Z - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{me^4}{\hbar^2}\left(Z - \frac{1}{4}\right)\left[\left(Z - \frac{1}{4}\right) - 2Z + \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{me^4}{\hbar^2} = -2\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right) = -2\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 R \quad \text{—} \ (5)$$

حيث $R = \frac{me^4}{2\hbar^2}$ هو ثابت ريدبرج .

المعادلة (5) تعطي طاقة الحالة الأرضية للذرات ذات الالكترونيين .

<u>في حالة ذرة الهليوم :-</u> $Z = 2$

$$\therefore a_1 = a_2 = \frac{\hbar^2}{me^2}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4\hbar^2}{7me^2}$$

$$E_0 = -2\left(2-\frac{1}{4}\right)^2 R = -2\left(\frac{7}{4}\right)^2 R = -\frac{49}{8}R = -6.125R$$

هذه النتيجة هي طاقة الحالة الأرضية لذرة الهليوم بوحدات ثابت ريدبرج حيث :

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ eV.$$

وبمقارنة هذه النتيجة مع النتيجة العملية لطاقة الحالة الأرضية لذرة الهليوم وهي $E_0 = -5.807R$ نجد أن القيمتين تقريبا من نفس المرتبة .

**<u>ملحوظة:</u>** سنعود لدراسة قاعدة عدم التحديد لهنزنبرج في الباب السابع من هذا الكتاب .

## (٧) <u>الدالة الموجية (Wave function)</u>

### <u>تعريف الدالة الموجية:</u>

تعرف الدالة الموجية بأنها دالة جبرية في الموضع والزمن تحدد أو تصف الخواص الموجية للموجات المصاحبة للجسيمات أثناء حركتها ، ويرمز لها بالرمز $\psi(\vec{r},t)$ والصورة العامة لها هي :- $\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0 e^{i\Phi}$

حيث $\Psi_0$ تسمى سعة الدالة (amplitude)

و $\Phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ تسمى بالطور (phase)

$\omega$ هي التردد الزاوي ، $\vec{k}$ هو المتجه الموجي $\vec{k} = \vec{n}k = \vec{n}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$

$\vec{n}$ هي متجه وحدة في اتجاه انتشار الموجات .

**خواص الدالة الموجية ψ :**

**(i) الخاصية الإحصائية للدالة ψ: (statistical property)**

حيث أن الجسيمات (الالكترونات مثلا) تتحرك بصورة عشوائية وسريعة جدا فيجب أن نتحدث عن احتمال وجودها في مكان معين ، وليس عن الدقة في تحديد مكانها .

وطبقا لماكس بورن فإن الدالة الموجية (تصف الموجات المصاحبة لحركة الجسيم) يكون لها خواص إحصائية ، وقد افترض بورن أن حاصل الضرب $\psi^*\psi = |\psi(\bar{r},t)|^2$ يمثل احتمال وجود الجسيم في وحدة الحجوم من منطقة معينه . حيث $\psi^*$ هي المرافق المركب (complex conjugate) للدالة $\psi$

$$\therefore\ p(\bar{r},t) = \psi^*\psi = |\psi(\bar{r},t)|^2$$

في عنصر الحجم $dV = dxdydz$ يكون احتمال وجود الجسيم هو :

$$p(\bar{r},t)dV = \psi^*\psi dV = |\psi(\bar{r},t)|^2 dV$$

**(ii) الخاصية العيارية للدالة ψ : (Normalization property)**

حيث أن الاحتمال الكلي لوجود الجسيم في منطقة ما بالفراغ يجب أن يساوي الوحدة ، فإن : $\int p(\bar{r},t)dV = 1$

حيث التكامل مأخوذ على كل الفراغ .

