

الباب السادس

الأسس الرياضية لميكانيكا الكم (II)

الأسس الرياضية لميكانيكا الكم (II)

في هذا الباب نواصل ما بدأناه في الباب الثاني عن المؤثرات وتطبيقاتها في ميكانيكا الكم فندرس الموضوعات التالية : دالة مؤثر ، بعض المؤثرات الخاصة ، أمثلة عامة على المؤثرات .

[١] دالة مؤثر (Function of operator) :-

نعتبر الدالة $F(z)$ والتي يمكن فكها في صورة متسلسلة في قوي المتغير z أي أن :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

تعتبر دالة مؤثر $F(\hat{A})$ أو الدالة المناظرة للمؤثر \hat{A} بأنها المؤثر $F(\hat{A})$ الذي يمكن كتابته علي هيئة متسلسلة لها نفس المعاملات α_n أي أن :

$$F(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \hat{A}^n$$

وكمثال فإن المؤثر $e^{\hat{A}}$ الذي يمكن كتابته بالصورة :

$$e^{\hat{A}} = 1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$$

يعتبر دالة في المؤثر \hat{A} أو دالة المؤثر \hat{A} ويكتب: $F(\hat{A}) = e^{\hat{A}}$

مشتقة دالة مؤثر:

تعرف مشتقة دالة المؤثر $F(\hat{A})$ بالعلاقة الآتية :

$$F'(\hat{A}) = \frac{dF}{dt} = \sum_n n \alpha_n \hat{A}^{n-1}$$

حيث :

$$F(\hat{A}) = \sum_n \alpha_n \hat{A}^n$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أثبت أنه لأي مؤثرين خطيين \hat{A}, \hat{B} فإن الدالة $F(k) = e^{\hat{B}k} \hat{A} e^{-\hat{B}k}$ يمكن كتابتها بالصورة :

$$F(k) = \hat{A} + k[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{k^2}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \frac{k^3}{3!} [\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + \dots$$

أدرس الحالتين الخاصتين : (١) عندما $k = 1$ (٢) عندما $\hat{A} = \hat{I}$

الحل : بكتابة $e^{\hat{B}k}$ في صورة متسلسلة :

$$e^{\hat{B}k} = \hat{I} + \hat{B}k + \frac{(\hat{B}k)^2}{2!} + \frac{(\hat{B}k)^3}{3!} + \dots$$

$$[e^{xk} = 1 + xk + \frac{(xk)^2}{2!} + \dots] \text{ مفكوك } e^{xk} \text{ هو :}$$

فإن الدالة $F(k)$ تصبح

$$\begin{aligned} F(k) &= e^{\hat{B}k} \hat{A} e^{-\hat{B}k} \\ &= \left(\hat{I} + \hat{B}k + \hat{B}^2 \frac{k^2}{2!} + \dots + \hat{B}^n \frac{k^n}{n!} + \dots \right) \hat{A} \left(\hat{I} - \hat{B}k + \hat{B}^2 \frac{k^2}{2!} - \dots + \hat{B}^n \frac{(-k)^n}{n!} + \dots \right) \\ &= \left(\hat{I} + \hat{B}k + \hat{B}^2 \frac{k^2}{2!} + \dots + \hat{B}^n \frac{k^n}{n!} + \dots \right) \left(\hat{A} - \hat{A}\hat{B}k + \hat{A}\hat{B}^2 \frac{k^2}{2!} - \dots + \hat{A}\hat{B}^n \frac{(-k)^n}{n!} + \dots \right) \\ &= \hat{A} + (\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})k + \frac{k^2}{2!} (\hat{A}\hat{B}^2 + \hat{B}^2\hat{A} - 2\hat{B}\hat{A}\hat{B}) + \frac{k^3}{3!} (\dots) + \dots \\ &= \hat{A} + k[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{k^2}{2!} (\hat{A}\hat{B}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{B}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{B}) + \dots \\ &= \hat{A} + k[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{k^2}{2!} \{ \hat{B}(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}) - (\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\hat{B} \} + \dots \\ &= \hat{A} + k[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{k^2}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots \end{aligned}$$

حالة خاصة (1) : عندما $k = 1$

$$F(1) = e^{\hat{B}} \hat{A} e^{-\hat{B}} = \hat{A} + [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots$$

حالة خاصة (٢) : عندما $\hat{A} = \hat{I}$ فإن :

$$e^{\hat{B}} \hat{I} e^{-\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{-\hat{B}} = \hat{I} + [\hat{B}, \hat{I}] + \frac{1}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{I}]] + \dots$$

ولكن : $[\hat{B}, \hat{I}] = 0$ { أي مؤثر يكون متبادلاً مع مؤثر الوحدة }

$$\therefore e^{\hat{B}} e^{-\hat{B}} = \hat{I} \quad \therefore e^{\hat{0}} = \hat{I}$$

حيث $\hat{0}$ هو المؤثر الصفري ويعرف بالعلاقة :

$$\hat{B} + (-\hat{B}) = \hat{0}$$

والعلاقة الأخيرة تكافئ العلاقة الجبرية العادية $e^0 = 1$ ولكن في صورة مؤثرات .

مثال (٢) : باعتبار الدالة $F(k)$ لها الصورة $F(k) = e^{Ak} e^{\hat{B}k}$

حيث k عدد قياس ، \hat{A}, \hat{B} مؤثران خطيان ، لا يعتمد أي منهما على k وبحيث أن :

$$\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad , \quad [\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0$$

(i) أثبت أن الدالة $F(k)$ بصورتها المعطاه ، تحقق المعادلة التفاضلية الآتية

$$F'(k) = \frac{dF}{dk} = (\hat{A} + \hat{B} + k\hat{C})F(k)$$

(ii) أثبت أن الدالة $F(k)$ يمكن كتابتها بالصورة

$$F(k) = e^{(\hat{A} + \hat{B})k} e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

ومن ذلك استنتج علاقة جلوبير (Glauber's relation) بالصورة :

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$$

الحل :

$$F(k) = e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k} : \text{حيث أن (i)}$$

فإن

$$\begin{aligned} F'(k) &= \frac{dF(k)}{dk} = \frac{d}{dk} \left(e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k} \right) = e^{\hat{A}k} \cdot \hat{B} e^{\hat{B}k} + \hat{A} e^{\hat{A}k} \cdot e^{\hat{B}k} \\ &= e^{\hat{A}k} \cdot \hat{B} \underbrace{e^{-\hat{A}k} e^{\hat{A}k}} e^{\hat{B}k} + \hat{A} e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k} \\ &= e^{\hat{A}k} \hat{B} e^{-\hat{A}k} \left(e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k} \right) + \hat{A} \left(e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k} \right) \\ &= \left\{ e^{\hat{A}k} \hat{B} e^{-\hat{A}k} + \hat{A} \right\} \left(e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k} \right) \\ &= \left\{ \hat{A} + e^{\hat{A}k} \hat{B} e^{-\hat{A}k} \right\} F(k) \end{aligned} \quad (1)$$

وحيث أن :

$$\left[\hat{A}, \hat{C} \right] = \left[\hat{B}, \hat{C} \right] = 0 \quad \leftarrow \quad \hat{C} = \left[\hat{A}, \hat{B} \right]$$

فإن :

$$e^{\hat{A}k} \hat{B} e^{-\hat{A}k} = \hat{B} + k \left[\hat{A}, \hat{B} \right] + \frac{k^2}{2!} \left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right] + \dots$$

(من مثال رقم (1))

$$\therefore e^{\hat{A}k} \hat{B} e^{-\hat{A}k} = \hat{B} + k \hat{C} + \frac{k^2}{2!} \left[\hat{A}, \hat{C} \right] + \dots = \hat{B} + k \hat{C}$$

بالتعويض في (1) :

$$\therefore F'(k) = \frac{dF}{dk} = \left\{ \hat{A} + \hat{B} + k \hat{C} \right\} F(k) \quad (2)$$

وهو المطلوب أولاً .

