الباب الثاني

الأسس الرياضية لميكانيكا الكم (I)

Mathematical principles of Q.M.(I)

الأسس الرياضية لميكانيكا الكم (I)

Mathematical principles of Q.M.(I)

[١] فراغ هلبرت (Hilbert space) وعلاقته بميكانيكا الكم :

يعرف فراغ هلبرت (H) بأنه فراغ خطى اتجاهي (Linear vector space) يشتمل على عدد n من المتجهات .

وتكون هذه المتجهات عادة في صورة دوال مركبه (Complex functions) لمتغيرات حقيقية ، ونلاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون كل تلك الدوال متجهات في H ، وإنما يلزم لذلك عدة شروط حتى تكون تلك الدوال متجهات في H ، وهذه الشروط هي :

(١) في H يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهين $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ بالعلاقة:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \Psi_2 dx$$

(٢) إذا كانت Ψ_1, Ψ_2 متجهان في H ، وكان a_1, a_2 عددان مركبان ، فإن :

$$(\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_2, \Psi_1)^*$$

$$(a_1\Psi_1, a_2\Psi_2) = a_1^* a_2 (\Psi_1, \Psi_2)$$

(٣) المتجهان Ψ_1, Ψ_2 يكونان متعامدان في H إذا كان : $(\Psi_1, \Psi_2) = 0$

(٤) يكون المتجه $\psi_{(x)}$ له ما يسمى بالمعيار (Norm) حيث :

$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} \geq 0$ في H

(٥) يكون المتجه $\psi_{(x)}$ في H عياريا ، إذا كان : $(\psi, \psi) = 1 \rightarrow \|\psi\| = 1$

(٦) تسمى مجموعة المتجهات (أو الدوال) $\{\psi_i(x)\}$ بمجموعة عياريه متعامدة (orthonormal) إذا كان : $(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$

(٧) المتجهات في H هي تلك الدوال $\psi(x)$ التي يكون معيارها محدودا (finite) . أي $(\psi, \psi) < \infty$

(٨) تسمى مجموعة المتجهات (أو الدوال) $\{\psi_i(x)\}$ في H بمجموعة تامة أو كاملة (Complete set) ، إذا كان لكل متجه $\psi_{(x)}$ في H يوجد مجموعة من الأعداد $\{a_i\}$ بحيث أن $\Psi(x)=\sum_i a_i\psi_i(x)$ ،

حيث $\Psi(x)$ دالة إختيارية متعامدة عيارياً .

وتخضع المجموعة التامة للعلاقة : $a_i=(\psi_i,\Psi)$ حيث $\sum_i |a_i|^2=1$

[ويعرف ذلك بنظرية المفكوك] $\therefore \Psi(x)=\sum_i(\psi_i,\Psi)\psi_i\cdot(x)$

<u>النتيجة:</u> إذا طبقت الخواص السابقة على أي دالة فإن تلك الدالة تكون متجها في فراغ هلبرت (H) .

وبمقارنة خواص الدوال الموجية في ميكانيكا الكم والسابق ذكرها بخواص المتجهات (أو الدوال) في فراغ هلبرت نجد أن هناك تطابقا تاما بينهما ، ولهذا اعتبر فراغ هلبرت (H) هو الفراغ المناسب للدوال الموجيه في ميكانيكا الكم .

[٢] المؤثرات في ميكانيكا الكم : (Operators in Q.M.)

أوضح ديراك في عام 1926 م أن ميكانيكا الكم تختلف عن الميكانيكا الكلاسيكية في تعريف الكميات الطبيعية المستخدمة في وصف الحركة ، يحث أنه في الميكانيكا الكلاسيكية يمكن قياس هذه الكميات بدقة ، بينما في ميكانيكا الكم لا يمكن القيام بذلك ، واقترح ديراك أنه في ميكانيكا الكم تستخدم المؤثرات المناظرة للكميات الطبيعية ، فبدلا من أن نتحدث عن السرعة أو كمية الحركة أو الطاقة ، نتحدث عن مؤثر السرعة ومؤثر كمية الحركة ومؤثر الطاقة وهكذا .

وحيث أن الفراغ المستخدم في ميكانيكا الكم هو فراغ هلبرت فإن خواص المؤثرات في ميكانيكا الكم هي نفس خواص المؤثرات في هذا الفراغ .

[٣] خواص المؤثرات في فراغ هلبرت (وفي ميكانيكا الكم) :

تعريف المؤثر :

يعرف المؤثر بأنه أداة رياضية إذا رافقت أي دالة $\Psi(x)$ فإنها تحولها إلى دالة أخرى $\Phi(x)$ بمعنى أن $\Phi(x) = \hat{A}\Psi(x)$

خواص المؤثرات :

(١) أي مؤثرين $\hat{A}, \hat{B}$ يكونان متساويان $\hat{A} = \hat{B}$ إذا كانت $\hat{A}\Psi = \hat{B}\Psi$

(٢) المؤثر $\hat{c}$ يمثل مجموع أو الفرق $\hat{A} \pm \hat{B}$ للمؤثرين $\hat{A}, \hat{B}$
إذا كان : $\hat{A}\Psi \pm \hat{B}\Psi = \hat{c}\Psi$

وتخضع عمليات الجمع (والطرح) لخاصيتي :

(i) الإبدال (commutative) : $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$

(ii) الإدماج (associative) : $\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}) = (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C}$

(٣) المؤثر $\hat{D}$ يمثل حاصل الضرب $\hat{A}\hat{B}$ إذا كان : $\hat{A}\hat{B}\Psi = \hat{D}\Psi$
حيث : $\hat{A}\hat{B}\Psi = \hat{A}\left[\hat{B}\Psi\right]$

(٤) المؤثر $(-\hat{A})$ يعرف بحيث أن : $\hat{A}\Psi + (-\hat{A})\Psi = \hat{0}$
حيث $\hat{0}$ يسمى بالمؤثر الصفري (Null operator)

(٥) يعرف المؤثر المحايد (Identity op.) أو مؤثر الوحدة (unit op.)
بالعلاقة : $\hat{I}\Psi = \Psi$

(٦) المؤثرات في فراغ هلبرت (وفي ميكانيكا الكم) تكون خطيه (Linear operator) بمعنى أن :

(i) $\hat{A}(\psi_1 + \psi_2) = \hat{A}\psi_1 + \hat{A}\psi_2$

(ii) $\hat{A}(\alpha\psi) = \alpha\hat{A}\psi$

أو بصورة عامة : $\hat{A}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1\hat{A}\psi_1 + \alpha_2\hat{A}\psi_2$

حيث α_1, α_2 كميات قياسية (حقيقية أو مركبة) .

(٧) المؤثرات المتبادلة (Commuting operators) : إذا كان $\hat{A},\hat{B}$ مؤثران فإنه بوجه عام $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

في الحالة الخاصة : إذا كان : $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ ، يقال أن المؤثرين متبادلين (Commuting operators)

المبدول (commutator) : حيث أن $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ للمؤثرات المتبادلة فإن :

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$$

$$\therefore \left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$$

حيث $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ يسمى بمبدول المؤثرين $\hat{A},\hat{B}$ (Commutator) .

إذا كان $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$ فإن المؤثرين يكونان متبادلان (Commuting) .

إذا كان $\left[\hat{A},\hat{B}\right] \neq 0$ فإن المؤثرين يكونان غير متبادلان (Non – commuting or anti-commuting)

(٨) المؤثرات غير المنفردة (Non-Singular operator) : يعرف المؤثر غير المنفرد ($\hat{A}$) ، إذا كان هناك مؤثر آخر $\hat{B}$ بحيث أن :

$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I}$ حيث $\hat{I}$ هو مؤثر الوحدة أو المؤثر المحايد .

بمعنى أن : $\hat{A}\hat{B}\Psi = \hat{B}\hat{A}\Psi = \hat{I}\,\Psi = \Psi$

ملاحظة :

(١) أي مؤثر يكون متبادلا مع نفسه ، أي أن :

$$\hat{A}\hat{A} = \hat{A}\hat{A} \rightarrow \left[\hat{A},\hat{A}\right] = \hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A} = 0$$

(٢) أي مؤثر يكون متبادلا مع مؤثر الوحدة $\hat{I}$ ، أي أن :

$$\hat{A}\hat{I} = \hat{I}\hat{A} \rightarrow \left[\hat{A},\hat{I}\right] = \hat{A}\hat{I} - \hat{I}\hat{A} = 0$$

أمثلة محلوله :

مثال(١) : أثبت أن المؤثر x يخضع للعلاقة :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 + x\frac{\partial}{\partial x}$$

ثم برهن العلاقات الآتية :

$$\textbf{(i)}\quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 - 1$$

$$\textbf{(ii)}\quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 + 1$$

الحـــل:

أولاً :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x)\Psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) = x\frac{\partial\Psi}{\partial x} + (1)\Psi$$

[في حالة المؤثرات : $\frac{d}{dx}(\hat{A}\hat{B}) = \hat{A}\frac{d\hat{B}}{dx} + \frac{d\hat{A}}{dx}\hat{B}$]

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}(x)\Psi(x) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)\Psi$$

وبمقارنة الطرفين ، حيث أن هذه العلاقة محققة لكل قيم الدالة Ψ

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 + x\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{———}(\mathbf{I})$$

لإثبات العلاقة (i) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right) + x\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(x) + x\frac{\partial}{\partial x} - x^2$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right) + x\frac{\partial}{\partial x} - x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 - 1 \qquad \text{———}(\mathbf{i})$$

لإثبات العلاقة (ii) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\right)-x\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}(x)-x\frac{\partial}{\partial x}-x^2$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)-x\frac{\partial}{\partial x}-x^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2+1 \quad \text{\_\_\_(ii)}$$

وهو المطلوب .

مثال(٢): أثبت أن المؤثر $\hat{A}u=\dfrac{du}{dx}$ هو مؤثر خطي ، بينما المؤثر $\hat{B}u=u^2$ هو مؤثر غير خطي .

الحـل:

لكي يكون المؤثر $\hat{A}$ خطيا يجب أن يتحقق الشرط :

$$\hat{A}(au_1+bu_2)=a\hat{A}u_1+b\hat{A}u_2 \quad \text{\_\_\_\_}(1)$$

بمعنى أن:

$$\hat{A}(u_1+u_2)=\hat{A}u_1+\hat{A}u_2 \quad , \quad \hat{A}(au)=a\hat{A}u$$

بالنسبة للمؤثر الأول :

$$\hat{A}u=\frac{du}{dx} \qquad \therefore \hat{A}=\frac{d}{dx}$$

$$\hat{A}(u_1+u_2)=\frac{d}{dx}(u_1+u_2)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}=\hat{A}u_1+\hat{A}u_2$$

أيضا :

$$\hat{A}(au)=\frac{d}{dx}(au)=a\frac{du}{dx}=a\hat{A}u$$

وهذا يعني أن المؤثر $\hat{A}=\dfrac{d}{dx}$ هو مؤثر خطي .