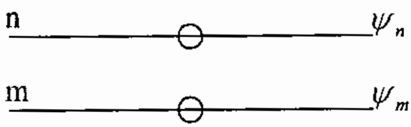
$$\therefore \int |\psi(\bar{r},t)|^2 dV = 1 \qquad \therefore \int \psi^*\psi\, dV = 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

**ونلاحظ أن :** $\psi^*$ هي المرافق المركب لنفس الدالة $\psi$ ، فإذا كان الجسيم موجود في مستوى معين (أو حاله – state) (n) وكانت الدالة الموجية التي تصف الجسيم في تلك الحالة هي $\psi_n$ ، فتأخذ العلاقة (1) الصورة الآتية :


$$\int \psi_n^*\psi_n\, dV = 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_(I)}$$

**(iii) خاصة التعامد للدالة ψ :(Orthogonality Property)**

إذا كان الجسيم يمكن وجودة




في مستويين مختلفين n,m يتميزان

بالدالتين $\psi_n, \psi_m$ حيث :

$\psi_n \neq \psi_m$ فإن الخاصية التعامدية يمكن كتابتها بالصورة :

$$\int \psi_n^* \psi_m dV = 0 \qquad \text{(II)}$$

**ملحوظة هامة:** يمكن دمج الخاصيتين (iii) و (ii) في الخاصية الآتية التي تسمى الخاصية التعامدية العياريه (orthonormalization property)

$$\int \psi_n^* \psi_m dV = \delta_{nm} \qquad \text{(III)}$$

حيث : دلتاكرونيكر $\delta_{nm}$ تعرف كالآتي :

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

**حاصل الضرب القياسي للدوال الموجيه :(scalar product)**

يكتب حاصل الضرب القياسي للدالتين $\psi_n, \psi_m$ بالصورة :

$$(\psi_n, \psi_m) = \int \psi_n^* \psi_m dV$$

ويلاحظ أن :

$$(\psi_n, \psi_m) = (\psi_m, \psi_n)^*$$

يمكن كتابة علاقة المعايرة بالصورة :

$$(\psi_n, \psi_n) = 1$$

ويمكن كتابة علاقة التعامد بالصورة :

$$(\psi_n, \psi_m) = 0$$

ويمكن كتابة علاقة التعامد العياري : (orthonormalization) بالصورة :

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$$

**معيار الدالة الموجيه (Norm) :**

يعرف معيار الدالة الموجيه بأنه :

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} \qquad = \left[\int \psi^* \psi \, dV\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int [\psi]^2 dV\right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

أي أن معيار الدالة الموجيه يكون موجبا دائما ويساوي صفراً في حالـــة إذا كانت الدالة تساوي صفر .

## الخواص الطبيعية للدالة الموجيه :- (Natural properties)

ويطلق على الخواص الآتية اسم الخواص الطبيعية للدالة الموجيه :

(i) الدالة $\psi$ تكون محدودة (finite) في كل الفراغ .

(ii) الدالة $\psi$ تكون أحادية القيمة (single-valued) .

(iii) الدالة $\psi$ ومشتقاتها تكون متصلة (contineous) .

وإذا تحققت هذه الشروط الثلاثة يقال أن الدالة تسلك سلوكاً رياضياً جيداً (Mathematically well-behaved) .

<u>نتيجة :</u> من هذه الخواص يجب أن تكون الدالة معرفة في منطقة محدده بمعنى أن

$\psi(x) = 0(x \to \pm\infty)$

وكذلك الحال بالنسبة لمشتقة الدالة $\psi'$ (x)

## قاعدة تركيب الحالات (Superposition of states)

تنص هذه القاعدة على الآتي :

" إذا وجد جسيم في عدة حالات دوالها الموجية $\psi_1,\psi_2,\ldots\ldots,\psi_n$ فإن هذا الجسيم

$\psi_1$ ________

$\psi_2$ ________

$\psi_3$ ________

$\psi_n$ ............