(ii) لإثبات أن الدالة $F(k)$ لها الصورة

$$F(k) = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

نثبت أن هذه الصورة تحقق المعادلة التفاضلية (2).

فحيث أن :

$$F(k) = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

$$\hat{C} = \left[\hat{A}, \hat{B} \right]$$

حيث :

فبالتفاضل :

$$F'(k) = \frac{dF}{dk} = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} \hat{C} k e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2} + \left(\hat{A}+\hat{B}\right) e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2} \quad (3)$$

ولكن :

$$e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} \hat{C} e^{-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} = \hat{C} + k \left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right), \hat{C} \right] + \dots$$

$$\left[\hat{A}, \hat{C} \right] = \left[\hat{B}, \hat{C} \right] = 0 \quad \text{ومن العلاقة :}$$

$$\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right), \hat{C} \right] = 0$$

فإن :

$$\therefore e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} \hat{C} e^{-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} = \hat{C}$$

وبالضرب من اليمين في $e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}$:

$$e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} \hat{C} = \hat{C} e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} \quad (4)$$

$$e^{-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} = \hat{I}$$

حيث :

وبالتعويض في (3) :

$$\begin{aligned} \therefore F'(k) &= k \hat{C} e^{(\hat{A}+\hat{B})k} \cdot e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2} + (\hat{A}+\hat{B}) e^{(\hat{A}+\hat{B})k} \cdot e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2} \\ &= (\hat{A}+\hat{B}+k\hat{C}) e^{(\hat{A}+\hat{B})k} \cdot e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2} = (\hat{A}+\hat{B}+k\hat{C}) F(k) \end{aligned}$$

أي أن الصورة المعطاة :

$$F(k) = e^{(\hat{A}+\hat{B})k} \cdot e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

حيث $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$ تحقق المعادلة التفاضلية للدالة $F(k)$

وهو المطلوب .

استنتاج علاقة جلوبير :

حيث أن الدالة $F(k) = e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k}$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$F'(k) = \left\{ \hat{A} + \hat{B} + k [\hat{A}, \hat{B}] \right\} F(k)$$

وأن الدالة $F(k)$ لها أيضا الصورة :

$$F(k) = e^{(\hat{A}+\hat{B})k} \cdot e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]k^2}$$

فيمكننا كتابة العلاقة :

$$e^{\hat{A}k} e^{\hat{B}k} = e^{(\hat{A}+\hat{B})k} \cdot e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]k^2} \quad (5)$$

وبوضع $k=1$ في (5) فإن :

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{(\hat{A}+\hat{B})} \cdot e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \quad (6)$$

وهي علاقة جلوبير (Glauber's relation) .

حالة خاصة :- إذا كان المؤثران \hat{A}, \hat{B} متبادلان فإن $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ، وتؤول

العلاقة (6) إلي :

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{(\hat{A} + \hat{B})}$$

وهي نفس العلاقة الجبرية المعتادة ولكن في صورة مؤثرات .

مثال (٣) :- إذا كان \hat{H} مؤثر خطي وكانت الدالة

$$F(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t}$$

تشكل مؤثراً قابلاً للاشتقاق بحيث أن \hat{H} لا يعتمد على t ، وكذلك \hat{F}_0 ، أثبت

أن $F(t)$ تحقق المعادلة التكاملية الآتية :

$$F(t) = \hat{F}_0 + i \left[\hat{H}, \int_0^t F(\tau) d\tau \right]$$

حيث $\hat{F}_0 = \hat{F}(0)$ عند $t=0$

الحل :- حيث أن المؤثر $F(t)$ قابل للاشتقاق فإن :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \left[e^{i\hat{H}t} \hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t} \right] = e^{i\hat{H}t} \frac{d}{dt} (\hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t}) + \frac{d}{dt} (e^{i\hat{H}t}) \cdot \hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t} \quad (1)$$

وبوضع $e^{i\hat{H}t}$ في صورة متسلسلة فإن :

$$e^{i\hat{H}t} = \hat{I} + i\hat{H}t + \frac{(i\hat{H}t)^2}{2!} + \dots + \frac{(i\hat{H}t)^n}{n!} + \dots$$

$$\frac{d}{dt} (e^{i\hat{H}t}) = i\hat{H} + t(i\hat{H})^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (i\hat{H})^n + \dots$$

$$= \left(\hat{I} + i\hat{H}t + \dots + \frac{(i\hat{H}t)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right) (i\hat{H}) = e^{i\hat{H}t} (i\hat{H}) \quad (2)$$

وبالمثل فإن :

$$\frac{d}{dt} (e^{-i\hat{H}t}) = e^{-i\hat{H}t} (-i\hat{H}) \quad (3)$$

وبالتعويض في (1) [مع اعتبار أن \hat{F}_0, \hat{H} لا تعتمدان على t] :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= e^{i\hat{H}t} \hat{F}_0 \frac{d(e^{-i\hat{H}t})}{dt} + \frac{d(e^{i\hat{H}t})}{dt} \cdot \hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t} \\ &= e^{i\hat{H}t} \hat{F}_0 \cdot e^{-i\hat{H}t} (-i\hat{H}) + e^{i\hat{H}t} (i\hat{H}) \hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t} \\ &= -i\hat{F}(t)\hat{H} + i\hat{H}\hat{F}(t) \end{aligned}$$

[حيث أن $e^{i\hat{H}t}\hat{H} = \hat{H}e^{i\hat{H}t}$ وذلك من خاصية أن أي مؤثر يكون متبادلاً مع أي قوة له بمعنى أن $\hat{A}e^{k\hat{A}} = e^{k\hat{A}}\hat{A}$.]

$$\therefore \frac{d\hat{F}}{dt} = i(\hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}) = i[\hat{H}, \hat{F}(t)] \quad (4)$$

ولما كان \hat{H} لا يعتمد على t فإن تكامل العلاقة (4) يعطينا :

$$\hat{F}(t) = \hat{F}_0 + i \left[\hat{H}, \int_0^t \hat{F}(\tau) d\tau \right]$$

حيث أنه عند $t=0$ فإن $\hat{F}(0) = \hat{F}_0$ وهو المطلوب .

مثال (4) : بفرض أن λ هي كمية صغيرة ، أوجد مفكوك المؤثر $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$ كمتسلسلة قوى في λ ، وذلك بفرض أن معكوس \hat{A} هو \hat{A}^{-1} .

الحل : نفرض أن المفكوك المطلوب إيجاداه يمكن كتابته في صورة متسلسلة في قوى λ بالصورة

$$(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{L}_n \quad (1)$$

حيث \hat{L}_n مجموعة مؤثرات ، والمطلوب إيجادها .