بالنسبة للمؤثر الثاني :

تأخذ $\hat{B}u=u^2$ ، $u=a_1u_1+a_2u_2$

فنحصل على :

$$\hat{B}(a_1 u_1 + a_2 u_2) = (a_1 u_1 + a_2 u_2)^2 = a_1^2 u_1^2 + a_2^2 u_2^2 + 2a_1 a_2 u_1 u_2$$

$$= a_1^2(\hat{B}u_1) + a_2^2(\hat{B}u_2) + 2a_1 a_2 u_1 u_2$$

$$\neq a_1(\hat{B}u_1) + a_2(\hat{B}u_2)$$

$$\therefore \hat{B}(a_1 u_1 + a_2 u_2) \neq a_1(\hat{B}u_1) + a_2(\hat{B}u_2)$$

وهذا يعني أن المؤثر $\hat{B}$ هو مؤثر غير خطي ، أي أن المؤثر المناظر لمربع دالة لا يكون خطياً .

<u>مثال (٣)</u> : (أ) اثبت أن المؤثر المرافق المركب لا يشكل مؤثراً خطياً .

(ب) إذا كان $\hat{A}$ مؤثر ما يعرف بالعلاقة الآتية :

$$\hat{A}\psi(x) = \int_a^b G(x,x')\psi(x')dx'$$

حيث $G(x,x')$ هي دالة قيمتها ثابتة لكل الدوال $\psi(x')$ وتعرف بدالة جـــرين (Green Function) . أثبت أن $\hat{A}$ يشكل مؤثراً خطياً .

<u>الحـــل :</u>

(أ) يعرف المؤثر المرافق المركب بالعلاقة المؤثرية : $\hat{A}\psi = \psi^*$

والآن : لنعتبر الدالة $\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$ ، حيث ψ_1, ψ_2 دالتان إختياريتان ، a_1, a_2 ثابتان مركبان إختياريان أيضاً

$$\therefore \hat{A}\psi = \hat{A}(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = (a_1\psi_1 + a_2\psi_2)^* = a_1^*\psi_1^* + a_2^*\psi_2^*$$

$$= a_1^*(\hat{A}\psi_1) + a_2^*(\hat{A}\psi_2)$$

$$\therefore \hat{A}(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = a_1^*(\hat{A}\psi_1) + a_2^*(\hat{A}\psi_2)$$

ومنها يتضح أن $\hat{A}$ لا يمثل مؤثراً خطياً .

وهو المطلوب .

(ب) نعتبر الدالة : $\psi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)$ ، فمن تعريف المؤثر $\hat{A}$:

$$\therefore\ \hat{A}\left[\psi_1(x)+\psi_2(x)\right]=\int_a^b G(x,x')\left[\psi_1(x')+\psi_2(x')\right]dx'$$

$$=\int_a^b G(x,x')\psi_1(x')\,dx'+\int_a^b G(x,x')\psi_2(x')\,dx'$$

$$=\hat{A}\psi_1(x)+\hat{A}\psi_2(x) \qquad \_\_\_\_\_\ (1)$$

أيضاً : بإعتبار أن $\psi(x)=a\,\psi_1(x)$ حيث a ثابت قياسي

$$\therefore\ \hat{A}\left[a\,\psi_1(x)\right]=\int_a^b G(x,x')\left[a\,\psi_1(x')\right]\,dx'$$

$$=a\int_a^b G(x,x')\psi_1(x')\,dx'=a\,\hat{A}\psi_1(x) \qquad \_\_\_\_\_\ (2)$$

من (2) ، (1) يتضح أن المؤثر $\hat{A}$ المعطي هو مؤثر خطي .

وهو المطلوب .

<u>مثال(٤):</u> أحسب المبدولات الآتية :

$$(i)\ \left[\frac{\partial}{\partial x},x\right] \qquad (ii)\ \left[x,\frac{\partial}{\partial x}\right] \qquad , \qquad (iii)\ \left[\frac{\partial}{\partial x},x^2\right]$$

<u>الحـل:</u>

حيث أن $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$

$$(\mathrm{i})\ \left[\frac{\partial}{\partial x},x\right]\Psi=\left(\frac{\partial}{\partial x}x-x\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi=\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi)-x\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

$$=x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+1\cdot\Psi-x\frac{\partial\Psi}{\partial x}=1\cdot\Psi$$

ومن هذا يتضح أن : $\left[\frac{\partial}{\partial x},x\right]=\hat{I}$

حيث أن المبدول $\left[\frac{\partial}{\partial x},x\right]$ يشكل مؤثراً .

(ii) $$\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right]\Psi = \left(x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}x\right)\Psi = x\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(x\Psi)$$

$$= x\frac{\partial \Psi}{\partial x} - x\frac{\partial \Psi}{\partial x} - 1\Psi = -1\cdot\Psi$$

ومن هذا يتضح أن : $\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -\hat{I}$

(iii) $$\left[\frac{\partial}{\partial x}, x^2\right]\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x}x^2 - x^2\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\Psi) - x^2\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$= x^2\frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2x\Psi - x^2\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2x\cdot\Psi$$

$$\therefore \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^2\right] = 2x$$

<u>مثال(٥):</u> أثبت العلاقة الآتية للمؤثر x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1} + x^n\frac{\partial}{\partial x}$$

ومن ثم ، تحقق من العلاقات الآتية :

$$(i)\ \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^n\right] = nx^{n-1} \quad , \quad (ii)\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right] = \hat{0}$$

حيث $\hat{0}$ هو المؤثر الصفري .

<u>الحـل:</u>

لإثبات العلاقة الأولى :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n)\Psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x^n\Psi) = x^n\frac{\partial \Psi}{\partial x} + nx^{n-1}\cdot\Psi = \left[nx^{n-1} + x^n\frac{\partial}{\partial x}\right]\Psi$$

بمقارنة الطرفين :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1} + x^n\frac{\partial}{\partial x}$$

وللتحقق من صحة العلاقتين (ii) و (i) :

$$\text{(i)}\ \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^n\right]\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x}x^n - x^n\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi = \frac{\partial}{\partial x}(x^n\Psi) - x^n\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$= x^n\frac{\partial \Psi}{\partial x} + nx^{n-1}\cdot\Psi - x^n\frac{\partial \Psi}{\partial x} = nx^{n-1}\cdot\Psi$$

$$\therefore \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^n\right] = nx^{n-1}$$

$$\text{(ii)}\ \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]\Psi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right)\Psi - \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi = \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\Psi - \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\Psi$$

$$= \left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} - \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\right)\Psi = 0\cdot\Psi$$

$$\therefore \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right] = \hat{0}$$

وهو المطلوب .

[٤] الدوال الذاتية والقيم الذاتية (Eigenfunctions and Eigenvalues):

تسمى المعادلة $\hat{A}\Psi_n = a_n\Psi_n$ بمعادلة القيمة الذاتية(igen value equation) ، حيث المتجهات (أو الدوال) Ψ_n تسمى بالدوال الذاتية للمؤثرة $\hat{A}$ ، a_n تسمى بالقيم الذاتية المناظرة لهذا المؤثر ، وهي القيم التي تأخذها أي كمية طبيعية تميز النظام الذري الذي ندرسه .

ويطلق على مجموع هذه القيم الذاتية أسم طيف القيم الذاتية (Spectrum)

فإذا كانت $\hat{A}\Psi_n = a_n\Psi_n$ فإن : $f(\hat{A})\Psi_n = f(a_n)\Psi_n$

الدوال الذاتية الآنية (Simultaneously eigenfucnctions)

نظرية:- "إذا كانت $\Psi_n(x)$ هي مجموعة تامة من الدوال المتعامدة عياريا وكانت تمثل دوال ذاتية آنية للمؤثرين $\hat{A}, \hat{B}$ بمعنى أن :

$$\hat{A}\Psi_n = a_n\Psi_n \quad , \quad \hat{B}\Psi_n = b_n\Psi_n$$

فإن $\hat{A},\hat{B}$ يجب أن يكونا متبادلين".

البرهان :

حيث أن : $\hat{B}\Psi_n = b_n\Psi_n \quad , \quad \hat{A}\Psi_n = a_n\Psi_n$

a_n, b_n هي القيم الذاتية للمؤثرين $\hat{A},\hat{B}$

$$\therefore \hat{A}\hat{B}\Psi_n = \hat{A}(\hat{B}\Psi_n) = a_n(\hat{B}\Psi_n) = a_n b_n \Psi n \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

$$\therefore \hat{B}\hat{A}\Psi_n = \hat{B}(\hat{A}\Psi_n) = b_n(\hat{A}\Psi_n) = b_n a_n \Psi n \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

من (2) و (1) :

$$\hat{A}\hat{B}\Psi_n = \hat{B}\hat{A}\Psi_n$$

$$\therefore (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\Psi_n = 0$$

$$\therefore \left[\hat{A},\hat{B}\right]\Psi_n = 0$$

$$a_n b_n = b_n a_n$$

وحيث أن Ψ_n هي مجموعة من الدوال الاختيارية فإن : $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$

وهو الشرط اللازم لكي يكون للمؤثرين $\hat{A},\hat{B}$ دوال ذاتية آنية .

عكس النظرية :

" تمثل العلاقة $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$ الشرط الكافي لكي يكون للمؤثرين $\hat{A},\hat{B}$ دوال ذاتية آنية (أي نفس الدوال الذاتية) " أو بصورة أخرى : " لأي مؤثرين خطيين متبادلين $\hat{A},\hat{B}$ فإنه توجد مجموعة تامة من الدوال تعتبر دوالا ذاتية للمؤثرين $\hat{A},\hat{B}$ في آن واحد ".

البرهان:

حيث أن

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\Psi_n = 0 \leftarrow \left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$$

$$\therefore (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\Psi_n = 0 \qquad \therefore (\hat{A}\hat{B})\Psi_n = (\hat{B}\hat{A})\Psi_n \qquad \text{\_\_\_\_ (1)}$$

وبفرض أن Ψ_n هي دوال ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ بقيم ذاتية (a_n) أو بقيمة ذاتية واحدة (a) أي أن :

$$\hat{A}\Psi_n = a\Psi_n \qquad \_\_\_\_ (2)$$

فلإيجاد دالة ذاتية تكون في نفس الوقت (آنيا) دالة ذاتية لكل من $\hat{A},\hat{B}$ ، فمن (1) :

$$\hat{A}\hat{B}\Psi_n = \hat{B}\hat{A}\Psi_n$$

$$\therefore \hat{A}(\hat{B}\Psi_n) = \hat{B}(\hat{A}\Psi_n) = \hat{B}(a\Psi_n) = a(\hat{B}\Psi_n) \qquad \_\_\_\_ (3)$$

أي أن $(\hat{B}\Psi_n)$ هي أيضا دوال ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ بنفس القيمة الذاتية a

فإذا كانت $\hat{B}\Psi_n = \Phi_n$ فإن (3) تصبح :

$$\hat{A}\Phi_n = a\Phi_n \qquad \_\_\_\_ (4)$$

من (4) و (2) نجد أن Φ_n يجب أن تتناسب مع Ψ_n أي تساوي مقدار ثابت في Ψ_n .

وهذا يعني أن : $\Phi_n = b\Psi_n$

$$\therefore B\Psi_n = b\Psi_n \qquad \_\_\_\_ (5)$$

أي أن Ψ_n هي دوال ذاتية للمؤثر $\hat{B}$ أيضا بقيمة ذاتية b .

وهو المطلوب .