يمكن أن يوجد (أو يتواجد) في حالة دالتها الموجيه $\Psi$ هي مجموع التركيبات الخطية (linear combinations) للدوال $\psi_1,\psi_2,\ldots\ldots,\psi_n$ بمعنى أن :

$$\Psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots\ldots + a_n\psi_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i \qquad \text{(I)}$$

حيث $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ثوابت اختياريه عادة تكون كميات مركبة .

<u>ملحوظة :</u> مجموعة الدوال $\{\psi_i\}$ الخاضعة للعلاقة (I) تسمى بالمجموعة التامة أو الكاملة (Complete set) ، وتعرف كالآتي :

هي مجموعة من الدوال $\psi_i$ يمكن كتابتها بالنسبة إلى دالة اختيارية $\Psi$ بالصورة الآتية : $\Psi = \sum_i a_i\psi_i$

## نظرية المفكوك (Expansion Theorem)

تنص على الآتي : "أي دالة اختيارية عياريه $\Psi$ يمكن كتابتها كمجموع تركيبات خطية لمجموعة تامة من الدوال العيارية المتعامدة $\psi_i$ بالصورة $\Psi = \sum_i a_i \psi_i$ إذا تحققت العلاقة :

$$a_i = \int \psi_i^* \Psi \, dV = (\psi_i, \Psi)$$

وتحقق الشرط $\sum_i |a_i|^2 = 1$

**البرهان** : حيث أن $\Psi$ هي دالة عيارية

(1) ______ $$(\Psi, \Psi) = \int \Psi^* \Psi \, dV = 1$$

أيضا :

(2) ______ $$\Psi = \sum_i a_i \psi_i \quad (2)$$

وأيضا حيث أن $\psi_i$ هي دوال عياريه متعامدة

(3) ______ $$\therefore \int \psi_k^* \psi_\ell \, dV = \delta_{k\ell}$$

بضرب العلاقة (2) في $\psi_j^*$ و نكامل على كل الفراغ :

$$\int \psi_j^* \Psi \, dV = \sum_i a_i \int \psi_j^* \psi_i \, dV = \sum_i a_i \, \delta_{ji} = \sum_j a_j = a_j$$

بوضع $j = i$ :

$$a_i = \int \psi_i^* \Psi \, dV = (\psi_i, \Psi)$$

وهي العلاقة المطلوبة .

**ولإثبات الشرط** $\sum_i |a_i|^2 = 1$ :

حيث أن

$$\Psi = \sum_i a_i \psi_i$$

$$\Psi^* = \sum_j a_j^* \psi_j^*$$

بالتعويض في العلاقة (1) :-

$$1 = \int \Psi^* \Psi \, dV = \sum_j \sum_i a_j^* a_i \int \psi_j^* \psi_i \, dV = \sum_j \sum_i a_j^* a_i \delta_{ji}$$

$$= \sum_j a_j^* (\sum_i a_i \delta_{ji}) = \sum_j a_j^* a_j = \sum_j |a_j|^2$$

وبوضع j = i :

$$\therefore \sum_j |a_i|^2 = 1$$

وهو الشرط المطلوب .

## علاقة التمام أو الكمالية (Completeness relation) :

من العلاقة (1) :

$$1 = \int \Psi^* \Psi \, dV = (\Psi, \Psi)$$

ومن العلاقة :

$$1 = \sum_i |a_i|^2$$

$$\therefore (\Psi, \Psi) = \sum_i |a_i|^2$$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة التمام أو الكمالية لمجموعة الدوال العيارية $\Psi$ .