فبضرب (1) من اليسار في $(\hat{A} - \lambda\hat{B})$ فأنتنا نحصل على :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\hat{A} - \lambda\hat{B}) \hat{L}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{A} \hat{L}_n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \lambda \hat{B} \hat{L}_n \\ &= \hat{A} \hat{L}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \hat{A} \hat{L}_n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \lambda \hat{B} \hat{L}_n = \hat{A} \hat{L}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (\hat{A} \hat{L}_n - \hat{B} \hat{L}_{n-1}) \end{aligned}$$

وبمساواة معاملات قوى λ المختلفة في الطرفين نحصل على :

$$1 = \hat{A} \hat{L}_0 \quad \rightarrow \quad \hat{L}_0 = \hat{A}^{-1}$$

$$0 = \hat{A} \hat{L}_n - \hat{B} \hat{L}_{n-1} \quad \rightarrow \quad \hat{L}_n = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{L}_{n-1}$$

(n = 1, 2, لقيم)

$$\hat{L}_1 = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \quad \leftarrow \quad \hat{L}_1 = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{L}_0 \quad : n=1$$

$$\hat{L}_2 = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \quad \leftarrow \quad \hat{L}_2 = \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{L}_1 \quad : n=2$$

وهكذا

وبذلك نحصل على :

$$(\hat{A} - \lambda \hat{B})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{L}_n = \hat{L}_0 + \lambda \hat{L}_1 + \lambda^2 \hat{L}_2 + \dots$$

$$= \hat{A}^{-1} + \lambda \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} + \lambda^2 \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1} + \dots$$

ملحوظة : في حالة إذا كانت A, B أعداداً وليست مؤثرات فإن هذا المفكوك يؤول

إلى المفكوك العادي وهو :

$$(A - \lambda B)^{-1} = \frac{1}{A - \lambda B} = A^{-1} + \lambda B A^{-2} + \lambda^2 B^2 A^{-3} + \dots$$

$$= \frac{1}{A} + \lambda \frac{B}{A^2} + \lambda^2 \frac{B^2}{A^3} + \dots$$

[٢] بعض المؤثرات الخاصة :

مؤثرات الانتقال والدوران والازدواجية (أو الندية) :

(Translation, Rotation, and parity operators)

سوف ندرس في هذه الفقرة بعض المؤثرات الهامة التي لها تطبيقات هامة في

النظرية الكمية للذرات والنويات الذرية .

(١) مؤثر الانتقال أو الإزاحة الانتقالية (Translation operator)

$$\hat{T} \psi(x) = \psi(x+a) \quad \text{يعرف هذا المؤثر بالعلاقة}$$

حيث α هي المسافة التي أزيح بها الجسم عن موضعه الأصلي x .

$$\begin{aligned} \psi(x+a) &= \psi(x) + \frac{a}{1!} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) \end{aligned} \quad (1)$$

وباعتبار مفكوك الدالة الاسية:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum \frac{1}{n!} x^n \quad (2)$$

بمقارنة (1) , (2) يتضح أن :
ويأخذ مؤثر الانتقال الصورة :

$$\hat{T}\psi(x) = e^{\alpha \frac{\partial}{\partial x}} \psi(x) \rightarrow \therefore \hat{T} = e^{\alpha \frac{\partial}{\partial x}}$$

(٢) مؤثر الدوران أو الإزاحة الدورانية (Rotation operator)

يعرف هذا المؤثر بالعلاقة :

$$\hat{R}\psi(\phi) = \psi(\phi + \alpha)$$

حيث α هي الإزاحة الزاوية للجسيم عن موضعه الأصلي تحت تأثير ذلك المؤثر .

وبالتعبير عن $\psi(\phi + \alpha)$ في صورة متسلسلة تيلور :

$$\begin{aligned} \psi(\phi + \alpha) &= \psi(\phi) + \frac{\alpha}{1!} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(\phi) + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi(\phi) + \dots \\ &= \sum \frac{1}{n!} \alpha^n \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} \psi(\phi) = \sum \frac{1}{n!} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^n \psi(\phi) \end{aligned} \quad (3)$$

$$e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n \quad \text{ولكن :}$$

$$\hat{R}\psi(\phi) = e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \phi}} \psi(\phi) \quad \text{فبالمقارنة نجد أن :}$$

$$\hat{R} = e^{\alpha \frac{\partial}{\partial \phi}} \quad \text{وبذلك فإن مؤثر الدوران يأخذ الصورة :}$$

[٣] مؤثر الازدواجية أو الندية (Parity operator) :

يعرف مؤثر الازدواجية $\hat{\Pi}$ بالعلاقة الآتية $\hat{\Pi}\psi(x) = \psi(-x)$ لأي دالة

$\psi(x)$ ، وهو مؤثر خطي وهيرميتي وقيمته الذاتية $\lambda = \pm 1$

وفي حالة إذا كانت $\lambda = +1$: فإن الدوال الذاتية المناظرة تسمى الدوال ذات

الندية الزوجية (Even parity Function) $\psi_e(x)$

وتعرف بالعلاقة : $\psi_e(x) = \psi_e(-x)$

وفي حالة إذا كانت $\lambda = -1$: فإن الدوال الذاتية المناظرة تسمى الدوال ذات

الندية الفردية (Odd parity Function) $\psi_o(x)$

وتعرف بالعلاقة :

$$\psi_o(x) = -\psi_o(-x)$$

أمثلة محلولة :

مثال (١) :- إذا عرف مؤثر الانتقال بالعلاقة $\hat{T}\psi(x) = \psi(x+a)$ أي أن تأثيره

هو إزاحة الموضع خلال مسافة ثابتة a ، أثبت أن :

$$\hat{T} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (أ)$$

بالصورة $\hat{T} = e^{b\hat{p}}$ حيث b ثابت .

(ب) \hat{T} هو مؤثر واحد

الحل :

(أ) باستخدام مفكوك تيلور يمكننا كتابته :

$$\hat{T}\psi(x) = \psi(x+a) = \psi(x) + a \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(a \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x)$$

ولكن :

$$\therefore \hat{T}\psi(x) = \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{ia}{\hbar} \hat{p} \right)^n \psi(x) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} \hat{p} \right.$$

ولما كانت :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\therefore \hat{T}\psi(x) = e^{\frac{ia}{\hbar} \hat{p}} \psi(x) \quad \therefore \hat{T} = e^{\frac{ia}{\hbar} \hat{p}} = e^{b \hat{p}}$$

حيث $b = \frac{ia}{\hbar}$ ، ومن ذلك نرى أن \hat{T} قد أمكن كتابته بدلالة المؤثر \hat{P} .

(ب) لإثبات أن \hat{T} هو مؤثر واحدي ، يجب إثبات أن $\hat{T}\hat{T}^+ = \hat{T}^+ \hat{T} = \hat{I}$ ، ولإثبات ذلك: لأي دالتين $\psi(x), \phi(x)$ يمكننا تعريف المؤثر المترافق \hat{T}^+ بالعلاقة :

$$\int \psi^*(x) \hat{T}^+ \phi(x) dx = \int \left(\hat{T} \psi(x) \right)^* \phi(x) dx$$

$$\therefore \int \psi^*(x) \hat{T}^+ \phi(x) dx = \int \psi^*(x+a) \phi(x) dx$$

وبتغيير المتغير $\begin{cases} x \leftarrow (x-a) \\ x-a \leftarrow (x) \end{cases}$ في الطرف الأيمن وبالتالي :

$$\therefore \int \psi^*(x) \hat{T}^+ \phi(x) dx = \int \psi^*(x) \phi(x-a) dx$$

$$\therefore \hat{T}^+ \phi(x) = \phi(x-a) \quad \text{_____ (1)}$$

وبالضرب من اليسار في \hat{T}

$$\therefore \hat{T}\hat{T}^+ \phi(x) = \hat{T} \phi(x-a) = \phi(x-a+a) = \phi(x) = \hat{I} \phi(x)$$

وبمقارنة الطرفين :

$$\therefore \hat{T}\hat{T}^+ = \hat{I} \quad \text{_____ (2)}$$

أيضاً : حيث أن :

$$\hat{T}\phi(x) = \phi(x+a)$$

فبالضرب من اليسار في \hat{T}^+ :

$$\hat{T}^+\hat{T}\phi(x) = \hat{T}^+\phi(x+a) = \phi(x+a-a) = \phi(x) = \hat{I}\phi(x)$$

(باستخدام (1))

$$\therefore \hat{T}^+\hat{T} = \hat{I} \quad (3)$$

من (2),(3) يتضح أن \hat{T} هو مؤثر واحدي .