[٥] القيمة المتوقعة لكمية طبيعية (Expectation value) :

تعرف القيمة المتوقعة لكمية طبيعية بالعلاقة :

$$\langle f \rangle = \bar{f} = \int \Psi^* \hat{f}\, \Psi dV = (\Psi, \hat{f}\,\Psi)$$

حيث $\hat{f}$ هو المؤثر المناظر للكمية الطبيعية f ، والدوال Ψ يخضع لخاصية المعايرة $\int \Psi^*\Psi dV = 1 \rightarrow (\Psi,\Psi) = 1$

يطلق أحيانا على القيمة المتوقعة أسم القيمة المتوسطة

(average or mean value)

نظرية :

" القيمة المتوقعة لأي كمية طبيعية مناظرة لمؤثر ما تساوي القيمة الذاتية لهذا المؤثر" .

البرهان:

من معادلة القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{f}$: $\hat{f}\Psi = \lambda\Psi$

حيث λ هي القيمة الذاتية المناظرة للمؤثر $\hat{f}$.

القيمة المتوقعة للكمية الطبيعية المناظرة للمؤثر $\hat{f}$ هي :

$$\langle f\rangle = \int \Psi^* \hat{f}\Psi dV = \int \Psi^* \lambda\Psi dV = \lambda\int \Psi^*\Psi dV$$

ولكن Ψ هي دالة معايرة $\leftarrow \int \Psi^*\Psi dV = 1 \leftarrow \lambda = \langle f\rangle \therefore$

وهو المطلوب .

أمثلة محلوله:

مثال(١): أوجد الدوال الذاتية والقيم الذاتية للمؤثر التفاضلي

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

الحـل: نعتبر المعادلة التفاضلية : $D^2\Psi = a\Psi$ وهي معادلة قيمة ذاتية يمكن وضعها بالصورة : $(D^2 - a)\psi = 0$

الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$\psi = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

وهذا الحل يجب أن يتفق مع خواص الدالة ψ في ميكانيكا الكم والتي تقرر أنها دالة متصلة واحادية القيمة ومحدودة خلال الفراغ المستخدم ، ويكون لدينا حالتان ممكنتان :

(i) إذا كانت a موجبة فإن $\psi \to \infty$ عندما $x \to \infty$

وهذا الحل لا يتفق مع كون ψ دالة محدودة .

(ii) إذا كانت a سالبة ولتكن $a=-b$

$$\therefore \psi = Ae^{\sqrt{-b}x} + Be^{-\sqrt{-b}x} = Ae^{i\sqrt{b}x} + Be^{-i\sqrt{b}x}$$

وهذا الحل يتفق مع كون ψ دالة أحادية القيمة بشرط أن يكون $\sqrt{b}$ عدد صحيح أي $\sqrt{b}=m$ حيث $m=0,1,2,.....$.

$$\therefore \psi = Ae^{imx} + Be^{-imx}$$

وهذا الحل يمكن اختزالة إلى فرع واحد بالصورة : $\psi_m = Ce^{imx}$

حيث : $m = 0,\pm 1,\pm 2,.......$

ولإيجاد الثابت c :- نعاير الدالة ψ في الفترة $[0,2\pi]$:

$$1 = \int_0^{2\pi} \psi_m^* \psi_m dx = c^2 \int_0^{2\pi} dx = 2\pi c^2$$

$$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \therefore \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{imx}$$

وتكون القيمة الذاتية :

$$a = -b = -m^2$$

أي :

$$a = 0,-1,-4,-9,\ldots$$

مثال(٢): أثبت أن الدالة $u(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - x^2$ ، وأوجد القيمة الذاتية المناظرة لهذا المؤثر .

الحل: لإثبات أن الدالة $u(x)$ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ يجب أن تحقق معادلة القيمة الذاتية بالصورة : $\hat{A}u(x) = au(x)$

حيث a هي القيمة الذاتية المناظرة لـ $\hat{A}$

$$\hat{A}u(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-\frac{1}{2}x^2}) - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \text{\_\_\_\_ (1)}$$

ولكن :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(e^{-\frac{1}{2}x^2})\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right]$$

$$= \left[(-x)(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}) + (-1)(e^{-\frac{1}{2}x^2})\right] = x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \_\_(2)$$

بالتعويض من (2) في (1) :

$$\hat{A}u(x) = x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} = (-1)u(x) = au(x)$$

وهذا يعني أن $u(x)$ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ والقيمة الذاتية المناظرة هي :

$$a = -1$$

<u>مثال(٣):</u> أثبت أن الدالة $\Psi(r) = Ne^{-r}$ هي دالة ذاتية للمؤثر

$$\hat{H} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{2}{r}$$

وأوجد القيمة الذاتية المناظرة لهذا المؤثر .

<u>الحـل:</u> لإثبات أن الدالة $\Psi(r)$ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{H}$ يجب أن نحقق معادلة القيمة الذاتية بالصورة : $\hat{H}\Psi = a\Psi$

حيث a هو القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{H}$.

$$\hat{H}\Psi = \left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{2}{r}\right](Ne^{-r})$$

$$= \left[-\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{d^2}{dr^2} + 2r\frac{d}{dr}\right) - \frac{2}{r}\right](Ne^{-r})$$

$$= \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2}{r}\right](Ne^{-r}) \quad \_\_\_\_(1)$$

ولكن :

$$\frac{d}{dr}(Ne^{-r}) = -Ne^{-r}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(Ne^{-r}) = \frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(Ne^{-r})\right] = \frac{d}{dr}(-Ne^{-r}) = Ne^{-r}$$

بالتعويض في (1):

$$\hat{H}\,\Psi = -\left[Ne^{-r} - \frac{2}{r}Ne^{-r} + \frac{2}{r}Ne^{-r}\right] = -Ne^{-r} = (-1)\Psi(r) = a\Psi(r)$$

وهذا يعني أن معادلة القيمة الذاتية محققة ، أي أن $\Psi(r)$ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{H}$ ، والقيمة الذاتية المناظرة هي $a = -1$

<u>مثال(٤):</u> أوجد القيمة المتوقعة (أو المتوسطة) لنصف قطرة ذرة الهيدروجين (r)

إذا كانت الدالة الموجية التي تصف تلك الذرة هي : $\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}$ ،

حيث a ثابت [مع ملاحظة أن المؤثر المناظر لـــ r هو : $\hat{r} = r$]

<u>الحــل:</u> من تعريف القيمة المتوقعة : $\langle f \rangle = \int \Psi^* \hat{r} \Psi dV$

حيث : $\Psi = \Psi^* = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}, \ \hat{r} = r$

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr d\theta\, d\phi$$

$$\therefore < r > = \frac{1}{\pi a^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} \cdot r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi a^3}\cdot(2\pi)\cdot(2)\cdot\int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{2r}{a}} dr \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

ولإيجاد التكامل في (1) : نضع $\frac{2r}{a} = x \leftarrow r = \frac{a}{2}x \leftarrow dr = \frac{a}{2}dx$

$$\therefore I = \int_0^{\infty}\left(\frac{a}{2}x\right)^3 \cdot e^{-x} \cdot \frac{a}{2}dx = \left(\frac{a}{2}\right)^4 \underbrace{\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx} = \left(\frac{a}{2}\right)^4 \cdot \Gamma\ (4)$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^4 (3!) = 6\cdot\frac{a^4}{16} = \frac{3}{8}a^4$$

بالتعويض في (1) :

$$\langle r\rangle = \frac{1}{\pi a^3}\cdot(2\pi)\cdot(2)\cdot\frac{3}{8}a^4 = \frac{3}{2}a$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٥):</u> إذا كانت الدالة الموجيه للمتذبذب التوافقي البسيط في حالتـه الأرضيـة

هي : $\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$

فأثبت أن القيمة المتوقعة لطاقة الجهد للمتذبذب تساوي $\left(\frac{k}{4\alpha}\right)$ حيث α, k ثابتان .

<u>الحـل:</u> طاقة الجهد للمتذبذب هي :

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

[وذلك حيث أن القوة المؤثرة على المتذبذب هي $F = -kx$ ، وطاقة الجهد هي الشغل المبذول ضد هذه القوة أي أن

$$[V(x) = -\int_0^x F dx = -\int_0^x (-kx)dx = k\int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2$$

وتصبح القيمة المتوقعة لطاقة الجهد :

$$\langle V(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)V(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2 V(x)dx$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}k\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\alpha x^2}dx \qquad \text{———} (1)$$

ولكن :

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\alpha x^2}dx = 2\int_0^{\infty}x^2 e^{-\alpha x^2}dx = 2\cdot\left[\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right] = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

حيث :

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض في (1) :

$$\therefore \langle V(x)\rangle=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}k\cdot\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=\frac{k}{4\alpha}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٦):</u> إذا كانت الدالة الموجيه لجسيم يتحرك بحرية في المنطقة $0<x\le a$ هي : $\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x$ ، فاثبت أن القيمة المتوقعة لكل من الموضع وكمية الحركة تعطى من :

$$\langle x\rangle=\frac{a}{2}\quad,\quad\langle P_x\rangle=0$$

[حيث المؤثر المناظر للموضع x هو : $\hat{x}=x$ والمؤثر المناظر لكمية الحركة p_x هو $\hat{p}_x=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$]

<u>الحـل:</u> حيث أن $\Psi(x)$ هي دالة حقيقية

$$\Psi^*(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

ومن تعريف القيمة المتوقعة :

$$\text{(i)}\ \langle x\rangle=\int\Psi^*\hat{x}\Psi dx=\int_0^a\Psi^* x\Psi dx=\frac{2}{a}\int_0^a x\cdot\sin^2\frac{n\pi}{a}x dx$$

$$=\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}\int_0^a x(1-\cos\frac{2n\pi}{a}x)dx$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2}\bigg|_0^\alpha-\int_0^a x\cos\frac{2n\pi}{a}xdx\right]=\frac{1}{a}\left[\frac{\alpha^2}{2}-\left(\frac{\alpha}{2n\pi}\right)\int_0^a x\cdot d\left(\sin\frac{2n\pi}{\alpha}x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{2}-\left(\frac{a}{2n\pi}\right)\left\{x\cdot\sin\frac{2n\pi}{a}x\Big|_0^{\alpha}-\frac{a}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{a}x\Big|_0^{\alpha}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{2}-\left(\frac{a}{2n\pi}\right)\{0-0\}\right]=\frac{a}{2}$$

$$(ii)\ \langle p_x\rangle=\int\Psi^*\hat{p}_x\Psi dx$$

$$=\int\Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi dx=\frac{\hbar}{i}\cdot\left(\frac{2}{a}\right)\cdot\int_0^a\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$=\frac{\hbar}{i}\cdot\left(\frac{2}{a}\right)\cdot\int_0^a\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$$

$$=\frac{\hbar}{i}\cdot\left(\frac{2}{a}\right)\cdot\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cdot\int_0^a\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{a}xdx=\frac{\hbar n\pi}{i\,a^2}\cdot\int_0^a\sin\frac{2n\pi}{a}xdx$$

$$=\frac{\hbar n\pi}{i\,a^2}\cdot\left(\frac{a}{2n\pi}\right)\left(-\cos\frac{2n\pi}{a}x\right)\Big|_0^{\alpha}=-\frac{\hbar}{2ia}(1-1)=0$$

وهو المطلوب ثانياً .