**أمثلة محلوله على خواص الدالة الموجية**

**مثال(١):** أثبت أن مربع مقياس الدالة الموجيه المركبـة $|\psi(x,t)|^2$ يشـكل كميـة حقيقة موجبة أو تساوي صفرا .

**الحـل:** أي دالة مركبة مثل $\psi(x,t)$ يمكن كتابتها بالصورة :

$$\psi(x,t) = R(x,t) + iL(x,t)$$

حيث R.L دوال حقيقية

المرافق المركب للدالة $\psi$ هو :

$$\psi^*(x,t) = R(x,t) - iL(x,t)$$

مربع مقياس الدالة المركبة :

$$|\ \psi(x,t)\ |^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t) = (R - iL)(R + iL)$$

$$= R^2 - i^2L^2 = R^2 + L^2 = \mathrm{Re}\,al$$

$$\therefore \psi^*\psi = [R]^2 + [L]^2$$

وهذا يعني أن $\psi^*\psi$ هي مجموع مربعي دالتين حقيقيتين أي أن $\psi^*\psi$ يجـب أن تكون حقيقية ، وفي نفس الوقت فإنها (ككمية حقيقية) إما أن تكون موجبـة أو تساوي صفرا . وهو المطلوب .

**مثال(٢):** أثبت أن مجموعة الدوال المتعامدة العيارية تكون مستقلة خطياً

[The set of orthonormalized functions is linearly independent]

**الحـل:** نفرض مجموعة الدوال المتعامدة العيارية هي :

$$\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots\ldots\ldots, \psi_n\}$$

تكون هذه المجموعة مستقلة خطيا إذا تحقق الشرط :

$$\sum_i a_i\psi_i = 0$$

$$\therefore a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + a_3\psi_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n\psi_n = 0 \qquad (1)$$

بحيث أن المعاملات $a_i$ كلها تساوي أصفاراً .

**ولإثبات ذلك :** بضرب المعادلة (1) قياسيا في $\psi_1$ :

$$\therefore a_1(\psi_1,\psi_1)+a_2(\psi_1,\psi_2)+\ldots\ldots\ldots+a_n(\psi_1,\psi_n)=0$$

وحيث أن مجموعة الدوال المعطاة متعامدة عيارياً:

$$\therefore (\psi_1,\psi_1)=1,\ (\psi_1,\psi_2)=0,\ \ldots\ldots\ldots(\psi_1,\psi_n)=0$$

$$\therefore a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+\ldots\ldots\ldots+a_n\cdot 0=0$$

$$\therefore a_1=0$$

بالمثل : بضرب المعادلة رقم (1) في $\psi_2$ ثم في $\psi_3$ وهكذا ، فإن :

$$a_2=0 \quad , \ a_3=0 \quad , \ \ldots\ldots\ldots \ , \ a_n=0$$

ولذا فإن كلا المعاملات تساوي أصفاراً مما يعني أن العلاقة (1) تكون محققة تحت هذا الشرط.

:. المجموعة المعطاة هي مجموعة دوال مستقلة خطيا .

**مثال(٣):** إذا كانت الدوال الموجيه لجسيم يتحرك بحرية في بعد واحد هي : $\Psi_n=\sqrt{2}\sin(n\pi x)$ أثبت أن $\Psi_n$ تشكل مجموعة (أو فئة) من الدوال المتعامدة عيارياً (orthonormalized functions) في المنطقة $0\le x\le 1$

**الحل:** المطلوب إثبات أن :

$$\int_0^1 \Psi_n^*\Psi_m dx=\delta_{nm}$$

**ولإثبات هذا :-** نفرض أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة =I

$$I=\int_0^1\left[\sqrt{2}\sin n\pi x\right]\left[\sqrt{2}\sin m\pi x\right]dx=2\int_0^1 \sin(n\pi x)\cdot\sin(m\pi x)\,dx$$

ولكن :

$$\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\therefore I = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\left[\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x\right]dx \qquad \_\_\_\_(1)$$

<u>إذا كانت $n = m$</u> :

$$I = \int_0^1\left[\cos 0 - \cos 2n\pi x\right]dx = \int_0^1\left[1 - \cos 2n\pi x\right]dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right]_0^1 = 1 \qquad \_\_\_\_(2)$$

<u>إذا كانت $n \neq m$</u> : $k = n - m \quad , \quad \ell = n + m$

$$I = \int_0^1\left[\cos k\pi x - \cos \ell\pi x\right]dx = \left[\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x - \frac{1}{\ell\pi}\sin \ell\pi x\right]_0^1 = 0 \quad \_\_(3)$$