مثال (٢) : أثبت أن مؤثر الازدواجية أو الندية $\hat{\Pi}$ المعرف بالعلاقة :

$$\hat{\Pi}\psi(x) = \psi(-x) \quad \text{هو مؤثر خطي وأن القيم الذاتية له هي } \lambda = \pm 1$$

الحل : لإثبات أن $\hat{\Pi}$ هو مؤثر خطي يجب أن نثبت الآتي :

$$\hat{\Pi}(\psi + \phi) = \hat{\Pi}\psi + \hat{\Pi}\phi$$

$$\hat{\Pi}(\alpha\psi) = \alpha\hat{\Pi}\psi$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}[\psi(x) + \phi(x)] &= [\psi(-x) + \phi(-x)] \\ &= \hat{\Pi}\psi(x) + \hat{\Pi}\phi(x) \end{aligned}$$

أيضاً :

$$\hat{\Pi}[\alpha\psi(x)] = \alpha\psi(-x) = \alpha\hat{\Pi}(x)$$

ولإيجاد القيم الذاتية : نكتب معادلة القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{\Pi}$

$$\hat{\Pi}\psi = \lambda\psi \quad (1)$$

حيث λ هي القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{\Pi}$ في الحالة الموصوفة بالدالة ψ

وبضرب (1) في $\hat{\Pi}$ من اليسار:

$$\hat{\Pi} \hat{\Pi} \psi = \lambda \hat{\Pi} \psi = \lambda (\lambda \psi)$$

$$\therefore \hat{\Pi}^2 \psi = \lambda^2 \psi$$

وحيث أن :

$$\hat{\Pi}^2 \psi = \hat{\Pi} \left[\hat{\Pi} \psi(x) \right] = \hat{\Pi} \psi(-x) = \psi(x)$$

فبالمقارنة نجد أن :

$$\therefore \lambda^2 = 1 \quad \therefore \lambda = \pm 1$$

أي أن القيم الذاتية للمؤثر $\hat{\Pi}$ هي $\lambda = \pm 1$

في حالة $\lambda = +1$: الدوال تسمى بدوال ذات ندية زوجية

$$\psi_e(x) = \psi_e(-x)$$

وفي حالة $\lambda = -1$: الدوال تسمى بدوال ذات ندية فردية

$$\psi_o(x) = -\psi_o(x)$$

مثال (3) : أثبت أن مؤثر الندية لنظام ما $\hat{\Pi}$ هو كمية محفوظة (Conserved)

$$\left[\hat{\Pi}, \hat{H} \right] = 0 \leftarrow \text{بمعنى أنه يتبادل مع مؤثر هاملتون للنظام}$$

الحل : من المعلوم في ميكانيكا الكم أنه إذا كان هناك كمية فيزيائية ثابتة فإن

المؤثر الديناميكي المناظر لها يتبادل مع الهاملتونيان كمؤثر ، ويقال في هذه

الحالة أن المؤثر يشكل كمية محفوظة في النظام .

ولإثبات ذلك بالنسبة لمؤثر الندية :

$$\hat{\Pi} \hat{H}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = \lambda E \psi(\vec{r})$$

$$\hat{H}(\vec{r}) \hat{\Pi} \psi(\vec{r}) = E \lambda \psi(\vec{r})$$

بالطرح نجد أن :

$$\hat{\Pi} \hat{H}(\bar{r}) \psi(\bar{r}) - \hat{H} \hat{\Pi} \psi(\bar{r}) = 0$$

$$\therefore (\hat{\Pi} \hat{H} - \hat{H} \hat{\Pi}) \psi(\bar{r}) = 0$$

ولكن $\psi(\bar{r}) \neq 0$:

$$\therefore (\hat{\Pi} \hat{H} - \hat{H} \hat{\Pi}) = 0 \quad \therefore [\hat{\Pi}, \hat{H}] = 0$$

وهذا يعني أن مؤثر الندية $\hat{\Pi}$ يتبادل مع مؤثر هاملتون بمعنى أنه يشكل كمية محفوظة للنظام .

ملحوظة : العلاقة $[\hat{\Pi}, \hat{H}] = 0$ تعني أيضا أن $\hat{\Pi}$ يمثل ثابتا من ثوابت الحركة .

مثال (٤) : إذا كان المؤثر \hat{T} يعرف بالعلاقة :

$$\hat{T} \phi(x) = \phi(x+a)$$

حيث a ثابت ، وكان المؤثر $\hat{\Pi}$ يعرف بالعلاقة $\hat{\Pi} \phi(x) = \phi(-x)$ فأثبت العلاقات الآتية :

$$(i) \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T} = \hat{\Pi} \quad (ii) \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T}^2 \hat{\Pi} \hat{T} = \hat{I}$$

$$(iii) (\hat{I} + \hat{\Pi})(\hat{I} - \hat{\Pi}) = \hat{0} \quad (iv) (\hat{I} + \hat{\Pi})^2 = 2(\hat{I} + \hat{\Pi})$$

وإذا كانت $\phi(x)$ دالة زوجية في x فأثبت أن $\phi(x) = \hat{0}$ حيث $[\hat{T}, \hat{\Pi}]$ حيث $\hat{I}, \hat{0}$ هما المؤثران الصفري والمحايد على الترتيب .

الحل :

$$(i) \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T} \phi(x) = \hat{T} \hat{\Pi} \phi(x+a) = \hat{T} \phi(-x-a) \\ = \phi(-x-a+a) = \phi(-x) = \hat{\Pi} \phi(x)$$

$$\therefore \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T} = \hat{\Pi} \quad (1)$$

$$(ii) \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T}^2 \hat{\Pi} \hat{T} \phi(x) = \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T} \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T} \phi(x) = (\hat{T} \hat{\Pi} \hat{T})^2 \phi(x) = \hat{\Pi}^2 \phi(x)$$

(باستخدام (1)) ، ولكن :

$$\hat{\Pi}^2 \phi(x) = \hat{\Pi} \hat{\Pi} \phi(x) = \hat{\Pi} \phi(-x) = \phi(x)$$

$$\therefore \hat{\Pi}^2 = \hat{I} \quad \therefore \hat{T} \hat{\Pi} \hat{T}^2 \hat{\Pi} \hat{T} = \hat{\Pi}^2 = \hat{I} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (2)$$

$$(iii) (\hat{I} + \hat{\Pi})(\hat{I} - \hat{\Pi}) = \hat{I}^2 - \hat{\Pi}^2 = \hat{I} - \hat{I} = \hat{0} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (3)$$

$$(iv) (\hat{I} + \hat{\Pi})^2 = (\hat{I}^2 + 2\hat{I} \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^2) = \hat{I}^2 + 2\hat{I} \hat{\Pi} + \hat{I}^2 = 2\hat{I} + 2\hat{\Pi} \\ = 2(\hat{I} + \hat{\Pi}) \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (4)$$

وإذا كانت $\phi(x)$ دالة زوجية في x فإن $\phi(x) = \phi(-x)$

$$\therefore [\hat{T}, \hat{\Pi}] \phi(x) = (\hat{T} \hat{\Pi} - \hat{\Pi} \hat{T}) \phi(x)$$

$$= \hat{T} \hat{\Pi} \phi(x) - \hat{\Pi} \hat{T} \phi(x)$$

$$= \hat{T} \phi(-x) - \hat{\Pi} \phi(x+a)$$

$$= \hat{T} \phi(x) - \phi(-x-a) = \phi(x+a) - \phi(x+a) = \hat{0}$$

وهو المطلوب .