__مسألة:__ في المثال رقم (6) ، أوجد القيمة المتوقعة لكل من مربع الموضع ومربع كمية الحركة بالصورة الآتية :

$$(i)\quad\langle x^2\rangle=a^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2\pi^2}\right)$$

$$(ii)\ \langle p_x^2\rangle=\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}n^2$$

__حل المسألة :__

$$\textbf{(i)}\ \left\langle x^2\right\rangle=\int\Psi^*x^2\Psi dx=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin^2\frac{n\pi}{a}xdx$$

$$=\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}\int_0^a x^2(1-\cos\frac{2n\pi}{a}x)dx=\frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\alpha}-\int_0^a x^2\cos\frac{2n\pi}{a}xdx\right]$$

$$\int_0^a x^2 \cos\frac{2n\pi}{a}x\,dx = \left(\frac{a}{2n\pi}\right)\int_0^a x^2 d(\sin\frac{2n\pi}{a}x)$$

$$= \left(\frac{a}{2n\pi}\right)\left[x^2 \sin\frac{2n\pi}{a}x\Big|_0^\alpha - \int_0^a 2x\sin\frac{2n\pi}{a}x\right]$$

$$= \left(\frac{a}{2n\pi}\right)\left[0 - 2\left(-\frac{a}{2n\pi}\right)\int_0^a xd\left(\cos\frac{2n\pi}{a}x\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2\left[x\cos\frac{2n\pi}{a}x\Big|_0^\alpha - \int_0^a \cos\frac{2n\pi}{a}xdx\right]$$

$$= 2\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2\left[a - \left(\frac{a}{2n\pi}\right)\sin\frac{2n\pi}{a}x\Big|_0^\alpha\right]$$

$$= 2\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2[a-0] = 2a\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2$$

$$\therefore \langle x^2\rangle = \frac{1}{a}\left[\frac{a^3}{3} - 2a\left(\frac{a}{2n\pi}\right)^2\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n^2\pi^2}\right] = a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right]$$

(ii) $\langle p_x^2\rangle = \Psi^* \hat{p}_x^2 \Psi dx = \dfrac{2}{a}\left(\dfrac{\hbar}{i}\right)^2 \displaystyle\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin\frac{n\pi}{a}x)dx$

$$= \frac{-2\hbar^2}{a}\int_0^a\left[-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin^2\frac{n\pi x}{a}\right]dx \qquad \hat{p}_x^2 = \hat{p}_x\hat{p}_x,\quad \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$= \frac{2n^2\pi^2\hbar^2}{a^3}\int_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{2n^2\pi^2\hbar^2}{a^3}\left[\frac{1}{2}\int_0^a(1-\cos\frac{2n\pi}{a}x)dx\right]$$

$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^3}\left[a - \frac{a}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{a}x\Big|_0^\alpha\right]$$

$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^3}[a-0] = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^3}n^2$$

وهو المطلوب .

[٦] المؤثر العكسي (Inverse operator)

يعرف المؤثر العكسي $\hat{A}^{-1}$ لأي مؤثر $\hat{A}$ بالعلاقة : $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$

حيث $\hat{I}$ مؤثر الوحدة (المحايد) .

ملحوظة: إذا كان $\Psi = \hat{A}\Phi$ فإن ذلك يستلزم أن تكون $\Phi = \hat{A}^{-1}\Psi$

الإثبات : بالتأثير على العلاقة $\Phi = \hat{A}^{-1}\Psi$ بالمؤثر $\hat{A}$ نحصل على

$$\hat{A}\Phi = \hat{A}\hat{A}^{-1}\Psi = \hat{I}\Psi = \Psi$$

ويلاحظ أن: $(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$ وكذلك : $(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A}$

[٧] المؤثر المترافق (Adjoint operator)

يعرف المؤثر المترافق $\hat{A}^{+}$ (وتقرأ $\hat{A}-$dagger) للمؤثر $\hat{A}$ بالعلاقة الآتية :

$$(\Psi, \hat{A}\Phi) = (\hat{A}^{+}\Psi, \Phi)$$

ويلاحظ أن :

$(i)\ (\hat{A}+\hat{B})^{+} = \hat{A}^{+} + \hat{B}^{+}$

$(ii)\ (\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{B}^{t}\hat{A}^{+}$

$(iii)\ (a\hat{A})^{+} = a^{*}\hat{A}^{+}$

$(\hat{A}\hat{B})^{*} = \hat{A}^{*}\hat{B}^{*}$

$(\hat{A}^{+})^{+} = \hat{A}$

$(\hat{A}^{*})^{*} = \hat{A}$

حيث a عدد قياسي مركب ، a^{*} المرافق المركب له .

[٨] المؤثر الواحدى (Unitary operator)

يعرف المؤثر الواحدى (أو الأحادي) $\hat{u}$ بالعلاقة الآتية : $\hat{u}\hat{u}^{+} = \hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{I}$

حيث $\hat{u}^{+}$ هو مترافق $\hat{I},\hat{u}$ هو مؤثر الوحدة .

ملحوظة: من تعريف المؤثر الواحدى :

$$\hat{u}\hat{u}^{+} = \hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{I} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

ومن تعريف المؤثر العكسي :

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$$

وبالنسبة للمؤثر الواحدى :

$$\hat{u}\hat{u}^{-1} = \hat{u}^{-1}\hat{u} = \hat{I} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

بمقارنة (2) و (1) نجد أن $\hat{u}^{+} = \hat{u}^{-1}$

وهذا يعني أن المؤثر المترافق للمؤثر الواحدى يساوي المؤثر العكسي له ولذلك يعرف المؤثر الواحدى أحيانا بأنه المؤثر الذي يتساوى مترافقه مع عكسه.

[٩] المؤثر الهيرميتي (Hermitian operator)

يعرف المؤثر الهيرميتي $\hat{A}$ بأنه المؤثر الذي يخضع للعلاقة :-

$$(\hat{A}\Psi,\Phi) = (\Psi,\hat{A}\Phi) \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

حيث Ψ,Φ دالتان (أو متجهان) في فراغ هلبرت .

ملاحظات:

ملاحظة(1): ليست كل المؤثرات هيرمتيتيه ،ولكن المؤثر الهيرميتي فقط هو الذي يخضع للعلاقة (1) .

ملاحظة(2): طبقا لديراك فإن : جميع المؤثرات في ميكانيكا الكم يجب أن تكون هيرميتية.

ملاحظة(3): من تعريف المؤثر المترافق :

$$(\Psi,\hat{A}\Phi) = (\hat{A}^{+},\Psi\Phi) \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

ومن تعريف المؤثر الهيرميتي :

$$(\Psi,\hat{A}\Phi) = (\hat{A}\Psi,\Phi) \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

بمقارنة (3) و(2) نجد أن: $\hat{A} = \hat{A}^{+}$ (للمؤثر الهيرميتي)

أي أن : المؤثر الهيرميتي يساوي المؤثر المترافق له .

ولذلك يسمى المؤثر الهيرميتي بالمترافق الذاتي

(self-adjoint operator)

ملاحظة(4): من خواص حاصل الضرب القياسي فإن :

$$(\hat{A}\Psi,\Phi)=(\Phi,\hat{A}\Psi)^{*}=\left[\int\Phi^{*}\hat{A}\Psi dV\right]^{*}=\int(\Phi^{*})^{*}\hat{A}^{*}\Psi^{*}dV$$

$$=\int\Phi\hat{A}^{*}\Psi^{*}dV \qquad \_\_\_\_(4)$$

أيضاً :

$$(\Psi,\hat{A}\Phi)=\int\Psi^{*}\hat{A}\Phi dV \qquad \_\_\_\_(5)$$

(من تعريف حاصل الضرب القياسي)

وللمؤثر الهيرميتي فإن (4) تساوي (5)

$$\therefore(\hat{A}\Psi,\Phi)=(\Psi,\hat{A}\Phi)$$

$$\therefore\int\Phi\hat{A}^{*}\Psi^{*}dV=\int\Psi^{*}\hat{A}\Phi dV$$

أي أنه للمؤثر الهيرميتي يكون :

$$\int\Psi^{*}\hat{A}\Phi dV=\int\Phi\hat{A}^{*}\Psi^{*}dV$$

ملاحظة(5): في حالة المؤثرات الهيرميتية :

$$\hat{A}=\hat{A}^{+} \quad , \quad \hat{B}=\hat{B}^{+}$$

$$\therefore(\hat{A}\hat{B})^{+}=\hat{B}^{+}\hat{A}^{+}=\hat{B}\hat{A}$$

ملاحظة(6): إذا كان المؤثر الواحدى هو مؤثر هيرميتي فإن :

$\hat{u}^{+}=\hat{u}^{-1} \rightarrow$ واحدى

$\hat{u}^{+}=\hat{u} \rightarrow$ هيرميتي

$$\therefore\hat{u}^{-1}=\hat{u}$$

أي أن المؤثر العكسي للمؤثر الواحدى الهيرميتي يساوي نفسه .

[١٠] منقول المؤثر (Transpose of operator) :

يعرف منقول المؤثر $\hat{A}$ (transpose) كالآتي :-

$$\int\Psi\hat{A}\Phi\, dV=\int\Phi\tilde{\hat{A}}\Psi dV \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث $\tilde{\hat{A}}$ هو منقول المؤثر $\hat{A}$ ، [أي أنه ينقل Ψ مكان Φ والعكس]

وللمرافق المركب $\hat{A}^*$ للمؤثر $\hat{A}$ يعرف المنقول $\tilde{\hat{A}}^*$ بعلاقة مماثلة :

$$\int \Psi \hat{A}^* \Phi \, dV = \int \Phi \tilde{\hat{A}}^* \Psi dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

ملاحظات:

ملاحظة(1): بالنسبة للمؤثر الهيرميتي فإنه من التعريف :-

$$\int \Psi^* \hat{A}^* \Phi \, dV = \int \Phi \hat{A}^* \Psi^* dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

ومن تعريف المنقول (علاقة رقم (1))

$$\int \Psi \hat{A} \Phi \, dV = \int \Phi \tilde{\hat{A}} \Psi dV$$

وبأخذ $\Psi = \Psi^*$

$$\int \Psi^* \hat{A} \Phi \, dV = \int \Phi \tilde{\hat{A}} \Psi^* dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

من (4) و (3) نجد أنه للمؤثر الهيرميتي يكون : $\hat{A}^* = \tilde{\hat{A}}$

أي أنه في حالة المؤثر الهيرميتي يكون :- المرافق المركب = المنقول

(Complex conjugate = transpose)

الخلاصة: في حالة المؤثر الهيرميتي فإن :

(المؤثر = المترافق) $\qquad (i)\ \hat{A} = \hat{A}^+$

(المرافق المركب = المنقول) $\qquad (i)\ \hat{A}^* = \tilde{\hat{A}}$

ملاحظة(2): يمكن إثبات أن :

المترافق لأي مؤثر يساوي منقول المرافق المركب له

Adjoint = transpose of complex conjugate

أي أن : $\hat{A}^+ = \tilde{\hat{A}}^*$

الإثبات: تعرف القيمة المتوقعة (أو المتوسطة) للكمية A كالآتي :-

$$\langle A \rangle = \overline{A} = \int \Psi^* \hat{A} \Psi dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