من (3) و (2) يتضح أن

$$I = \int_0^1 \Psi_n^* \Psi_m dx = \delta_{nm}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٤):</u> عاير الدالة الموجية لذرة الهيدروجين وصورتها $\Psi = Ne^{-\frac{r}{a}}$ حيث r هو نصف قطر الذرة ، a ثابت ، ومن ذلك أوجد ثابت المعايرة (سعة الدالة الموجيه) N بالصورة الآتية : $N = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$

<u>الحل:</u> لمعايرة الدالة الموجيه المعطاة يجب أن نطبق شرط المعايرة :

$$1 = \int \Psi^* \Psi dV$$

حيث التكامل مأخوذ على كل الحجم الذي تشغله الذرة .

باستخدام الإحداثيات القطبية الكروية $(r,\theta,\phi)$ حيث عنصر الحجم هو :

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr d\theta\, d\phi$$

وحدود التكامل $[r=0\rightarrow\infty,\theta=0\rightarrow\pi,\phi=0\rightarrow 2\pi]$

بتطبيق شرط المعايرة على الدالة $\Psi = Ne^{-\frac{r}{a}}$

$$\therefore 1 = N^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} \cdot r^2 \sin\theta \, dr d\theta \, d\phi$$

ولكن :

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2$$

$$\therefore 1 = N^2 \cdot (2\pi)\cdot(2)\cdot\int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr$$

$$\therefore 1 = 4\pi N^2 \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr \qquad \text{———— (1)}$$

**<u>لإيجاد التكامل في (1) :</u>**

من خواص دالة جاما :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

بوضع $\frac{2r}{a} = x \quad \leftarrow \quad r = \frac{a}{2}x \leftarrow dr = \frac{a}{2}dx$

$$\therefore I = \int_0^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^2 x^2 \cdot e^{-x} \cdot \frac{a}{2} dx = \frac{a^3}{8}\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx$$

$$= \frac{a^3}{8}\cdot\Gamma(3) = \frac{a^3}{8}(2!) = \frac{a^3}{4}$$

بالتعويض في (1) :

$$1 = 4\pi N^2 \cdot \left(\frac{a^3}{4}\right) = N^2(\pi a^3)$$

ومنها :

$$N^2 = \frac{1}{\pi a^3}$$

$$\therefore N = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$$

وهو ثابت المعايرة (Normalization const.) .

<u>لماذا سمي N بثابت المعايرة ؟</u>

لأن قيمته يمكن إيجادها فقط بتطبيق شرط المعايرة على الدالة المعطاة .

وبالتعويض عن قيمة $N = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$ في $\Psi$

$$\therefore \Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}$$

وتسمى الدالة حينئذ بالدالة الموجيه العياريه(Normalized wave function)

<u>مثال (٥) :</u> عاير الدالة الموجية للمتذبذب التوافقي البسيط (S.H.O) التي صورتها

هي : $\Psi = Ae^{-\frac{1}{2}(\beta x^2 + i\omega t)}$

حيث $\beta = \frac{\sqrt{km}}{\hbar} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

k,m ثابتان

ومن ذلك أوجد ثابت المعايرة (A) بالصورة $A = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$

<u>الحـل :</u> بتطبيق خاصية المعايرة على الدالة المعطاة :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = A^* A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\beta x^2 - i\omega t)} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\beta x^2 + i\omega t)} dx$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx \qquad \text{\_\_\_\_ (1)}$$

**ولإيجاد التكامل في (1) :**

حيث أن الدالة التي نكاملها هي دالة زوجية

$$\therefore I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta x^2}dx=2\int_{0}^{\infty}e^{-\beta x^2}dx$$

وبوضع :

$$\therefore dx=\frac{1}{\sqrt{\beta}}dt \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt{\beta}}t \leftarrow \sqrt{\beta}x=t \leftarrow \beta x^2=t^2$$

$$\therefore I=2\int_{0}^{\infty}e^{-\beta x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\beta}}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\beta}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

وذلك لأن :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

$$\therefore I=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \qquad \therefore \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

وبالتعويض في (1) :

$$\therefore 1=|A|^2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \qquad \therefore |A|^2=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}}=\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore A=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

وهو المطلوب .