[٣] أمثلة عامة على المؤثرات :

في هذا الفقرة سوف نعطي مجموعة من الأمثلة العامة على خواص المؤثرات مع حلولها النموذجية، وذلك بهدف مراجعة ما سبق دراسته عن المؤثرات في البابين الثاني والثالث .

مثال (١) :

إذا كان \hat{A}, \hat{B} مؤثران متبدلان مع مبدولها $[\hat{A}, \hat{B}]$ فباستخدام طريقة الاستنتاج

الرياضي ، أثبت أن :

$$(i) [\hat{A}, \hat{B}^n] = n \hat{B}^{n-1} [\hat{A}, \hat{B}]$$

$$(ii) [\hat{A}^n, \hat{B}] = n \hat{A}^{n-1} [\hat{A}, \hat{B}]$$

الحل :

حيث أن كل من \hat{A}, \hat{B} متبادلان مع $[\hat{A}, \hat{B}]$ فإذا كان:

$$[\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0 \quad \text{فان} \quad [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$$

والآن نطبق مبدأ الاستنتاج الرياضي كالتالي :

(١) نختبر صحة العلاقة (i) في حالة $n=1$: واضح أن العلاقة صحيحة في هذه الحالة .

(٢) نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = m$ ، أي نفرض أن :

$$[\hat{A}, \hat{B}^m] = m \hat{B}^{m-1} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (1)$$

(٣) ونثبت صحة العلاقة عندما $n = m+1$ ففي هذه الحالة

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}^{m+1}] &= [\hat{A}, \hat{B}^m \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}^m] \hat{B} + \hat{B}^m [\hat{A}, \hat{B}] \\ &= m \hat{B}^{m-1} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} + \hat{B}^m [\hat{A}, \hat{B}] = m \hat{B}^m [\hat{A}, \hat{B}] + \hat{B}^m [\hat{A}, \hat{B}] \end{aligned}$$

حيث

$$[\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} = \hat{B} [\hat{A}, \hat{B}]$$

$$(\hat{B} \text{ متبادل مع } [\hat{A}, \hat{B}])$$

$$\therefore [\hat{A}, \hat{B}^{m+1}] = (m+1) \hat{B}^m [\hat{A}, \hat{B}] = (m+1) \hat{B}^{(m+1)-1} [\hat{A}, \hat{B}]$$

أي أن العلاقة صحيحة عندما $n = m+1$ إذا كانت صحيحة في حالة $n = m$ ، إذا فهي صحيحة على الإطلاق (من مبدأ الاستنتاج الرياضي) .

وبالمثل يمكن إثبات العلاقة (ii) .

وهو المطلوب .

مثال (٢): إذا كانت المؤثرات الهيرميتية $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ تخضع للعلاقات الآتية :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 2i\hat{C}, \quad [\hat{B}, \hat{C}] = 2i\hat{A}$$

$$[\hat{C}, \hat{A}] = 2i\hat{B}, \quad \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{C}^2 = 3\hat{I}$$

وكان المؤثران \hat{S}_+, \hat{S}_- يعرفان بالعلاقيتين : $\hat{S}_+ = \hat{A} + i\hat{B}, \hat{S}_- = \hat{A} - i\hat{B}$:
فأثبت العلاقات الآتية :

$$(i) \quad [\hat{S}_+, \hat{C}] = -2\hat{S}_+$$

$$(ii) \quad [\hat{S}_-, \hat{C}] = 2\hat{S}_-$$

$$(iii) \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 4\hat{C}$$

$$(iv) \quad \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = 6\left(\hat{I} - \frac{1}{3}\hat{C}^2\right)$$

الحل :

$$(i) \quad [\hat{S}_+, \hat{C}] = [\hat{A} + i\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + i[\hat{B}, \hat{C}] = -2i\hat{B} + i(2i\hat{A}) \\ = -2i\hat{B} - 2\hat{A} = -2(\hat{A} + i\hat{B}) = -2\hat{S}_+$$

$$(ii) \quad [\hat{S}_-, \hat{C}] = [\hat{A} - i\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] - i[\hat{B}, \hat{C}] \\ = -2i\hat{B} - i(2i\hat{A}) = -2i\hat{B} + 2\hat{A} = 2[\hat{A} - i\hat{B}] = 2\hat{S}_-$$

$$(iii) \quad [S_+, S_-] = [\hat{A} + i\hat{B}, \hat{A} - i\hat{B}] = (\hat{A} + i\hat{B})(\hat{A} - i\hat{B}) - (\hat{A} - i\hat{B})(\hat{A} + i\hat{B}) \\ = \hat{A}^2 - i\hat{A}\hat{B} + i\hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2 - (\hat{A}^2 + i\hat{A}\hat{B} - i\hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2) \\ = -2i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = -2i[\hat{A}, \hat{B}] = -2i(2i\hat{C}) = 4\hat{C}$$

$$(iv) \quad S_+ S_- + S_- S_+ = (\hat{A} + i\hat{B})(\hat{A} - i\hat{B}) + (\hat{A} - i\hat{B})(\hat{A} + i\hat{B}) \\ = \hat{A}^2 - i\hat{A}\hat{B} - i\hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2 + (\hat{A}^2 + i\hat{A}\hat{B} + i\hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2) \\ = 2(\hat{A}^2 + \hat{B}^2) = 2(3\hat{I} - \hat{C}^2) = 6\left(\hat{I} - \frac{1}{3}\hat{C}^2\right)$$

وهو المطلوب .

مثال (٣) : في نظام ميكروسكوبي ، إذا كان هناك تحويل معين للإحداثيات من $x \rightarrow x'$ بحيث يحفظ هذا التحويل مؤثر هاملتون للنظام بدون تغيير (invariant) أي $\hat{H}(x') = \hat{H}(x)$ فاثبت أن مؤثر التحويل للإحداثيات $\hat{A}\psi(x) = \psi(x')$ يكون متبادلاً مع مؤثر هاملتون أي $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$ ، وإذا كان مؤثر التحويل هذا واحدياً فاثبت أنه يحفظ الهاملتونيان (مؤثر هاملتون) بدون تغيير .

الحل:

حيث أن :

$$\hat{H}(x') = \hat{H}$$

$$\hat{A}\psi(x) = \psi(x')$$

فإن :

$$\hat{A}[\hat{H}(x)\psi(x)] = \hat{H}(x')\psi(x') = \hat{H}(x)\psi(x') = \hat{H}(x)\hat{A}\psi(x)$$

$$\therefore \hat{A}\hat{H}(x) = \hat{H}(x)\hat{A} \quad \therefore \hat{A}\hat{H}(x) - \hat{H}(x)\hat{A} = 0 \quad \therefore [\hat{A}, \hat{H}(x)] = 0$$

أي أن مؤثر التحويل للإحداثيات \hat{A} (Coordinate transformation operator) يكون متبادلاً مع مؤثر هاملتون للنظام .