وتعرف القيمة المتوقعة (أو المتوسطة) للمرافق المركب للكمية $\hat{A}$ كالآتي :-

$$\langle A^* \rangle = \overline{A^*} = \int \Psi^* \hat{A}^+ \Psi dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

حيث المؤثر المناظر للكمية $\overline{A^*}$ هو $\hat{A}^+$ وهو بوجه عام يختلف عن $\hat{A}^*$

أيضا فإن : القيمة المتوقعة للمرافق المركب لكمية = المرافق المركب للقيمة المتوقعة للكمية أي أن : $\langle A^* \rangle = \langle A \rangle^*$ أو $\overline{A^*} = (\overline{A})^*$

والآن :

$$\overline{A^*} = (\overline{A})^* = \left[\int \Psi^* \hat{A} \Psi dT\right]^* = \int \Psi \hat{A}^* \Psi^* dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(3)}$$

ومن تعريف المنقول :

$$\int \Psi \hat{A} \Phi dV = \int \Phi \tilde{\hat{A}} \Psi dV$$

$$\int \Psi \hat{A}^* \Phi dV = \int \Phi \tilde{\hat{A}}^* \Psi dV$$

وبوضع $\Phi = \psi^*$

$$\therefore \int \Psi \hat{A}^* \Psi^* dV = \int \Psi^* \tilde{\hat{A}}^* \Psi dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

من (4) و (3) :

$$\overline{\mathrm{A}^*} = \int \Psi^* \tilde{\hat{A}}^* \Psi dV \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

بمساواة (5) و (2) نجد أن :

$$\hat{A}^+ = \tilde{\hat{A}}^*$$

أي أن المترافق = منقول المرافق المركب .

<u>أمثلة محلوله:</u>

<u>مثال(١):</u> أثبت أن القيمة الذاتية لأي مؤثر هيرميتي هي كمية حقيقة

<u>الحـل:</u> معادلة القيمة الذاتية : $\hat{A}\psi = a\psi$ ، حيث a هي القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{A}$.

المرافق المركب لهذه المعادلة :

$$\hat{A}^* \psi^* = a^* \psi^*$$

من الخاصية الهيرميتيه للمؤثر $\hat{A}$:

$$\int \Psi^* \hat{A} \Psi dV = \int \Psi \hat{A}^* \Psi^* dV$$
$$\therefore \int \Psi^* a \Psi dV = \int \Psi a^* \Psi^* dV$$
$$\therefore a \int \Psi^* \Psi dV = a^* \int \Psi \Psi^* dV$$
$$\therefore (a - a^*) \int \Psi^* \Psi dV = 0$$

وحيث أن : $\int \Psi \Psi^* dV = 1$ (الدالة ψ المعايرة)

$$\therefore a - a^* = 0 \qquad \therefore a = a^*$$

وهذا يعني أن الكمية a هي كمية حقيقية .

<u>مثال(٢):</u> أثبت أن الدوال الذاتية للمؤثر الهرميتي تخضع لخاصية التعامد .

<u>الحـل:</u> نفرض أن لدينا دالتين ψ_n, ψ_m للمؤثر الهيرميتى $\hat{A}$ فتكون معادلتي القيمة الذاتية : $\hat{A}\psi_n = a_n \psi_n \;,\; \hat{A}\psi_m = a_m \psi_m$

حيث $a_n \neq a_m$

ومن الخاصية الهيرميتيه :

$$\int \psi_n^* \hat{A} \psi_m dV = \int \psi_m \hat{A}^* \psi_n^* dV$$
$$\therefore \int \psi_n^* a_m \psi_m dV = \int \psi_m a_n^* \psi_n^* dV$$
$$\therefore a_m \int \psi_n^* \psi_m dV = a_n^* \int \psi_m \psi_n^* dV = a_n \int \psi_n^* \psi_m dV$$
$$\therefore (a_m - a_n) \int \psi_n^* \psi_m dV = 0$$

$a_n^* = a_n$
(من مثال(١))

ولكن : $a_n \neq a_m \leftarrow a_m - a_n \neq 0$

$$\therefore \int \psi_n^* \psi_m dV = 0$$
$$\therefore (\psi_n, \psi_m) = 0$$

أي أن الدالتين ψ_n, ψ_m للمؤثر الهيرميتي هما متعامدتان .

وهو المطلوب .

<u>مثال(٣):</u> أثبت أن الشرط اللازم لكي يكون حاصل ضرب مؤثرين هيرمتيين هو مؤثر هيرميتي أن يكون المؤثران متبادلان .

<u>الحـــل:</u>

نفرض أن لدينا مؤثران $\hat{A},\hat{B}$ (هيرمتيان)

<u>من الخاصية الهيرميتيه للمؤثر</u> $\hat{A}$:

$$(\psi,\hat{A}(\underbrace{\hat{B}\phi}))=(\hat{A}\psi,\hat{B}\phi)$$

$$\int\psi^{*}\hat{A}(\hat{B}\phi)dV=\int(\hat{A}\psi)^{*}\hat{B}\phi\,dV \qquad \_\_\_\_(1)$$

<u>ومن الخاصية الهيرميتيه للمؤثر</u> $\hat{B}$:

$$(\hat{A}\psi,\hat{B}\phi)=(\hat{B}(\underbrace{\hat{A}\psi}),\phi)$$

$$\therefore\int(\hat{A}\psi)^{*}\hat{B}\phi\,dV=\int\left[\hat{B}(\hat{A}\psi)\right]^{*}\phi\,dV$$
$$=\int\left[\hat{B}\hat{A}\psi\right]^{*}\phi\,dV$$

وإذا كان المؤثران متبادلان : $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$

$$\therefore\int(\hat{A}\psi)^{*}\hat{B}\phi\,dV=\int\left[\hat{A}\hat{B}\psi\right]^{*}\phi\,dV \qquad \_\_\_\_(2)$$

من (2) و (1) نحصل على :

$$\int\psi^{*}\hat{A}(\hat{B}\phi)dV=\int\left[\hat{A}\hat{B}\psi\right]^{*}\phi\,dV$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$(\psi,\underbrace{\hat{A}\hat{B}}\phi)=(\underbrace{\hat{A}\hat{B}}\psi,\phi)$$

$$\therefore(\psi,\hat{C}\phi)=(\hat{C}\psi,\phi)$$

وهذا يعني أن المؤثر $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$ هو مؤثر هيرميتي بشرط أن $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$ ، أي بشرط أن $\hat{A},\hat{B}$ يكونان متبادلان .

وهو المطلوب .

<u>مثال(٤):</u> أثبت أن القيمة المتوقعة للكمية الطبيعية المناظرة للمؤثر الهيرميتي تكون كمية حقيقية .

<u>الحـل:</u>

نعتبر a هي كمية طبيعية تناظر المؤثر الهيرميتي $\hat{A}$ ، القيمة المتوقعة لهذه الكمية هي :

$$\bar{a} = \langle a \rangle = \int \psi^* \hat{A}\psi \, dV = (\psi, \hat{A}\psi)$$

ومن الخاصية الهيرميتيه للمؤثر $\hat{A}$:

$$(\psi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}\psi, \psi) \qquad \text{\_\_\_\_\_}(1)$$

ومن خواص حاصل الضرب القياسي :

$$(\psi, \phi) = (\phi, \psi)^*$$

$$(\hat{A}\psi, \psi) = (\psi, \hat{A}\psi)^* \qquad \text{\_\_\_\_\_}(2)$$

من (2) و (1) نحصل على الأتي :

$$(\psi, \hat{A}\psi) = (\psi, \hat{A}\psi)^*$$

$$\langle a \rangle = \langle a \rangle^* \quad \rightarrow \bar{a} = (\bar{a})^*$$

وهذا يعني أن القيمة المتوقعة للكمية الطبيعية a المناظرة للمؤثر الهيرميتي $\hat{A}$ هي كمية حقيقية .

وهو المطلوب .

<u>مثال(٥):</u> إذا كان $\hat{A}, \hat{B}$ مؤثران هيرميتيان فاثبت أن : $i\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ هو أيضاً مؤثر هيرميتي .

<u>الحـل:</u>

بوضع $\hat{C} = i\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$

فلإثبات أن $\hat{C}$ هو مؤثر هيرميتي نثبت أن : $\hat{C}^+ = \hat{C}$

$$\hat{C} = i\left[\hat{A},\hat{B}\right] = i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$$

$$\hat{C}^+ = -i\left[\hat{A},\hat{B}\right]^+ = -i\left[(\hat{A}\hat{B})^+ - (\hat{B}\hat{A})^+\right]$$

$$= -i\left[\hat{B}^+\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{B}^+\right] = i\left[\hat{A}^+\hat{B}^+ - \hat{B}^+\hat{A}^+\right] \qquad \left|\ (\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+\right.$$

ولكن $\hat{A},\hat{B}$ هيرميتيان : $\hat{A}^+ = \hat{A}\ ,\ \hat{B}^+ = \hat{B}$

$$\therefore \hat{C}^+ = i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = i\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{C}$$

أي أن $\hat{C} = i\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ هو مؤثر هيرميتي . وهو المطلوب .

مثال (٦) : أثبت أن القيمة المتوقعة لمربع كمية طبيعية (f) يكون دائماً كمية موجبة .

الحل :

نفرض أن الكمية f يناظرها المؤثر $\hat{f}$ ، فمن تعريف القيمة المتوقعة لمربع f هي :

$$< f^2 > = \int \psi^* \hat{f}^2 \psi\, d\tau = \psi^* \hat{f}\hat{f}\psi\, d\tau \qquad \_\_\_\_\ (1)$$

ومن تعريف المترافق (adjoint) أو المرافق الهيرميتي $\hat{f}^+$ للمؤثر $\hat{f}$:

$$\int \psi_1^* \hat{f}\psi_2\, d\tau = \int \left(\hat{f}^+\psi_1\right)^* \psi_2\, d\tau$$

فإن العلاقة (1) تأخذ الصورة :

$$< f^2 > = \int \left(\hat{f}^+\psi\right)^* \hat{f}\psi\, d\tau$$

ولما كانت أي كمية طبيعية يمكن تمثيلها بمؤثر هيرميتي له الخاصية $\hat{f} = \hat{f}^+$

$$\therefore\ < f^2 > = \int \left(\hat{f}\psi\right)^* \left(\hat{f}\psi\right) d\tau = \int \left|\left(\hat{f}\psi\right)\right|^2 d\tau \geq 0$$

وذلك حيث أن تكامل القيمة المطلقة (أو مربعها) لا يكون سالباً .

وإذن فإن القيمة المتوقعة لمربع الكمية الطبيعية يكون موجب دائماً .

وهو المطلوب .

مثال(٧): (أ) أثبت أن أي مؤثر $\hat{A}$ لا يكون له أكثر من معكوس واحد .