وتصبح الدالة المعايرة (Normalized function)

$$\Psi(x,t)=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}(\beta x^2+i\omega t)}$$

**مثال (٦)** : عاير الدالتين $\psi_2(x) = A_2\, x e^{-\alpha x^2}$ , $\psi_1(x) = A_1\, e^{-\alpha x^2}$ في الفترة $-\infty \le x \le \infty$ وبين هل هاتين الدالتين متعامدتين في تلك الفترة أم لا .

**الحل**: لمعايرة أي دالة نطبق شرط المعايرة .

**بالنسبة للدالة الأولى :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_1 dx = 1$$

$$\therefore |A_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = 1$$

ولكن : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ [ يمكن حسابه بسهولة ] .

$$\therefore |A_1|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2x}} = 1 \quad \therefore A_1 = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

ويصبح شكل الدالة المعايرة :

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2}$$

**بالنسبة للدالة الثانية :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2^* \psi_2 dx = 1$$

$$\therefore |A_2|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = 1$$

ولكن : $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$ [ يمكن حسابه بسهولة ] .

$$\therefore |A_2|^2 \left[\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\right] = 1 \quad \therefore A_2 = \sqrt{4\alpha}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

وتصبح الدالة $\psi_2$ المعايرة :

$$\psi_2 = \sqrt{4\alpha}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} x e^{-\alpha x^2}$$

**ولإثبات أن $\psi_2$ ، $\psi_1$ متعامدتين أم لا :**

نطبق شرط التعامد وهو

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x) \psi_2(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1 \psi_2 \, dx = A_1 A_2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2\alpha x^2} dx$$

ولكن: $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2\alpha x^2} dx = \frac{1}{4\alpha}$ [سهل إثباته] .

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1 \psi_2 \, dx \neq 0$$

.: الدالتان $\psi_2$ ، $\psi_1$ ليستا متعامدتان في الفترة المذكورة .

**<u>مثال (٧)</u> :** عاير الدالة التي صورتها :

$$\psi(x) = A\left(\frac{x+ix}{1+ix^2}\right)$$

**<u>الحـل :</u>** نطبق شرط المعايرة :

$$\int \psi^*(x)\psi(x) dx = 1$$

$$\therefore |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-ix}{1-ix^2}\right)\left(\frac{x+ix}{1+ix^2}\right) dx = 1$$

$$\therefore |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{1+x^4} dx = 1 \qquad \text{(1)}$$

ويمكن إيجاد التكامل في (1) باستخدام الكسور الجزئية وقيمته هي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \text{(2)}$$

وتصبح (1) : $|A|^2\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right] = 1$ ومنها : $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$

وتصبح الدالة $\psi$ في صورتها المعايرة

$$\psi(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+ix}{1+ix^2}\right)$$

وهو المطلوب .

**إيجاد التكامل (2) في مثال (7) :**

باستخدام الكسور الجزئية :

$$\frac{2x^2}{1+x^4}=\frac{x^2+1}{1+x^4}+\frac{x^2-1}{1+x^4}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{x^2+1}{1+x^4}+\frac{x^2-1}{1+x^4}\right]dx \quad = I_1+I_2 \qquad \text{———(3)}$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx$$

وبأخذ $x-\frac{1}{x}=t$ فإن $dt=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$\therefore I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \text{———(4)}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx$$

وبأخذ $x+\frac{1}{x}=t$ فإن : $dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$\therefore I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\frac{1-\sqrt{2}/t}{1+\sqrt{2}/t}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 1=0 \qquad \text{———(5)}$$

بالتعويض عن (3) :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٨)</u> : (أ) عاير الدالة الموجية $\psi(x) = A e^{-k|x|}$ حيث k مقدار ثابت موجب.