ولإثبات خاصة التلاغير في \hat{H} بالنسبة للتحويل \hat{A} إذا كان واحدياً:

ندخل المؤثر العكسي (معكوس \hat{A}) بحيث أن $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}$

وحيث أن $\hat{A}\hat{H}(x) = \hat{H}(x)\hat{A}$ فبالضرب من اليمين في \hat{A}^{-1}

$$\therefore \hat{A}\hat{H}\hat{A}^{-1} = \hat{H}\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{H}\hat{I} = \hat{H} \quad (1)$$

ومن هذا يتضح أنه إذا كان المؤثر \hat{A} واحدياً فإن التحويل الواحدي $\hat{A}\hat{H}\hat{A}^{-1}$

يعطينا المؤثر \hat{H} نفسه أي أنه يحفظ مؤثر هاملتون لامتغيراً .

وهو المطلوب .

مثال (٤): إذا كان \hat{A} مؤثرا خطيا له مجموعه من الدوال الذاتية التامة والعيارية المتعامدة $\{\psi_n\}$ تناظرها مجموعة من القيم الذاتية الحقيقية $\{a_n\}$ ، فاثبت أن هذا المؤثر يكون هيرميتيا .

الحل :

نفرض أن Ψ, Φ هما دالتان تشكل كل منهما مجموعة تامة بحيث أن :

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n, \Phi = \sum_m d_m \psi_m$$

$$c_n = (\psi_n, \Psi), d_m = (\psi_m, \Phi)$$

حيث

(من نظرية المفكوك).

المطلوب إثبات أنه إذا كانت Ψ, Φ هي دوال ذاتية للمؤثر \hat{A} فإن هذا المؤثر يكون هيرميتيا أي أن $(\Psi, \hat{A}\Phi) = (\hat{A}\Psi, \Phi)$

نعتبر أولا $(\Psi, \hat{A}\Phi)$:

$$(\Psi, \hat{A}\Phi) = \left(\sum_n c_n \psi_n, \hat{A} \sum_m d_m \psi_m \right)$$

$$= \left(\sum_n c_n \psi_n, \sum_m d_m \hat{A} \psi_m \right) = \left(\sum_n c_n \psi_n, \sum_m d_m a_m \psi_m \right)$$

حيث $\hat{A} \psi_m = a_m \psi_m$ ، وإذا كانت $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$:

$$\therefore (\Psi, \hat{A}\Phi) = \sum_{n,m} c_n^* d_m a_m (\psi_n, \psi_m) = \sum_{n,m} c_n^* a_m d_m \delta_{nm} = \sum_n c_n^* a_n d_n \quad (1)$$

نعتبر الآن : $(\hat{A}\Psi, \Phi)$:

$$(\hat{A}\Psi, \Phi) = \left(\hat{A} \sum_n c_n \psi_n, \sum_m d_m \psi_m \right) = \left(\sum_n c_n \hat{A} \psi_n, \sum_m d_m \psi_m \right)$$

$$= \left(\sum_n c_n a_n \psi_n, \sum_m d_m \psi_m \right)$$

حيث $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$ ، وإذا كانت $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$

$$\begin{aligned} \therefore (\hat{A}\Psi, \Phi) &= \sum_{n,m} c_n^* a_n^* d_m (\psi_n, \psi_m) = \sum_{n,m} c_n^* a_n^* d_m \delta_{nm} \quad | \quad a_n^* = a_n \\ &= \sum_n c_n^* a_n d_n \end{aligned} \quad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$(\Psi, \hat{A}\Phi) = (\hat{A}\Psi, \Phi)$$

وهذا يعني أن \hat{A} هو مؤثر هيرميتي .

ملحوظة : استخدمنا في البرهان العلاقتين الآتيتين :

$$(a\psi, bc\phi) = a^*bc(\psi, \phi)$$

$$(ab\psi, c\phi) = a^*b^*c(\psi, \phi)$$

مثال (5) : أثبت أن المجموع $\hat{F} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ يكون هيرميتيا لأي زوجين من

المؤثرات الهيرميتية \hat{A}, \hat{B} سواء كان المؤثران متبادلان أم غير متبادلان بينما

الفرق $\hat{G} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ لا يشكل مؤثرا هيرميتيا .

الحل:

حيث \hat{A}, \hat{B} هيرميتيان فإن $\hat{A} = \hat{A}^+ , \hat{B} = \hat{B}^+$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{F}^+ &= (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^+ = (\hat{A}\hat{B})^+ + (\hat{B}\hat{A})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+ + \hat{A}^+ \hat{B}^+ = \hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B} \\ &= \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = \hat{F} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن \hat{F} مؤثر هيرميتي

$$\begin{aligned} \therefore \hat{G}^+ &= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^+ = (\hat{A}\hat{B})^+ - (\hat{B}\hat{A})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+ - \hat{A}^+ \hat{B}^+ = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} \\ &= -(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = -\hat{G} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن \hat{G} ليس مؤثرا هيرميتيا .

ملحوظة :

يعرف المؤثر الذي يخضع للعلاقة $\hat{G}^+ = -\hat{G}$ أحيانا بالمؤثر الهيرميتي

المخالف (Skew-Hermitian operator) .

مثال (٦): إذا كان التحويل الواحدي $\phi = \hat{u}\psi$ وكان هناك مؤثران \hat{A}, \hat{B} وكانت القيمة المتوقعة للمؤثر \hat{A} في الحالة ψ تساوي القيمة المتوقعة للمؤثر \hat{B} في الحالة ϕ ، فأثبت أن المؤثر \hat{B} يمكن كتابته بدلالة \hat{A} من خلال المؤثر الواحدي \hat{u} بالصورة $\hat{B} = \hat{u}\hat{A}\hat{u}^+$ وبالعكس فإن $\hat{A} = \hat{u}^+\hat{B}\hat{u}$.

الحل:

حيث أن القيمة المتوقعة لـ \hat{A} في الحالة ψ = القيمة المتوقعة لـ \hat{B} في الحالة ϕ

$$\therefore (\phi, \hat{B}\phi) = (\psi, \hat{A}\psi)$$

ومن ذلك نجد أن :

$$(\phi, \hat{B}\phi) = (\hat{u}\psi, \hat{B}\hat{u}\psi) = (\psi, \hat{u}^+\hat{B}\hat{u}\psi) = (\psi, \hat{A}\psi)$$

$$\hat{A} = \hat{u}^+\hat{B}\hat{u}$$

ومن ذلك نستنتج أن :

أي أنه طبقاً للتحويل الواحدي $\phi = \hat{u}\psi$ فإن قانون تحويل المؤثرات من

المجموعة $\{\psi\}$ إلى المجموعة $\{\phi\}$ هو : $\hat{A} = \hat{u}^+\hat{B}\hat{u}$

وبضرب هذا العلاقة من اليمين في \hat{u}^+ ومن اليسار في \hat{u} فإن:

$$\therefore \hat{u}\hat{A}\hat{u}^+ = \hat{u}\hat{u}^+\hat{B}\hat{u}\hat{u}^+ = \hat{B}$$

حيث :

$$\hat{u}\hat{u}^+ = \hat{I}$$

$$\therefore \hat{B} = \hat{u}\hat{A}\hat{u}^+$$

مثال (٧):

(أ) أثبت أن التحويل الواحدي لا يغير القيمة الذاتية لمؤثر ما.

(ب) أثبت أن التحويل الواحدي لا يغير المبدول، أي يجعله لا

متغيراً (Invariant).

(ج) أثبت أن القيمة العددية أو معيار القيمة الذاتية للمؤثر الواحدي تساوي الوحدة .

(د) أثبت أن أي دالتين ذاتيين مناظرتين لقيمتين ذاتيين لمؤثر واحدي تكونان متعامدتان .