(ب) إذا كان $\hat{A}=\hat{A}(\lambda)$ حيث λ أي بارامتر وكان $\hat{A}\hat{A}^{1-}=\hat{I}$

فاثبت أن :

$$\frac{d\hat{A}^{-1}}{d\lambda}=-\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}$$

الحل:

(أ) نفرض العكس بمعنى أن المؤثر $\hat{A}$ يكون له معكوسان مختلفان $\hat{B}_1,\hat{B}_2$ ، فمن تعريف المعكوس (المؤثر العكسي) :

$$\hat{A}\hat{B}_1=\hat{B}_1\hat{A}=\hat{I} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$\hat{A}\hat{B}_2=\hat{B}_2\hat{A}=\hat{I} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

من (2) و (1) :

$$\hat{A}\hat{B}_1=\hat{A}\hat{B}_2$$

بضرب الطرفين من اليسار في $\hat{A}^{-1}$:

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{B}_1=\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{B}_2 \qquad \Big|\hat{A}^{-1}\hat{A}=\hat{I}$$

$$\therefore \hat{I}\hat{B}_1=\hat{I}\hat{B}_2$$

ولكن : $\hat{I}\psi=\psi$ (تعريف المؤثر المحايد)

$$\therefore \hat{B}_1=\hat{B}_2$$

وهذا يخالف الفرض أن $\hat{B}_1,\hat{B}_2$ مختلفان

∴ المؤثر $\hat{A}$ ليس له أكثر من معكوس واحد . وهو المطلوب الأول .

(ب) حيث أن

$$\hat{A}=\hat{A}(\lambda) \quad , \quad \hat{A}\hat{A}^{-1}=\hat{I}$$

فبالتفاضل بالنسبة إلى λ :

$$\hat{A}\frac{d\hat{A}^{-1}}{d\lambda}+\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}=0 \qquad \therefore \hat{A}\frac{d\hat{A}^{-1}}{d\lambda}=-\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}$$

بضرب طرفي هذه العلاقة من اليسار في $\hat{A}^{-1}$

$$\therefore \hat{A}^{-1}\hat{A}\frac{d\hat{A}^{-1}}{d\lambda} = -\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}$$

$$\therefore \frac{d\hat{A}^{-1}}{d\lambda} = -\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}$$

وهو المطلوب ثانياً .

مثال(٨): (أ) أثبت أن أي مؤثر واحدى $\hat{u}$ يمكن كتابته كمجموع مؤثرين $\hat{A}, \hat{B}$ بالصورة $\hat{u} = \hat{A} + i\hat{B}$ ، وذلك بشرط أن $\hat{A}, \hat{B}$ يكونان هيرميتيان ومتبادلان .

(ب) أثبت أن المؤثر الواحدى الخاضع للخاصية المذكورة في (أ) له قيمة ذاتية مطلقة تساوي الوحدة ، وأنه يمكن كتابته على صورة $e^{i\hat{C}}$ حيث $\hat{C}$ مؤثر هيرميتي .

الحـــل:

(أ) يمكن كتابة المؤثر $\hat{u}$ بالصورة :

$$\hat{u} = \frac{1}{2}\hat{u} + i\left(\frac{1}{2i}\hat{u}\right) + \frac{1}{2}\hat{u}^{+} - i\left(\frac{1}{2i}\hat{u}^{+}\right) = \frac{\hat{u}+\hat{u}^{+}}{2} + i\left[\frac{\hat{u}-\hat{u}^{+}}{2i}\right] = \hat{A} + i\hat{B}$$

حيث : $\hat{A} = \dfrac{\hat{u}+\hat{u}^{+}}{2}$, $\hat{B} = \dfrac{\hat{u}-\hat{u}^{+}}{2i}$

والآن : لإثبات أن $\hat{A}, \hat{B}$ هيرميتيان :

$$\hat{A} = \frac{\hat{u}+\hat{u}^{+}}{2}$$

$$\therefore \hat{A}^{+} = \frac{1}{2}\left[\hat{u}^{+} + (\hat{u}^{+})^{+}\right] = \frac{1}{2}(\hat{u}^{+} + \hat{u}) = \frac{\hat{u}+\hat{u}^{+}}{2} = \hat{A}$$

أيضاً :

$$\hat{B} = \frac{\hat{u}-\hat{u}^{+}}{2i}$$

$$\hat{B}^{+} = \frac{1}{-2i}\left[\hat{u}^{+} - (\hat{u}^{+})^{+}\right] = \frac{1}{-2i}\left[\hat{u}^{+} - \hat{u}\right] = \frac{\hat{u} - \hat{u}^{+}}{2i} = \hat{B}$$

وهذا يعني أن $\hat{A}, \hat{B}$ هما مؤثران هيرميتيان [حيث $\hat{A}^{+} = \hat{A}$, $\hat{B}^{+} = \hat{B}$] .

<u>ولإثبات أن $\hat{A}, \hat{B}$ متبادلان :</u>

حيث أن :

$$\hat{A} = \frac{\hat{u} + \hat{u}^{+}}{2} \quad , \hat{B} = \frac{\hat{u} - \hat{u}^{+}}{2i}$$

$$\therefore \hat{A}\hat{B} = \left(\frac{\hat{u} + \hat{u}^{+}}{2}\right)\left(\frac{\hat{u} - \hat{u}^{+}}{2i}\right) = \frac{\hat{u}^{2} - \hat{u}\hat{u}^{+} + \hat{u}^{+}\hat{u} - (\hat{u}^{+})^{2}}{4i}$$

$$= \frac{\hat{u}^{2} - (\hat{u}^{+})^{2}}{4i} \qquad \_\_\_(1) \qquad \Big| \; \hat{u}\hat{u}^{+} = \hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{I}$$

$$\therefore \hat{B}\hat{A} = \left(\frac{\hat{u} - \hat{u}^{+}}{2i}\right)\left(\frac{\hat{u} + \hat{u}^{+}}{2}\right) = \frac{\hat{u}^{2} + \hat{u}\hat{u}^{+} - \hat{u}^{+}\hat{u} - (\hat{u}^{+})^{2}}{4i}$$

$$= \frac{\hat{u}^{2} - (\hat{u}^{+})^{2}}{4i} \qquad \_\_\_(2)$$

من (2) و (1) نجد أن : $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$

$$\therefore (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = 0 \qquad \therefore \left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$$

أي أن $\hat{A}, \hat{B}$ يكونان متبادلان . وهو المطلوب الأول .

(ب) حيث أن المؤثر $\hat{u}$ يمكن كتابته بدلالة المؤثرين الهيرميتيين المتبادلين $\hat{A}, \hat{B}$ بالصورة $(\hat{A} + i\hat{B})$ ، فمن خاصية التبادل يمكن كتابة كل من $\hat{A}, \hat{B}$ بدلالة دالة ذاتية آنية Ψ (نظرية) كالآتي : $\hat{A}\Psi = a\Psi$, $\hat{B}\Psi = b\Psi$

أيضا :

$$\hat{u}\Psi = (\hat{A} + i\hat{B})\Psi = \hat{A}\Psi + i\hat{B}\Psi = a\Psi + ib\Psi = (a + ib)\Psi \_\_\_(1)$$

وهذا يعني أن $(a + ib)$ هي القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{u}$.

والمطلوب إثبات أن $|a+ib|=1$:

إذا كان $\hat{u}^{+}$ هو مرافق $\hat{u}$ فإن :

$$\hat{A}^{+}=\hat{A} \qquad \hat{B}^{+}=\hat{B}$$

$$\hat{u}^{+}\Psi=(\hat{A}^{+}-i\hat{B}^{+})\Psi=(\hat{A}-i\hat{B})\Psi=(a-ib)\Psi \quad \_\_(2)$$

$$\hat{u}\hat{u}^{+}\Psi=(\hat{A}+i\hat{B})(\hat{A}-i\hat{B})\Psi$$

$$\therefore \hat{I}\,\Psi=(\hat{A}^{2}+\hat{B}^{2})\Psi$$

$$\therefore \hat{A}^{2}+\hat{B}^{2}=\hat{I} \qquad \_\_\_\_(3)$$

ولكن :

$$(\hat{A}^{2}+\hat{B}^{2})\Psi=(a^{2}+b^{2})\Psi$$

ومن (3) :

$$\therefore \hat{I}\,\Psi=(a^{2}+b^{2})\Psi$$

$$\therefore \Psi=(a^{2}+b^{2})\Psi$$

$$\therefore a^{2}+b^{2}=1 \qquad \_\_\_\_(4)$$

وهذا يعني : $|a+ib|=\sqrt{a^{2}+b^{2}}=1$

أي أن القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{u}$ لها قيمة مطلقة تساوي الواحد .

ولإثبات أن $\hat{u}$ يمكن كتابته على صورة $e^{i\hat{C}}$ حيث $\hat{C}$ مؤثر هيرميتي :

حيث أن $a^{2}+b^{2}=1$ فإنه من نظرية الأعداد المركبة يكون : $a+ib=e^{iC}$

حيث c عدد حقيقي .

بالتعويض في (1) :

$$\hat{u}\Psi=e^{iC}\Psi \qquad \_\_\_\_(5)$$

ولنفرض وجود مؤثر هيرميتي $\hat{C}$ بحيث أن : $\hat{C}\Psi=C\Psi$

$$\therefore e^{i\hat{C}}\Psi=\left[1+i\hat{C}+\frac{(i\hat{C})^{2}}{2!}+\dots\dots\right]\Psi=\left[1+iC+\frac{(iC)^{2}}{2!}+\dots\dots\right]\Psi$$

$$=e^{iC}\Psi \qquad \_\_\_\_(6)$$

من (6) و (5) يتضح أن : $\hat{u}\Psi = e^{i\hat{C}}\Psi$

وهذا يعني أن $\hat{u}$ يمكن كتابته بصورة $e^{i\hat{C}}$ حيث $\hat{C}$ مؤثر هيرميتي .

وهو المطلوب ثانياً .

<u>مثال(٩):</u> إذا كان التحويل الواحدى (Unitary Transform.) يعرف بأنه التحويل الذي يربط بين المؤثر $\hat{A}_\psi$ بالنسبة لمجموعة الدوال $\{\psi\}$ والمؤثر $\hat{A}_\phi$ بالنسبة لمجموعة الدوال $\{\phi\}$ ويكتب بالصورة : $\hat{A}_\phi = \hat{u}^+\hat{A}_\psi\hat{u}$ حيث $\hat{u}^+\hat{u} = \hat{I}$ ، فأثبت أن القيمة الذاتية لمؤثر $\hat{A}$ لا تتغير بالتحويل الواحدى .

<u>الحــل:</u>

التحويل الواحدى المعطى هو :

$$\hat{A}_\phi = \hat{u}^+\hat{A}_\psi\hat{u} \qquad \text{(1)}$$

وتكون العلاقة بين الدوال في هذا التحويل هي : $\psi = \hat{u}\phi \rightarrow \phi = \hat{u}^+\psi$

حيث : $\hat{u}^+\hat{u} = \hat{I}$

والآن من (1) :

$$\hat{A}_\phi\phi = (\hat{u}^+\hat{A}_\psi\hat{u})\phi = \hat{u}^+\hat{A}_\psi\hat{u}\hat{u}^+\psi = \hat{u}^+\hat{A}_\psi\psi \qquad \text{(2)}$$

فإذا كانت λ هي القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{A}_\psi$ بالنسبة للمجموعة $\{\psi\}$ أي أن :

$$\hat{A}_\psi\psi = \lambda\psi \qquad \text{(3)}$$

بالتعويض في (2) :

$$\hat{A}_\phi\phi = \hat{u}^+(\lambda\psi) = \lambda\hat{u}^+\psi$$

وحيث أن : $\hat{u}^+\psi = \phi$

$$\therefore \hat{A}_\phi\phi = \lambda\phi \qquad \text{(4)}$$

من (4) و (2) يتضح أن λ (القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{A}_\psi$) هي نفسها القيمة الذاتية لــ $\hat{A}_\phi$ أي أن القيمة الذاتية للمؤثر هي نفسها لم تتغير باستخدام التحويل الواحدى .