(ب) عاير الدالة الموجية $\psi(x) = A e^{-|x|} \sin \alpha x$ ، حيث α ثابت .

<u>الحــل</u> : <u>الجزء الأول</u> : لمعايرة الدالة المعطاه نستخدم شرط المعايرة

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} |A|^2 e^{2kx} dx + \int_{0}^{\infty} |A|^2 e^{-2kx} dx = |A|^2 \left[ \left. \frac{e^{2kx}}{2k} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{e^{-2kx}}{-2k} \right|_{0}^{\infty} \right]$$

$$= \frac{|A|^2}{2k} \left[ \left(e^0 - e^{-\infty}\right) - \left(e^{-\infty} - e^0\right) \right] = \frac{|A|^2}{2k} \left[ (1-0) - (0-1) \right]$$

$$= \frac{|A|^2}{2k} \left[ 1 + 1 \right] = \frac{A^2}{k} \rightarrow A = \sqrt{k}$$

$-\infty$ —— $|x| = -x$ —— $0$ —— $|x| = x$ —— $+\infty$

وتصبح الدالة المعايرة بالصورة : $\psi(x) = \sqrt{k}\, e^{-k|x|}$

<u>الجزء الثاني</u> : شرط المعايرة :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx$$

$$= |A|^2 \left[ \int_{-\infty}^{0} \left(e^{x} \sin \alpha x\right)\left(e^{x} \sin \alpha x\right) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} \left(e^{-x} \sin \alpha x\right)\left(e^{-x} \sin \alpha x\right) dx \right] = |A|^2 \left[ I_1 + I_2 \right] \qquad \text{——(1)}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{2x} \sin^2 \alpha x\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2x} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2\alpha x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \cos 2\alpha x \cdot e^{2x}\, dx \qquad \text{——(2)}$$

ولكن :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx = \frac{1}{2} \left[ e^{2x} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2} \left[ e^0 - e^{-\infty} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - 0 \right] = \frac{1}{2} \qquad \text{——(3)}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \cos 2\alpha x \cdot e^{2x} dx = \int_{-\infty}^{0} (\cos 2\alpha x) \; d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)$$

$$= \cos 2\alpha x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} (-2\alpha \sin 2\alpha x) \frac{e^{2x}}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} + 2\alpha \int_{-\infty}^{0} \sin 2\alpha x \cdot d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2\alpha \left[ \sin 2\alpha x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} (2\alpha \cos 2\alpha x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \alpha \left[ 0 - \alpha \int_{-\infty}^{0} \cos 2\alpha x \cdot e^{2x} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{0} \cos 2\alpha x \cdot e^{2x} dx$$

$$\therefore \left(1 + \alpha^2\right) \int \cos 2\alpha x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2} \to \int \cos 2\alpha x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2(1+\alpha^2)} \quad \text{—— (4)}$$

بالتعويض من (4) ، (3) في (2) نجد أن :

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(1+\alpha^2)}\right] = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{1+\alpha^2}\right] = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad \text{—— (5)}$$

وبالمثل : فإن :

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} e^{-2x} \sin^2 \alpha x \, dx = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad \text{—— (6)}$$

بالتعويض عن $I_1, I_2$ من (6) ، (5) في (1) نحصل على :

$$1 = |A|^2 \left[\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right] = |A|^2 \left[\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha^2)}\right] \to A \sqrt{\frac{2(1+\alpha^2)}{\alpha^2}}$$

وتصبح الدالة الموجية المعايرة بالصورة : $\psi(x) = \sqrt{\frac{2(1+\alpha^2)}{\alpha^2}} \; e^{-|x|} \sin \alpha x$

وهو المطلوب .