الحل :

$$(أ) \text{ بكتابة } \phi = \hat{u}\psi \text{ فإن } \hat{B}\phi = b\phi \leftarrow \hat{B}\hat{u}\psi = b\hat{u}\psi$$

[حيث المؤثر \hat{B} يناظر الحالة الموصوفة بالمجموعة $\{\phi\}$]

$$\therefore \hat{u}^+ \hat{B} \hat{u} \psi = \hat{u}^+ b \hat{u} \psi$$

وبالتأثير بـ \hat{u}^+ من اليسار

ولكن :

$$\hat{A}\psi = b\hat{u}^+ \hat{u}\psi = b\psi \leftarrow \hat{u}^+ \hat{B} \hat{u} = \hat{A}$$

وهذا يعني أن التحويل الواحدي $\hat{A} = \hat{u}^+ \hat{B} \hat{u}$ للمؤثر \hat{B} لم يغير من القيمة الذاتية لهذا المؤثر (b) .

(ب) إذا كان :

$$\hat{C}' = [\hat{A}', \hat{B}'] \leftarrow \hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

حيث :

$$\hat{C}' = \hat{u} \hat{C} \hat{u}^+ \leftarrow \hat{A}' = \hat{u} \hat{A} \hat{u}^+, \hat{B}' = \hat{u} \hat{B} \hat{u}^+ \text{ وذلك لأن :}$$

$$[\hat{A}', \hat{B}'] = [\hat{u} \hat{A} \hat{u}^+, \hat{u} \hat{B} \hat{u}^+] = \hat{u} \hat{A} \hat{u}^+ \hat{u} \hat{B} \hat{u}^+ - \hat{u} \hat{B} \hat{u}^+ \hat{u} \hat{A} \hat{u}^+$$

$$= \hat{u} \hat{A} \hat{B} \hat{u}^+ - \hat{u} \hat{B} \hat{A} \hat{u}^+ = \hat{u} (\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}) \hat{u}^+ = \hat{u} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{u}^+ = \hat{u} \hat{C} \hat{u}^+ = \hat{C}'$$

(ج) بفرض أن \hat{u} هو متجه واحدي وأن قيمته الذاتية هي λ :

$$\hat{u}\psi = \lambda\psi \quad (1)$$

وبأخذ المترافق (adjoint) للطرفين :

$$\psi^* \hat{u}^+ = \lambda^* \psi^* \quad \text{_____ (2)}$$

بضرب (2) في (1) :

$$\therefore \psi^* \hat{u}^+ \hat{u} \psi = \lambda^* \lambda \psi^* \psi \rightarrow \therefore \psi^* \psi = |\lambda|^2 \psi^* \psi$$

$$\therefore (1 - |\lambda|^2) \psi^* \psi = 0 \rightarrow \therefore (1 - |\lambda|^2) \underbrace{\int \psi^* \psi d\tau}_{(1)''} = 0$$

$$\therefore (1 - |\lambda|^2) = 0 \quad \therefore |\lambda|^2 = 1 \quad \therefore |\lambda| = 1$$

وهو المطلوب :

(د) بفرض ψ_1, ψ_2 دالتين ذاتيتين للمؤثر \hat{u} مقابلتين للقيمتين الذاتيتين λ_1, λ_2

$$\therefore \hat{u} \psi_1 = \lambda_1 \psi_1 \quad \text{_____ (1)}$$

$$\hat{u} \psi_2 = \lambda_2 \psi_2 \quad \text{_____ (2)}$$

وبأخذ مترافق (2) :

$$\therefore \psi_2^* \hat{u}^+ = \lambda_2^* \psi_2^* \quad \text{_____ (3)}$$

وبضرب (3) في (1) :

$$\therefore \psi_2^* \hat{u}^+ \hat{u} \psi_1 = \lambda_2^* \lambda_1 \psi_2^* \psi_1$$

$$\therefore \psi_2^* \psi_1 = \lambda_2^* \lambda_1 \psi_2^* \psi_1$$

$$\therefore (1 - \lambda_2^* \lambda_1) \psi_2^* \psi_1 = 0 \quad \therefore (1 - \lambda_2^* \lambda_1) \int \psi_2^* \psi_1 d\tau = 0 \quad \text{_____ (4)}$$

ولما كان مقياس القيمة الذاتية للمؤثر \hat{u} يساوي الوحدة أي $\lambda_2^* \lambda_1 = 1$

$$\therefore 1 - \lambda_2^* \lambda_1 = \lambda_2^* \lambda_2 - \lambda_2^* \lambda_1 = \lambda_2^* (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \quad \text{_____ (5)}$$

من (5), (4) نجد أن :

$$\int \psi_2^* \psi_1 d\tau = 0 \quad \therefore (\psi_2, \psi_1) = 0$$

وهو المطلوب .

مثال (٨) : يعرف المؤثر المنتظم (regular operator) بأنه المؤثر الذي يمكن كتابته بحيث أن $\phi = \hat{A}\psi$ ويكون له معكوس \hat{A}^{-1} بحيث أن $\psi = \hat{A}^{-1}\phi$ (أ) أثبت أن :

$$(\hat{A}^{-1})^{\dagger} = (\hat{A}^{\dagger})^{-1} \quad \text{وأن} \quad \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$$

[مترافق المؤثر المعكوس = معكوس المؤثر المترافق]

(ب) إذا كان المؤثران \hat{A}, \hat{B} بحيث أن $\hat{A}, \hat{B} = \hat{I}$ فاثبت أن $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$
 (ج) إذا كان حاصل الضرب $(\hat{A}\hat{B})$ هو مؤثر منتظم فاثبت أن كلا من \hat{A}, \hat{B} يكون منتظم أيضا .

الحل :

(أ) حيث أن : $\phi = \hat{A}\psi$ وأن : $\psi = \hat{A}^{-1}\phi$
 $\therefore \phi = \hat{A}\psi = \hat{A}(\hat{A}^{-1}\phi) = \hat{A}\hat{A}^{-1}\phi$
 ولكي يتساوى الطرفان يجب أن يكون $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}$
 أيضا :

$$\psi = \hat{A}^{-1}\phi = \hat{A}^{-1}(\hat{A}\psi) = \hat{A}^{-1}\hat{A}\psi$$

ولكي يتساوى الطرفان يجب أن يكون :

$$\therefore \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \leftarrow \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$$

وبأخذ مترافق الطرفين :

$$(\hat{A}^{-1})^{\dagger} \hat{A}^{\dagger} = \hat{A}^{\dagger} (\hat{A}^{-1})^{\dagger} = \hat{I} \leftarrow (\hat{A}\hat{A}^{-1})^{\dagger} = (\hat{A}^{-1}\hat{A})^{\dagger} = \hat{I}^{\dagger}$$

(حيث $\hat{I}^{\dagger} = \hat{I}$) ومن هذا نجد أن $(\hat{A}^{-1})^{\dagger}$ هو معكوس \hat{A}^{\dagger}

$$\therefore (\hat{A}^{\dagger})^{-1} = (\hat{A}^{-1})^{\dagger}$$

$$\hat{A}\hat{B}\phi = \hat{I}\phi = \phi \quad \text{فإن} \quad \hat{A}\hat{B} = \hat{I} \quad \text{إذا كان}$$

$$\hat{A}\psi = \phi \quad \text{فإن} \quad \hat{B}\phi = \psi$$

وحيث أن \hat{A} مؤثر منتظم فإن له معكوس بحيث أن $\psi = \hat{A}^{-1}\phi$ أي أن

$$\hat{B}\phi = \hat{A}^{-1}\phi$$

$$\hat{B} = \hat{A}^{-1} \quad \text{وهذا يعني أن}$$

(ج) نفرض حاصل الضرب $\hat{A}\hat{B} = \hat{C}$ حيث \hat{C} مؤثر منتظم أي يمكن كتابته

$$\text{بالصورة } \psi = \hat{C}\phi \text{ وله معكوس } \hat{C}^{-1} \text{ بحيث أن } \psi = \hat{C}^{-1}\phi \text{ وأن } \hat{C}\hat{C}^{-1} = \hat{I}$$

والآن بالتأثير على الدالة ϕ بالمؤثر \hat{A}^{-1} :

$$\hat{A}^{-1}\phi = \hat{A}^{-1}\hat{C}\psi = \hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{B}\psi = \hat{B}\hat{C}^{-1}\phi$$

$$\therefore \hat{A}^{-1} = \hat{B}\hat{C}^{-1}$$

وبالتأثير على الطرفين بالمؤثر \hat{A} فإن:

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}^{-1}) = \hat{C}\hat{C}^{-1} = \hat{I}$$

وهذا معناه أن المؤثر \hat{A} هو مؤثر منتظم، وبالمثل يمكن إثبات أن المؤثر \hat{B} هو

أيضاً مؤثر منتظم. وهو المطلوب.