مسائل على الباب الثاني

(١)

أ- إذا كان $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{I}$ ، حيث $\hat{I}$ هو المؤثر المحايد (مؤثر الوحدة) ، فأثبت أن : $\left[\hat{A},\hat{B}^2\right] = 2\hat{B}$.

ب- إذا كان $\left[\hat{A},\hat{B}\right] \neq 0$ فاثبت أن :

$$(\hat{A}+\hat{B})(\hat{A}-\hat{B}) = (\hat{A}^2 - \hat{B}^2) - \left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

وإذا كان $\hat{A},\hat{B}$ متبادلان ، فبين ما تؤول إليه هذه العلاقة .

(٢) أثبت العلاقات الآتية لمبدولات المؤثرات $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$

$$(i) \quad \left[\hat{A},\hat{B}\right] = -\left[\hat{B},\hat{A}\right]$$

$$(ii) \quad \left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]$$

$$(iii) \quad \left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$$

$$(iv) \quad \left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \hat{0}$$

حيث $\hat{0}$ هو المؤثر الصفري .

(٣) إذا كان :

$$\hat{A} = k\sin\theta - i\cos\theta\frac{d}{d\theta}$$

$$\hat{B} = k\cos\theta + i\sin\theta\frac{d}{d\theta}$$

$$\hat{C} = -i\frac{d}{d\theta}$$

هي ثلاثة مؤثرات ، حيث k ثابت .

أثبت أن :

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = i\hat{C} \quad , \quad \left[\hat{B},\hat{C}\right] = -i\hat{A} \quad , \quad \left[\hat{C},\hat{A}\right] = -i\hat{B}$$

وإذا كان المؤثر $\hat{D}^2$ يعرف بالعلاقة : $\hat{D}^2 = \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{C}^2$

فأثبت أن المؤثر $\hat{C}$ يكون متبادلا مع $\hat{D}^2$ أي أن : $\left[\hat{C}, \hat{D}^2\right] = 0$

(٤) أثبت أن مجموع أي مؤثرين هيرمتيين يكون مؤثراً هيرميتياً .

(٥) أثبت أن أي مؤثر $\hat{C}$ يمكن كتابته بدلالة مؤثرين هيرمتيين $\hat{A}, \hat{B}$ بالصورة

$$\hat{C} = \hat{A} + i\hat{B}$$

(٦) إذا كان $\hat{A}, \hat{B}$ مؤثران غير متبادلين فاثبت أن :

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^{-1}\right] = -\hat{B}^{-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \hat{B}^{-1}$$

حيث $\hat{B}^{-1}$ هو معكوس المؤثر $\hat{B}$.

(٧) إذا كان المؤثر $\hat{u}$ يرتبط بالمؤثر الهيرميتي $\hat{c}$ بالعلاقة :

$\hat{u} = \dfrac{1 + i\hat{c}}{1 - i\hat{c}}$ فاثبت أن $\hat{u}$ يشكل مؤثراً واحدياً .

(٨) إذا كان $\hat{u}, \hat{V}$ هما مؤثران واحديان ، فاثبت أن :

$(\hat{u}^+), (\hat{u}\hat{V}), (\hat{u}\hat{V}^{-1})$ هي مؤثرات واحدية .

(٩) أثبت أن التحويل الواحدى (الناتج عن تأثير المؤثر الواحدى $\hat{u}$) يحافظ على الخواص الآتية بدون تغيير :

(i) الضرب القياسي لأي متجهين (أو دالتين) في فراغ هلبرت (H) .

(ii) معيار متجه (أو دالة) في الفراغ H .

(iii) خاصية التعامد لأي متجهين (أو دالتين) في نفس الفراغ H .

حلول المسائل على الباب الثاني (1)

حل المسألة رقم (١) :

أ- حيث أن $\left[\hat{A},\hat{B}\right] \doteq \hat{I}$ فإن :

$$\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=\hat{I} \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

بالتأثير على (1) من اليمين بالمؤثر $\hat{B}$: $\hat{A}\hat{B}^2-\hat{B}\hat{A}\hat{B}=\hat{I}\hat{B}$

بالتأثير على (1) من اليسار بالمؤثر $\hat{B}$: $\hat{B}\hat{A}\hat{B}-\hat{B}^2\hat{A}=\hat{B}\hat{I}$

بالجمع :

$$\hat{A}\hat{B}^2-\hat{B}\hat{A}=2\hat{B}\hat{I}$$

$$\therefore \left[\hat{A},\hat{B}^2\right]=2\hat{B}$$

ب- حيث أن $\left[\hat{A},\hat{B}\neq 0\right]$ فإن :

$$(\hat{A}+\hat{B})(\hat{A}-\hat{B})=\hat{A}^2-\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}-\hat{B}^2$$

$$=(\hat{A}^2-\hat{B}^2)-(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$$

$$=(\hat{A}^2-\hat{B}^2)-\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

وإذا كان $\hat{A},\hat{B}$ متبادلان فإن : $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$

$$\therefore (\hat{A}+\hat{B})(\hat{A}-\hat{B})=\hat{A}^2+\hat{B}^2$$

حل المسألة رقم (٢) :

(i) $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=-(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B})=-\left[\hat{B},\hat{A}\right]$

(ii) $\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right]=\hat{A}(\hat{B}\hat{C})-(\hat{B}\hat{C})\hat{A}=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+(\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C})$

$$=(\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C})+(\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A})$$

$$=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\hat{C}+\hat{B}(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})=\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]$$

(iii) $\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=(\hat{A}\hat{B})\hat{C}-\hat{C}(\hat{A}\hat{B})=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}+(\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{A}\hat{C}\hat{B})$

$$=(\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{C}\hat{B})+(\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{C}\hat{A}\hat{B})$$

$$=\hat{A}(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})+(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})\hat{B}=\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$$

$$\text{(iv)}\left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right]+\left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right]+\left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]$$

$$=\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B}\right]+\left[\hat{B},\hat{C}\hat{A}-\hat{A}\hat{C}\right]+\left[\hat{C},\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right]$$

$$=\hat{A}(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})-(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})\hat{A}+\hat{B}(\hat{C}\hat{A}-\hat{A}\hat{C})-(\hat{C}\hat{A}-\hat{A}\hat{C})\hat{B}+$$

$$+\hat{C}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})-(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\hat{C}$$

$$=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+\hat{C}\hat{B}\hat{A}+\hat{B}\hat{C}\hat{A}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}$$

$$+\hat{A}\hat{C}\hat{B}+\hat{C}\hat{A}\hat{B}-\hat{C}\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}\quad=\hat{0}$$

وهو المطلوب .

تسمى العلاقة الأخيرة بعلاقة جاكوبى (Jacbi relation) .

<u>حل المسألة رقم (٣) :</u>

$$\text{(i)}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\ \psi=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\psi$$

$$\hat{A}\hat{B}\psi=(k\sin\theta-i\cos\theta\frac{d}{d\theta})(k\cos\theta+i\sin\theta\frac{d}{d\theta})\psi$$

$$=k^2\sin\theta\cos\theta\psi+ik\sin^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}-ik\cos\theta\left[\cos\theta\frac{d\psi}{d\theta}+(-\sin\theta)\psi\right]$$

$$+\cos\theta\left[\sin\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\cos\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right]$$

$$=k^2\sin\theta\cos\theta\psi+ik\sin^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}-ik\cos^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}+ik\cos\theta\sin\theta\psi$$

$$+\cos\theta\sin\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\cos^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}\qquad\text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

المثل فإن :

$$\hat{B}\hat{A}\psi=k^2\sin\theta\cos\theta\psi-ik\cos^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}+ik\sin^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}+$$

$$+ik\sin\theta\cos\theta.\psi+\sin\theta\cos\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2}-\sin^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}\qquad\text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

$$\therefore \left[\hat{A},\hat{B}\right]\ \psi=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\psi=\cos^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}+\sin^2\theta\frac{d\psi}{d\theta}$$

$$=\frac{d\psi}{d\theta}=i(-i\frac{d\psi}{d\theta})=i\hat{C}\psi$$

$$\therefore \left[\hat{A},\hat{B}\right]=\frac{d}{d\theta}=i\hat{C} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(I)}$$

(ii) $\left[\hat{B},\hat{C}\right]\ \psi=(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})\psi$

$$\hat{B}\hat{C}\psi=(k\cos\theta+i\sin\theta\frac{d}{d\theta})(-i\frac{d}{d\theta})\psi$$

$$=-ik\cos\theta\frac{d\psi}{d\theta}+\sin\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

$$\hat{C}\hat{B}\psi=(-i\frac{d}{d\theta})(k\cos\theta+i\sin\frac{d}{d\theta})\psi$$

$$=-ik\frac{d}{d\theta}(\cos\theta.\psi)+\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta})$$

$$=-ik\cos\theta\frac{d\psi}{d\theta}+ik\sin\theta.\psi+\sin\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\cos\theta\frac{d\psi}{d\theta} \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

$$\therefore \left[\hat{B},\hat{C}\right]\psi=\hat{B}\hat{C}\psi-\hat{C}\hat{B}\psi=-ik\sin\theta.\psi-\cos\theta\frac{d\psi}{d\theta}$$

$$=-i(k\sin\theta-i\cos\theta\frac{d}{d\theta})\psi=i\hat{A}\psi$$

حيث

$$\therefore \left[\hat{B},\hat{C}\right]=-i\hat{A}\text{\_\_\_\_}(II) \quad \Bigg| \quad \hat{A}=k\sin\theta-i\cos\theta\frac{d}{d\theta}$$

(iii) $\left[\hat{C},\hat{A}\right]\ \psi=(\hat{C}\hat{A}-\hat{A}\hat{C})\psi$

$$\hat{C}\hat{A}\psi=(-i\frac{d}{d\theta})(k\sin\theta-i\cos\theta\frac{d}{d\theta})\psi$$

$$= -i\frac{d}{d\theta}(k\sin\theta.\psi) - \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\frac{d\psi}{d\theta})$$

$$= -ik\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta} - ik\cos\theta.\psi - \cos\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \sin\theta\frac{d\psi}{d\theta} \quad \_\_(5)$$

$$\hat{A}\hat{C}\psi = (k\sin\theta - i\cos\theta\frac{d}{d\theta})(-i\frac{d}{d\theta})\psi$$

$$= -ik\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta} - \cos\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2} \quad \_\_\_\_\_\_(6)$$

$$\therefore \left[\hat{C},\hat{A}\right]\psi = \hat{C}\hat{A}\psi - \hat{A}\hat{C}\psi = -ik\cos\theta.\psi + \sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}$$

$$= -i\left[k\cos\theta + i\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right]\psi = -i\hat{B}\psi$$

حيث

$$\therefore \left[\hat{C},\hat{A}\right] = -i\hat{B} \quad \_\_\_\_(III) \qquad \Big| \quad \hat{B} = k\cos\theta + i\sin\theta\frac{d}{d\theta}$$

ولإثبات أن $\hat{C}$ يتبادل مع $\hat{D}^2$:

$$\hat{D}^2 = \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{C}^2$$

$$\therefore \left[\hat{C},\hat{D}^2\right] = \left[\hat{C},\hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{C}^2\right]$$

$$= \left[\hat{C},\hat{A}^2\right] + \left[\hat{C},\hat{B}^2\right] + \left[\hat{C},\hat{C}^2\right]$$

$$= \left[\hat{C},\hat{A}\hat{A}\right] + \left[\hat{C},\hat{B}\hat{B}\right] + \left[\hat{C},\hat{C}\hat{C}\right]$$

$$= \left[\hat{C},\hat{A}\right]\hat{A} + \hat{A}\left[\hat{C},\hat{A}\right] + \left[\hat{C},\hat{B}\right]\hat{B} + \hat{B}\left[\hat{C},\hat{B}\right]$$

$$+ \left[\hat{C},\hat{C}\right]\hat{C} + \hat{C}\left[\hat{C},\hat{C}\right] \quad \_\_\_\_(7)$$

حيث طبقنا العلاقة :

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]$$

وحيث أن (من III) : $\left[\hat{C},\hat{A}\right] = -i\hat{B}$

وكذلك (من II) : $\left[\hat{C},\hat{B}\right] = -\left[\hat{B},\hat{C}\right] = i\hat{A}$

ولما كان أي مؤثر يكون متبادلا مع نفسه فإن : $\left[\hat{C},\hat{C}\right] = 0$

بالتعويض في (7) :

$$\left[\hat{C},\hat{D}^2\right] = -i\hat{B}\hat{A} - i\hat{A}\hat{B} + i\hat{A}\hat{B} + i\hat{B}\hat{A} + 0 + 0 = 0$$

وهذا يعني أن المؤثرين $\hat{C},\hat{D}^2$ هما مؤثران متبادلان . وهو المطلوب .

<u>حل المسألة (٤) :</u> نفرض أن $\hat{A},\hat{B}$ مؤثران هيرميتيان

فمن الخاصية الهيرميتيه للمؤثر $\hat{A}$:

$$(\psi,\hat{A}\phi) = (\hat{A}\psi,\phi)$$

$$\therefore \int \psi^* \hat{A}\phi\, dV = \int (\hat{A}\psi)^* \phi\, dV \qquad \_\_\_\_(1)$$

ومن الخاصية الهيرميتيه للمؤثر $\hat{B}$:

$$(\psi,\hat{B}\phi) = (\hat{B}\psi,\phi)$$

$$\therefore \int \psi^* \hat{B}\phi\, dV = \int (\hat{B}\psi)^* \phi\, dV \qquad \_\_\_\_(2)$$

بجمع (2) و (1) :

$$\int \psi^* \hat{A}\phi\, dV + \int \psi^* \hat{B}\phi\, dV = \int (\hat{A}\psi)^* \phi\, dV + \int (\hat{B}\psi)^* \phi\, dV$$

$$\therefore \int \psi^* (\hat{A}+\hat{B})\phi\, dV = \int \left[(\hat{A}+\hat{B})\psi\right]^* \phi\, dV$$

وبوضع $\hat{A}+\hat{B} = C$:

$$\therefore \int \psi^* \hat{C}\phi\, dV = \int \left[\hat{C}\psi\right]^* \phi\, dV$$

وبكتابة هذه العلاقة في صورة حاصل ضرب قياسي فإن :

$$(\psi,\hat{C}\phi)=(\hat{C}\psi,\phi)$$

وهذا يعني أن المؤثر $\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$ هو مؤثر هيرميتي .

حل المسألة (٥) : إذا كان المؤثر المترافق للمؤثر $\hat{C}$ هو $\hat{C}^{+}$ فإن المؤثر $\hat{C}$ يمكن كتابته بالصورة الآتية :

$$\hat{C}=\frac{1}{2}\hat{C}+i\left(\frac{\hat{C}}{2i}\right)+\frac{1}{2}\hat{C}^{+}-i\left(\frac{\hat{C}^{+}}{2i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\hat{C}+\hat{C}^{+})+i\left[\frac{1}{2}(\hat{C}-\hat{C}^{+})\right]=\hat{A}+i\hat{B}$$

حيث $\hat{A}=\frac{1}{2}(\hat{C}+\hat{C}^{+})\ ,\ \hat{B}=\frac{1}{2i}(\hat{C}-\hat{C}^{+})$

ولإثبات أن $\hat{A},\hat{B}$ هما مؤثران هيرميتان يجب أن نثبت أن $\hat{A}^{+}=\hat{A}\ ,\ \hat{B}^{+}=\hat{B}$

$$\hat{A}^{+}=\frac{1}{2}\left[\hat{C}^{+}+(\hat{C}^{+})^{+}\right]=\frac{1}{2}(\hat{C}^{+}+\hat{C})=\hat{A}$$

$$\hat{B}^{+}=\frac{1}{-2i}\left[\hat{C}^{+}-(\hat{C}^{+})^{+}\right]=\frac{1}{2i}(\hat{C}-\hat{C}^{+})=\hat{B}$$

∴ المؤثر $\hat{C}$ يمكن كتابته بالصورة $\hat{C}=\hat{A}+i\hat{B}$ حيث $\hat{A},\hat{B}$ مؤثران هيرميتيان .

حل المسألة (٦) :

حيث أن $\hat{A},\hat{B}$ غير متبادلان : $\left[\hat{A},\hat{B}\right]\neq 0$

$$R.H.S = -\hat{B}^{-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}^{-1} = -\hat{B}^{-1}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\hat{B}^{-1}$$
$$= -\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{B}\hat{B}^{-1} + \hat{B}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1}$$

وحيث أن $\hat{B}\hat{B}^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{I}$ ، من تعريف المؤثر العكسي .

$$\therefore R.H.S = \hat{A}\hat{B}^{-1} - \hat{B}^{-1}\hat{A} = \left[\hat{A},\hat{B}^{-1}\right] = L.H.S$$

حل المسألة (٧):

$$\hat{u} = \frac{1+i\hat{c}}{1-i\hat{c}}$$

حيث $\hat{c}$ مؤثر هيرميتي ← $\hat{c}^{+} = \hat{c}$

$$\therefore \hat{u}^{+} = \frac{1-i\hat{c}^{+}}{1+i\hat{c}^{+}} = \frac{1-i\hat{c}}{1+i\hat{c}}$$
$$\hat{u}\hat{u}^{+} = \frac{1+i\hat{c}}{1-i\hat{c}}\cdot\frac{1-i\hat{c}}{1+i\hat{c}} = \hat{I}$$
$$\hat{u}^{+}\hat{u} = \frac{1-i\hat{c}}{1+i\hat{c}}\cdot\frac{1+i\hat{c}}{1-i\hat{c}} = \hat{I}$$

ومن ذلك يتضح أن :

$$\hat{u}^{-}\hat{u}^{+} = \hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{I}$$

∴ المؤثر $\hat{u}$ هو مؤثر واحدى .

حل المسألة رقم (٨):

حيث أن $\hat{u},\hat{V}$ هما مؤثران واحديان ، فإن :

$$\hat{u}\hat{u}^{+} = \hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{I}$$
$$\hat{V}\hat{V}^{+} = \hat{V}^{+}\hat{V} = \hat{I}$$

(i) $(\hat{u}^{+})(\hat{u}^{+})^{+} = \hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{I}$

وهذا يعني أن $\hat{u}^{+}$ هو مؤثر واحدى .

(ii) $(\hat{u}\hat{V})(\hat{u}\hat{V})^{+} = (\hat{u}\hat{V})(\hat{V}^{+}\hat{u}^{+}) = \hat{u}(\hat{V}\hat{V}^{+})\hat{u}^{+} = \hat{u}\hat{I}\,\hat{u}^{+} = \hat{u}\hat{u}^{+}$

وهذا يعني أن المؤثر $(\hat{u}\hat{V})$ هو مؤثر واحدى .

(iii) $(\hat{u}\hat{V}^{-1})(\hat{u}\hat{V}^{-1})^{+}$

$$= (\hat{u}\hat{V}^{-1})(\hat{V}^{-1})^{+}\hat{u}^{+}$$

$$= (\hat{u}\hat{V}^{+})(\hat{V}\hat{u}^{+})$$

$$= \hat{u}\hat{I}\hat{u}^{+} = \hat{u}\hat{u}^{+} = \hat{I}$$

$(\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$

للمؤثر الواحدى

$\hat{V}^{+} = \hat{V}^{-1}$

$(\hat{V}^{-1})^{+} = (\hat{V}^{+})^{+} = \hat{V}$

وهذا يعني أن المؤثر $(\hat{u}\hat{V}^{-1})$ هو مؤثر واحدى .

<u>حل المسألة رقم (٩):</u>

بتطبيق تعريف المؤثر المترافق $\hat{A}^{+}$ أي :

$$(\hat{A}\phi,\psi) = (\phi,\hat{A}^{+}\psi)$$

على المؤثر الواحدى $\hat{u}$ فإن :

$$(\hat{u}\phi,\psi) = (\phi,\hat{u}^{+}\psi)$$

<u>(i) بالنسبة لحاصل الضرب القياسي :</u>

إذا كان تأثير المؤثر الواحدى $\hat{u}$ يعطى من العلاقتين :

$$\phi' = \hat{u}\phi \quad , \quad \psi' = \hat{u}\psi$$

فإن حاصل الضرب القياسي يكون :

$$(\phi',\psi') = (\hat{u}\phi,\hat{u}\psi) = (\phi,\hat{u}^{+}\hat{u}\psi) = (\phi,\psi)$$

حيث $\hat{u}^{+}\hat{u} = \hat{I}$ ، وهذا يعني أن التحويل الواحدى يحافظ على حاصل الضرب الداخلي للدالتين ϕ,ψ بدون تغيير .

(ii) بالنسبة للمعيار : يعرف المعيار بالجذر التربيعي لحاصل الضرب القياسي للدالة مع نفسها فإذا كان $\psi' = \hat{u}\psi$ فإن المعيار :

$$\|\psi'\| = \sqrt{(\psi',\psi')} = \sqrt{(\hat{u}\psi,\hat{u}\psi)} = \sqrt{(\psi,\hat{u}^{+}\hat{u}\psi)} = \sqrt{(\psi,\psi)} = \|\psi\|$$

أي أن التحويل الواحدى يحافظ على معيار المتجه .

(iii) بالنسبة لخاصية التعامد : تنص خاصية التعامد على أن $(\phi,\psi) = 0$

وإذا كان تأثر المؤثر الواحدى $\hat{u}$ يعطى بالعلاقتين :

$$\phi' = \hat{u}\phi, \psi' = \hat{u}\psi$$

فتكون خاصية التعامد :

$$(\phi',\psi') = (\hat{u}\phi,\hat{u}\psi) = (\phi,\hat{u}^{+}\hat{u}\psi) = (\phi,\psi) = 0$$

أي أن التحويل الواحدى يحافظ على خاصية التعامد .