مثال (٩) : إذا كان المؤثر \hat{A} له القيم الذاتية a_i وكانت الدوال الذاتية له $\{\phi_i\}$

تمثل مجموعة تامة ومتعامدة عيارياً فأثبت أن :

$$(أ) \quad \phi_i \text{ تمثل دوالاً ذاتية للمؤثر المترافق } \hat{A}^+ \text{ بقيم ذاتية } a_i^* .$$

(ب) المؤثر \hat{A} ومترافقه \hat{A}^+ يكونان متبادلان .

(ج) إذا كان المؤثر \hat{A} يكتب كمجموع مؤثرين أحدهما هيرميتي والآخر

هيرميتي مخالف بالصورة $\hat{A} = \hat{p} + i\hat{q}$ فأثبت أن المؤثرين \hat{p}, \hat{q} يكونان

متبادلان .

الحل :

(أ) حيث أن $\hat{A}\phi_i = a_i\phi_i$ فإن :

$$(\hat{A}\phi_i, \phi_j) = (a_i\phi_i, \phi_j) = a_i^*(\phi_i, \phi_j) = a_i^*\delta_{ij} = a_i^* \quad (1)$$

وباعتبار أن $\hat{A}^+\phi_j = a_j^*\phi_j$ فإن :

$$(\phi_i, \hat{A}^+\phi_j) = (\phi_i, a_j^*\phi_j) = a_j^*(\phi_i, \phi_j) = a_j^*\delta_{ij} = a_i^* \quad (2)$$

ومن (1), (2) نجد أن $(\hat{A}\phi_i, \phi_j) = (\phi_i, \hat{A}^+\phi_j)$

وهو ما يتفق مع تعريف المؤثر المترافق ، وهذا يعني أن a_i^* هي القيمة الذاتية للمؤثر \hat{A}^+ بالدوال الذاتية $\{\phi_i\}$.

(ب) حيث أن $\hat{A}\hat{A}^+\phi_i = a_i a_i^* \phi_i = |a_i|^2 \phi_i$

وحيث أن $\hat{A}^+\hat{A}\phi_i = a_i^* a_i \phi_i = |a_i|^2 \phi_i$

$$\therefore [\hat{A}, \hat{A}^+] \phi_i = 0 \leftarrow (\hat{A}\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{A}) \phi_i = 0 \leftarrow \therefore \hat{A}\hat{A}^+\phi_i = \hat{A}^+\hat{A}\phi_i$$

ومنها نجد أن $[\hat{A}, \hat{A}^+] = 0$

(ج) المؤثر \hat{A} يمكن كتابته كمجموع مؤثرين p, q حيث p, q هيرميتي، q هيرميتي

مخالف

$$\hat{p}^+ = \hat{p}, \hat{q}^+ = -\hat{q} \quad \text{أي}$$

$$\hat{A}^+ = \hat{p} - i\hat{q} \leftarrow \hat{A} = \hat{p} + i\hat{q} \quad \text{وذلك بالصورة}$$

$$\begin{aligned} \therefore [\hat{A}, \hat{A}^+] &= [\hat{p} + i\hat{q}, \hat{p} - i\hat{q}] = (\hat{p} + i\hat{q})(\hat{p} - i\hat{q}) - (\hat{p} - i\hat{q})(\hat{p} + i\hat{q}) \\ &= (\hat{p}^2 - i\hat{p}\hat{q} + i\hat{q}\hat{p} + \hat{q}^2) - (\hat{p}^2 + i\hat{p}\hat{q} - i\hat{q}\hat{p} + \hat{q}^2) = -2i \\ &= -2i(\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p}) = -2i[\hat{p}, \hat{q}] \end{aligned}$$

ولكن $[\hat{A}, \hat{A}^+] = 0$ وبذلك فإن $[\hat{p}, \hat{q}] = 0$

وهو المطلوب .

مثال (١٠) :

(أ) أثبت أنه إذا كانت ψ هي دالة ذاتية لمؤثر \hat{A} مناظرة لقيمة ذاتية a فان $(b\psi)$ ، حيث b عدد قياسي هي أيضا دالة ذاتية للمؤثر \hat{A} مناظرة للقيمة a .

(ب) أثبت أنه إذا كانت ψ دالة ذاتية لمؤثر \hat{A} فإن ψ لا تناظر أكثر من قيمة ذاتية واحدة للمؤثر \hat{A} .

(ج) إذا كانت القيم الذاتية للمؤثر \hat{A} هي a_1, a_2, \dots, a_n فإن القيم الذاتية للمؤثر \hat{A}^2 تكون $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$.

الحل :

(أ) إذا كانت ψ دالة ذاتية لـ \hat{A} بالقيمة الذاتية a فان $\hat{A}\psi = a\psi$

أيضا فإنه إذا كانت $b \neq 0$ عدد قياسي فإن :

$$\hat{A}(b\psi) = b(\hat{A}\psi) = b(a\psi) = a(b\psi)$$

وبالتالي فان $(b\psi)$ تكون دالة ذاتية للمؤثر \hat{A} مناظرة للقيمة الذاتية a .

(ب) نفرض أن ψ هي دالة ذاتية للمؤثر \hat{A} ونفرض أنها تناظر قيمتين

ذاتيتين a_1, a_2

والمطلوب إثبات أن ψ تناظر قيمة ذاتية واحدة للمؤثر \hat{A} أي أن $a_1 = a_2$ أي لهما نفس القيمة .

فحيث أن :

$$\begin{aligned} \hat{A}\psi &= a_1\psi & , & & \hat{A}\psi &= a_2\psi \\ \therefore a_1\psi &= a_2\psi & & & \therefore (a_1 - a_2)\psi &= 0 \end{aligned}$$

ولكن $\psi \neq 0$ فإن :

$$\therefore a_1 = a_2 \leftarrow a_1 - a_2 = 0$$

أي أن القيمتين الذاتيتين a_1, a_2 متساويتان ، وهو المطلوب .

(ج) إذا كانت ψ_n هي الدوال الذاتية للمؤثر \hat{A} المناظرة للقيم الذاتية a_n

$$\therefore \hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$$

وبالتأثير على الطرفين بالمؤثر \hat{A} فإن :

$$\hat{A}(\hat{A}\psi_n) = \hat{A}(a_n\psi_n)$$

$$\therefore \hat{A}^2\psi_n = a_n(\hat{A}\psi_n) = a_n(a_n\psi_n) = a_n^2\psi_n$$

وبذلك فإن a_n^2 تمثل القيم الذاتية للمؤثر \hat{A}^2 المناظرة للدوال الذاتية ψ_n وهو المطلوب .